République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° : D02P202028M

Université 20 août 1955-Skikda

Faculté des Sciences

Département de Physique

Mémoire de Master

Filière : Physique

Spécialité : Physique des Rayonnements

Thème

L'énergie noire et la matière noire et ses manifestations en cosmologie

---

Présenté par :

Negreche Asma

Soutenu le : 03/07/2022 devant le jury composé

de : K. Khounfais	Pr.	Université de Skikda	Président
F. Khelili	Dr.	Université de Skikda	Rapporteur
M.S.LEBIOD	Dr.	Université de Skikda	Examinateur

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciement

*Tout d'abord, je tiens à remercier **DIEU** pour m'avoir donné le courage, la force et la volonté pour élaborer ce mémoire.*

Je voudrais adresser tout ma gratitude à mon encadreur Monsieur

***Khelili Farid** pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribuéa alimenter ma réflexion, et ainsi pour sa gentillesse je lui présente toute ma reconnaissance et mon respect.*

*Un grand merci aux membres du jury: au professeur **Khounfais Kamal** et au Docteur **Lebiode Samir** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptantde jurer ce travail , merci à vous tous.*

Un grand merci à mes chers père et mère, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditonnel.

Je tiens à remercier spécialement ma chère tante soria et ma chère tante nacira, pour leur amour, pour tous les conseils et pour tous les encouragements.

Je tiens à remercie également mes frères, ma sœur, et mon amie Ines et toute ma famille, pour leur amour et leur soutien constant.

Je n'oublie bien évidemment pas mes chères amies notamment Lekoui Khawla, Guessab Chaima, Boussensla amir et mes collègues, et je les remercie chaleureusement pour tous ces moments amusants qu'ils ont passés ensemble.

الملخص

النسبية العامة هي النظرية الهندسية للجاذبية التي نشرها ألبرت أينشتاين، و الوصف الحالي للجاذبية في الفيزياء الحديثة. و هي تقوم على مبدأين أساسيين: مبدأ تكافؤ الجاذبية و القصور الذاتي، الذي يؤسس علاقة مركزية بين مجال الجاذبية و جغرافية الزمكان، و مبدأ التباين العام. تعتبر النسبية العامة أمر أساسي لفهمنا للعديد من مجالات الفيزياء الفلكية وعلم الكون مثل الثقوب السوداء، تسارع توسع الكون، و نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) كان اكتشاف توسع الكون من قبل هابل في 1929 هو أول تقدم رئيسي في علم الكونيات. في عام 1999 قدم فريقان مستقلان، بعد دراسة المستعرات البعيدة أدلة مقنعة على تسارع توسع الكون. و لتفسير هذا التسارع اقترح الفيزيائيون أنه هناك شكل من أشكال الطاقة الغير معروفة حتى يومنا هذا تسمى الطاقة المظلمة. تم إقتراح نموذج ACDM كتفسير لهذه الطاقة الغير معروفة حيث اعتبروا الطاقة المظلمة ثابتا كونيا. يحتوي هذا النموذج على قطاع مظلم كبير يعتقد أنه يمثل 70% من الطاقة المظلمة و 25% من المادة المظلمة بحيث يكون 95% من محتوى الكون غير معروف و 5% فقط مما هو معروف.

. كلمات مفتاحية : النسبية العامة، تقدم حضيض عطارد، انحراف الضوء بواسطة الشمس، الثابت الكوسمولوجي، نماذج فريدمان للكون، التمدد المتسارع للكون و الطاقة المظلمة.

Abstract

The General Theory of Relativity is the theory of gravity formulated by Albert Einstein. It is based on two fundamental principles : the equivalence Principle of gravitation and inertia, which establishes a relation, central to the theory, between the gravitational field and the geometry of the spacetime, and the Principle of General Covariance, according to which the laws of physics have the same form in any reference frame, and is central to our understanding of many areas of astrophysics and cosmology, like black holes, neutron stars, the acceleration of the universe and GPS (Global Positioning System).

The discovery of the expansion of the Universe by Hubble in the $1929s$ is the first major advance in cosmology. In 1999 two independent collaborations, having researched distant supernovae, presented convincing evidence of the fact that the expansion of Universe is accelerated. To explain this acceleration, physicists have suggested that there is a form of energy that is not known to this day called dark energy.

The ΛCDM model has been proposed as an explanation for this unknown energy, considering that dark energy is the cosmological constant. In this model dark matter constituted about 25% of the total energy of the universe, while dark energy is responsible for about 70% of the total energy of the universe. The sum of their contribution is impressive : about 95% of the content of the Universe is of unknown nature, so we know only 5% of the content of the universe.

Keywords : General relativity, Cosmological constant, Dark energy, Dark matter, ΛCDM model, The accelerated expansion of the universe.

Résumé

La théorie de la relativité générale est la théorie de la gravité formulée par Albert Einstein. Elle repose sur deux principes fondamentaux : le principe d'équivalence de la gravitation et de l'inertie, qui établit une relation, centrale à la théorie, entre le champ gravitationnel et le la géométrie de l'espace-temps, et le principe de covariance générale, selon lequel les lois de la physique ont la même forme dans n'importe quel système de référence, et est au cœur de notre compréhension de nombreux domaines de l'astrophysique et de la cosmologie, comme les trous noirs, les étoiles à neutrons, l'accélération de l'univers et le GPS (Global Positioning System).

La découverte de l'expansion de l'Univers par Hubble dans les années 1929 est la première grande progrès en cosmologie. En 1999, deux collaborations indépendantes, après avoir étudié les supernovae lointaines, ont présenté des preuves convaincantes du fait que l'expansion de l'Univers est accélérée. Pour expliquer cette accélération, les physiciens ont suggéré qu'il existe une forme d'énergie qui n'est pas connue à ce jour appelée énergie sombre.

Le modèle ΛCDM a été proposé comme explication de cette énergie inconnue, considérant que l'énergie sombre est la constante cosmologique. Dans ce modèle la matière noire constitué environ 25% de l'énergie totale de l'univers, tandis que l'énergie sombre est responsable d'environ 70% de l'énergie totale de l'univers. La somme de leur contribution est impressionnant : environ 95% du contenu de l'Univers est de nature inconnue, donc nous connaissons que 5% du contenu de l'univers.

Mots clés : Relativité générale, constante cosmologique, énergie noire, matière noire, modèle ΛCDM, l'expansion accélérée de l'univers.

Table des matières

1 Concepts fondamentaux de la relativité générale **5**

1.1 Les transformations de lorentz : 5

1.2 Les tenseurs 6

1.2.1 Les quadrivecteurs 6

1.2.2 Exemples de quadrivecteurs 8

1.2.3 Les tenseurs 9

1.3 Tenseur de courbure de Riemann 11

1.3.1 La Dérivée covariante 11

1.3.2 Le Tenseur de Riemann 11

1.4 Tenseur d'energie-impulsion 13

2 Relativité générale et système solaire **14**

2.1 Le principe d'équivalance et l'équation des géodésiques : 14

2.2 Les équations d'Einstein 15

2.3 Géodésique dans la géometrie de Schwarzschild 16

2.3.1 Métrique de schwarzschild 16

2.3.2 L'avance du périhélie de Mercure 18

2.3.3 Déviation des rayons lumineux dans un champ de gravitation 20

3 Modèles cosmologiques avec énergie noire dépendante du temps **22**

3.1 L'espace temps de Friedmann-Robertson-Walker 22

3.1.1 Metrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 22

3.1.2 Décalage spectral cosmologique vers le rouge et la loi de Hubble 24

3.2 Equations d'Einstein et Densité critique 25

3.2.1 Equations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique 25
3.2.2 Densité critique et paramètres de densité 28
3.3 Modèles cosmologiques de Friedmann-Lemaître 31
3.3.1 Univers plat dominé par la matière et le rayonnement 31
3.3.2 Univers fermé dominé par la matière et le rayonnement 35
3.4 Univers plat dominé par la matière et l'énergie du vide 40
3.5 Solutions avec constante cosmologique dépendante du temps 45
3.5.1 Solutions avec paramètre d'état w indépendant du temps 45
3.5.2 Solutions avec paramètre d'état dépendant de la fonction de Hubble . . 48
3.5.3 Solutions avec paramètre d'état dépendant du temps $\mathrm{w} = \left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^n - 1$ . . 51
3.5.4 Solutions avec paramètre d'état dépendant du temps $\mathrm{w} = \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2} + \mathrm{w}_0$ . . 52

Listes des figures

Figure 3.1 : La variation du facteur d'échelle a en fonction du temps t 38

Figure 3.2 : Le facteur d'expansion en fonction du temps t 41

Figure 3.3 : La variation du paramètre de décélération q en fonction du temps 42

Introduction générale

À la fin du 19eme siècle, deux grandes théories de la physique coexistaient, la mécanique classique et l'électromagnétisme de Maxwell, elles expliquent la quasi-totalité des phénomènes naturels avec une grande précision. Cependant, il y avait un défaut dans ces deux théories, inhérentes au concept classique du temps. En 1905, Einstein a proposé une nouvelle théorie, qui est la relativité restreinte, pour concilier le grand paradoxe physique de son temps, qui est l'incompatibilité de l'électromagnétisme avec les lois de la mécaniques classiques. [1]. La relativité restreinte est la théorie formelle élaborée par Albert Einstein en 1905 en vue de tirer toutes les conséquences physiques de la relativité galiléenne et du principe selon lequel la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels inertiels, ce qui était implicitement énoncé dans les équations de Maxwell. Cette théorie consiste essentiellement à poser un nouveau cadre fondamental (à la place de celui posé par Galilée, Descartes et Newton) pour la formulation des lois physiques : ce cadre étant la structure chrono-géométrique de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski [2, 21].
En 1907, Einstein s'est rendu compte que l'interaction gravitationnelle possédait des caractères particuliers qui lui ont suggéré la nécessité de généraliser le cadre et les structures de la théorie de la relativité de 1905. Après de nombreuses années d'un effort intellectuel intense, Einstein a réussi à construire une théorie de la relativité généralisée (ou "relativité générale") qui proposait une modification profonde de la structure chrono-géométrique de l'espace-temps de la relativité restreinte [21]. Albert Einstein publie sa Théorie de la relativité générale en 1916, qui explique comment la matière provoque la déformation de l'espace et du temps. La force de gravité qui en résulte peut maintenant être considérée comme le mouvement d'objets se déplaçant dans un espace-temps déformé. Il s'est rendu compte que la relativité générale pouvait être utilisée pour expliquer la structure de l'univers entier. Il a supposé que l'univers

obéissait au principe cosmologique : il était de taille infinie avec la même densité moyenne de matière partout, avec un espace-temps dans l'univers déformé par la présence de matière en son sein. Cependant, il a constaté que ses équations prédisaient un univers à être soit en expansion, soit en contraction, ce qui semblait contredire sa sensibilité. Einstein a donc ajouté un terme dans ses équations, la constante cosmologique pour garder son univers statique [22]. En 1929, Edwin Hubble publie ses observations montrant que les galaxies autour de nous semblaient être en expansion, et cette expansion suivait la loi de Hubble : $v = \mathrm{H}_0 \mathrm{d}$, qui reliait la vitesse radiale de la galaxie à sa distance. En 1927, l'astronome belge Georges Lemaitre (1894-1966) est arrivé indépendamment aux solutions des équations d'Einstein, et s'est rendu compte qu'elles doivent décrire correctement l'univers, compte tenu des récentes découvertes de Hubble. Lemaitre était le première personne à réaliser que si l'univers a été en expansion, il doit avoir eu un commencement, qu'il appelait « l'atome primitif ». C'est le précurseur de ce que l'on appelle aujourd'hui le « Big Bang » [22].

Plus récemment, en 1999, deux équipes indépendantes ont découvert, grace à l'observation de supernovae, que l'expansion de l'Univers est accélérée. Cela a été montré notamment par le décalage vers le rouge de la lumière des supernovae, cette accélération a été mis en évidence en 1999 par deux équipes internationales, le Supernova Cosmology Project mené par Saul Perlmutter, et le High-Z supernovae search team mené par Adam Riess, ce qui leur vaudra l'obtention du prix Nobel de physique en 2013. La découverte de l'accélération cosmique était probablement l'une des plus importantes non seulement pour la cosmologie moderne, mais aussi pour la physique en général. L'expansion accélérée de l'Univers représente la démonstration la plus directe du fait que nos théories fondamentales sont soit incomplètes, soit, pire encore, incorrectes [23]. L'interprétation la plus simple de la découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers est qu'il existe dans l'Univers une forme d'énergie noire répulsive. Au cours des dernières décennies, de nombreuses observations indépendantes ont fourni des preuves croissantes que l'Univers est rempli de deux ingrédients « sombres », un composant sans collision, appelé matière noire (DM) et un composant presque uniforme à pression négative, appelé énergie noire (DE), dont la nature physique est encore largement inconnue. La matière noire qui constitué environ 25% de l'énergie cosmique totale aujourd'hui, tandis que l'énergie sombre est responsable d'environ 70% de l'énergie cosmique totale aujourd'hui. La

somme de leur contribution est impressionnant : environ 95% du contenu de l'Univers est de nature inconnue, donc nous connaissons que 5% du contenu de l'univers [25].
Depuis la découverte que l'expansion de l'Univers est accélérée, de grands efforts sont en cours pour trouver une explication satisfaisante de cet effet. La plupart des travaux liés à ce problème sont basés sur l'hypothèse qu'un type d'énergie exotique, appelé énergie noire, est le respensable de cette accélération bien que des explications alternatives soient également disponibles dans la littérature [26]. Un certain nombre de modèles phénoménologiques impliquant un terme cosmologique dépendant du temps ont déjà été proposés et testés par divers chercheurs de différents points de vue. Un facteur très important dans l'étude de l'énergie noire est l'équation d'état barotrope p = wρ. En raison du manque de preuves d'observation pour faire la distinction entre constante et variable, le paramètre d'état w est généralement considérée comme une constante, qui prend la valeur $w = -1$ pour le vide, $w = 0$ pour la poussière et $w = \frac{1}{3}$ pour le rayennement relativiste. Cependant, il n'est pas du tout obligatoire d'utiliser une valeur constante du paramètre d'état w. En fait, cela peut être une fonction du temps, du redshift ou du facteur d'échelle. Mais, en raison du manque de données d'observation concluantes qui peuvent nous permettre de faire la distinction entre une équation d'état variable et constante, une valeur constante du paramètre d'état w est généralement utilisée [26]. Ces dernières années, diverses formes du paramètre d'état w dépendant du temps ont été utilisées pour les modèles variables (modèles cosmologiques avec une équation d'état dépendante du temps dans une métrique de Kaluza-Klein, modèles cosmologiques avec un fluide visqueux dans une métrique de Kaluza Klein). Donc, il y a suffisamment de raisons pour considérer un paramètre d'état w dépendant du temps pour une meilleure compréhension de l'évolution cosmique. Maintenant, divers types de modèles physiques, y compris des modèles phénoménologiques (avec fonction du temps) sont envisagés pour dévoiler la nature de l'énergie noire [29].
L'objectif de notre travail consiste d'une part, à introduire les notions essentielles de la relativité générale et ses prédictions en cosmologie, et d'autre part, considérer des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état w constant et des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état w variables, qui peuvent expliquer l'expansion accélérée actuelle de notre univers.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux de la relativité générale

1.1 Les transformations de lorentz :

L'approche d'Einstein à la relativité restreinte était basée sur les deux postulats suivants :
I. La forme analytique des lois physiques est la même dans tous les référentiels inertiels tel que d'écrit par les systèmes de coordonnées cartésiennes.
II. La vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle.
Le postulat (I) est un critère d'élégance, tandis que (II) a été étayé par des expériences fait avant 1905, comme celui de Michelson et Morley, et est maintenant vérifié à très haute précision [1]. Partant des seuls postulats énoncés précédemment : proprietés de lespace-temps et principe de relativité, nous pouvons établir les formules fondamentales de la relativité restreinte formant ce qu'on appelle habituellement la transformation de Lorentz. Cette transformation remplace celle de Galilée. Lorentz avait remarqué que les équations de Maxwell restaient invariantes par cette transformation, mais Einstein les a établies à partir du postulat de relativité restreinte, puis interprétées physiquement (1905). A fin d'expliquer le résultat de l'expérience de Michelson, Lorentz et Poincaré avaient indépendement proposé un autre type de changement de coordonnèes entre référentiels galilèen qui porte désormais leurs noms. Mais les deux savants n'allèrent pas jusqu'au bout et considèrerent leurs trouvailles comme de pur artifices mathématiques [2]. Le cadre du raisonnement pour déterminer la transformation spéciale de Lorentz est celui de deux systèmes de référence $R(Oxyz)$ et $R'(O'x'y'z')$, en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, selon l'axe Ox, à la vitesse V. Les axes Ox

et $O\prime x\prime$ sont confondus. Les deux référentiels sont munis d'horloges identiques, et on choisit l'origine des temps de telle sorte que $t = t' = 0$, lorsque les origines respectives O et O' des coordonnées des deux systèmes coïncident, les équations de transformation de coordonnées de l'espace-temps sont données par [2, 3]

$$x^{'} = \gamma(x - vt) \ \ ; \ t' = \gamma(t - vx/c^2) \ \ ; \ y' = y \ \ ; \ z' = z \tag{1.1}$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Si on considère la limite $v \to 0$, c'est-à-dire $\frac{v}{c} \ll 1$ dans la transformation de Lorentz, alors $\gamma \simeq 1$ et cette transformation se rèduit bien à celle de Galilèe $x' = x - vt$. Le temps propre d'un objet en mouvement est le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel propre, solidaire à l'objet, on peut l'exprimer sous diverses formes [4]

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{ds^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt \tag{1.2}$$

L'intervalle $ds^2 = dr^2 - c^2dt^2$ est un invariant quand on change de repére galiléen. La relation

$$ds^2 = dr^2 - c^2dt^2 = -c^2dt^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = -c^2d\tau^2 \tag{1.3}$$

montre que le temps propre $d\tau$ est invariant par rapport aux transformation de lorentz [2].

