

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Sur les cycles limites de certaines classes de systèmes
différentiels de Kukles généralisés

Option : COSD

Par :

Meriem Djeddou

Encadré par : MENACEUR Amor

MCA U. GUELMA

Devant le jury :

Président : BOULFOUL Amel

MCA U. SKIKDA

Examineur: BENHADRI Mimia

MCA U. SKIKDA

Année : 2023/2024

Remerciement

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je remercie **ALLAH** qui m'a toujours donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude, et la force d'accomplir ce Modeste travail

Je remercie mon encadreur Dr. **Menaceur Amor** pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire et pendant mon parcours de master.

Je remercie aussi les membres du jury : le président Dr. **Boufoul Amel** et l'examineur Dr. **Benhadri Mimia** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, sans eux je suis rien. Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes amis, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

Et enfin dois-je dire à quel point mes parents sont aujourd'hui dans mes pensées ! Mes parents qui m'ont toujours soutenu dans mes épreuves aussi bien au niveau moral, que matériel. Je leur adresse aujourd'hui un témoignage d'amour filial, et de reconnaissance.

Je dédie ce travail à mes chers êtres au monde

- A mon père **Abd Elhak**, mère **Mebarka** et très chère grand-mère **Aicha** tu as toujours fait des sacrifices pour moi et tu as tendu la main dans les moments difficiles.
- A mes sœurs **Salma** et **Soundous**.
- A mes frères **Wail** et **Yasser**.
- A toute ma famille pour leur inspiration de fin d'amour.
- A mes amis **Khaoula** et **Malak**.

Table des matières

1	Notions préliminaires	3
1.1	Système dynamique	3
1.2	Points critiques	4
1.2.1	Linéarisation	4
1.2.2	Classification des points critiques	6
1.3	Stabilité du point critique	6
1.4	Portrait de phase	8
1.5	Solutions périodiques et cycles limites	9
1.6	Existence et non-existence de cycle limite	11
1.7	Système Hamiltonien	12
2	Théorème de moyennisation	13
2.1	Introduction	13
2.2	Méthode de moyennisation du premier ordre	14
2.3	Méthode de moyennisation du deuxième ordre	19
3	Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Kukles généralisés	24
3.1	Présentation du problème	24
3.2	Preuves des résultats	26
3.2.1	Preuve du cas (i) du théorème 1	26
3.2.2	Application 1	28
3.2.3	Application 2	30
3.2.4	Preuve du cas (ii) du théorème 1	33
3.2.5	Application	37
4	Conclusion et perspectives	40

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions le nombre de cycles limites d'une classe des systèmes de Kukles

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l (x^2 + y^2)(q_l(x, y) - A_l) \end{cases} ,$$

où $A_l > 0$ et $q_l(x, y)$ est un polynôme de degré $n_l - 2 \geq 0$, $|\varepsilon|$ est un paramétré suffisamment petit avec $q_l(0, 0) = 0$, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre et du deuxième ordre. Cette étude est illustrée par des applications.

Mots clé : Cycle limite, théorie de moyennisation, système de Kukles.

Abstract

In this work, we study the number of limit cycles of the class of the Kukles systems

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l (x^2 + y^2) \varepsilon^l (q_l(x, y) - A_l) \end{cases} ,$$

where $A_l > 0$ and the polynomial $q_l(x, y)$ has degree $n_l - 2 \geq 1$, $|\varepsilon|$ is a small paramete with $q_l(0, 0) = 0$, by using the first and second averaging method. This study is illustrated by applications.

Keywords : Limit cycle, Averaging theory, Kukles systems.

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة عدد الحلول الدورية المعزولة لفئة من الجمل التفاضلية لكوكل المعممة من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l (x^2 + y^2) (q_l(x, y) - A_l), \end{cases}$$

حيث $A_l > 0$ و $q_l(x, y)$ كثير الحدود من الدرجة $2l - 2$ ، $|\varepsilon|$ معامل صغير كفاية مع $q_1(0,0) = 0$ باستخدام طريقة المتوسط من درجة الأولى والثانية، ودعمنا هذه الدراسة بأمثلة تطبيقية.

الكلمات الرئيسية: الحلول الدورية المعزولة، طريقة المتوسط، جملة كوكل

Introduction

Les systèmes différentiels et les cycles limites sont des concepts importants en mathématiques et en physique. En mathématiques, un système différentiel est un ensemble d'équations qui décrivent l'évolution d'un système dynamique au fil du temps. Les cycles limites sont des trajectoires ou des valeurs vers lesquelles un système dynamique tend au fil du temps, en dépit de perturbations extérieures.

En physique, les systèmes différentiels sont souvent utilisés pour modéliser le mouvement des objets dans l'espace et le temps, comme les orbites des planètes autour du soleil. Les cycles limites peuvent représenter des états d'équilibre stables ou des oscillations périodiques dans un système physique.

La théorie des systèmes différentiels et des cycles limites est un domaine de recherche passionnant qui a de nombreuses applications pratiques, notamment en ingénierie, en biologie et en économie. L'étude de ces concepts permet de mieux comprendre le comportement des systèmes complexes et de prédire leur évolution à long terme.

En mathématiques, un cycle limite d'un système différentiel est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle, la notion de cycle limite a été introduite en 1881 par Poincaré. Puis au début du 20^{ème} siècle, dans le 2^{ème} congrès international de Mathématique en 1900 à Paris, David Hilbert a présenté son célèbre exposé intitulé "Problèmes Mathématiques". La 16^{ème} de ses 23 problèmes s'écrit de déterminer le nombre maximal de cycles limites existants pour le système polynomial planaire de degré n

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

Les recherches ont donné des méthodes pour chercher le nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels : le théorème de Poincaré-Bendixson, le critère de non-existence de Dulac, la bifurcation de Hopf, la méthode de Melnikov, méthodes de perturbations, la méthode de Moyennisation . . .

Le système de Kukles polynomial [11] s'écrit :

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = Q(x, y), \tag{0.1}$$

où $Q(x, y)$ est un polynôme de degré n . Kukles, en 1944 a introduit le système différentiel (0.1) avec

$$Q(x, y) = x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3,$$

et a donné la condition nécessaire et suffisante pour que le système ait un centre à l'origine. Dans [7], l'auteur a prouvé que certains systèmes cubiques de la forme (0.1) pouvant avoir sept cycles limites. Dans [5], Chavarriga and al ont été dié le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude pour les systèmes de Kukles qui peuvent coexister avec quelques courbes algébriques invariantes.