1.2 Les tenseurs

1.2.1 Les quadrivecteurs

La transformation de Lorentz et ses conséquences suggèrent que les coordonnées spatiales (x, y, z) et le temps t devraient etre traitées de manière uniforme dans la théorie de la relativité. Minkowski a proposé que l'espace tridimensionnel ordinaire plus le temps doivent etre considérés comme un espace à quatre dimensions, appelé l'espace de Minkowski. De même les coordonnées (A_x, A_y, A_z) d'un vecteur A doivent etre considérées comme les composantes spatiales d'un vecteur $A = (A_t, A_x, A_y, A_z)$, appelé quadrivecteur, dans un espace vectoriel à quatre dimensions. La création des quadrivecteurs répond à la nécessité d'avoir des entités qui vont permettre de généraliser, dans l'espace-temps, les grandeurs physiques définies dans l'espace à trois dimensions. Les quadrivecteurs permettent alors de retrouver les lois classiques de la physique dans le cadre plus général de la relativité [2]. Les coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement peuvent etre considérées comme les composantes d'un vecteur

X dans l'espace-temps à quatre dimensions de Minkowski, appelé rayon-vecteur. Lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie (R) à un autre (R') se déplaçant parallèlement à l'axe des x à la vitesse uniforme V, les composantes de ce rayon-vecteur X se transforment selon les formules de la transformation de Lorentz [2]

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \;\; ; \;\; x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \;\; ; \;\; x'^2 = x^2 \; ; \;\; x'^3 = x^3 \tag{1.4}$$

où les coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^0) sont définies par

$$x^0 = ct \;\; ; \;\; x^1 = x \;\; ; \;\; x^2 = y \;\; ; \;\; x^3 = z \tag{1.5}$$

Mise sous forme matricielle, la transformation précédente s'écrit :

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu_\nu x^\nu \;\; ; \;\; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

où

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

On appelle quadrivecteur A, ou encore 4-vecteur A, un ensemble de quatre quantités (A^0, A^1, A^2, A^3) qui se transforment lors d'un changement de référentiel d'inertie comme les composantes (x^0, x^1, x^2, x^3) d'un rayon-vecteur [2]

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \;\; ; \;\; A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \;\; ; \; A'^2 = A^2 \; ; \; A'^3 = A^3 \tag{1.8}$$

Les composantes (A^0, A^1, A^2, A^3) sont appelées les composantes contravariantes du quadrivecteur A. Le produit scalaire de deux quadrivecteurs A et B est :

$$A.B = A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 - A^0B^0 \tag{1.9}$$

Le carré de la norme $\|A\|^2$ d'un quadrivecteur A est définie par :

$$\|A\|^2 = A.A = (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^0)^2 \tag{1.10}$$

Le produit scalaire $A.B$ de deux quadrivecteurs $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ et $B = (B^0, B^1, B^2, B^3)$ peut être écrit comme $A.B = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$, où $g_{\mu\nu}$ est donnée par

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = diag(-1, +1, +1, +1) \tag{1.11}$$

$g_{\mu\nu}$ est appelé le tenseur métrique. Les composantes (A_0, A_1, A_2, A_3) définies par $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$

$$A_0 = g_{0\nu}A^\nu = -A^0 \ ; \quad A_1 = g_{1\nu}A^\nu = +A^1$$
$$A_2 = g_{2\nu}A^\nu = +A^2 \ ; \quad A_3 = g_{3\nu}A^\nu = +A^3 \tag{1.12}$$

Les composantes (A_0, A_1, A_2, A_3) sont appelées les composantes covariantes du quadrivecteur A. Les composantes covariantes A'_μ se transforment de la manière suivante

$$A'_\mu = \bar{L}^\nu_\mu A_\nu \ \ ; \ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{1.13}$$

$\bar{L}^\nu_\mu$ est la matrice inverse de la matrice L^μ_ν . l'intarvale $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2$, s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = dx^\mu dx_\nu \tag{1.14}$$

On peut facilement montrer que l'intervalle ds^2 est un invariant relativiste

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}L^\mu_\alpha L^\nu_\beta dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = ds^2 \tag{1.15}$$

1.2.2 Exemples de quadrivecteurs

Quadrivitesse : la vitesse ordiniare est définie par $u = \frac{dr}{dt}$.On définie par analogie la 4-vitesse ou quadrivitesse par

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{1.16}$$

Comme $d\tau$ est une différentielle invariant, u^μ est un quadrivitesse contravariant. En fonction de la vitesse ordiniare, les composantes u^0 et u^i de la quadrivitesse s'écrivent [4]

$$u^\mu = (c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}) = (c\gamma, \gamma v) \tag{1.17}$$

Le carré de la norme $\| u^2 \|$ du 4-vecteur u^μ est

$$\| u^2 \| = u.u = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^0)^2 = -c^2 \tag{1.18}$$

Qaudriaccélértion : On définit la qaudriaccélération ou 4-accélération par [4]

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \tag{1.19}$$

On remarque que le 4-vecteur accélération a est perpendiculaire au 4-vecteur de vitesse v [2]

$$a.u = g_{\mu\nu} a^\mu u^\nu \tag{1.20}$$

Quadrivecteur énergie-impulsion p^μ : En multipliant la 4-vecteur vitesse u^μ par la masse de la particule, qui est évidemment un scalaire, on obtient encore un 4-vecteur $p^\mu = mu^\mu$, appelé quadrivecteur énergie-impulsion de la particule [2]

$$p^\mu = mu^\mu = (\gamma mc, \gamma mv) \tag{1.21}$$

Le carré de la norme $\|p\|^2$du 4-vecteur p^μ est

$$\|p\|^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2 u.u = -m^2 c^2 \tag{1.22}$$

d'où

$$\|p\|^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2 = cst \tag{1.23}$$

ou bien

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{1.24}$$

A partir des relations

$$p = \gamma mv \quad ; \qquad E = \gamma mc^2 \tag{1.25}$$

nous obtenons la relation suivante $p = \frac{E}{c^2} v$ entre l'énergie, l'impulsion, et la vitesse d'une particule libre.

1.2.3 Les tenseurs

Nous avons déjà introduit le terme « quatre vecteurs » pour toute quantité V^α qui subit la transformation

$$V^\alpha \rightarrow V^{\alpha'} = A^\alpha_\beta V^\beta \tag{1.26}$$

lorsque le repère est transformé par

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta \tag{1.27}$$

V^α devrait être appelé un quatre vecteur contravariant, pour le distinguer d'un quadrivecteur covariant, défini comme une quantité U_α dont la règle de transformation est

$$U_\alpha \rightarrow U'_\alpha = A^\beta_\alpha U_\beta \tag{1.28}$$

A tout quatre vecteur contravariant V^α, il correspond une à quatre-vecteur covariant

$$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta \tag{1.29}$$

et à tout U_α quatre vecteur covariant correspond un quatre vecteur contravariant

$$U^\alpha = \eta^{\alpha\beta} U_\beta \tag{1.30}$$

Bien que n'importe quel vecteur puisse être écrit sous une forme contravariante ou covariante, il existe certains vecteurs, tels que dx^α , qui apparaissent plus naturellement contravariants et d'autres qui semblent plus naturellement covariantes. De nombreuses grandeurs physiques ne sont pas des scalaires ou des vecteurs, mais plus compliquées, objets appelés tenseurs. Un tenseur a plusieurs indices covariants et contravariants avec les propriétés de transformation de Lorentz correspondantes [5]. Un objet U^μ dont les composantes se transforment comme

$$U'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} U^\nu(x) \tag{1.31}$$

Le quadrivecteur U^μ est appelé aussi quadrivecteur contravariant, ou tenseur de variance $\left[{1 \atop 0}\right]$. On aura aussi le covecteur V_μ ou tenseur de variance $\left[{0 \atop 1}\right]$ défini par [6]

$$V'_\mu(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} V_\nu(x) \tag{1.32}$$

En toute généralité, on appelle tenseur de variance $\left[{p \atop q}\right]$ un objet dont les composantes $T^{\mu\upsilon\cdots}_{\rho\sigma\ldots}(x)$ dans le référentiel $\{x^\mu\}$ possèdent p indices supérieurs $\mu\upsilon$... (dits contravariants) et q indices inférieurs $\rho\sigma$... (dits covariants) et se transforment dans les changements de référentiels arbitraires $\{x^\mu\} \to \{x^{\mu'}\}$ selon [6]

$$T'^{\lambda\tau\cdots}_{\pi\varepsilon\ldots}(x') = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\upsilon}\ldots\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\pi}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\varepsilon}\ldots T^{\mu\upsilon\cdots}_{\rho\sigma\ldots}(x) \tag{1.33}$$

Algèbre des tenseurs [6]

1. Combinaison linéaire de tenseurs de memes variances, par exemple $T^{\mu\upsilon}_\rho = aR^{\mu\upsilon}_\rho + bS^{\mu\upsilon}_\rho$.

2. Transposition d'indices de meme variances, $T^{\mu\upsilon\rho}_\sigma = R^{\upsilon\mu\rho}_\sigma$.

3. Multiplication tensorielle de tenseurs de variances quelconques, $T^{\mu\rho\sigma}_\upsilon = R^\mu_\upsilon S^{\rho\sigma}$.

4. Contraction d'indices de variances différentes, $T^\mu_\upsilon = R^{\mu\rho}_{\upsilon\rho} = \delta^\sigma_\rho R^{\mu\rho}_{\upsilon\sigma}$.

La contraction d'indice est en fait une multiplication avec le tenseur de Kronecker.

5. Abaissement et élévation d'indices à l'aide du tenseur métrique, $T^\upsilon_\mu = g_{\mu\sigma}T^{\sigma\upsilon}$ et $T^\upsilon_\mu = g^{\mu\rho}T_{\rho\mu}$.

1.3 Tenseur de courbure de Riemann

1.3.1 La Dérivée covariante

La dérivée covariante $A^m_{;p}$ d'un vecteur contravariant est définie par [7]

$$A^m_{;p} = \frac{\partial A^m}{\partial x^p} + \Gamma^m_{np} A^n \tag{1.34}$$

La dérivée covariante $A_{m;p}$ d'un vecteur covariant est défini par l'expression

$$A_{m;p} = \frac{\partial A_m}{\partial x^p} - \Gamma^n_{mp} A_n \tag{1.35}$$

Les Γ^m_{np} sont appelées les symboles de christoffel, les symboles de christoffel sont symétriques $\Gamma^m_{np} = \Gamma^m_{pn}$. Nous trouvons la règle de transformation pour les symboles de Christoffel [8]

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\upsilon} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\upsilon}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\upsilon}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \tag{1.36}$$

en utilisant la propriété de symétrie, on obtient la définition du symbol de christoffel en fonction du tenseur métrique

$$\Gamma^m_{np} = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{np}}{\partial x^k} \right) \tag{1.37}$$

La dérivée covariante du tenseur C^m_{nk} est donné par [8]

$$C^m_{nk;p} = \frac{\partial C^m_{nk}}{\partial x^p} + \Gamma^m_{sp} C^s_{nk} - \Gamma^s_{np} C^m_{sk} - \Gamma^s_{pk} C^m_{ns} \tag{1.38}$$

La relation

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p} = \Gamma^k_{mp} g_{kn} + \Gamma^k_{np} g_{mk} \tag{1.39}$$

montre que la dérivée covariant du tenseur métrique g_{mn} est nulle

$$g_{mn;p} = g_{mn,p} - \Gamma^k_{pm} g_{kn} - \Gamma^k_{pn} g_{sp} \tag{1.40}$$

1.3.2 Le Tenseur de Riemann

La connexion $\Gamma^{\alpha}_{\mu\upsilon}$ n'est pas un tenseur. Cependant, nous pouvons construire des tenseurs en utilisant $\Gamma^{\alpha}_{\mu\upsilon}$. L'un d'eux est le tenseur de courbure de Riemann, qui est le tenseur plus

important dans la description des propriétés de l'espace-temps de Riemann. Considérons un champ vectoriel covariant $A_\lambda(x)$. La seconde dérivée covariante de A_λ se lit [9]

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\mu;\upsilon} &= A_{\lambda;\mu,\upsilon} - \Gamma^\rho_{\lambda\upsilon} A_{\rho;\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\upsilon} A_{\lambda;\rho} \\ &= A_{\lambda,\mu,\upsilon} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu,\upsilon} A_\rho - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} A_{\rho,\upsilon} - \Gamma^\rho_{\lambda\upsilon} A_{\rho,\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\upsilon}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} A_\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\upsilon} A_{\lambda;\rho} \end{aligned}$$

Si nous échangeons l'ordre des différentiels, nous avons

$$A_{\lambda;\upsilon;\mu} = A_{\lambda,\upsilon,\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\upsilon,\mu} A_\delta - \Gamma^\rho_{\lambda\upsilon} A_{\delta,\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} A_{\delta,\upsilon} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\upsilon} A_\sigma - \Gamma^\rho_{\upsilon\mu} A_{\lambda;\rho} \tag{1.41}$$

La différence d'entre eux a la forme $A_{\lambda;\mu;\upsilon} - A_{\lambda;\upsilon;\mu} = R^\rho_{\lambda\mu\upsilon} A_\rho$, où

$$R^\rho_{\lambda\mu\upsilon} = \Gamma^\rho_{\lambda\upsilon,\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu,\upsilon} + \Gamma^\rho_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda\upsilon} - \Gamma^\rho_{\sigma\upsilon}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \tag{1.42}$$

Nous appelons $R^\rho_{\lambda\mu\upsilon}$ le tenseur de courbure de Riemann. On considérera la forme covariante du tenseur de courbure de Riemann $R_{\eta\lambda\mu\upsilon} = g_{\eta\rho} R^\rho_{\lambda\mu\upsilon}$, on a donc [10]

$$R_{\eta\lambda\mu\upsilon} = \frac{1}{2}(g_{\eta\lambda,\upsilon\mu} - g_{\lambda\mu,\upsilon\eta} - g_{\eta\upsilon,\lambda\mu} + g_{\lambda\upsilon,\mu\eta}) + g_{\varepsilon\rho}(\Gamma^\varepsilon_{\mu\eta}\Gamma^\rho_{\lambda\upsilon} - \Gamma^\varepsilon_{\upsilon\eta}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}) \tag{1.43}$$

De cette dernière équation on tire des propriétés algébriques pour R :

– Symétrie : $R_{\eta\lambda\mu\upsilon} = R_{\mu\upsilon\eta\lambda}$

– Antisymétrie : $R_{\eta\lambda\mu\upsilon} = -R_{\lambda\eta\mu\upsilon} = -R_{\eta\lambda\upsilon\mu} = R_{\lambda\eta\upsilon\mu}$

– Cyclicité : $R_{\eta\lambda\mu\upsilon} + R_{\eta\upsilon\lambda\mu} + R_{\eta\lambda\upsilon\mu} = 0$

C'est donc la propriété de symétrie qui fait que le tenseur de Ricci $R_{\lambda\upsilon} = g^{\eta\mu} R_{\eta\lambda\mu\upsilon}$ est symétrique. En faisant des permutations circulaires on obtient l'identité de Bianchi :

$$\nabla_\varepsilon R_{\eta\lambda\mu\upsilon} + \nabla_\upsilon R_{\eta\lambda\varepsilon\mu} + \nabla_\mu R_{\eta\lambda\upsilon\varepsilon} = 0 \tag{1.44}$$

En multipliant par $g^{\eta\mu}$ on trouve :

$$\nabla_\varepsilon R_{\lambda\upsilon} - \nabla_\upsilon R_{\lambda\varepsilon} + \nabla_\mu R^\mu_{\lambda\upsilon\varepsilon} = 0 \tag{1.45}$$

En multipliant une nouvelle fois avec $g^{\lambda\upsilon}$:

$$\nabla_\varepsilon R - \nabla_\lambda R^\lambda_\varepsilon - \nabla_\varepsilon R^\mu_\varepsilon = 0 \tag{1.46}$$

et une dernière fois par $g^{\mu\varepsilon}$:

$$\nabla_\lambda(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} R) = 0 \tag{1.47}$$

Cette équation exprime la conservation du tenseur d'Einstein $G^{\lambda\mu} = R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} R$ [10].

1.4 Tenseur d'energie-impulsion

Une description phénoménologique macroscopique est utile lorsque l'on ne connaît pas la description microscopique de la matière dont on traite, mais plutôt on caractérise ses propriétés en termes de spécification de certains paramètres macroscopiques tels que l'énergie (densité), la pression, la viscosité, etc. À de nombreuses fins, il s'agit du langage approprié pour décrire, par exemple, les gaz ou fluides. Dans ce cas, on construit le tenseur énergie-moment de telle sorte qu'il code la physique que l'on essaie de décrire (principalement les lois et la dynamique de la conservation). Comme un exemple simple de ceci nous considérons un fluide parfait. Un fluide parfait est celui dans lequel un observateur comobile (c'est-à-dire un observateur dans un référentiel de repos local du fluide) voit le fluide autour de lui comme isotrope (invariant de rotation) [11]. Le tenseur symétrique $T^{\alpha\beta}$, dont dépend la forme finale des équations d'équilibre, est appelé le tenseur d'énergie-impulsion [12]. Dans un tel système d'inertie propre les composantes du tenseur d'energie-impulsion $T^{\alpha\beta}$ doivent prendre la forme

$$T^{00} = \rho \quad , \quad T^{0k} = 0 \quad , \quad T^{ik} = p\delta^{ik} \tag{1.48}$$

Ici, ρ et p sont des fonctions des coordonnées, interprétées comme la densité d'énergie et la pression du fluide. On peut combiner les composantes du tenseur énergie-moment dans l'expression

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}u^{\beta} + p\eta^{\alpha\beta} \tag{1.49}$$

ou u^{α} est le 4-vecteur vitesse du fluide.

Chapitre 2

Relativité générale et système solaire

2.1 Le principe d'équivalance et l'équation des géodésiques :

Le principe d'équivalence fut en substance découvert par Galilée, sa fameuse expérience du haut de la tour de Pise est une première démonstration de l'égalité entre la "masse inerte" et la "masse pesante". Cette expérience a été mainte fois refaite depuis, dans des tubes sous vide et cette égalité a été confirmée avec une grande précision [10]. L'une a un sens "inertiel", elle décrit comment le corps va réagir à une tentative pour le faire changer d'état de mouvement ; alors que l'autre a un sens purement gravitationnel, elle décrit comment le corps crée son propre champs gravifique et comment il réagit à un champs extérieur. C'est ce lien entre inertie et gravitation qui constitue la cléf des équations de la relativité générale. Ce qui a guidé Einstein est une expérience de pensée un peu analogue à celle de Galilée. Supposons que nous soyons dans un ascenseur au dernier étage d'un très haut building, si soudain l'ascenseur se met à tomber, pendant la phase de chute libre nous allons flotter comme si nous étions en apesanteur et aucune des expériences physique que nous pourrions effectuer dans l'ascenseur ne pourra trahir la présence d'un champs gravitationnel. Donc localement, on a annulé les effets de la pesanteur, localement car si on fait des mesures sur une plus grande échelle le champs gravitationnel réel varie dans l'espace alors que la force d'inertie reste constante. Ainsi localement on a construit un référentiel galiléen [10].

Une géodésique dans l'espace euclidien est une ligne droite, qui a deux définitions équivalentes. Tout d'abord, son vecteur tangent pointe toujours dans la même direction (le long la ligne) et deuxièmement c'est la courbe de longueur la plus courte entre deux points [15]. Comme

Einstein l'a soutenu, selon le principe d'équivalence, il devrait y avoir être un système de coordonnées en chute libre y^α dans lequel les particules se déplacent en ligne droite et donc satisfaire [16]

$$\frac{d^2y^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{2.1}$$

où τ est le temps propre de la particule

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta \tag{2.2}$$

Maintenant, choisissez un autre repère x^μ ; il peut être au repos, en accélération, en rotation, etc. Nous pouvons réexprimer les y^α en termes des x^μ. En utilisant la règle de dérivation, nous avons [16]

$$0 = \frac{d}{d\tau}(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\upsilon}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\upsilon}{d\tau} \tag{2.3}$$

En multipliant par l'inverse jacobienne $\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}$ on obtient l'équation géodésique

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\mu\upsilon}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\upsilon}{d\tau} = 0 \tag{2.4}$$

où $\Gamma^\beta_{\mu\upsilon} = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\upsilon}$ sont les symboles de christoffel.

2.2 Les équations d'Einstein

L'équation de la gravitation relativiste Le principe qui sous-tend l'équation d'Einstein consiste à écrire une relation entre la géométrie et l'énergie-impulsion [14, 15].

• L'équation de champ de la gravité newtonienne est $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$

• La description relativiste correcte de la matière est fournie par le tenseur d'énergie-impulsion, pour un fluide ou une poussière parfait, nous avons $T_{00} = \rho c^2$. La combinaison de ces observations suggère que, pour un champ gravitationnel statique faible dans la limite de faible vitesse

$$2\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \tag{2.5}$$

Les considérations ci-dessus donc suggérent que les équations du champ gravitationnel devraient être de la forme

$$K_{\mu\upsilon} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\upsilon} \tag{2.6}$$

$K_{\mu\upsilon}$ doit avoir les propriétés suivantes [5]

1/ Par définition $K_{\mu\upsilon}$ est un tenseur.

2/ Par hypothèse, $K_{\mu\upsilon}$ se compose uniquement de termes avec des dérivées secondes de la métrique ; c'est-à-dire que $K_{\mu\upsilon}$ ne contient que des termes qui sont soit linéaires dans la dérivée seconde, ou quadratiques dans les premières dérivées de la métrique.

3/ $T_{\mu\upsilon}$ étant symétrique, $K_{\mu\upsilon}$ est symétrique.

4/ Puisque $T_{\mu\upsilon}$ est conservé , alors $K^{\mu}_{\upsilon;\mu} = 0$.

5/ Pour les champs faibles stationnaires $K_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}$

D'apres l'identité de bianchi

$$R_{\mu\upsilon\lambda\sigma;\alpha} + R_{\mu\upsilon\alpha\lambda;\sigma} + R_{\mu\upsilon\sigma\alpha;\lambda} = 0 \tag{2.7}$$

on obtient

$$\nabla_\alpha \left(R^{\mu\upsilon} - \frac{1}{2} g^{\mu\upsilon} R \right) = 0 \tag{2.8}$$

Les seuls candidats qui obéissent à tous les critères imposés sont donc le tenseur d'Einstein $K_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein sont

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

Comme $R = -\kappa T$, où $T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$, les équations d'Einstein peuvent être réécritent sous la forme [30, 33, 15]

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) \tag{2.10}$$

2.3 Géodésique dans la géometrie de Schwarzschild

2.3.1 Métrique de schwarzschild

La solution de Schwarzschild « extérieure » discutée ici décrit l'espace-temps géométrie dans la région vide entourant un corps non rotatif, symétrique sphériquement de masse M. La solution de Schwarzschild, comme toute solution des équations de champ d'Einstein, implique de spécifier, en tant que fonctions explicites des coordonnées de l'espace-temps x^0, x^1, x^2, x^3, les seize composantes de le tenseur métrique $g_{\mu\upsilon}$ qui correspondent au tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\upsilon}$ dans la région d'intérêt. Dans le cas de la solution schwarzschild, le tenseur d'énergie-impulsion est nul, $T_{\mu\upsilon} = 0$, puisque nous avons affaire à la région vide en dehors

de la distribution de masse [17]. Le tenseur métrique le plus général qui peut représenter un champ gravitationnel isotrope statique est donné par [5]

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2.11}$$

Les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ doivent être déterminées en résolvant les équations de champ. Les composantes non nulles du tenseur métrique sont

$$g_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} -B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

La matrice inverse de $g_{\mu\upsilon}$ est donnée par

$$g^{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} -B^{-1}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

La connexion affine peut être calculée à partir de la formule habituelle :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\upsilon}} + \frac{\partial g_{\rho\upsilon}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\upsilon}}{\partial x^{\rho}}) \tag{2.14}$$

Les seuls composants non nuls sont

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}_{r\theta} &= \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial x^{\theta}} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^{r}} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^{\theta}}\right) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} &= -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)} \qquad\qquad \Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dB(r)}{dr} \\
\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} &= -\sin\theta\cos\theta \qquad\qquad \Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr} \\
\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} &= \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \qquad\qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta \\
\Gamma^{t}_{tr} &= \Gamma^{t}_{rt} = \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr} \qquad \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)}
\end{aligned}$$

Nous avons également besoin du tenseur de Ricci

$$R_{\mu k} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu k}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{k\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu k}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} \tag{2.15}$$

Insertion dans (2.15) des composants de le connexion affine donnée par (2.14), on trouve

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{B(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}\right)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A^{'}(r)}{A(r)} + \frac{B^{'}(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)}$$
$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$$
$$R_{tt} = -\frac{B^{''}(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{B^{'}(r)}{A(r)}\right)\left(\frac{A^{'}(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right)$$

et $R_{\mu\upsilon} = 0$, pour $\mu \neq \upsilon$. Nous voyons qu'il suffira de mettre R_{rr} $R_{\theta\theta}$ et R_{tt} égaux à zéro. Nous constatons également que

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \tag{2.16}$$

exige que $A(r)B(r) = cst$. De plus, on impose à A et B la condition aux limites, que pour $(r \to \infty)$ le tenseur métrique doit s'approcher du tenseur de Minkowski en coordonnées sphériques, c'est à dire $\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1$, nous avons alors $A(r) = \frac{1}{B(r)}$.En insérant ce résultat dans l'expression pour $R_{\theta\theta}$, on obtient

$$\frac{d}{dr}\left(rB(r)\right) = rB'(r) + B(r) = 1 \tag{2.17}$$

La solution est $rB(r) = r + C$. Pour fixer la constante d'intégration, nous rappelons qu'à de grandes distances d'une masse centrale M, la composante $g_{tt} \equiv -B$ doit approcher $-1 - 2\phi$, où ϕ est le Potentiel newtonien $\frac{-MG}{r}$. D'où la constante d'intégration est $-2MG$, et notre solution finale est

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \quad ; \quad B(r) = 1 - \frac{2MG}{r} \tag{2.18}$$

La métrique complète est donnée par

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{2.19}$$

Cette solution a été trouvée par K.Schwarzschild en 1916 [5].

2.3.2 L'avance du périhélie de Mercure

L'avance du périhélie de Mercure est l'une des premières confirmations de la justesse théorique de la théorie de gravitation d'Einstein. Une prédiction célèbre de la mécanique newtonienne est que la trajectoire d'une planète isolée se déplaçant autour du Soleil est une ellipse, avec le Soleil à un foyer de l'ellipse. En plus d'avoir une taille spécifique et une forme spécifique, l'orbite elliptique a également une orientation spécifique dans le plan orbital [16]. Au début du

siècle, il y avait déjà plusieurs décénnies que l'on avait remarquer que Mercure ne suivait pas exactement les prévisions de la mécanique classique, son mouvement n'était pas une ellipse parfaite, le point de son orbite le plus proche du soleil son "perihélie" se déplaçait d'une manière infime mais indubitable [10]. Dans la théorie newtonienne, l'équation de l'orbite est donnée par l'équation [18]

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} \tag{2.20}$$

où $u = \frac{1}{r}$ et $p = \frac{J^2}{GM} = a(1-e^2)$, où a est le demi-grand axe et e est l'excentricité. La solution générale de l'équation (2.20) est

$$u_0 = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left(1 + e\cos\varphi\right) \quad ; \quad e \geq 0 \tag{2.21}$$

C'est l'équation d'une ellipse d'excentricité e. L'équation relativiste de l'orbite est donnée par l'équation

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + 3GMu^2 \tag{2.22}$$

Le second terme de l'équation (2.22) est la correction de la relativité générale, il provoque la précession de l'orbite. Nous pouvons obtenir une solution approchée $u = u_0 + u_1$ de l'équation de l'orbite exacte (2.22), si l'on substitue la solution newtonienne $u_0 = \frac{1}{p}\left(1 + e\cos\varphi\right)$, dans le terme quadratique en u, et négligons le terme en e^2, on obtient l'équation suivante pour la perturbation u_1

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{3}{J^4}\left(GM\right)^3\left(1 + 2e\cos\varphi\right) \tag{2.23}$$

une solution particulière de cette équation est

$$u_1 = \frac{3}{J^4}\left(GM\right)^3\left(1 + e\varphi\sin\varphi\right) \tag{2.24}$$

La solution générale de l'équation (2.22) est

$$u = \frac{GM}{J^2}\left[\left(1 + e\cos\varphi\right) + \frac{3G^2M^2}{J^2}\left(1 + e\varphi\sin\varphi\right)\right] \tag{2.25}$$

En utilisant l'approximation

$$\cos\left(\varphi + \epsilon\varphi\right) = \cos\left(\varphi\right) + \epsilon\varphi\sin\varphi + O\left(\epsilon^2\right) \tag{2.26}$$

nous pouvons écrire la solution générale u comme

$$u = \frac{GM}{J^2}\left[1 + e\cos\left(\left(1-\varepsilon\right)\varphi\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\right] \tag{2.27}$$

où $\varepsilon = \frac{3G^2M^2}{J^2}$. L'orbite de la planète est donc approximativement une ellipse. De cette expression on voit que la solution u est en effet encore une fonction périodique, mais avec unr période superieur à 2π. La période est donnée par $\frac{2\pi}{1-\varepsilon} \backsimeq 2\pi + 2\pi\varepsilon$. Le résultat est que l'orbite ne peut pas être fermer, et donc l'ellipse précesse. Le périhélie se produit lorsque $1/r$ est un maximum, c'est-à-dire lorsque $\cos\left((1-\varepsilon)\varphi\right) = 0$. En une révolution, l'ellipse précesse d'une quantité $\delta\varphi \backsimeq 2\pi\varepsilon = \frac{6\pi G^2M^2}{J^2}$. Cet effet est la fameuse précession du périhélie. Pour Mercure la précession du périhélie vaut $\delta\varphi = 0.10371$" par tour. Comme Mercure fait 415 tours par siècle, la prédiction de la relativité générale est [18, 30]

$$\delta\varphi = 0.1037 \times 415 = 43.03" \tag{2.28}$$

La précession totale observée de Mercure est de $5600.73 \pm 0.41''$ par siècle. La précession newtonienne causée par le Juspiter donne les plus grandes contributions, elle est de l'ordre de $5557.62 \pm 0.4''$. L'écart entre ces chiffres est de $43,11 \pm 0,4$. Ceci est cohérent avec (2.28) et l'effet est donc bien expliqué par la relativité générale [18, 30].

2.3.3 Déviation des rayons lumineux dans un champ de gravitation

La déviation de la lumière par le champ de gravitation est la plus célébre des tests classiques. Les rayons lumineux suivent des géodésiques de l'espace-temps et sont donc soumis à l'attraction du soleil. La première expérience pour tester la déviation de la lumière par le champ de gravitation du soleil a été réalisée en 1919 par une équipe britannique dirigé par Eddington et F. Dyson [30, 31, 19]. L'équation relativiste de l'orbite est donnée par l'équation [18, 30]

$$u'' + u = 3mu^2 \tag{2.29}$$

où $u = \frac{1}{r}$ et $m = GM$. Pour le système solaire, le côté droit est très petit $3mu^2/u \simeq 10^{-6}$, si nous négligeons cela, le chemin de la lumière est droit $u_0 = b^{-1}\sin\varphi$, où b est le paramètre d'impact [32]. Une solution approchée $u = u_0 + \upsilon$ de l'équation de l'orbite exacte (2.29) est donnée par

$$u = u_0 + \upsilon = b^{-1}\sin\varphi + \frac{3m}{2b^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\varphi\right) \tag{2.30}$$

prennant la limite $r \to \infty$, $u \to 0$, on trouve [32]

$$\sin\varphi_\infty + \frac{3m}{2b}\left(1 + \frac{1}{3}\cos\left(2\varphi_\infty\right)\right) = 0 \tag{2.31}$$

Pour une petite déviation $\varphi_\infty \ll 1$, $\sin\varphi_\infty \approx \varphi_\infty$ et $\cos(2\varphi_\infty) \approx 1$, nous obtenons

$$\sin\varphi_\infty + \frac{3m}{2b}\left(1 + \frac{1}{3}\cos(2\varphi_\infty)\right) \simeq \varphi_\infty + \frac{2m}{b} = 0 \tag{2.32}$$

d'où $\varphi_\infty \simeq -\frac{2m}{b}$. Ainsi, la déviation totale est $\delta\varphi = -2\varphi_\infty \simeq \frac{4m}{b}$. Pour un rayon lumineux frôlant le Soleil, $b = R_\odot$, d'où [20]

$$\delta\varphi = \frac{4m}{R_\odot} = \frac{4MG}{R_\odot c^2} = 1.75'' \tag{2.33}$$

Cela a été mesuré pour la première fois lors d'une éclipse en 1919, et la déviation observée s'est avérée être en accord avec la prédiction de la relativité à environ 30% (Von Kluber1960). Ce fut un triomphe majeur pour la relativité générale parce que l'observation est venue après la prédiction théorique [21].

Chapitre 3

Modèles cosmologiques avec énergie noire dépendante du temps

3.1 L'espace temps de Friedmann-Robertson-Walker

3.1.1 Metrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La cosmologie est l'étude de l'univers entier en tant que système physique : quel est son contenu en matière et énergie ? Comment ce contenu est-il organisé ? Quelle est son histoire ? Comment évoluera-t-il à l'avenir ? A l'échelle cosmique, la seule interaction pertinente entre les galaxies est la gravitation ; toutes les galaxies accélèrent sous leur gravité mutuelle. Ainsi, l'étude de la cosmologie dépend de manière cruciale de notre compréhension de l'interaction gravitationnelle. Par conséquent, le cadre approprié pour la cosmologie est la relativité générale. La solution de l'équation d'Einstein décrit l'univers entier parce qu'elle décrit tout l'espace-temps [34]. Le principe cosmologique dit qu'à un temps cosmique fixe, lorsqu'il est observé à des échelles suffisamment grandes, l'Univers semble être à la fois homogène (pas de lieux préférés) et isotrope (pas de directions préférées) [35]. La symétrie sphérique limite la métrique à la forme

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{b}\left(\mathrm{r}\right)\mathrm{dt}^2 + \mathrm{R}\left(\mathrm{t}\right)\left\{\lambda\left(\mathrm{r}\right)\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right\} \tag{3.1}$$

avec seulement deux fonctions scalaires $\mathrm{b}\left(\mathrm{r}\right)$, $\lambda\left(\mathrm{r}\right)$ et un facteur d'échelle global $\mathrm{R}\left(\mathrm{t}\right)$. Parce que le temps de coordonnées est le temps propre des éléments fluides, nous devons avoir $\mathrm{b}\left(\mathrm{r}\right) = 1$. Il est également utile de définir un facteur d'échelle sans dimension

$$\mathrm{a}\left(\mathrm{t}\right) = \frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}\right)}{\mathrm{R}_0}$$

normalisé à l'époque actuelle par $\mathrm{a}(\mathrm{t}_0) = 1$, où $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}(\mathrm{t}_0)$ est appelé le rayon de l'univers à l'époque actuelle [34]. Nous pouvons redimensionner $\mathrm{r} \rightarrow \sqrt{\mathrm{R}_0}\mathrm{r}$ de tel sorte que

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{b}(\mathrm{r})\,\mathrm{dt}^2 + \mathrm{a}(\mathrm{t})\left\{\lambda(\mathrm{r})\,\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right\} \tag{3.2}$$

Le paramètre d'échelle $\mathrm{a}(\mathrm{t})$ décrira l'expansion ou la contraction uniforme de la métrique spatiale [35]. Les composantes des symboles de Christoffel Γ^k_{jn}, avec $k, j, n = r, \theta, \varphi$, sont données par

$$\Gamma^r_{km} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda'(r)}{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{\lambda(r)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r\sin^2\theta}{\lambda(r)} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\Gamma^\theta_{km} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \Gamma^\varphi_{km} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r\cot\theta \\ 1 & r\cot\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Le tenseur de Ricci R_{km} [30, 33]

$$R_{km} = \partial_j\Gamma^j_{km} - \partial_m\Gamma^j_{kj} + \Gamma^j_{nj}\Gamma^n_{km} - \Gamma^j_{nm}\Gamma^n_{kj}$$

est donné par

$$R_{km} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda'}{r\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & C(r) & 0 \\ 0 & 0 & C(r)\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

où $C(r) = \left(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{r\lambda'}{2\lambda^2}\right)$. La courbure scalaire R pour l'espace 3-dimensionnel est donnée

$$R = -\frac{2}{a^2r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{1}{\lambda}\right) - 1\right) \tag{3.6}$$

L'homogénéité implique que la courbure scalaire ${}^3R$ doit être une constante, d'où

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{1}{\lambda}\right) = 1 + Cr^2 \tag{3.7}$$

L'intégration de cette équation nous donne la solution

$$\lambda = \frac{1}{1 - kr^2} \tag{3.8}$$

Cela conduit à la métrique

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{3.9}$$

Dans le cas où $k \neq 0$, nous pouvons redimensionner r de tel sorte que $k = +1$ ou $k = -1$. Les univers de Friedmann, avec $k = -1, 0$ et 1 sont appelés 'ouvert ',' plat' et 'fermé ', respectivement. Cette métrique décrit un univers qui est spatialement homogène et isotrope à chaque instant du temps, elle est appelée la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [40, 33, 41, 42, 43].