Dans ce travail nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe généralisée des équations de Kukles de la forme (0.1). Plus précisément nous nous intéressons à la recherche des cycles limites d'une classe des systèmes de Kukles.

Ce mémoire est subdivisé en trois chapitres.

Le chapitre 1 est un rappel sur les notions de base de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. On introduira des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points d'équilibre et leurs natures, la linéarisation et la stabilité au voisinage d'un point d'équilibre, le cycle limite ainsi que des théorèmes sur l'existence et la non-existence des cycles limites.

Dans Le deuxième chapitre, nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher le nombre maximum de Cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

Le troisième chapitre, nous étudions le nombre maximum de Cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux de Kukles, perturbés par un petit paramètre ε

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l (x^2 + y^2)(q_l(x, y) - A_l), \end{cases}$$

où $A_l > 0$ et $q_l(x, y)$ est un polynôme de degré $n_l - 2 \geq 0$, $|\varepsilon|$ est un paramètre suffisamment petit avec $q_l(0, 0) = 0$. en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre et du deuxième ordre. Le contenu du chapitre deux est correspond au travail [14].

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base des systèmes dynamiques, points d'équilibre, stabilité du point critique, portrait de phase, cycles limites, existence et non-existence de cycle limite. Enfin nous terminons par donner la définition des systèmes Hamiltonien.

1.1 Système dynamique

Les systèmes dynamiques étudient l'évolution des systèmes au fil du temps en fonction de règles déterministes ou probabilistes. Ils sont utilisés dans de nombreux domaines tels que la physique, la biologie, l'économie et la météorologie pour modéliser des phénomènes complexes et prévoir leur évolution future. Il peut être défini (en mathématiques) comme suit

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(., x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x$.
- $U(t + s, x) = U(t; U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1 *Soit le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où A est une matrice constante, la solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA} \times x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+$; $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$(t, x) \rightarrow U(t, x) = e^{tA} \times x_0,$$

qui vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.2 Points critiques

Définition 1.2.1 *Soit le système non linéaire :*

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.2)$$

on appelle *point critique* ou *point d'équilibre* du système (1.2) tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$F(x_0) = 0.$$

1.2.1 Linéarisation

Définition 1.2.2 *Soit le système suivant :*

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.3)$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial f_j}(x_0) \right) = Df(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est une matrice ($n \times n$), est appelé le *système linéarisé* du système (1.3) en x_0 .

Exemple 1.2.1 Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases}, \quad (1.4)$$

il est clair que $f(x) = 0$, entraîne que $x_0 = (0,0)$ est le seul point d'équilibre de ce système, on cherche le linéarisé de ce système en x_0 ,

$$\begin{aligned} Df(X) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le système linéarisé du système (1.4) est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases}.$$

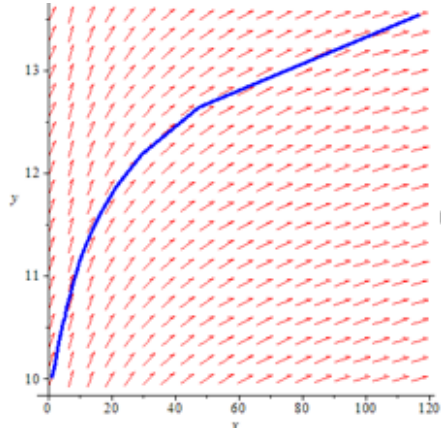


FIG 1.1- Portrait de phase du système (1.4)

1.2.2 Classification des points critiques

Notons la matrice Jacobienne A par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de A , cette matrice s'appelle souvent matrice de stabilité, les valeurs propres de A données en fonction du déterminant et de trace par

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4 \det(A)}),$$

et vérifient les relations $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$, et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$ pour la linéarisation le point d'équilibre (x_0, y_0) et alors :

- un point selle si $\det(A) < 0$.
- Un point centre si $\det(A) > 0$ et $tr(A) = 0$.
- Un foyer si $\det(A) > 0$ et $(tr(A))^2 - 4\det(A) < 0$, ce foyer est stable si $tr(A) < 0$ et instable si $tr(A) > 0$.
- Un nœud si $\det(A) > 0$ et $(tr(A))^2 - 4\det(A) > 0$, ce nœud est stable si $tr(A) < 0$ et instable si $tr(A) > 0$.
- Le point d'équilibre (x_0, y_0) est dit hyperbolique si aucun des valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ n'a partie réelle nulle.

1.3 Stabilité du point critique

Soit donnée un système de deux équation différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad (1.5)$$

où

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Pour étudier la stabilité des point critiques de système (1.5) il faut établir l'équation caractéristique :

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

1.3. STABILITÉ DU POINT CRITIQUE

on cherche ses racines λ_1 et λ_2 , les cas suivantes se présentent la stabilité du système (1.5) :

1– Si λ_1, λ_2 sont réelles et distincts :

(a) Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, le point critique est asymptotiquement stable (nœud stable).

(b) Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, le point critique est instable (nœud instable).

(c) Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, le point critique est instable (point selle (col)).

2– Si les racines de l'équation caractéristique sont complexes où $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$:

(a) Si $p < 0, q \neq 0$, le point critique est asymptotiquement stable (foyer stable).

(b) Si $p > 0, q \neq 0$, le point critique est instable (foyer instable).

3– Les racines $\lambda_1 = \lambda_2$ sont multiples :

(a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, le point critique est stable (nœud stable).

(b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, le point critique est instable (nœud instable).

Exemple 1.3.1 Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + 5y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}, \quad (E_F)$$

écrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\lambda^2 - 3\lambda - 8 = 0.$$

Les racines de système et $\lambda_1 = -3 - \sqrt{41} < 0, \lambda_2 = -3 + \sqrt{41} > 0$ sont

réelles et distinctes le point critique $(0,0)$ est instable.

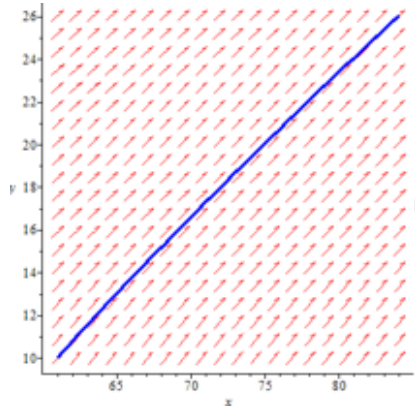


FIG 1.2 - Portrait de phase du système E_F .