3.1.2 Décalage spectral cosmologique vers le rouge et la loi de Hubble

Considérons une onde électromagnétique provenant d'une galaxie situé à $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ et voyageant vers un observateur situé à $(r = 0, \theta_1, \varphi_1)$. Comme l'univers est en expansion, les distances entre les galaxies augmentent aussi avec l'expansion de l'univers. De ce fait, la longueur d'onde d'un photon émis par une galaxie augmente à mesure que le photon se déplace vers un observateur. Le signal lumineux se déplacera le long d'une géodésique nulle, $ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)dr^2}{1-kr^2} = 0$. L'équation du mouvement d'une crête d'onde est alors donnée par [30, 33]

$$\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = -\frac{dt}{a(t)} \tag{3.10}$$

Si une crête de l'onde laisse la galaxie au moment t_1, et arrive à l'observateur au moment t_0, et la deuxième crête de l'onde quitte la galaxie au moment $t_1 + \delta t_1$, elle arrivera à l'observateur au moment $t_0 + \delta t_0$, de sorte que

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{3.11}$$

d'où la relation

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \tag{3.12}$$

Les intervalles δt_0 et δt_1 sont donc liés par la relation

$$\delta t_1 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \delta t_0 \tag{3.13}$$

La fréquence ν_0 observée et la fréquence ν_1 émise par la source sont liées par la relation

$$\nu_0 = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} \nu_1 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \nu_1 \tag{3.14}$$

Le décalage spectral z est défini comme étant l'augmentation de la longueur d'onde fractionnaire, il est donné par

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \tag{3.15}$$

Si $z > 0$ alors $\lambda_0 > \lambda_1$, on a un décalage vers le rouge ; si $z < 0$ alors $\lambda_0 < \lambda_1$ et on a un décalage vers le bleu [30, 33]. L'observation du décalage vers le rouge par Edwin Hubble dans les années 1920 est l'une des grandes avancées de la cosmologie. Hubble a découvert empiriquement que les raies spectrales des galaxies sont décalées vers le rouge et le décalage spectral $z \simeq H_0 d$ est proportionnel à la distance d entre nous et la galaxie. Si ce redshift est interprété comme un effet Doppler, $z = \Delta\lambda/\lambda_0 = \upsilon$, alors les galaxies s'éloignent rapidement de nous selon la loi $\upsilon = H_0 d$, où H_0 est une constante appelée la constante de Hubble [30, 33, 39]. La valeur de H_0 est (Ade et al. [48]) [40]

$$H_0 = 67.74 \pm 0.46\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$$

Un développement de Taylor du facteur d'échelle $a(t)$ nous donne

$$a(t) = a(t_0)\left[1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 q_0 H_0^2 + ...\right] \tag{3.16}$$

où $q(t)$ est le paramètre de décélération

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)\,a(t)}{\dot{a}^2(t)} \tag{3.17}$$

et $q_0 = q(t_0)$ est le paramètre de décélération actuel.

3.2 Equations d'Einstein et Densité critique

3.2.1 Equations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique

La relativité générale décrit l'univers comme un espace-temp à 4 dimentions avec une métrique FRW

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{a}^2(\mathrm{t})\frac{1}{1-\kappa \mathrm{r}^2}\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{3.18}$$

Les composantes non nulles de la métrique $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ sont données par

$$\mathrm{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{a}^2(1-\kappa \mathrm{r}^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}^2\mathrm{r}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{a}^2\mathrm{r}^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Les composantes $g^{\mu\nu}$ de la métrique inverse sont données par

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\kappa r^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a^2r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\left(a^2r^2\sin^2\theta\right) \end{pmatrix}$$

Les équations d'Einstein [40, 33, 41, 42, 43]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{3.19}$$

ou sous la forme équivalente

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi G\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right) \quad ; \quad T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \tag{3.20}$$

relieent la géométrie de l'espace-temps décrite par le tenseur d'Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ aux champs de matière décrits par le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$. Nous avons supposé que notre univers est homogène et isotrope. Pour résoudre les équations de champ d'Einstein sous cette hypothèse, nous avons besoin d'un tenseur d'énergie-impulsion qui soit également homogène et isotrope. Une forme générale du tenseur d'énergie-impulsion qui est compatible avec l'homogénéité et l'isotropie, est [40, 33, 41, 42, 43]

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \quad ; \quad u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} \tag{3.21}$$

où ρ est la densité et p la pression dans le système de repos instantané. Pour un modèle de Friedmann, avec une métrique de la forme (3.18), le tenseur d'énergie-impulsion a la forme suivante

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pa^2(1-\kappa r^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Les composantes non nulles de $\Gamma^r_{\alpha\beta}$ sont les suivantes :

$$\Gamma^r_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot a}{a} & 0 & 0 \\ \frac{\dot a}{a} & kr(1-kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r(1-kr^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\sin^2\theta(1-kr^2) \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

et les composantes $\Gamma^\theta_{\alpha\beta}$ et $\Gamma^\varphi_{\alpha\beta}$, avec $\alpha, \beta = t, r, \theta, \varphi$, sont données par

$$\Gamma^\theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot a}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot a}{a} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \Gamma^\varphi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\dot a}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ \frac{\dot a}{a} & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

tandis que les composantes des symboles de Christoffel $\Gamma^0_{\alpha\beta}$, avec $\alpha, \beta = t, r, \theta, \varphi$, sont données par

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a\dot{a}\left(1-kr^2\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\dot{a}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\dot{a}r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Nous calculons maintenant le tenseur de Ricci,

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\mu,\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\gamma\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\beta\mu} \tag{3.26}$$

Un calcul simple donne les composantes non nulles suivantes du tenseur de Ricci :

$$\mathrm{R}_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad ; \quad \mathrm{R}_{rr} = \mathrm{A}\left(\mathrm{t}\right)\left(1-\kappa \mathrm{r}^2\right)^{-1} \quad ; \quad \mathrm{R}_{\theta\theta} = \mathrm{A}\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{r}^2 \quad ; \quad \mathrm{R}_{\varphi\varphi} = \mathrm{A}\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{r}^2\sin^2\theta$$

où $\mathrm{A}\left(\mathrm{t}\right) = \mathrm{a}\ddot{\mathrm{a}} + 2\dot{\mathrm{a}}^2 + 2\kappa$. La courbure scalaire est donnée par

$$\mathrm{R} = \mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu} = \frac{6}{\mathrm{a}^2}\left(\mathrm{a}\ddot{\mathrm{a}} + \dot{\mathrm{a}}^2 + \kappa\right)$$

Les composantes non nulles du tenseur d'Einstein $\mathrm{G}_{\alpha\beta} = \mathrm{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ sont données par

$$\mathrm{G}_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}^2+k}{a^2}\right) \quad ; \quad \mathrm{G}_{11} = -\left(2\frac{\ddot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} + \frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2}\right)\frac{\mathrm{a}^2}{1-\kappa\mathrm{r}^2}$$

$$\mathrm{G}_{33} = \sin^2\theta\mathrm{G}_{22} = -\left(2\frac{\ddot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} + \frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2}\right)\mathrm{a}^2\mathrm{r}^2\sin^2\theta$$

Nous appliquons maintenant les équations d'Einstein :

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\mathrm{g}_{\alpha\beta} = 8\pi\mathrm{G}\mathrm{T}_{\alpha\beta} \tag{3.27}$$

La composante « temps-temps » nous donne

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho \tag{3.28}$$

tandis que la composante « espace-espace » nous donne

$$2\frac{\ddot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} + \frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} = -8\pi\mathrm{G}\mathrm{p} \tag{3.29}$$

Les équations (3.28) et (3.29) sont appelées les équations de Friedmann. Remplacons l'éq.(3.28) dans l'éq.(3.29), nous obtenons l'équation

$$\frac{\ddot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} = -\frac{4\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho + 3\mathrm{p}\right) \tag{3.30}$$

Le signe moins global sur le côté droit de l'éq.(3.30) est une indication d'un Univers en décélération, en contradiction avec la preuve que l'Univers est non seulement en expansion, mais aussi en accélération. On peut y remédier en ajoutant simplement un terme positif à droite, dont le type le plus simple est une constante positive que nous désignons par Λ, connue sous le nom de constante cosmologique [36]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.31}$$

Ceci, à son tour, nécessite, en particulier, de modifier (3.28) et (3.29) également. Il est facile de vérifier que ces dernières équations seront modifiées en la suivante [36]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.32}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p + \Lambda \tag{3.33}$$

Il est facile de vérifier que ces équations peuvent être dérivées des équations d'Einstein modifiées [40, 33, 41, 42, 43]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{3.34}$$

Les équations (3.32)-(3.31) sont les nouvelles équations correspondantes aux équations de Friedmann données dans (3.28)-(3.30), en présence d'une constante cosmologique Λ, appelée équations de Friedmann modifiées. Il est facile de vérifier que les équations (3.32)-(3.31) peuvent être réduites à la forme suivante [36]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \tag{3.35}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}((\rho + \rho_\Lambda) + 3(p + p_\Lambda)) \tag{3.36}$$

où

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad ; \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} = -\rho_\Lambda \tag{3.37}$$

Donc une constante cosmologique joue le même rôle q'un gaz parfait de densité $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ et de pression négative $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

3.2.2 Densité critique et paramètres de densité

Les équations de Friedmann doivent être complétées par une autre équation, qui vient de la conservation du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, qui exprime la conservation de l'énergie. L'équation de conservation de l'énergie peut être directement dérivée des deux équations de Friedmann (3.33) et (3.31), en éliminant $\ddot{a}$ de ces équations on trouve de nouveau l'équation de conservation de l'énergie

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \mathrm{p}\right)\frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} = 0 \tag{3.38}$$

Nous supposons maintenant que le fluide parfait obéit à l'équation d'état barotrope $\mathrm{p} = \mathrm{w}\rho$, où w est une constante, qui prend la valeur $w = -1$ pour le vide, $w = 0$ pour la poussière et $w = \frac{1}{3}$ pour le rayennement relativiste. La solution de cette équation est

$$\rho\left(\mathrm{t}\right) = \rho_0 \mathrm{a}^{-3(\mathrm{w}+1)}$$

où $\rho_0 = \rho\left(\mathrm{t}_0\right)$ est la densité d'énergie du fluide à l'heure actuelle t_0. Pour un fluide constitué par la matière, $w = 0$, la radiation, $w = \frac{1}{3}$, et l'énergie sombre, $w = -1$, respectivement, nous avons donc

$$\rho = \rho_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-3} + \rho_{\mathrm{r},0}\mathrm{a}^{-4} + \rho_{\Lambda,0} \tag{3.39}$$

où $\rho_{\mathrm{m},0}$, $\rho_{\mathrm{r},0}$ et $\rho_{\Lambda,0}$ sont les densités d'énergie actuelles de la poussière, du rayonnement et de l'énergie du vide invariante. Nous commençons par l'équation de Friedmann (3.32), écrite maintenant comme

$$\mathrm{H}^2 + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \rho_{\Lambda}\right) \tag{3.40}$$

où $\mathrm{H}\left(\mathrm{t}\right) = \frac{\dot{\mathrm{a}}(\mathrm{t})}{\mathrm{a}(\mathrm{t})}$ est le paramètre de Hubble. L'éq.(3.40) est équivalent à

$$1 + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2\mathrm{H}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \rho_{\Lambda}\right) \tag{3.41}$$

Définissant la densité critique $\rho_{\mathrm{cr}}\left(\mathrm{t}\right)$ par

$$\rho_{\mathrm{cr}}\left(\mathrm{t}\right) = \frac{3\mathrm{H}^2\left(\mathrm{t}\right)}{8\pi\mathrm{G}}$$

Par conséquent, si $\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}} + \rho_{\Lambda} = \rho_{\mathrm{cr}}$, on obtient $\mathrm{k} = 0$ et l'Univers est, dans ce cas, spatialement plat. La valeur actuelle de la densité critique est [40, 33, 41, 42, 43]

$$\rho_{\mathrm{cr};0} = 1.878\mathrm{h}^2 \times 10^{-29}\,\mathrm{g.\,cm}^{-3}$$

Définissant ensuite les rapports de densité sans dimension (bien que dépendant du temps), appelées paramètres de densité

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\rho_{\mathrm{m}} \quad ; \quad \Omega_{\mathrm{r}} = \frac{\rho_{\mathrm{r}}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\rho_{\mathrm{r}} \quad ; \quad \Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}^2}$$

Avec ces définitions, l'éq.(3.40) devient

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{H}^2\mathrm{a}^2} = \Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{r}} + \Omega_{\Lambda} - 1 \tag{3.42}$$

La valeur numérique de $\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{r}} + \Omega_{\Lambda}$ nous indique donc l'indice de courbure k

$$\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{r}} + \Omega_{\Lambda} < 1 \Rightarrow \mathrm{k} = -1 \quad \text{espace ouvert}$$

$$\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{r}} + \Omega_{\Lambda} > 1 \Rightarrow \mathrm{k} = +1 \quad \text{espace fermé}$$

$$\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{r}} + \Omega_{\Lambda} = 1 \Rightarrow \mathrm{k} = 0 \quad \text{espace plat}$$

Les observations cosmologiques suggèrent que $\Omega_{\mathrm{m},0} + \Omega_{\mathrm{r},0} + \Omega_{\Lambda;0} \simeq 1$, d'où $\Omega_{\mathrm{k},0} \simeq 0$, notre univers est donc proche d'être spatialement plat $\mathrm{k} = 0$. À partir des dernières données Planck (Ade et al. 2016) nous savons que [40]

$$\Omega_{\mathrm{k},0} = 0.0008 \pm 0.0040$$

Si nous combinons maintenant l'équation de Friedmann (3.32) avec (3.39), nous pouvons réécrire l'équation de Friedmann sous la forme

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho_{\mathrm{m},0}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_0}\right)^{-3} + \rho_{\mathrm{r},0}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_0}\right)^{-4} + \rho_{\Lambda,0}\right) \tag{3.43}$$

Au lieu des densités, nous utilisons les paramètres de densité $\Omega_{\mathrm{m}}, \Omega_{\mathrm{r}}, \Omega_{\Lambda}$ et $\Omega_{\mathrm{k}} = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{H}^2\mathrm{a}^2}$, pour réécrire l'équation de Friedmann (3.43) sous la forme

$$\dot{\mathrm{a}}^2 = \left(\Omega_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-1} + \Omega_{\mathrm{r},0}\mathrm{a}^{-2} + \Omega_{\Lambda;0}\mathrm{a}^2 + \Omega_{\mathrm{k};0}\right)\mathrm{H}_0^2 \tag{3.44}$$

où

$$\Omega_{\mathrm{m},0} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}_0^2}\rho_{\mathrm{m},0} \quad ; \quad \Omega_{\mathrm{r},0} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}_0^2}\rho_{\mathrm{r},0} \quad ; \quad \Omega_{\Lambda;0} = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}_0^2} \quad ; \quad \Omega_{\mathrm{k};0} = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{H}_0^2}$$

L'équation de Friedmann (3.40) peut être reécrite sous la forme [40, 33, 41, 42, 46]

$$\mathrm{H}_0\mathrm{t} = \int_0^{\mathrm{a}} \left(\Omega_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-1} + \Omega_{\mathrm{r},0}\mathrm{a}^{-2} + \Omega_{\Lambda;0}\mathrm{a}^2 + \Omega_{\mathrm{k};0}\right)^{-1/2} \mathrm{da} \tag{3.45}$$

3.3 Modèles cosmologiques de Friedmann-Lemaître

3.3.1 Univers plat dominé par la matière et le rayonnement

Univers plat dominé par la matière : La densité d'énergie de la matière froide (non relativiste) ($v \ll c$) est dominée par son énergie de masse au repos et la pression qu'elle exerce est négligeable ($p \ll \rho$). Dans ce contexte, le terme «matière» est utilisé pour « matière non relativiste » et désigne tout type de matière exerçant une pression négligeable, $p = 0$. Un tel fluide sans pression est appelé poussière [37, 38]. Nous commençons par résoudre l'équation de conservation de l'énergie (3.38)

$$\dot{\rho}_{\mathrm{m}} + 3\left(\rho_{\mathrm{m}} + \mathrm{p}_{\mathrm{m}}\right)\frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} = 0 \tag{3.46}$$

Pour les particules non relativistes on a $\mathrm{p}_{\mathrm{m}} = 0$. Une façon de le résoudre est de le reécrire, comme suit [38]

$$\frac{\mathrm{d}\left(\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{a}^3\right)}{\mathrm{da}} = 0$$

La solution de cette équation est $\rho_{\mathrm{m}}\mathrm{a}^3 = cst.$, la constante peut être évaluée à l'aide des valeurs actuelles de $\rho_{\mathrm{m}}(\mathrm{t})$ et $\mathrm{a}(\mathrm{t})$. Ainsi,

$$\rho_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) = \rho_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-3}$$

où $\rho_{\mathrm{m},0} = \rho_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}_0)$ est la densité d'énergie du fluide à l'heure actuelle t_0. Après avoir résolu l'évolution de la densité en termes de $\mathrm{a}(\mathrm{t})$, nous devons maintenant trouver comment varie $\mathrm{a}(\mathrm{t})$ avec le temps en utilisant l'équation de Friedmann (3.32),

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_{\mathrm{m}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-3} \tag{3.47}$$

Pour $\mathrm{k} = 0$, l'équation de Friedmann (3.47) prend la forme suivante

$$\mathrm{a}^{1/2}\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_{\mathrm{m},0}} \tag{3.48}$$

l'intégration donne

$$\mathrm{a}(\mathrm{t}) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_{\mathrm{m},0}}\mathrm{t}\right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2}\mathrm{H}_0\mathrm{t}\right)^{2/3} \tag{3.49}$$

où $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{m,0}}$est le paramètre Hubble H_0 au moment t_0. Cette solution est illustrée à la figure (3.1). L'instant présent t_0 est défini en posant $a(t)$ égale à 1, ainsi de l'âge de l'univers t_0 est donné par $t_0 = \frac{2}{3H_0}$. La densité d'énergie du fluide évolue selon la loi

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0}a^{-3} = \rho_{m,0}\frac{t_0^2}{t^2}$$

Dans cette solution, l'Univers s'étend pour toujours, mais le taux d'expansion $H(t)$ diminue avec le temps.

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3t} \tag{3.50}$$

Le paramètre de décélération est positif [40, 44, 45]

$$q(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

La vitesse d'expansion est donné par

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3t_0}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/3}$$

Ainsi $a \to 0$ alors que $\dot{a} \to +\infty$ et $\rho_m \to +\infty$ lorsque $t \to 0$. La vitesse d'expansion de l'univers est infinie lorsque nous approchons du temps initial $t = 0$. Ce point initial est appelé le Big Bang. Remarquez que malgré l'attraction de la gravité, la matière dans l'Univers se dilate pour toujours [38].

Univers plat dominé par les radiations : Les particules de lumière se déplacent, assez naturellement, à la vitesse de la lumière. Leur énergie cinétique conduit à une force de pression, la pression de rayonnement, qui, en utilisant la théorie standard du rayonnement, peut être démontrée comme étant $p = \rho/3$. Plus généralement, toutes les particules se déplaçant à des vitesses hautement relativistes ont cette équation d'état, les neutrinos en étant un exemple évident [38]. Nous commençons par résoudre l'équation de conservation de l'énergie (3.38) pour les rayonnements

$$\dot{\rho}_r + 3(\rho_r + p_r)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{3.51}$$

Pour les particules non relativistes on a $p_r = \rho_r/3$. Une façon de le résoudre est de le réécrire, comme suit [38]

$$\frac{d(\rho_r a^3)}{da} = -\frac{(\rho_r a^3)}{a}$$

La solution de cette équation est $\rho_r a^4 = cst.$, La constante peut être évaluée à l'aide des valeurs actuelles de de $\rho_m(t)$ et $a(t)$. Ainsi,

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4}$$

où $\rho_{r,0} = \rho_r(t_0)$ est la densité d'énergie du fluide à l'heure actuelle t_0. Après avoir résolu l'évolution de la densité en fonction de a, nous devons maintenant trouver comment a varie avec le temps en utilisant l'équation de Friedmann (3.32),

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_r = \frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0} a^{-4} \tag{3.52}$$

Pour $k = 0$, l'équation de Friedmann (3.52) prend la forme suivante

$$a\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}} = \sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 \tag{3.53}$$

l'intégration est immédiate, le facteur d'échelle est donné par

$$a(t) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 t\right)^{1/2} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \tag{3.54}$$

L'instant présent t_0 est défini en posant $a(t)$ égale à 1, ainsi de l'âge de l'univers t_0 est donné par $t_0 = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{r,0}} H_0}$. La densité d'énergie du fluide évolue selon la loi

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4} = \rho_{r,0}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2$$

Dans cette solution, l'Univers s'étend pour toujours, mais le taux d'expansion $H(t)$ diminue avec le temps.

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{2t} \tag{3.55}$$

Remarquez que l'Univers se dilate plus lentement si le rayonnement est dominé que si la matière est dominée. Le paramètre de décélération est positif

$$q(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right) - 1 = 1$$

La vitesse d'expansion est donné par

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2t_0}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2}$$

Ainsi $a \to 0$ alors que $\dot{a} \to +\infty$ et $\rho_{\mathrm{r}} \to +\infty$ lorsque $t \to 0$. La vitesse d'expansion de l'univers est infinie lorsque nous approchons du temps initial $t = 0$. Ce point initial est appelé le Big Bang. Remarquez que malgré l'attraction de la gravité, la matière dans l'Univers ne se récollaste pas mais se dilate pour toujours [40, 44, 45, 38].

Univers plat dominé par le rayonnement et la matière : Une situation plus générale est lorsque l'on a un mélange de matière et de rayonnement. Il y a deux équations distinctes, une pour chacune des deux composantes du fluide, nous avons donc

$$\rho = \rho_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-3} + \rho_{\mathrm{r},0}\mathrm{a}^{-4} \tag{3.56}$$

Nous commençons par l'équation de Friedmann (3.32), écrite maintenant comme

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_{\mathrm{r}}\right) = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-3} + \rho_{\mathrm{r},0}\mathrm{a}^{-4}\right) \tag{3.57}$$

Au lieu des densités, nous utilisons les paramètres de densité $\Omega_{\mathrm{m}}, \Omega_{\mathrm{r}}$, pour réécrire l'équation de Friedmann (3.43) sous la forme

$$\dot{\mathrm{a}}^2 = \left(\Omega_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-1} + \Omega_{\mathrm{r},0}\mathrm{a}^{-2}\right)\mathrm{H}_0^2 \tag{3.58}$$

où

$$\Omega_{\mathrm{m},0} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}_0^2}\rho_{\mathrm{m},0} \quad ; \quad \Omega_{\mathrm{r},0} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}_0^2}\rho_{\mathrm{r},0}$$

L'équation de Friedmann (3.40) peut être reécrite sous la forme

$$\mathrm{H}_0\mathrm{t} = \int_0^{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}\mathrm{x}^{-1} + \Omega_{\mathrm{r},0}\mathrm{x}^{-2}}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}\int_0^{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{xdx}}{\sqrt{\mathrm{x} + \mathrm{a}_{\mathrm{eq}}}} \tag{3.59}$$

où $\mathrm{a}_{\mathrm{eq}} = \frac{\Omega_{\mathrm{r},0}}{\Omega_{\mathrm{m},0}}$ est le facteur d'échelle évalué au moment où les densités de matière et de rayonnement étaient égales. La substitution $\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}\mathrm{y} = \mathrm{x}$ nous permet de reécrire l'intégrale (3.59) sous la forme

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}^{3/2}}{\mathrm{H}_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}\int_0^{\mathrm{a}/\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}} \frac{\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{y}+1}}\mathrm{dy} \tag{3.60}$$

ou de manière équivalente

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}^{3/2}}{\mathrm{H}_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}\int_0^{\mathrm{a}/\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}} \sqrt{\mathrm{y}+1}\mathrm{dy} - \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}^{3/2}}{\mathrm{H}_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}\int_0^{\mathrm{a}/\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{y}+1}}\mathrm{dy} \tag{3.61}$$

L'intégration conduit à la solution

$$\mathrm{t} = \frac{2\mathrm{a}_{\mathrm{eq}}^{3/2}}{3\mathrm{H}_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}\left[\left(\mathrm{a}/\mathrm{a}_{\mathrm{eq}} + 1\right)\sqrt{\mathrm{a}/\mathrm{a}_{\mathrm{eq}} + 1} - 3\sqrt{\mathrm{a}/\mathrm{a}_{\mathrm{eq}} + 1} + 2\right] \tag{3.62}$$

ou de manière équivalente

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}}\left\{(a - 2a_{eq})\sqrt{a + a_{eq}} + 2a_{eq}^{3/2}\right\} \tag{3.63}$$

Posons $a(t_{eq}) = a_{eq}$ dans l'équation (3.63) on obtiet le moment de l'égalité entre la matière et le rayonnement, t_{eq},

$$t_{eq} = \frac{2}{3H_0}\frac{a_{eq}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\left(2 - \sqrt{2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{H_0\Omega_{m,0}^2} \tag{3.64}$$

A partir des dernières données Planck (Ade et coll. 2016) nous savons que [40]

$$\Omega_{m,0} \simeq 0.30 \quad ; \quad \Omega_{r,0} \simeq 3.8 \times 10^{-5}$$

et $H_0^{-1} \simeq 1.4 \times 10^{10}$ year, le moment de l'égalité entre la matière et le rayonnement est donc

$$t_{eq} \approx 3.7 \times 10^{-6} H_0^{-1} \simeq 14230 \text{ year}$$

Ceci est suffisamment court pour justifier notre ignorance des effets des rayonnements lors du calcul de l'âge de l'univers. Pour $a \ll a_{eq}$, l'univers est bien décrit par un modèle plat dominé par le rayonnement

$$t \approx \frac{1}{6H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}}a^2 \quad ; \quad a(t) \approx \left(6H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}t\right)^{1/2} \quad ; \quad a \ll a_{eq} \tag{3.65}$$

Dans la limite $a \gg a_{eq}$, le résultat approximatif pour $a(t)$ devient [40, 42, 46]

$$t \approx \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}a^{3/2} \quad ; \quad a(t) \approx \left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}t\right)^{2/3} \quad ; \quad a \gg a_{eq} \tag{3.66}$$

3.3.2 Univers fermé dominé par la matière et le rayonnement

Univers fermé dominé par la matière : Pour un Univers fermé dominé par la matière, on a $k = +1$, la densité de courbure est négative, $\Omega_{k;0} < 0$ et $\Omega_{m,0} = 1 - \Omega_{k;0} > 1$. Les solutions analytiques pour un Univers fermé dominé par la matière avec courbure spatiale $k = +1$ peuvent être données sous forme paramétrique. Nous commençons par l'équation de Friedmann (3.32), écrite maintenant comme

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m = \frac{8\pi G}{3}\rho_{m,0}a^{-3} = \Omega_{m,0}H_0^2 a^{-3} \tag{3.67}$$

ou de manière équivalente

$$a^2\dot{a}^2 = 2\alpha a - a^2 = \alpha^2 - (a-\alpha)^2 \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}\Omega_{m;0}H_0^2 \tag{3.68}$$

où $\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{m,0}$. La valeur actuelle H_0 du paramètre de Hubble $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ peut être obtenue en posant $a(t_0) = 1$ dans l'éq.(3.67), d'où

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}-1}} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}\Omega_{m;0}H_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m;0}}{\Omega_{m,0}-1} \tag{3.69}$$

En terme de la nouvelle variable $b = a - \alpha$, cette équation peut être écrite comme

$$b\frac{db}{dt} = \sqrt{\alpha^2 - b^2} \tag{3.70}$$

Pour résoudre cette équation, nous considérons ce systéme d'équations

$$\frac{db}{d\eta} = \sqrt{\alpha^2 - b^2} \quad ; \quad \frac{dt}{d\eta} = b \tag{3.71}$$

Une intégration, avec les conditions initiales $a(0) = 0$ et $\dot{a}(0) \geq 0$, donne la solution suivante

$$\eta = \int \frac{db}{\sqrt{\alpha^2 - b^2}} = \arcsin(b/\alpha) + \frac{\pi}{2} \tag{3.72}$$

d'où

$$a(\eta) = \alpha\left[1 + \sin\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \alpha(1 - \cos(\eta))$$

Cette solution est illustrée à la figure (3.1). Le temps cosmique est donné par

$$t = \int a(\eta)\, d\eta = \alpha \int (1 - \cos(\eta))\, d\eta = \alpha(\eta - \sin\eta)$$

Le facteur d'échelle et le temps cosmique sont donnés par une équation paramétrique d'un cycloïde

$$a(\eta) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m;0}}{\Omega_{m,0}-1}(1 - \cos(\eta)) \quad ; \quad t = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m;0}}{\Omega_{m,0}-1}(\eta - \sin\eta)$$

$a(\eta)$ augmente de zéro à $\eta = 0$, $t = 0$; atteint un maximum $a_{max} = \frac{1}{2}\Omega_{m;0}H_0^2$ à $\eta_{max} = \pi$, $t_{max} = \frac{\pi}{2}\Omega_{m;0}H_0^2$, puis retourne à zéro à $\eta_{end} = 2\pi$, $t_{end} = \pi\Omega_{m;0}H_0^2$. L'instant présent t_0 est définie par la fait que $a(t_0) = a_0 = 1$, l'âge de l'univers est donnée par

$$t_0 = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m;0}}{\Omega_{m,0}-1}\left(\cos^{-1}\left(\frac{2-\Omega_{m;0}}{\Omega_{m;0}}\right) - 2\frac{\sqrt{\Omega_{m;0}-1}}{\Omega_{m;0}}\right)$$

Le paramètre de Hubble est donné par

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = \frac{\dot{\mathrm{a}}(\mathrm{t})}{\mathrm{a}(\mathrm{t})} = \frac{\Omega_{\mathrm{m};0} - 1}{\Omega_{\mathrm{m},0}} \frac{2\sin\eta}{\alpha\left(1-\cos(\eta)\right)^2}$$

Le paramètre de décélération est toujours positif

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{1}{1+\cos(\eta)}$$

Univers ouvert dominé par la matière : Pour un univers ouvert dominé par la matière, on a $\mathrm{k} = -1$, la densité de courbure est positive, $\Omega_{\mathrm{k};0} > 0$ et $\Omega_{\mathrm{m},0} = 1 - \Omega_{\mathrm{k};0} < 1$. Des solutions analytiques pour un Univers ouvert dominé par la matière peuvent être données sous forme paramétrique. Nous commençons par l'équation de Friedmann (3.32), écrite maintenant comme

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{1}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_{\mathrm{m}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_{\mathrm{m},0}\mathrm{a}^{-3} = \Omega_{\mathrm{m},0}\mathrm{H}_0^2\mathrm{a}^{-3} \tag{3.73}$$

ou de manière équivalente

$$\mathrm{a}^2\dot{\mathrm{a}}^2 = \mathrm{a}^2 + 2\alpha\mathrm{a} = (\mathrm{a}+\alpha)^2 - \alpha^2 \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}\Omega_{\mathrm{m};0}\mathrm{H}_0^2 \tag{3.74}$$

La valeur actuelle H_0 du paramètre de Hubble $\mathrm{H}(\mathrm{t}) = \frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}}$ peut être obtenue en posant $\mathrm{a}(\mathrm{t}_0) = 1$ dans l'éq.(3.73), d'où

$$\mathrm{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m},0}}} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}\Omega_{\mathrm{m};0}\mathrm{H}_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1-\Omega_{\mathrm{m},0}} \tag{3.75}$$

En terme de la nouvelle variable $\mathrm{b} = \mathrm{a} + \alpha$, cette équation peut être écrite comme

$$\mathrm{b}\frac{\mathrm{db}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{\mathrm{b}^2 - \alpha^2} \tag{3.76}$$

Pour résoudre cette équation, nous considérons ce systéme d'équations

$$\frac{\mathrm{db}}{\mathrm{d}\eta} = \sqrt{\mathrm{b}^2 - \alpha^2} \quad ; \quad \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\eta} = \mathrm{b} \tag{3.77}$$

Une intégration, avec les conditions initiales $\mathrm{a}(0) = 0$ et $\dot{\mathrm{a}}(0) \geq 0$, nous donne la solution suivante

$$\eta = \int \frac{\mathrm{db}}{\sqrt{\mathrm{b}^2 + \alpha^2}} = \cosh^{-1}(\mathrm{b}/\alpha) \quad ; \quad \mathrm{a}(\eta) = \alpha\left(\cosh(\eta) - 1\right) \tag{3.78}$$

Le temps cosmique est donné par

$$\mathrm{t} = \int \mathrm{a}\left(\eta\right) \mathrm{d}\eta = \alpha \int \left(\cosh\left(\eta\right) - 1\right) \mathrm{d}\eta = \alpha \left(\sinh \eta - \eta\right)$$

Le facteur d'échelle et le temps cosmique sont donnés par une équation paramétrique

$$\mathrm{a}\left(\eta\right) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1 - \Omega_{\mathrm{m};0}} \left(\cosh\left(\eta\right) - 1\right) \quad ; \quad \mathrm{t} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1 - \Omega_{\mathrm{m};0}} \left(\sinh \eta - \eta\right)$$

Cette solution est illustrée à la figure (3.1). L'instant présent t_0 est définie par la fait que $\mathrm{a}\left(\mathrm{t}_0\right) = \mathrm{a}_0 = 1$, l'âge de l'univers est donnée par

$$\mathrm{t}_0 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1 - \Omega_{\mathrm{m};0}} \left(2 \frac{\sqrt{1 - \Omega_{\mathrm{m};0}}}{\Omega_{\mathrm{m};0}} - \cosh^{-1}\left(\frac{2 - \Omega_{\mathrm{m};0}}{\Omega_{\mathrm{m};0}}\right)\right)$$

Le paramètre de Hubble est donné par

$$\mathrm{H}\left(\mathrm{t}\right) = \frac{\dot{\mathrm{a}}\left(\mathrm{t}\right)}{\mathrm{a}\left(\mathrm{t}\right)} = \frac{\sinh \eta}{\alpha \left(\cosh\left(\eta\right) - 1\right)^2}$$

Le paramètre de décélération est toujours positif [43, 33, 40]

$$\mathrm{q}\left(\mathrm{t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{1}{\mathrm{a}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{1}{1 + \cosh\left(\eta\right)}$$

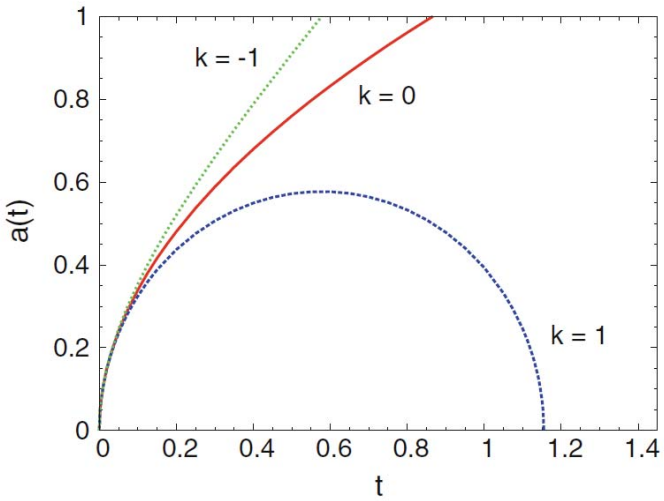

Figure 3.1 La variation du facteur d'échelle a en fonction de temps t pour les trois types d'univers dominés par le rayonnement.