1.4 Portrait de phase

Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(x, y) \\ \dot{y} = P(x, y) \end{cases}, \quad (1.6)$$

où P et Q sont polynômes en x et y .

Définition 1.4.1 *les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.6) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes. La figure complète des orbites de ce système ainsi que les points critiques représentés dans le plan $(x \circ y)$ est appelé plan de phase.*

Théorème 1.4.1 *On appelle orbite périodique du système (1.6) un trajectoire $\phi_t(t)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\phi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\phi_T(x) = x$ est appelé période. Il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.*

Remarque 1.4.1 *Toute solution périodique de correspond à une courbe fermée dans l'espace des phases, l'inverse est vrai.*

1.5. SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET CYCLES LIMITES

Remarque 1.4.2 Pour un système non autonome ceci est faux. C'est à dire une orbite fermée du système :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ne correspond pas nécessairement à une solution périodique.

1.5 Solutions périodiques et cycles limites

Définition 1.5.1 On dit que $(x(t), y(t))$ est une solution du système (1.6) si le champ de vecteurs $X = (P, Q)^t$ est toujours tangent à la trajectoire représentant cette solution dans le plan de phase, autrement dit :

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x + Q(x(t), y(t))y = 0.$$

Définition 1.5.2 On appelle solution périodique du système $(x(t), y(t))$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, T[: x(t + T) = x(t) \text{ et } y(t + T) = y(t).$$

Le plus petit nombre T qui conviens s'appelle alors période de cette solution.

Donnons d'abord la définition des cycles limites par

Définition 1.5.3 On appelle cycle limite du système (1.6), toute la solution périodique isolée dans l'ensemble de toute la solution périodique isolée de ce système.

Remarque 1.5.1 Les cycles limite apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

Exemple 1.5.1 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = \mu y + x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}, \quad (1.7)$$

pour résoudre ce système, on pose :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases},$$

systeme (1.7) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = (\mu - r)r \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases},$$

posons :

$$f(r) = \dot{r} = (\mu - r)r.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(r) = 0 &\implies r = 0 \\ &\implies r = \mu. \end{aligned}$$

Si $r > 0$, on n'accepte que la racine positive $r = \mu$. Donc, pour $r = \mu$ on a la solution périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$, avec $\theta(0) = \theta_0$. Donc la plan de phase il y a un seul cycle limite d'équation $x^2 + y^2 = \mu$ et d'amplitude $r = \mu$.

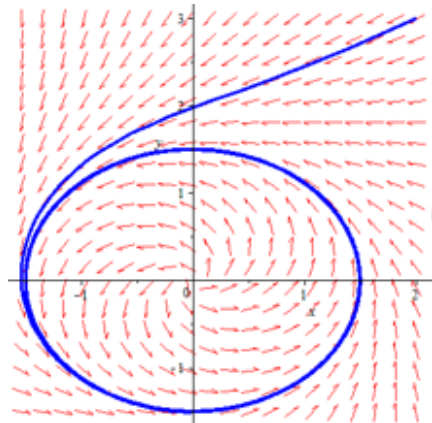
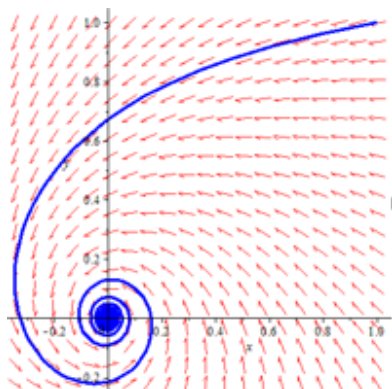


FIG 1.3 - Cycle limite du systeme (1.7) pour $\mu = 1.5$



F.G 1.4 - Portrait de phase du système (1.7) pour $\mu = 0$.

1.6 Existence et non-existence de cycle limite

Une condition suffisante de non existence de solution périodique (et donc de cycle limite) est donnée par :

Théorème 1.6.1 *Il n'y pas de trajectoire fermée dans un domaine simplement connexe du plan de phase dans lequel la divergence $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ garde un signe constant.*

Bien que nous ne ferons pas usage ce travail, voici quand même une version simplifiée du théorème de Poincaré-Bendixon utilise usuellement pour détecter les cycles limites :

Théorème 1.6.2 *Si toutes les trajectoires du système (1.6) entrent transversalement dans un domaine fermé D du plan ne contenant pas se points d'équilibres du système (1.6), et ne ressortent pas de ce domaine, alors ce domaine contient au moins une orbite périodique.*

1.7 Système Hamiltonien

Un système Hamiltonien est un système d'équation différentielle de types par :

$$\begin{cases} \dot{x} = D_Y H(x(t), y(t)) \\ \dot{y} = D_x H(x(t), y(t)) \end{cases} ,$$

où $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$, la fonction H est appelé Hamiltonien du système si (x, y) est un solution du système, alors on calcule

$$\frac{d}{dt}H(x, y) = D_x H(x(t), y(t))\dot{x}(t) + D_y H(x(t), y(t))\dot{y}(t).$$

Lemme 1.7.1 *Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on définit*

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta) d\theta.$$

:Alors

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n},$$

et

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

Ces intégrales sont utilisés jusqu'à ce qu'on arrive à $I_{0,0} = 2\pi$ ou $I_{0,1} = I_{1,0} = I_{1,1} = 0$, notons que $I_{m,n} \neq 0$ si et seulement si m et n sont paires.

Chapitre 2

Théorème de moyennisation

2.1 Introduction

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes pour étudier le nombre de cycles limites pour certains systèmes différentiels, voir par exemple les articles [3, 13, 10 et 7].

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de la moyennisation. La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes pour chercher le nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

La notion fondamentale consiste à étudier une équation différentielle perturbée, formulée de la manière suivante

$$\dot{x} = \varepsilon k(t, x) \tag{E_1}$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ε suffisamment petit, et k est T -périodique en t . On définit l'équation moyennée associée à cette équation

$$\dot{x} = \varepsilon K(x)$$

où

moyennée associée à cette équation

$$K(x) = \frac{1}{T} \int_0^T k(t, x) dt$$

Ainsi, nous pouvons rechercher les solutions périodiques de l'équation (E_1) en utilisant l'équation moyennée associée.