Univers ouvert dominé par les rayonnements : $k = -1$ L'équation de Friedmann pour un Univers ouvert dominé par les rayonnements

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_r = \Omega_{r;0}H_0^2 a^{-4} \tag{3.79}$$

peut être reécrite sous la forme suivante

$$\Omega_{r;0}H_0^2\left(b\dot{b}\right)^2 - b^2 = 1 \quad ; \quad a = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 b \tag{3.80}$$

ou de manière équivalente

$$\sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 b\frac{db}{dt} = \sqrt{1+b^2}$$

où $\Omega_{r;0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{r,0}$ et H_0 est la constante de Hubble. Pour résoudre cette équation, nous considérons ce systéme d'équations

$$\frac{db}{d\eta} = \sqrt{1+b^2} \quad ; \quad \frac{dt}{d\eta} = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 b \tag{3.81}$$

Une intégration simple donne

$$\eta = \int \frac{db}{\sqrt{1+b^2}} = \operatorname{arcsinh}(b) + \eta_0 \tag{3.82}$$

Avec la condition initiale $b(0) = 0$, la solution générale $b(\eta)$ devient $b(\eta) = \sinh(\eta)$, d'où

$$a(\eta) = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 \sinh(\eta)$$

Avec la condition initiale $t(0) = 0$, le temps $t(\eta)$ est donné par

$$t(\eta) = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 \int \sin(\eta)\, d\eta = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 (\cosh\eta - 1)$$

En utilisant les relations

$$a^2 = \Omega_{r;0}H_0^2 \sinh^2(\eta) \quad ; \quad \left(\sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 + t\right)^2 = \Omega_{r;0}H_0^2 \cosh^2\eta$$

nous trouvons la forme suivante poue le facteur d'échelle $a(t)$

$$a(t) = \sqrt{(2t_{max} + t)\, t} \quad ; \quad t_{max} = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0 \tag{3.83}$$

Ainsi $a \to 0$ alors lorsque $t \to 0$. La vitesse d'expansion de l'univers est

$$\dot{a}(t) = \frac{t_{max} + t}{\sqrt{(2t_{max} - t)\, t}} \tag{3.84}$$

La vitesse d'expansion de l'univers est infinie lorsque nous approchons du temps initial $t = 0$. Ce point initial où $t = 0$ est appelé le Big Bang. L'expansion de l'univers continue sans cesse. L'instant présent t_0 est défini en posant $\mathrm{a}(\mathrm{t})$ égale à 1 dans l'équation (3.83),

$$\mathrm{t}^2 + 2\sqrt{\Omega_{\mathrm{r};0}}\mathrm{H}_0\mathrm{t} - 1 = 0 \tag{3.85}$$

ainsi de l'âge de l'univers t_0 est donné par

$$\mathrm{t}_0 = \sqrt{\Omega_{\mathrm{r};0}\mathrm{H}_0^2 + 1} - \sqrt{\Omega_{\mathrm{r};0}\mathrm{H}_0^2}$$

Le paramètre de Hubble est donné par [46, 33, 40, 30]

$$\mathrm{H} = \mathrm{a}^{-2}\sqrt{\Omega_{\mathrm{r};0}\mathrm{H}_0^2 + \mathrm{a}^2} = \frac{\mathrm{t}_{\mathrm{max}} + \mathrm{t}}{(2\mathrm{t}_{\mathrm{max}} + \mathrm{t})\,\mathrm{t}} \tag{3.86}$$

Le paramètre de décélération est toujours positif

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{\mathrm{t}_{\mathrm{max}}^2}{(\mathrm{t}_{\mathrm{max}} + \mathrm{t})^2} > 0$$

3.4 Univers plat dominé par la matière et l'énergie du vide

L'explication la plus simple de l'accélération apparente de l'univers aujourd'hui pourrait être fournie par une densité d'énergie non nulle de l'espace vide $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi\mathrm{G}}$. Une situation plus générale est lorsque l'on a un mélange de constante cosmologique et de matière ou de rayonnement. Il y a deux équations distinctes, une pour chacune des deux composantes du fluide, nous avons donc

$$\rho = \rho_{\mathrm{ms},0}\mathrm{a}^{-\mathrm{s}} + \rho_{\Lambda,0} \tag{3.87}$$

où $\rho_{\mathrm{ms},0}$ est la densité d'énergie du fluide à l'heure actuelle t_0, $\mathrm{s} = 3$ pour la matière et $\mathrm{s} = 4$ pour le rayonnement. Commençons par l'équation de Friedmann (3.32), écrite maintenant comme

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho_{\mathrm{ms}} + \rho_\Lambda\right) = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\left(\rho_{\mathrm{ms},0}\mathrm{a}^{-\mathrm{s}} + \rho_{\Lambda,0}\right) \tag{3.88}$$

Au lieu des densités, nous utilisons les paramètres de densité $\Omega_{\mathrm{ms}}, \Omega_\Lambda$,

$$\Omega_{\mathrm{ms}} = \frac{\rho_{\mathrm{ms}}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\rho_{\mathrm{ms}} \quad ; \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}^2}$$

pour reécrire l'équation de Friedmann (3.88) sous la forme

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 a^{s-2}\dot{a}^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \Omega_{\Lambda,0} H_0^2 \left(a^s + \frac{\Omega_{ms,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right) = \omega^2 \left(a^s + a_{eq}^s\right) \tag{3.89}$$

où $\omega = \frac{s}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0$ et $a_{eq} = \left(\frac{\Omega_{ms,0}}{\Omega_{\Lambda;0}}\right)^{1/s}$ est le facteur d'échelle auquel les deux densités $\rho_{ms}(t)$ et $\rho_\Lambda(t)$ étaient égales. Pour résoudre cette l'équation (3.89), nous introduisons la fonction $b = \left(\frac{a}{a_{eq}}\right)^{\frac{s}{2}}$, l'équation (3.89) prend la forme

$$\frac{db}{dt} = \omega\sqrt{b^2+1} \tag{3.90}$$

L'intégration de cette équation, avec condition initiale $a(t) = 0$, donne

$$\omega t = \int \frac{db}{\sqrt{b^2+1}} = \sinh^{-1}(b) \quad ; \quad b = \sinh(\omega t)$$

Pour la matière $s = 3$, le facteur d'échelle $a(t)$ est donné par

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda;0}}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t\right)$$

L'âge de l'univers t_0 est donné par

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}}\right)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \tag{3.91}$$

Utilisant la valeur observée $\Omega_{\Lambda;0} = 0.7$, $H_0^{-1} = 1.4 \times 10^{10}$ year, on a donc $t_0 \approx 1\,3.49\,7 \times 10^9$ year. Pour la matière, le facteur d'échelle $a(t)$ est donné par [40, 44, 45, 47]

$$a(t) = 0.75 \sinh^{2/3}(1.2\, t/t_0)$$

La courbe du facteur d'échelle $a(t)$ en fonction du temps t est tracée dans la figure (3.2).

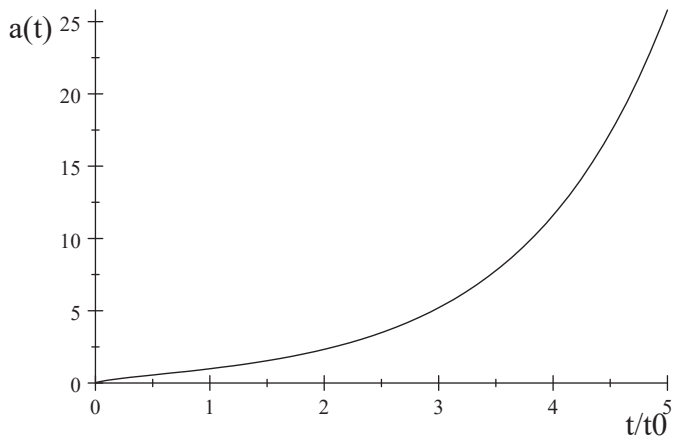

Figure 3.2 Le facteur d'expansion en fonction du temps t/t_0

Le paramètre de décélération Le paramètre de décélération q est un facteur très important pour comprendre l'évolution cosmique. En particulier, après l'émergence de l'idée d'un Univers en accélération, le rôle de ce paramètre est devenu encore plus important. En effet, certains travaux récent ont démontré que l'accélération actuelle est un phénomène du passé récent et a été précédée d'une phase de décélération [29]. Le paramètre de Hubble est donné par

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\mathrm{H}_0 \coth\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\mathrm{H}_0\mathrm{t}\right) \tag{3.92}$$

Le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1$$

est donné par [44, 45]

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\left(1 - 3\tanh^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\mathrm{H}_0\mathrm{t}\right)\right)$$

$$\mathrm{t} < \frac{2}{3}\frac{\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\mathrm{H}_0}$$

La courbe du paramètre de décélération $q(t)$ est tracée dans la figure (3.3). Le paramètre de décélération est positif lorsque $\mathrm{t} < \frac{2}{3}\frac{\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\mathrm{H}_0}$, et il est négatif lorsque $\mathrm{t} > \frac{2}{3}\frac{\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\mathrm{H}_0}$, donc ce modèle décrit un univers en expansion accélérée pour t assez grand.

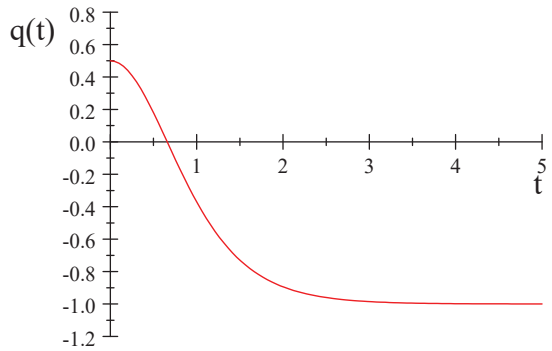

Figure 3.3 *La variation du paramètre de décélération q en fonction de temps*

Le temps t_Λ de transition entre la phase de décélération et la phase d'accélération est donné par

$$\mathrm{t}_\Lambda = \frac{2\sinh^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)}{3\mathrm{H}_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$$

En insérant la valeur $\Omega_{\Lambda;0} = 0.7$ et $H_0^{-1} \approx 14.38\text{Gyr}$, on trouve $t_\Lambda = 7.545 \times 10^9$ year. Pour la matière, le décalage cosmique correspondant est

$$z(t_\Lambda) = \frac{a(t_0)}{a(t_\Lambda)} - 1 = \left(\frac{2\Omega_{\Lambda;0}}{1-\Omega_{\Lambda;0}}\right)^{1/3} - 1$$

En insérant la valeur $\Omega_{\Lambda;0} = 0.7$ on trouve $z(t_\Lambda) = 0.67$ [40], [42], [44], [45].

Le temps $t_{m\Lambda}$ de transition de la matière vers la domination de l'énergie noire est donné par

$$t_{m\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}}H_0}\sinh^{-1}(1) \tag{3.93}$$

En insérant la valeur $\Omega_{\Lambda;0} = 0.7$, et $H_0^{-1} \approx 14.38\text{Gyr}$, on trouve $t_{m\Lambda} = 9.8 \times 10^9$ yr. En comparant le temps t_Λ de transition entre la phase de décélération à la phase d'accélération

$$t_\Lambda = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}\sinh^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$$

avec le temps $t_{m\Lambda}$ où l'energie noire devenait dominée,

$$t_{m\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}}H_0}\sinh^{-1}(1) \tag{3.94}$$

on conclut que le passage à un univers avec une expansion accélérée a eu lieu avant que l'univers devient dominé par l'énergie du vide, $t_\Lambda \simeq 0.75 t_{m\Lambda}$

$$\frac{t_\Lambda}{t_{m\Lambda}} = \frac{\sinh^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sinh^{-1}(1)} \simeq 0.75$$

Le décalage vers le rouge correspondant est

$$z(t_{m\Lambda}) = \left(\frac{\Omega_{\Lambda;0}}{1-\Omega_{\Lambda;0}}\right)^{1/3} - 1 \simeq 0.33$$

L'âge de l'univers : L'âge de l'univers $T = t_0$ est donné par

$$T = H_0^{-1}\int_0^1 \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}a^4 + \Omega_{k;0}a^2 + \Omega_{m,0}a + \Omega_{r,0}}} \tag{3.95}$$

En utilisant les valeurs de $\Omega_{\Lambda;0}, \Omega_{k;0}, \Omega_{m,0}$, et $\Omega_{r,0}$ indiquées ci-dessus, nous obtenons

$$T \simeq \frac{0.95}{H_0} \simeq 13.73 \times 10^9 \text{ années}$$

La valeur rapportée par Ade et al. [48]) est de $13.799 \times 10^9 \pm 0.021$ années. En négligeant le terme de rayonnement $\Omega_{r,0}$ et le terme de la courbure spatiale $\Omega_{k;0}a^2$, l'intégrale

$$T = H_0^{-1}\int_0^1 \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}a^4 + \Omega_{m,0}a}} \tag{3.96}$$

peut être fait en termes de fonctions élémentaires

$$\mathrm{T} = \frac{2\mathrm{H}_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m},0}}} \ln\left(\frac{\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m},0}}+1}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}}\right) \tag{3.97}$$

pour $\mathrm{H}_0^{-1} \simeq 14.38 \times 10^9$ year et $\Omega_{\mathrm{m},0} \simeq 0.31$, on a $\mathrm{T} \approx 13.74 \times 10^9$year [40, 42].

3.5 Solutions avec constante cosmologique dépendante du temps

3.5.1 Solutions avec paramètre d'état w indépendant du temps

Depuis la découverte de l'expansion accélérée de l'Univers, de grands efforts sont déployés pour trouver une explication satisfaisante de cette accélérée. La plupart des travaux liés à ce problème sont basés sur l'hypothèse qu'un type exotique d'énergie, appelé énergie sombre, est l'agent causal de cette accélération, bien que des explications alternatives soient également disponibles dans la littérature [26]. Considérons la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [26, 27, 28]

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{a}^2(\mathrm{t})\left\{\frac{1}{1-\kappa \mathrm{r}^2}\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right\} \tag{3.98}$$

Les équations de champ d'Einstein sont données par

$$\mathrm{G}_{\alpha\beta} + \Lambda \mathrm{g}_{\alpha\beta} = 8\pi \mathrm{G}\mathrm{T}_{\alpha\beta} \tag{3.99}$$

où Λ est la constante cosmologique, supposée ici dépendante du temps $\Lambda = \Lambda(\mathrm{t})$. Pour la métrique sphériquement symétrique considérée ci-dessus, les équations de champ d'Einstein avec une constante cosmologique dépendante du temps donnent les deux équations suivantes

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} = \frac{8\pi \mathrm{G}}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.100}$$

$$2\frac{\ddot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} + \frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}^2} - \Lambda = -8\pi \mathrm{G}\mathrm{p} \tag{3.101}$$

En éliminant $\frac{\dot{\mathrm{a}}^2}{\mathrm{a}^2}$ à partir de la première équation, nous obtenons l'équation

$$\frac{\ddot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} = -\frac{4\pi \mathrm{G}}{3}(\rho + 3\mathrm{p}) + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.102}$$

Des équations (3.100)-(3.101) on obtient l'équation suivante

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G\left(\rho + p\right) \tag{3.103}$$

Ensuite, nous différencions l'équation (3.100)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.104}$$

par rapport au temps nous trouvons

$$\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\dot{\rho} - \frac{\dot{\Lambda}}{6} \tag{3.105}$$

En comparant les équations (3.103) et (3.105), nous obtenons

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + p\right)\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G}$$

Cette équation exprime la conservation de l'énergie. Choisissons l'équation barotropique d'état

$$p = w\rho \tag{3.106}$$

où le paramètre w peut prendre les valeurs constantes 0, 1/3, -1 et +1 pour la poussière, le rayonnement, le fluide sous vide et le fluide rigide, respectivement. En utilisant l'équation (3.106), l'équation (3.102) se transforme en [27]

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3}\left(1 + 3w\right)\rho = +\frac{\Lambda}{3} \tag{3.107}$$

En utilisant les équations (3.100) -(3.107) pour éliminer ρ , on obtient finalement l'équation suivante [27]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \left(3\frac{1+w}{1+3w} - 1\right)\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} = \frac{1+w}{1+3w}\Lambda \tag{3.108}$$