2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.2.1 *Soit le système différentiel*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodique par rapport à t , D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n on définit $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Comme suite

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.2)$$

supposons que

(i)– F_1 et R sont localement Lipchitzienne par rapport à x .

(ii)–Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $F_{10} \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(F_{10}, V, 0) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe un solution $\Phi(., \varepsilon)$ du système (2.1) T -périodique isolée telle que $\Phi(., \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour démonstration.(Voir [4]).

Remarque 2.2.1 *Les hypothèses de ce théorème sont puis faible que celles du théorème 2.2.1 où à place de (i), il suppose que :*

(j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies, continue et bornées par une constante M (indépendante de ε).

A la place de (ii), il suppose que :

(jj) pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}(a)} \neq 0$, où $D_x F$ désigne la matrice Jacobienne de F par rapport à x , $D_x^2 F$ la matrice Hessienne de F et $J_{F_{10}(a)}$ désigne le déterminant de la Jacobienne de F_{10} en a .

2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

Exemple 2.2.1 Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(4x + 2x^2 - 2x^3) \\ \dot{y} = -x \end{cases} . \quad (2.3)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, le système perturbé (2.3), s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2} \end{cases} ,$$

donc

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \cos(\theta)(4r \cos(\theta) + 2r^2 \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^3(\theta)) \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \sin(\theta)(4 \cos(\theta) + 2r^2 \cos^2(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta)) \end{cases} .$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon \cos(\theta)(4r \cos(\theta) + 2r^2 \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^3(\theta))}{1 + \varepsilon \sin(\theta)(4 \cos(\theta) + 2r \cos^2(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta))} .$$

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2) .$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= (-\varepsilon \cos(\theta)(4r \cos(\theta) + 2r^2 \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^3(\theta))) \\ &\quad \times (1 + \varepsilon \sin(\theta)(4 \cos(\theta) + 2r \cos^2(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta))) . \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2) ,$$

où

$$F_1(\theta, r) = -\cos(\theta)(4r \cos(\theta) + 2r^2 \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^3(\theta)) .$$

On applique le théorème 2.2.1

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta ,$$

alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\cos(\theta)(4r \cos(\theta) + 2r^2 \cos^2(\theta) - 2r^3 \cos^3(\theta)))d\theta, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -4r \cos^2(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta) + 2r^3 \cos^4(\theta)d\theta, \\
 &= \frac{-4r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta + \frac{-2r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3(\theta)d\theta + \frac{2r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta)d\theta, \\
 &= \frac{-4r}{2\pi} I_{2,0} + \frac{-2r^2}{2\pi} I_{3,0} + \frac{2r^3}{2\pi} I_{4,0},
 \end{aligned}$$

où

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta)d\theta.$$

D'après la formule de Lemme 1.8.1, on a

$$I_{2,0} = \pi \text{ et } I_{4,0} = \frac{3\pi}{4},$$

donc

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{-4r}{2\pi} \pi + \frac{2r^3}{2\pi} \frac{3\pi}{4} \\
 &= \frac{r}{4} (3r^2 - 8).
 \end{aligned}$$

Les cycles limite possibles pour (2.3) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{r}{4} (3r^2 - 8) = 0,$$

Cette équation algébrique admet une seule solution positive

$$r = \frac{2}{3} \sqrt{2} \sqrt{3} = 1.633$$

2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

Alors le système (2.3) a un cycle limite d'amplitude $r = 1.63$.

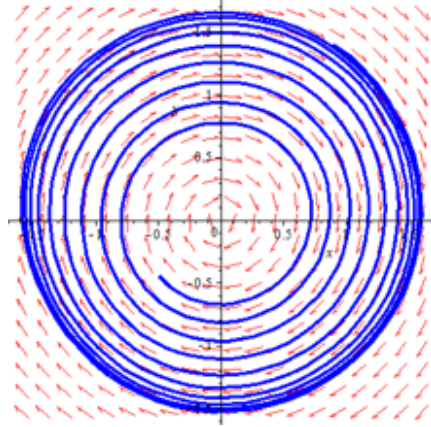


FIG 2.1 - Cycle limite du système (2.3) pour $\varepsilon = 0.02$.

Exemple 2.2.2 On considère l'équation suivante :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(2 - x^2)\dot{x}$$

où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(2 - x^2)y \end{cases} \quad (2.4)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, le système perturbé (2.4), s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2} \end{cases} ,$$

donc

$$\begin{cases} \dot{r} = +r\varepsilon(2 \sin^2(\theta) - r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 + r\varepsilon(2 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)) \end{cases} .$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r\varepsilon(2 \sin^2(\theta) - r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))}{-1 + r\varepsilon(2 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta))} .$$

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2).$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -r\varepsilon(2\sin^2(\theta) - r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)) \\ &\quad \times (1 + r\varepsilon(2\cos(\theta)\sin(\theta) - r^2\cos^3(\theta)\sin(\theta))). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(\theta, r) = -r(2\sin^2(\theta) - r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)).$$

On applique le théorème 2.2.1

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta,$$

alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(2\sin^2(\theta) - r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)) d\theta, \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2r\sin^2(\theta) + r^3\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) d\theta, \\ &= \frac{-2r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta + \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) d\theta, \\ &= -\frac{2r}{2\pi} I_{0,2} + \frac{r^3}{2\pi} I_{2,2}. \end{aligned}$$

Où

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta)\sin^n(\theta) d\theta,$$

d'après la formule de Lemme 1.8.1, on a :

$$I_{0,2} = -\pi \text{ et } I_{2,2} = \frac{1}{8}\pi,$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

donc

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -\frac{2r}{2\pi}\pi + \frac{r^3}{2\pi}\frac{1}{4}\pi \\ &= \frac{1}{8}r(r^2 - 8). \end{aligned}$$

Les cycles limite possibles pour (2.4) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{1}{8}r(r^2 - 8) = 2\sqrt{2} = 2.82.$$

Cette équation algébrique admet une seule solution positive :

$$r = 2.82.$$

Alors le système (2.4) a un cycle limite d'amplitude $r = 2.82$.

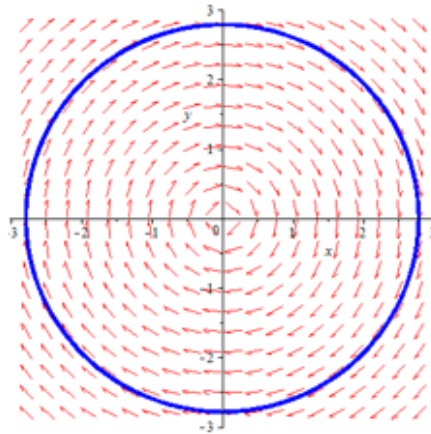


FIG 2.2 - Cycle limite du système (2.4) pour $\varepsilon = 0.003$.

2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions de certains systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.3.1 *On considère le système différentiel*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon f, \varepsilon f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable et D un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit $F_{10}, F_{20} : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour (2.2) et

$$F_{20}(z) = \int_0^T (D_x F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z)) ds, \quad (2.6)$$

supposons que

(ii) pour tout $t \in \mathbb{R}, F_1 \in C_1, F_1, F_2, R$ et $D_x F_1$ sont localement lipchitziennes par rapport à x . R est différentiable par rapport à ε .

(ii) Pour $V \in D$, un ensemble ouvert et borné et pour tout $\varepsilon \in]-\varepsilon f, \varepsilon f[,$ il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$ et $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon), V, 0) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $\varphi(., \varepsilon)$ de l'équation (2.7) telle que $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$.

Les conditions (i) et (ii) de théorème 2.3.1 peuvent être remplacées par (j) et (jj) respectivement

(j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D, -\varepsilon f < \varepsilon < \varepsilon f$

(jj) $F_{10}(z) = 0, \forall z \in D$ et pour $a \in D$ avec $F_{20}(a) = 0$, on $J_{F_{20}}(a) \neq 0$.

Pour la démonstration voir [?, 12, ?] :

Exemple 2.3.1 *Soit le système différentiel polynomial perturbé*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 10x \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2 10y + 4\varepsilon xy, \end{cases} \quad (2.7)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$, le système perturbé (2.7), s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + 10\varepsilon) \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8r\varepsilon \cos \theta, \end{cases}$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, alors :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2r(8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + 10\varepsilon)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8r\varepsilon \cos \theta}.$$

Ou bien

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r),$$

où

$$F_1(\theta, r) = -r^2 \cos(-8 \cos^2 \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5).$$

$$F_2(\theta, r) = r(-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 18r^2 \cos^2 \theta + 10).$$

Donc nous allons appliquer le théorème de moyennisation du première ordre, on a :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta.$$

D'après la formule (1.9), on a

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= 8r^2 I_{2,1} - 7r^2 I_{3,0} + 5r^2 I_{1,0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

soit $F_{20}(r)$ l'équation moyennée du second ordre associée au système (2.7). Maintenant, on détermine $F_{20}(r)$ par :

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1(\theta, r) \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial r} F_1(\theta, r) = -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5),$$

et

$$\int_0^\theta F_1(r, s) ds = \int_0^\theta -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) ds,$$

par Scientific Workplace on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^\theta F_1(r, s) ds &= -\frac{1}{12} r^2 \cos \theta (8 \cos 3\theta + 7 \cos 3\theta + 24 \cos \theta + 3 \sin \theta - 32) \\
 &= -\frac{1}{12} r^2 (32 \cos^3 \theta - 24 \cos \theta + 21 \sin \theta - 28 \sin^3 \theta \\
 &\quad + 24 \cos \theta + 3 \sin \theta - 32) \\
 &= -\frac{1}{12} r^2 (32 \cos^3 \theta - 28 \sin^3 \theta + 24 \sin \theta - 32) \\
 &= -\frac{1}{3} r^2 (8 \cos^3 \theta - 7 \sin^3 \theta + 6 \sin \theta - 8),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta &= \frac{r}{2\pi} (-15r^2 I_{5,1} + 5I_{1,1} + 22r^2 I_{3,1} \\
 &\quad + 112r^2 I_{6,0} - 160r^2 I_{4,0} + 48r^2 I_{2,0} + 10.2\pi) \\
 &= r \left(\left(112 \frac{5\pi}{8} - 160 \frac{3\pi}{4} + 48\pi \right) \frac{r^2}{2\pi} + 10 \right) \\
 &= r(-r^2 + 10) \\
 &= -r(+r^2 - 10).
 \end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned}
 F_{20} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} F_1(\theta, r) \int_0^\theta F_1(r, s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta \\
 &= r(10 - r^2)
 \end{aligned}$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

L'équation $F_{20}(r) = 0$ a une seule racine positive $r = \sqrt{10} = 3.1623$, alors le système différentiel a un cycle limite d'amplitude $r = 3.1623$.

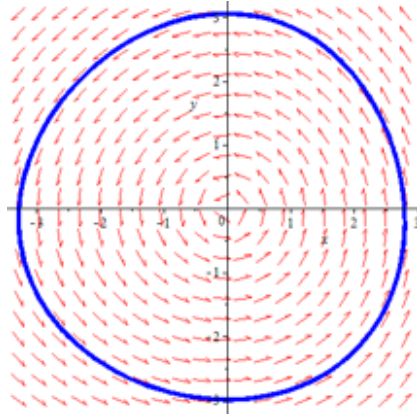


FIG 2.3 - Cycle limite du système (2.7) pour $\varepsilon = 0.01$.

Chapitre 3

Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Kukles généralisés

3.1 Présentation du problème

Le 16e problème de Hilbert est l'un des 23 célèbres problèmes posés par le mathématicien David Hilbert en 1900. Ce problème, en particulier, se divise en deux parties :

1. Première partie : Cette partie concerne la disposition et le nombre des ovales des courbes algébriques planes de degré donné. Il s'agit de questions sur la topologie des courbes algébriques réelles.

2. Seconde partie : Cette partie concerne l'existence et la distribution des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux dans le plan.

Ces dernières années, plusieurs articles ont été publiés sur les cycles limites de systèmes différentiels polynômiaux planaires. La raison principale de cette étude est le seizième problème, nous résolu, de Hilbert. En particulier, un grand nombre d'articles sont consacrés aux cycles limites qui bifurquent en orbites périodiques à partir d'un centre $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$.

Les chercheurs considèrent 4 classes spéciales des équations différentielles :

- L'équation de Liénard
- L'équation de Duffing
- L'équation de Mathieu

3.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

et l'équation de Kukles, sorte l'équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} .$$

où $Q(x, y)$ est un polynôme de degré n .

Dans [9], Libre et Mereu ont étudié, en utilisant le méthode de la moyennisation le nombre maximal de cycles limites pour les systèmes différentiels de kukles généraliser :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - h_0y^3 \end{cases} , \quad (3.1)$$

où $f(x), g(x), h(x)$ sont de degré n_1, n_2 et n_3 respectivement .