En utilisant cet ansatz $\Lambda = 3\alpha H^2$ dans l'équation (3.108), où α est une constante et $H = \frac{\dot{a}}{a}$ est le paramètre de Hubble, alors pour l'univers plat ($k = 0$), l'équation (3.108) réduit à

$$2a\ddot{a} + \left[1 + 3\left(1 - \alpha\right)w - 3\alpha\right]\dot{a}^2 = 0 \tag{3.109}$$

ou de manière équivalente

$$2\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 3\left(1 - \alpha\right)\left(1 + w\right)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0 \tag{3.110}$$

En terme de la fonction $\mathrm{b} = \frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}}$,l'équation (3.110) devient

$$\frac{\mathrm{db}}{\mathrm{dt}} + \frac{3}{2}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\,\mathrm{b}^2 = 0 \tag{3.111}$$

Une intégration donne

$$\frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}} = \mathrm{b} = \frac{1}{\frac{3}{2}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\,\mathrm{t} + \mathrm{C}_1} \tag{3.112}$$

Une deuxième intégration nous donne la solution

$$\mathrm{a} = \mathrm{C}\left(\frac{3}{2}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\,\mathrm{t} + \mathrm{C}_1\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})}} \tag{3.113}$$

Si nous imposons la condition $\mathrm{a} \to 0$ comme $\mathrm{t} \to 0$, alors $\mathrm{C}_1 = 0$, la solution générale $\mathrm{a}(\mathrm{t})$ devient [27]

$$\mathrm{a}(\mathrm{t}) = \mathrm{D}\mathrm{t}^{\frac{2}{3(1-\alpha)(1+\mathrm{w})}} \quad ; \quad \mathrm{D} = \mathrm{C}\left(\frac{3}{2}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\right)^{\frac{2}{3(1-\alpha)(1+\mathrm{w})}} \tag{3.114}$$

où C est une constante d'intégration. La fonction de Hubble est donnée par

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = \frac{\dot{\mathrm{a}}(\mathrm{t})}{\mathrm{a}(\mathrm{t})} = \frac{2}{3(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\,\mathrm{t}} \tag{3.115}$$

La constante cosmologique et la densité sont données par [27]

$$\Lambda(\mathrm{t}) = 3\alpha\mathrm{H}^2 = \frac{4\alpha}{3(1-\alpha)^2(1+\mathrm{w})^2\,\mathrm{t}^2} \tag{3.116}$$

$$\rho(\mathrm{t}) = \frac{1-\alpha}{8\pi\mathrm{G}\alpha}\Lambda(\mathrm{t}) = \frac{1}{6\pi\mathrm{G}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})^2\,\mathrm{t}^2} \tag{3.117}$$

C'est évident à partir des éqs.(3.114) − (3.117) que $\alpha \neq 1$ pour la validité physique. De plus, un Λ répulsif exige que $\alpha > 0$ tandis que Eq.(3.117) montre que, pour une densité $\rho(\mathrm{t})$ positive, le paramètre α doit être inférieur à 1, donc on impose la contrainte $0 < \alpha < 1$. Le cas $\alpha \geq 1$ est soit non physique, soit incompatible avec un $\Lambda(\mathrm{t})$ dépendant du temps. En utilisant l'éq.(3.115) dans l'éq.(3.117) et la définition du paramètre de densité de matière cosmique $\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\rho_{\mathrm{m}}$, on obtient [27]

$$\Omega_{\mathrm{m}\alpha} = 1 - \alpha \tag{3.118}$$

où $\Omega_{\mathrm{m}\alpha}$ est le paramètre de densité d'énergie cosmique pour le modèle Λ dynamique lié à α. Encore une fois, en utilisant l'éq.(3.115) dans l'éq.(3.116) et la définition du paramètre de densité d'énergie du vide cosmique $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}^2}$, nous avons [27]

$$\Omega_{\Lambda\alpha} = \alpha \tag{3.119}$$

L'addition des éqs.(3.118) et (3.119) donne

$$\Omega_\alpha = \Omega_{\mathrm{m}\alpha} + \Omega_{\Lambda\alpha} = 1$$

qui est la relation entre la matière cosmique et les paramètres de densité du vide pour un univers plat (k = 0). Ce résultat analytique est cohérent avec la contrainte observationnelle sur la densité d'énergie totale de l'Univers, où $\Omega = 1.00 \pm 0.03$ mesurée à partir du premier pic acoustique dans le spectre de puissance angulaire des fluctuations CMB [50]. Les observations de SNeIa combinées aux contraintes de densité d'énergie totale du CMB [50] et à l'analyse combinée de la lentille gravitationnelle et de l'analyse dynamique stellaire [53] conduisent à la contrainte observationnelle sur le paramètre de densité de matière $\Omega_{\mathrm{m}} \simeq 0.3$ de l'Univers et le paramètre de densité d'énergie du vide cosmique $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ [27]. En utilisant Eq.(3.114), on peut obtenir une expression pour le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ comme

$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{3\,(1-\alpha)\,(1+\mathrm{w})}{2} - 1 \tag{3.120}$$

Ainsi, pour un univers en accélération [27]

$$\alpha > \frac{1+3\mathrm{w}}{3\,(1+\mathrm{w})} \tag{3.121}$$

D'après Eq(3.121), il est évident que pour la poussière (w = 0), un univers en accélération nécessite $\alpha > \frac{1}{3}$. Maintenant, α étant le paramètre de densité du vide cosmique en vertu de Eq.(3.119), nous constatons que ce modèle correspond à un univers en accélération puisque la valeur moderne acceptée de Ω_Λ est d'environ 0.7 et est beaucoup plus grande que $\frac{1}{3}$ [27]. Ainsi, la contrainte observationnelle sur le paramètre de densité de matière $\Omega_{\mathrm{m}} \simeq 0.3$ implique la valeur $\mathrm{q} \simeq -0.55$ [27]. Encore une fois, $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ sera positif si α est inférieur à $\frac{1}{3}$. Ainsi, pour un univers en décélération, le paramètre de densité du vide cosmique devrait être inférieur à $\frac{1}{3}$, ce qui est également cohérent avec les idées modernes. Par conséquent, nous constatons que, dans ce modèle, on peut étudier les phases d'accélération et de décélération de l'expansion cosmique puisque q dépend de α [27].

3.5.2 Solutions avec paramètre d'état dépendant de la fonction de Hubble

Les équations (3.100)-(3.102) peuvent être reécrite en terme de la fonction de Hubble [28]

$$\mathrm{H}^2 = \frac{8\pi \mathrm{G}}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.122}$$

$$\dot{\mathrm{H}} + \mathrm{H}^2 = -\frac{4\pi \mathrm{G}}{3}\left(1 + 3\mathrm{w}\right)\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.123}$$

En éliminant $\frac{\Lambda}{3}$ des équations (3.122)-(3.123) on obtient l'équation suivante

$$\dot{\mathrm{H}} = -\left(1 + \mathrm{w}\right)4\pi \mathrm{G}\rho \tag{3.124}$$

Utilisons donc l'ansatz $\dot{\Lambda} = \beta \mathrm{H}^3$, où β est une constante proportionnelle. Différenciant les éqs.(3.124) et (3.123) par rapport au temps

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathrm{H} = -\left(1 + \mathrm{w}\right)4\pi \mathrm{G}\dot{\rho} \tag{3.125}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathrm{H} + 2\mathrm{H}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{H} = -\frac{4\pi \mathrm{G}}{3}\left(1 + 3\mathrm{w}\right)\dot{\rho} + \frac{\dot{\Lambda}}{3} \tag{3.126}$$

et en éliminant $\dot{\rho}$ des équations (3.125)-(3.126) et en utilisant l'ansatz $\dot{\Lambda} = 3\beta \mathrm{H}^2$ nous obtenons

$$\frac{2}{\left(1 + \mathrm{w}\right)\mathrm{H}^3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathrm{H} + \frac{6}{\mathrm{H}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{H} = \beta \tag{3.127}$$

Si nous mettons $\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{P}$, alors l'équation Eq.(3.127) se réduit à

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dH}} + 3\left(1 + \mathrm{w}\right)\mathrm{H} = \beta\frac{\left(1 + \mathrm{w}\right)}{2\mathrm{P}}\mathrm{H}^3 \tag{3.128}$$

Résolvons maintenant l'équation Eq.(3.127) sous l'hypothèse spécifique suivante [28]

$$\mathrm{w}\left(\mathrm{t}\right) = -1 + \frac{2\tau \mathrm{P}}{\mathrm{H}} \tag{3.129}$$

où τ est un paramètre de notre modèle qui a une dimension de temps. En utilisant l'hypothèse (3.129), l'équation (3.128) devient [28]

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dH}} + 6\tau \mathrm{P} = \beta\tau \mathrm{H}^2 \tag{3.130}$$

Par conséquent, à partir de l'équation maîtresse (3.130) nous obtenons la solution comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dH}}\left(\mathrm{e}^{6\tau \mathrm{H}}\mathrm{P}\right) = \beta\tau \mathrm{H}^2\mathrm{e}^{6\tau \mathrm{H}} \tag{3.131}$$

d'où

$$\mathrm{P} = \frac{\beta}{108\tau^2}\left(18\tau^2\mathrm{H}^2 - 6\tau\mathrm{H} + 1\right) + \mathrm{B}e^{-6\tau\mathrm{H}} \tag{3.132}$$

Si nous imposons la condition $\mathrm{H}^{-3}\mathrm{P} \to 0$ lorsque $\mathrm{H} \to -\infty$, alors $\mathrm{B} = 0$, d'où

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{P} = \frac{\beta}{108\tau^2}\left(18\tau^2\mathrm{H}^2 - 6\tau\mathrm{H} + 1\right) \Rightarrow \frac{6\tau\mathrm{dH}}{18\tau^2\mathrm{H}^2 - 6\tau\mathrm{H} + 1} = \frac{\beta}{18\tau}\mathrm{dt} \tag{3.133}$$

La fonction de Hubble est donnée par

$$\mathrm{H} = \frac{1}{6\tau}\left[1 + \tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)\right] \tag{3.134}$$

L'expression de $\mathrm{a}(\mathrm{t})$ est donnée par [28]

$$\mathrm{a}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{A}e^{\frac{\mathrm{t}}{6\tau}}}{\cos^{\frac{3}{\beta}}\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)}$$

où C et A sont des constantes. La densité $\rho(\mathrm{t})$, le paramètre d'état $\mathrm{w}(\mathrm{t})$ et la pression $\mathrm{p}(\mathrm{t})$ sont donnés par [28]

$$2\rho(\mathrm{t}) = -\frac{1}{48\pi\mathrm{G}\tau^2}\left(1 + \tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)\right) \tag{3.135}$$

$$\mathrm{w}(\mathrm{t}) = -1 + \frac{\beta}{18}\frac{1 + \tan^2\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)} \tag{3.136}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{t}) = \frac{1}{48\pi\mathrm{G}\tau^2}\left(1 + \tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right) - \frac{\beta}{18\cos^2\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)}\right) \tag{3.137}$$

tandis que la densité $\Lambda(\mathrm{t})$ est donnée par [28]

$$\Lambda(\mathrm{t}) = \frac{\beta}{(6\tau)^3}\int\left[1 + \tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)\right]^3 \mathrm{dt}$$

$$\Lambda(\mathrm{t}) = \frac{1}{6\tau^3}\{\frac{\tau}{2}\tan^2\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right) + 3\tau\tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right) - 2\tau\ln\cos\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right) - 2\tau\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)\}$$

En utilisant (3.114), on peut obtenir une expression pour le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ comme [28]

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = -\left\{1 + \frac{\beta}{6}\frac{1 + \tan^2\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)}{\left(1 + \tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t} + \mathrm{C}\right)\right)^2}\right\} \tag{3.138}$$

Il ressort clairement de cette expression que si $\beta < 0$, alors $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ peut changer son signe en fonction de la valeur de la partie dépendante du temps. Ainsi, l'évolution cosmique décélérée-accélérée peut être trouvée dans ce modèle phénoménologique [28].

3.5.3 Solutions avec paramètre d'état dépendant du temps $\mathrm{w} = \left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^n - 1$

Ici, nous supposons que l'équation du paramètre d'état w est dépendante du temps de telle sorte que [29]

$$\mathrm{w}\left(\mathrm{t}\right) = \left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^n - 1$$

où τ est une constante ayant la dimension du temps. En utilisant l'équation (3.122) dans l'équation (3.123), on peut obtenir, après quelques manipulations, l'équation différentielle suivante [29]

$$\dot{\mathrm{H}} = \frac{1+\mathrm{w}}{2}\left(\Lambda - 3\mathrm{H}^2\right) \tag{3.139}$$

Utilisons l'ansatz $\Lambda = 3\alpha\mathrm{H}^2$ (où α est un paramètre libre) avec $\mathrm{w}\left(\mathrm{t}\right) = \left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^n - 1$. Alors l'équation (3.139) se réduit à

$$\dot{\mathrm{H}} = \frac{3}{2}\left(\alpha - 1\right)\left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^n \mathrm{H}^2 \tag{3.140}$$

Une intégration, nous donne

$$\mathrm{H} = \frac{2\left(\mathrm{n}+1\right)}{3\tau\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{\tau}{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{n}+1} \tag{3.141}$$

En écrivant $\mathrm{H} = \frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}}$ dans l'équation (3.141) et en l'intégrant davantage, nous obtenons [29]

$$\mathrm{a}\left(\mathrm{t}\right) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\frac{2(\mathrm{n}+1)}{3\tau(1-\alpha)}\left(\frac{\tau}{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{n}}} \tag{3.142}$$

$$\rho\left(\mathrm{t}\right) = \frac{\left(\mathrm{n}+1\right)^2}{6\pi\mathrm{G}\tau^2\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{\tau}{\mathrm{t}}\right)^{2\mathrm{n}+2} \tag{3.143}$$

$$\Lambda\left(\mathrm{t}\right) = \alpha\frac{4\left(\mathrm{n}+1\right)^2}{3\tau^2\left(1-\alpha\right)^2}\left(\frac{\tau}{\mathrm{t}}\right)^{2\mathrm{n}+2} \tag{3.144}$$

où C est une constante d'intégration. En utilisant les équations (3.122)-(3.141) et la définition du paramètre de densité de matière cosmique $\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\rho_{\mathrm{m}}$, et la définition du paramètre de densité d'énergie du vide cosmique $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}^2}$, on obtient [29]

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2}\rho_{\mathrm{m}} = 1-\alpha \quad ; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}^2} = \alpha$$

ainsi, en l'absence de toute courbure, la densité de matière Ω_{m} et la densité d'énergie sombre Ω_Λ sont liées par l'équation $\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_\Lambda = 1$. Le paramètre de décélération q est un facteur très important pour comprendre l'évolution cosmique. Ainsi, au cours de l'évolution cosmique, le paramètre de décélération q doit avoir subi un changement de signe d'une valeur positive à

une valeur négative [29]. En utilisant l'équation (3.141), on peut obtenir une expression pour le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ comme [29]

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{3(1-\alpha)}{2}\left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^{\mathrm{n}} - 1 \tag{3.145}$$

En terme du paramètre de densité de matière $\Omega_{\mathrm{m}} = 1 - \alpha$, le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ peut être écrit comme

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = -\left(1 - \frac{3}{2}\Omega_{\mathrm{m}}\left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^{\mathrm{n}}\right) \tag{3.146}$$

Il ressort clairement de cette expression qu'avec un choix approprié de n et τ, alors $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ peut changer son signe en fonction de la valeur de la partie dépendante du temps. Ainsi, l'évolution cosmique décélérante-accélérante peut être trouvée à partir du modèle actuel $\Lambda = 3\alpha\mathrm{H}^2$. Ainsi, pour l'Univers actuel rempli de poussière $\mathrm{w}(\mathrm{t}) = 0$, et $\Omega_{\mathrm{m}} \simeq 0.3$, la valeur de q_0 est donnée par [29]

$$\mathrm{q}_0 \simeq -\left(1 - \frac{3}{2}\Omega_{\mathrm{m}}\right) \simeq -0.55 \tag{3.147}$$

ce qui est en bon accord avec la gamme actuelle acceptée de q_0 pour un Univers en accélération [29].