Dans [6], Garcia et al, ont étudié le nombre maximum de cycles limites pour les système différentiels plus généralisés de Liémard

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 \end{cases} , \quad (3.2)$$

où $f(x), g(x)$ et $h(x)$ sont de degré n peut $\left[\frac{2}{n}\right]$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre et n cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre.

Dans [1], Boulfoul et al, ont étudié le nombre maximum de cycles limites pour les systèmes différentiels plus généralisés de Kukles :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3 \end{cases} ,$$

où $f(x), g(x), h(x)$ et $l(x)$ sont de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement.

Dans ce chapitre, nous intéressons au nombre maximum de cycles limite d'une classe de systèmes différentiels de Kukles :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l (x^2 + y^2) \varepsilon^l (q_l(x, y) - A_l) \end{cases} , \quad (3.3)$$

où $A_\ell > 0$ et $q_\ell(x, y)$ est un polynôme de degré $n_\ell - 2 \geq 0$, $|\varepsilon|$ est un paramétré suffisamment petit avec $q_\ell(0, 0) = 0$. Cette étude a fait l'object d'un article publié dans "Nonlinear Analysis" [14].

Notre résultat est le suivant :

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES
DIFFÉRENTIELS DE KUKLES GÉNÉRALISÉS

Théorème 3.1.1 *Soit $|\varepsilon|$ un paramètre suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels de Kukles généralisés (3.3) qui peuvent bifurquer du centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$, en utilisant le théorème de moyennisation.*

(i) *du premier ordre est $k_1 - 2$ cycles limites.*

(ii) *du deuxième ordre est $\max \{k_2 - 2; 2 \lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor - 2\}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière et pour $\ell = 1, 2; n_\ell = 2k_\ell$ ou $n_\ell = 2k_\ell - 1$ pour $k_\ell \geq 2$.*

3.2 Preuves des résultats

3.2.1 Preuve du cas (i) du théorème 1

Pour utiliser la méthode de moyennisation premier ordre, nous écrivons le système (3.3) en coordonnées polaires (r, θ) où

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0,$$

on écrit les polynômes $q_1(x, y)$ apparaissant dans (3.3) comme

$$q_1(x, y) = \sum_{d=1}^{n_1-2} \left(\sum_{j=0}^d a_{j,d} x^{d-j} y^j \right).$$

On considère

$$q_1(x, y) = A(x, y) + B(x, y) + C(x, y) + D(x, y) \quad (3.4)$$

où

$$A(x, y) = \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s} x^{2s-2i+1} y^{2i-1} \right), \quad B(x, y) = \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i, 2s-1} x^{2s-1-2i} y^{2i} \right)$$

$$C(x, y) = \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i, 2s} x^{2s-2i} y^{2i} \right) \text{ et } D(x, y) = \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s-1} x^{2s-2i} y^{2i-1} \right).$$

Par conséquent, pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = +x + (x^2 + y^2)\varepsilon(q_1(x, y) - A_1) \end{cases}, \quad (3.5)$$

devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^2 (q_1(r \cos \theta, r \sin \theta) - A_1) \sin \theta \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon r (q_1(r \cos \theta, r \sin \theta) - A_1) \cos \theta \end{cases} .$$

Considépendante maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, avec $q(0.0) = 0$, alors

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon R_1(r, \theta) + 0(\varepsilon^2).$$

Soit F_{10} l'équation moyennée du premier ordre associée du système (3.3).

En utilisant la notion introduite dans le chapitre 2, on calcule F_{10} .

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (q_1(r \cos \theta, r \sin \theta) - A_1) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta d\theta + \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} -A_1 \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

on a

$$F_{10}(r) = \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.6)$$

D'après le formule (3.4) on

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s} (r \cos)^{2s-2i+1} \theta (r \sin)^{2i-1} \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i, 2s-1} (r \cos)^{2s-1-2i} \theta (r \sin)^{2i} \theta \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i, 2s} (r \cos)^{2s-2i} (r \sin)^{2i} \theta \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s-1} (r \cos)^{2s-2i} \theta (r \sin)^{2i-1} \theta \right) \right) \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

donc

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s-1} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s-2},$$

on a

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{2\pi} \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s-2}, \quad (3.7)$$

où $n_1 \in \{2k_1, 2k_1 - 1\}$.

Alors le polynôme F_{10} peut avoir au plus $\frac{2(k_1-2)-2}{2} = k-2$ racines positive. Par conséquent, le système différentiel (3.5) peut avoir au plus $k_1 - 2$ cycles limites.

3.2.2 Application 1

Nous donnons maintenant un exemple de système différentiel polynomial (3.5) avec $n_1 = 6$.

Proposition 3.2.1 *En appliquant la méthode de moyennisation d'ordre 1 au système (3.5) avec $n_1 = 6$, au plus un cycle limite bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.*

Preuve. On considère le système (3.5) où $A_1 > 0$ et $q_1(x, y)$ est un polynôme de degré 4 > 0, donc

$$q_1(x, y) = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{j=0}^d a_{j,d} x^{d-j} y^j \right).$$

Donc ce cas : $n_1 = 6$ et $k_1 = 3$.

3.2. PREUVES DES RÉSULTATS

L'équation $F_{10}(r)$ s'écrit sous forme

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{r^3}{2\pi} \left(\sum_{s=1}^{[2]} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2i-2} \right) \quad (3.8) \\
 &= \frac{r^3}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^1 a_{2i-1, 1} \int_0^{2\pi} \cos^{2-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right] r^{2i-2} + \sum_{i=1}^2 a_{2i-1, 3} \int_0^{2\pi} \cos^{4-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \left] r^{2i-2} \right] \\
 &= \frac{r^3}{2\pi} \left[a_{1,1} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + a_{1,3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta r^2 + a_{3,3} \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta r^2 \right],
 \end{aligned}$$

on a

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{2\pi} (a_{1,1} I_{0,2} + a_{1,3} I_{2,2} r^2 + a_{3,3} I_{0,4} r^2),$$

avec

$$I_{0,2} = \pi, \quad I_{2,2} = \frac{\pi}{4}, \quad I_{0,4} = \frac{3\pi}{4},$$

donc

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{r^3}{2\pi} \left(a_{1,1} \pi + \left(a_{1,3} \frac{\pi}{4} + a_{3,3} \frac{3\pi}{4} \right) r^2 \right) \\
 &= \frac{r^3}{2\pi} \left(a_{1,1} \pi + \left(\frac{a_{1,3} \pi + a_{3,3} 3\pi}{4} \right) r^2 \right) \\
 &= r^3 \left(a_{1,1} + \left(\frac{a_{1,3} + 3a_{3,3}}{4} \right) r^2 \right),
 \end{aligned}$$

alors

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{4} (4a_{1,1} + (a_{1,3} + 3a_{3,3}) r^2),$$

si $4a_{1,1} + (a_{1,3} + 3a_{3,3}) < 0$, ce polynôme $F_{10}(r)$ admet un racine positive

$$r = \sqrt{\frac{-4a_{1,1}}{a_{1,3} + 3a_{3,3}}},$$

le système (3.5) possède un cycles limite de rayon $r = \sqrt{\frac{-4a_{1,1}}{a_{1,3} + 3a_{3,3}}}$ si seulement si

$$4a_{1,1}(a_{1,3} + 3a_{3,3}) < 0.$$

Exemple 3.2.1 Soit le système perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 + y^2)(-y + 2y^3 + 4x^2y + 3x^4 - 2). \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans ce cas

$$a_{1,1} = -1, a_{1,3} = 4, a_{3,3} = 2, a_{0,4} = 3, A_1 = 2$$

et $n_1 = 6$ et $q_1(x, y)$ de degré 4, nous substituons les valeurs précédentes dans l'équation (3.7), on a

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{8}(10r^2 - 4).$$

Les cycles limite possibles pour (3.9) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = 0.$$

La racine positive unique de $F_{10}(r)$ est $r = 0.63$. Donc l'équation différentielle a pour suffisamment petit ε admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 0.63 du système perturbé (3, 9).

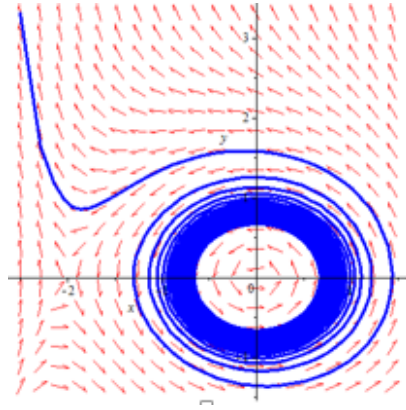


FIG 3.1- Cycle limite du système (3.9) avec $\varepsilon = 0.01$.

3.2.3 Application 2

Nous donnons maintenant un exemple de système différentiel polynomial (3.5) avec $n_1 = 7$.

Proposition 3.2.2 *En appliquant la méthode de moyennisation d'ordre 1 au système (3.5) avec $n_1 = 7$, au plus deux cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$.*

Preuve. On considère le système (3.5) ou $A_1 > 0$ et $q_1(x, y)$ est un polynôme de degré $5 > 0$, donc

$$q_1(x, y) = \sum_{d=1}^5 \left(\sum_{j=0}^d a_{j,d} x^{d-j} y^j \right).$$

Donc ce cas : $n_1 = 7$ et $k_1 = 4$.

L'équation $F_{10}(r)$ s'écrit sous forme

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r^3}{2\pi} \left(\sum_{s=1}^3 \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2i-2} \right. \\ &= \frac{r^3}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^1 a_{2i-1, 1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2i-2} \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 a_{2i-1, 3} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{4-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2i-2} \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 a_{2i-1, 5} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{6-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2i-2} \right], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r^3}{2\pi} \left[a_{1,1} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + a_{1,3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta r^2 \right. \\ &\quad + a_{3,3} \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta r^2 + a_{1,5} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &\quad \left. + a_{5,5} \int_0^{2\pi} \sin^6 \theta d\theta r^4 \right], \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES
DIFFÉRENTIELS DE KUKLES GÉNÉRALISÉS

on a

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{2\pi}(a_{1,1}I_{0,2} + a_{1,5}I_{4,2} + (a_{1,3}I_{2,2} + a_{3,3}I_{0,4})r^2 + a_{5,5}I_{0,6}r^4),$$

avec

$$I_{0,2} = \pi, \quad I_{2,2} = \frac{\pi}{4}, \quad I_{0,4} = \frac{3\pi}{4}, \quad I_{4,2} = \frac{\pi}{8}, \quad I_{0,6} = \frac{5}{8}\pi,$$

donc

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{16}[(5a_{5,5})r^4 + (2a_{1,3} + 6a_{3,3})r^2 + (8a_{1,1} + a_{1,5})],$$

Alors le polynomiale $F_{10}(r)$ peut avoir au plus deux racines positives. Par conséquent, le système différentiel (3, 5) peut avoir au plus deux cycles limites.

Exemple 3.2.2 Soit le système perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 + y^2)(-y + 2x^2y + 4y^3 + 2x^4y + 2y^5 - 2). \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans ce cas

$$a_{1,1} = -1, a_{1,3} = 2, a_{3,3} = 4, a_{1,5} = 2, a_{5,5} = 2, A_1 = 2,$$

avec $n_1 = 7$ et $q_1(x, y)$ de degré 5, nous substituons les valeurs précédentes dans l'équation (3.7), on a

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{8}(-6 + 10r^2 + 5r^4) = 0.$$

Les cycles limite possibles pour (3.10) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = 0.$$

La racine positive unique de $F_{10}(r)$ est $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{5}\sqrt{5}\sqrt{11} - 4} = 0.7$. Donc l'équation différentielle a pour suffisamment petit ε un cycle limite qui

bifurque de l'orbite périodique de rayon 0.7 du système perturbé (3.10).

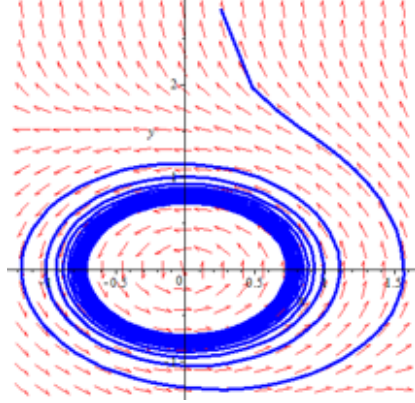


FIG 3.2- Cycle limite du système (3.10) avec $\varepsilon = 0.01$.