3.5.4 Solutions avec paramètre d'état dépendant du temps $\mathrm{w} = \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2} + \mathrm{w}_0$

En utilisant cet ansatz $\Lambda = 3\alpha\mathrm{H}^2$ dans l'équation (3.108), où α est une constante et $\mathrm{H} = \frac{\dot{\mathrm{a}}}{\mathrm{a}}$ est le paramètre de Hubble, l'équation (3.108), pour l'univers plat ($\mathrm{k} = 0$), se réduit à

$$\mathrm{H}^2 + \frac{2}{1+3\mathrm{w}}\left(\dot{\mathrm{H}} + \mathrm{H}^2\right) = \frac{1+\mathrm{w}}{1+3\mathrm{w}}3\alpha\mathrm{H}^2 \tag{3.148}$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{H}^2} = -\frac{3}{2}(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\,\mathrm{dt} \tag{3.149}$$

Supposons que w dépends du temps selon la loi

$$\mathrm{w}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2} + \mathrm{w}_0 \tag{3.150}$$

où w_0 et w_1 sont deux constantes et τ est un paramètre ayant une dimension de t^2. En insérant l'équation (3.150) dans l'équation(3.149), on obtient

$$\frac{dH}{H^2} = -\frac{3}{2}(1-\alpha)\left(1 + w_0 + \frac{w_1\tau}{t^2}\right)dt \tag{3.151}$$

Une intégration, nous donne

$$H(t) = \frac{2t}{3(1-\alpha)\left((1+w_0)t^2 - w_1\tau\right)} \tag{3.152}$$

et en intégrant davantage cette équation, nous obtenons

$$a(t) = \left|\left((1+w_0)t^2 - w_1\tau\right)\right|^{\frac{1}{3(1-\alpha)(1+w_0)}} \tag{3.153}$$

La densité $\rho(t)$ et la constante cosmologique $\Lambda(t)$ sont données par

$$\rho(t) = \frac{t^2}{6\pi G(1-\alpha)\left((1+w_0)t^2 - w_1\tau\right)^2} \tag{3.154}$$

$$\Lambda(t) = \frac{4\alpha t^2}{3(1-\alpha)^2\left((1+w_0)t^2 - w_1\tau\right)^2} \tag{3.155}$$

Maintenant, puisque l'Univers est actuellement assez agé, on peut négliger les termes impliquant des puissances de $\frac{1}{t^2}$ supérieures à un. Ainsi les équations (3.152) − (3.155) se transforment en

$$H(t) = \frac{2}{3(1-\alpha)(1+w_0)t}\left(1 + \frac{w_1\tau}{(1+w_0)t^2}\right) \tag{3.156}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G(1-\alpha)(1+w_0)^2 t^2}\left(1 + \frac{2w_1\tau}{(1+w_0)t^2}\right) \tag{3.157}$$

$$\Lambda(t) = \frac{4\alpha}{3(1-\alpha)^2(1+w_0)^2 t^2}\left(1 + \frac{2w_1\tau}{(1+w_0)t^2}\right) \tag{3.158}$$

Des équations (3.156) − (3.158) il est clair que pour t très grand, en peut négliger les termes impliquant t^{-3} et les termes impliquant t^{-3}, on peut arriver aux relations

$$H(t) = \frac{2}{3(1-\alpha)(1+w_0)t} \tag{3.159}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G(1-\alpha)(1+w_0)^2 t^2} \tag{3.160}$$

$$\Lambda(t) = \frac{4\alpha}{3(1-\alpha)^2(1+w_0)^2 t^2} \tag{3.161}$$

Ainsi, pour t très grand, nous pouvons trouver les relations (3.115) – (3.117) obtenues pour w constante. En utilisant les équations (3.156) – (3.158) on peut obtenir les expressions de la densité matière-énergie Ω_{m} et de la densité d'énergie noire Ω_{Λ} comme

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{8\pi \mathrm{G}}{3\mathrm{H}^2(\mathrm{t})}\rho_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) = (1-\alpha)\left(1 - \frac{4\mathrm{w}_1^2\tau^2}{(1+\mathrm{w}_0)^2\,\mathrm{t}^4}\right) \tag{3.162}$$

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3\mathrm{H}^2} = \alpha \tag{3.163}$$

En ajoutant les équations (3.162) et (3.163) nous pouvons obtenir

$$\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\Lambda} = 1 - (1-\alpha)\frac{4\mathrm{w}_1^2\tau^2}{(1+\mathrm{w}_0)^2\,\mathrm{t}^4}$$

À partir de équations (3.162) et (3.163), pour t très grand, nous trouvons les relations $\Omega_{\mathrm{m}} \simeq 1-\alpha$ et $\Omega_{\Lambda} = \alpha$ obtenues pour w constante. En utilisant l'équation (3.152), nous obtenons l'expression suivante pour le paramètre de décélération q

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{3(1-\alpha)}{2}\left[(1+\mathrm{w}_0) + \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}\right] - 1 \tag{3.164}$$

Nous constatons que pour t petit, le terme $\frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}$ avait une contribution significative et que, par conséquent, l'Univers était dans une phase de décélération. Mais avec le passage du temps, le terme $\frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}$ est devenu négligeable et donc l'Univers est passé à l'époque actuelle une phase d'accélération. Par conséquent, pour t très grand, on peut négliger le deuxième terme à l'intérieur du crochet dans l'équation (3.162), alors l'équation (3.164) se réduit à la forme suivante

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{3\Omega_{\mathrm{m}}}{2}\left[(1+\mathrm{w}_0) + \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}\right] - 1 \tag{3.165}$$

Pour $\Omega_{\mathrm{m}} \simeq 0.30$, la valeur actuelle de $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ est $\mathrm{q}_0 = -0.55$. Cette valeur de q_0 correspond bien à la valeur actuellement acceptée de ce paramètre $\mathrm{q}_0 = -0.50 \pm 0.05$ pour un Univers en accélération.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié des modèles physiques qui permettent d'expliquer l'expansion accélérée actuelle de notre univers. Nous avons considéré des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état w constant et des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état w variables, qui peuvent expliquer l'expansion accélérée actuelle de notre univers.

Dans le premier chapitre, nous avons étudié les bases mathématiques de la relativité générale comme les tenseurs, les quadri-vecteurs et la dérivée covariante.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'équation des Géodésiques et les équations d'Einstein, nous avons étudié quelques conséquences de la relativité générale d'Einstein. En particulier, nous ne nous sommes intéressés aux solutions stationnaires des équations d'Einstein et leurs conséquences sur les trajectoires des particules massives et sur la lumière.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié divers modèles cosmologiques qui expliquent l'expansion accélérée actuelle de notre univers, nous avons considéré des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état w constant et des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état w variables, qui peuvent expliquer l'expansion accélérée actuelle de notre univers. On peut resumer les resultats les plus important pour chaque modèle dans ce qui suit :

Univers ouvert dominé par la matière Le facteur d'échelle et le temps cosmique sont donnés par une équation paramétrique

$$\mathrm{a}(\eta) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1-\Omega_{\mathrm{m};0}}\left(\cosh(\eta)-1\right) \quad ; \quad \mathrm{t} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1-\Omega_{\mathrm{m};0}}\left(\sinh\eta-\eta\right)$$

L'âge de l'univers est donnée par

$$\mathrm{t}_0 = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{\mathrm{m};0}}{1-\Omega_{\mathrm{m};0}}\left(2\frac{\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m};0}}}{\Omega_{\mathrm{m};0}} - \cosh^{-1}\left(\frac{2-\Omega_{\mathrm{m};0}}{\Omega_{\mathrm{m};0}}\right)\right)$$

Le paramètre de décélération est toujours positif

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - 1 = \frac{1}{1+\cosh(\eta)}$$

Univers plat dominé par le rayonnement et la matière Le facteur d'échelle est donnée par

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}}\left\{(a - 2a_{eq})\sqrt{a + a_{eq}} + 2a_{eq}^{3/2}\right\} \tag{3.166}$$

Le temps de découplage t_{dec} entre la matière et le rayonnement est donnée par

$$t_{dec} = \frac{2}{3}\frac{(a_{dec} - 2a_{eq})\sqrt{a_{dec} + a_{eq}} + 2a_{eq}^{3/2}}{H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}} \approx 4.1 \times 10^5 \text{ year}$$

Le temps t_{eq} de l'égalité entre la matière et le rayonnement est donnée par

$$t_{eq} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{H_0\Omega_{m,0}^2} \approx 14230 \text{ years}$$

Modèle cosmologique ΛCDM Le facteur d'échelle $a(t)$ est donné par

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda;0}}\right)^{1/3}\sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t\right)$$

L'âge de l'univers t_0 est donné par

$$t_0 = \frac{2}{sH_0}\frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}}\right)}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \approx 13.497 \times 10^9 \text{ year} \tag{3.167}$$

Le temps de transition entre la phase de décélération et la phase d'accélération est donné par

$$t_\Lambda = \frac{2\tanh^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \approx 7.545 \times 10^9 \text{ year}$$

Le décalage cosmique correspondant est $z \simeq 0.67$. Le Temps de transition de la matière vers la domination de l'énergie noire est donné par

$$t_{m\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda;0}}H_0}\sinh^{-1}(1) = 9.8 \times 10^9 \text{ year} \tag{3.168}$$

Le décalage vers le rouge correspondant est $z \simeq 0.33$.

Modèles cosmologiques avec constante cosmologique variable $\Lambda = 3\alpha H^2$ La constante cosmologique et le paramètre de décélération $q(t)$ sont données par

$$\Lambda(t)\frac{4\alpha}{3(1-\alpha)^2(1+w)^2t^2} \quad ; \quad q = \frac{3(1-\alpha)(1+w)}{2} - 1$$

Ainsi, un univers en accélération nécessite $\alpha > \frac{1+3w}{3(1+w)}$. Le facteur d'échelle et la fonction de Hubble sont données par

$$a(t) = C\left(\frac{3}{2}(1-\alpha)(1+w)\right)^{\frac{2}{3(1-\alpha)(1+w)}} t^{\frac{2}{3(1-\alpha)(1+w)}}$$

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = \frac{\dot{\mathrm{a}}(\mathrm{t})}{\mathrm{a}(\mathrm{t})} = \frac{2}{3(1-\alpha)(1+\mathrm{w})\,\mathrm{t}}$$

Modèles cosmologiques avec cparamètre d'état variable $\mathrm{w} = -1 + \frac{2\tau \mathrm{P}}{\mathrm{H}}$ La constante cosmologique et le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ sont données par

$$\Lambda(\mathrm{t}) = \frac{1}{6\tau^3}\{\frac{\tau}{2}\tan^2\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t}+\mathrm{C}\right) + 3\tau\tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t}+\mathrm{C}\right) - 2\tau\ln\cos\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t}+\mathrm{C}\right) - 2\tau\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t}+\mathrm{C}\right)\}$$

$$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = -1 - \frac{\beta}{6}\frac{1+\tan^2\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t}+\mathrm{C}\right)}{\left(1+\tan\left(\frac{\beta}{36\tau}\mathrm{t}+\mathrm{C}\right)\right)^2}$$

Il ressort clairement de cette expression que si $\beta < 0$, alors $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ peut changer son signe en fonction de la valeur de la partie dépendante du temps. Ainsi, l'évolution cosmique décélérée-accélérée peut être trouvée dans ce modèle phénoménologique.

Modèles cosmologiques avec paramètre d'état variable $\mathrm{w}(\mathrm{t}) = \left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^n - 1$ La constante cosmologique et le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ sont données par

$$\Lambda(\mathrm{t}) = \alpha\frac{4(\mathrm{n}+1)^2}{3\tau^2(1-\alpha)^2}\left(\frac{\tau}{\mathrm{t}}\right)^{2\mathrm{n}+2} \quad ; \quad \mathrm{q}(\mathrm{t}) = -\left(1 - \frac{3}{2}\Omega_{\mathrm{m}}\left(\frac{\mathrm{t}}{\tau}\right)^{\mathrm{n}}\right) \tag{3.169}$$

Il ressort clairement de cette expression qu'avec un choix approprié de n et τ, alors $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ peut changer son signe en fonction de la valeur de la partie dépendante du temps. Ainsi, l'évolution cosmique décélérante-accélérante peut être trouvée dans ce modèle.

Modèles cosmologiques avec paramètre d'état variable $\mathrm{w}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2} + \mathrm{w}_0$ La constante cosmologique et le paramètre de décélération $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ sont données par

$$\Lambda(\mathrm{t}) = \frac{4\alpha\mathrm{t}^2}{3(1-\alpha)^2\left((1+\mathrm{w}_0)\,\mathrm{t}^2 - \mathrm{w}_1\tau\right)^2} \quad ; \quad \mathrm{q}(\mathrm{t}) = \frac{3(1-\alpha)}{2}\left[(1+\mathrm{w}_0) + \frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}\right] - 1$$

Nous constatons que pour t petit, le terme $\frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}$ avait une contribution significative et que, par conséquent, l'Univers était dans une phase de décélération. Mais avec le passage du temps, le terme $\frac{\mathrm{w}_1\tau}{\mathrm{t}^2}$ est devenu négligeable et donc l'Univers est passé à l'époque actuelle une phase d'accélération. Le facteur d'échelle et la fonction de Hubble et la densité $\rho(\mathrm{t})$ sont données par

$$\mathrm{a}(\mathrm{t}) = \left|\left((1+\mathrm{w}_0)\,\mathrm{t}^2 - \mathrm{w}_1\tau\right)\right|^{\frac{1}{3(1-\alpha)(1+\mathrm{w}_0)}} \quad ; \quad \mathrm{H}(\mathrm{t}) = \frac{2}{3(1-\alpha)(1+\mathrm{w}_0)\,\mathrm{t}}\left(1 + \frac{\mathrm{w}_1\tau}{(1+\mathrm{w}_0)\,\mathrm{t}^2}\right)$$

$$\rho(\mathrm{t}) = \frac{1}{6\pi\mathrm{G}(1-\alpha)(1+\mathrm{w}_0)^2\,\mathrm{t}^2}\left(1 + \frac{2\mathrm{w}_1\tau}{(1+\mathrm{w}_0)\,\mathrm{t}^2}\right)$$

Bibliographie

[1] R.J.Adler, General Relativity and Cosmology A First Encounter, Springer, (2021).

[2] Khelili Farid, cours la relativité restreinte, Universié 20 Aout 1955-Skikda (2017/2018).

[3] J.Haldik, M.Chrysos, Introduction à la relativité restreinte, Cours et exercices corrigés, Edition Dunod, (2001).

[4] B.Berche, Relativité, Université Henri Poincaré, Nancy 1.

[5] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Edition John Wiley and Sons, (1972).

[6] L. Blanchet, Introduction à la Relativité Générale, Cours, (2009).

[7] Mirjana, N.Dalarson, Tensor Relativity and cosmoloy, 2005 Elsevier Inc, (2015).

[8] C.Bambi, Introduction to General Relativity, Springer, (2018).

[9] N.Jun, Principles of Physics, From Quantum Field Theory to Classical Mechanics, World Scientific Publishing, (2014).

[10] G. Poggiaspalla, Tests classiques de la relativité générale, (1999).

[11] M.Blau, Lecture notes on general relativity, (2018).

[12] A.Romano, M.Furnani, The Physical and Mathematical Foundations of The Theory of Relativity, Springer, (2019).

[13] P.Fleury, Gravitation From Newton to Einstein, University of Geneva, (2019).

[14] M.Bellac, Relativité Générale pour débutants, (2004).

[15] M.P.Hobson, G.P.Efstathiou, A.N.Lasenby, General Relativity : An Introduction For Physicists, Cambridge University Press, (2006).

[16] P.G. Ferreira, Lectures On General Relativity and Cosmology, University of Oxford, (2015).

[17] R.J.A.Lambourne, Relativity Gravitation and Cosmology, Cambridge University Press, (2010).

[18] L.Ryder, Introduction to general relativity, Cambridge University Press, (2009).

[19] M.Blecher, General Relativity, A first Examination, World Scientific Publishing, (2016).

[20] R.Aldrovandi, J.G. pereira, An Introduction to General Relativity, (2004).

[21] T.Damour, La relativité générale aujourd'hui, séminaire Poincaré IX 1-40, (2006).

[22] K.C.Yu, Relativity and Cosmology, Springer (2001).

[23] Yu.L.Bolotin, V.A.Cherkaskiy, O.A.Lemets D.A. Yerokhin and L.G. Zazunov, Cosmology In Terms Of The Deceleration Parameter Part 1, http ://arxiv.org/abs/1502.00811v1.

[24] Yu.L.Bolotin, V.A.Cherkaskiy, O.A.Lemets, D.A. Yerokhin and L.G. Zazunov, Cosmology In Terms Of The Deceleration Parameter Part 2, http ://arxiv.org/abs/1502.00811v1.

[25] S. Matarrese, M.Colpi, V.Gorini et Ugo Moschella, Dark Matter and Dark Energy, A Challenge for Modern Cosmology, Canopus Academic Publishing Limited, (2011).

[26] S.Ray, F.Rahaman, U.Mukhopadhyay, R.Sarkar, Variable Equation of State for Generalized Dark Energy Model, Int J Theor Phys (2011) 50 :2687–2696.

[27] S.Ray, U.Mukhopadhyay, X.H.Mengc, Accelerating universe with a dynamic cosmological term, Gravitation & Cosmology, Vol. 13 (2007), No. 2 (50).

[28] S.Ray, M.Khlopov, U.Mukhopadhyay, P.P.Ghosh, Phenomenology of ΛCDM model : a possibility of accelerating Universe with positive pressure, http ://arxiv.org/abs/0711.0686v3.

[29] U.Mukhopadhyay, S.Ray, F.Rahaman, Dark Energy Models With Variable Equation Of State Parameter, International Journal of Modern Physics D, http ://arxiv.org/abs/0711.4800v3.

[30] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Edition John Wiley and Sons, (1972).

[31] G. Poggiaspalla, Tests classiques de la relativité générale, (1999).

[32] N. Sraumann, General Relativity, Springer, (2013).

[33] M. P . Hobson, G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby, General Relativity : An Introduction For Physicists, Cambridge University Press, (2006).

[34] Ta-Pei Cheng, A College Course on Relativity and Cosmology, Oxford University, (2015).

[35] Guidry, Modern General Relativity Black Holes Gravitational Waves and Cosmology

[36] E. B. Manoukian, 100 Years of Fundamental Theoretical Physics in the Palm of Your Hand, Springer Nature Switzerland AG, (2020).

[37] D.Wands, Friedmann Lemaître Robertson Walker Cosmology, Springer Handbook of Spacetime, Abhay Ashtekar, Vesselin Petkov (Eds.), (2014).

[38] A. Liddle, An Introduction To Modern Cosmology, (2003).

[39] B.Ryden, Introduction to Cosmology-Cambridge, University Press (2016).

[40] O.Piattella, Lecture Notes in Cosmology, Springer, (2018).

[41] R.J.A. Lambourne, Relativity Gravitation and Cosmology, Cambridge University Press, (2010).

[42] N.Vittorio, Cosmology, Taylor & Francis Group CRC Press, (2018).

[43] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Edition John Wiley and Sons, (1972).

[44] P.T.Chrusciel, Elements of General Relativity, Springer, (2019).

[45] J.Steinar, Smooth manifolds and fibre bundles with applications to theoretical physics, Taylor & Francis Group, (2017).

[46] R.J.Adler, General Relativity and Cosmology A First Encounter, Springer, (2021).

[47] O.Gron, A New standard model of the univers, Oslo College, Department of engineering, Cort Adelers gt. 30, N-0254 Oslo, Norway, (2004).

[48] Ade, P.A.R., et al. : Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. Astron. Astrophys. 594, A13 (2016)