3.2.4 Preuve du cas (ii) du théorème 1

Nous allons appliquer la théorème de moyennisation du deuxième ordre. Pour cela nous écrivons le système (3, 3), en coordonnées polaires (r, θ) . où $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$, on pose

$$q_1(x, y) = \sum_{d=1}^{n_1-2} \left(\sum_{j=0}^d a_{j,d} x^{d-j} y^j \right),$$

et

$$q_2(x, y) = \sum_{d=1}^{n_2-2} \left(\sum_{j=0}^d b_{j,d} x^{d-j} y^j \right),$$

Le système (3, 3) s'écrit comme suite

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon(A_1 + \varepsilon A_2 - q_1(r, \theta) - \varepsilon q_2(r, \theta))r^2 \sin \theta \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon(+A_1 + \varepsilon A_2 - q_1(r, \theta) - \varepsilon q_2(r, \theta))r \cos \theta, \end{cases} \quad (3.11)$$

où $q_j(r, \theta) = q_j(r \cos \theta, r \sin \theta)$, pour $j \in \{1, 2\}$.

Prenant θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (3.11) devient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + 0(\varepsilon^2),$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES
DIFFÉRENTIELS DE KUKLES GÉNÉRALISÉS

où

$$\begin{cases} F_1(r, \theta) = (q_1(r, \theta) - A_1)r^2 \sin \theta \\ F_2(r, \theta) = (q_2(r, \theta) - A_2 - (q_1(r, \theta) - A_1)^2 r \cos \theta)r^2 \sin \theta. \end{cases} \quad (3.12)$$

Déterminons la fonction $F_{20}(r)$ correspondante. Pour cela, on pose $F_{10}(r) = 0$ qui est L'équivalent au

$$a_{2i-1, 2s-1} = 0, \forall 1 \leq i, s \leq k_1 - 1. \quad (3.13)$$

Ensuite calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, \theta) &= \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s} \cos^{2s-2i+1} \theta \sin^{2i} \theta \right) (2s+2)r^{2s+1} - 2A_1 r \sin \theta \\ &+ \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i, 2s} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i+1} \theta \right) (2s+2)r^{2s+1} \\ &+ \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=0}^{s-1} a_{2i, 2s-1} \cos^{2s-1-2i} \theta \sin^{2i+1} \theta \right) (2s+1)r^{2s}, \\ F_1(r, \theta) &= \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s} \sum_{a=0}^{s-i} \binom{s-i}{a} (-1)^a \cos \theta \sin^{2a+2i} \theta \right) r^{2s+2} \\ &- A_1 r^2 \sin \theta + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i, 2s} \sum_{a=0}^i \binom{i}{a} (-1)^a \cos^{2s-2i+2a} \theta \sin \theta \right) r^{2s+2} \\ &+ \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=0}^{s-1} a_{2i, 2s-1} \sum_{a=0}^i \binom{i}{a} (-1)^a \cos^{2s-2i+2a-1} \theta \sin \theta \right) r^{2s+1}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\theta F_1(r, \phi) &= \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s} \sum_{a=0}^{s-i} \binom{s-i}{a} (-1)^a \frac{\sin^{2i+2a+1} \theta}{2a+2i+1} \right) r^{2s+2} - A_1 r^2 (\cos \theta - 1) \\ &+ \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i, 2s} \sum_{a=0}^i \binom{i}{a} (-1)^a \frac{1 - \cos^{2s-2i+2a+1} \theta}{2s-2+2a+1} \right) r^{2s+2} \\ &+ \sum_{s=1}^{k_1-1} \left(\sum_{i=0}^{s-1} a_{2i, 2s-1} \sum_{a=0}^i \binom{i}{a} (-1)^a \frac{1 - \cos^{2s-2i+2a} \theta}{2s-2i+2a} \right) r^{2s+1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2p+1} \theta \sin^q \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2p+1} \theta d\theta, \forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.15)$$

En utilisant (3.15) on obtient que

$$\begin{aligned} 2\pi F_{2,0} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} F(r, \theta) \times \int_0^\theta F_1(r, \phi) + F_2(r, \theta) d\theta \right) d\theta \quad (3.16) \\ &= 2A_1 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1, 2s} \sum_{a=0}^{s-i} \binom{s-i}{a} (-1)^{a+1} \frac{\int_0^{2\pi} \sin^{2a+2i+2} \theta d\theta}{2a+2i+1} \right) r^{2s+3} \\ &\quad + A_1 \sum_{\tilde{s}}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} a_{2\tilde{i}-1, 2\tilde{s}} \int_0^{2\pi} \cos^{2\tilde{s}+2\tilde{i}+2} \theta \sin^{2\tilde{i}} \theta d\theta \right) (2\tilde{s}+2) r^{2\tilde{s}+3} \\ &\quad + \sum_{\tilde{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\tilde{i}=0}^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^s (a_{2\tilde{i}-1, 2\tilde{s}} a_{2i, 2s}) (2\tilde{s}+2) Q r^{2\tilde{s}+2s+3} \\ &\quad + \sum_{\tilde{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\tilde{i}=0}^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^s (a_{2i-1, 2s} a_{2\tilde{i}, 2\tilde{s}}) (2\tilde{s}+2) K r^{2\tilde{s}+2s+3} + \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

où

$$Q = \sum_{a=0}^i \binom{i}{a} \frac{\int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i+2a+2\tilde{s}-2\tilde{i}+2} \theta \sin^{2\tilde{i}} \theta d\theta}{2s-2i+2a+1} (-1)^{a+1},$$

et

$$K = \sum_{a=0}^{s-i} \binom{s-i}{a} \frac{\int_0^{2\pi} \cos^{2\tilde{s}-2\tilde{i}} \theta \sin^{2\tilde{i}+2a+2i+2} \theta d\theta}{2a+2i+1} (-1)^a.$$

Mais, (3.9) implique que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta &= r^2 \int_0^{2\pi} q_2(r, \theta) \sin \theta d\theta \\ &+ 2A_1 r^3 \int_0^{2\pi} [q_1(r, \theta) \sin \theta] \cos \theta d\theta \\ &- r^3 \int_0^{2\pi} (q_1(r, \theta))^2 \cos \theta \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$G = r^3 \int_0^{2\pi} [q_1(r, \theta) \sin \theta] \cos \theta d\theta$$

De plus, (3.6) dans (3.7), on a

$$r^2 \int_0^{2\pi} q_2(r, \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{s=1}^{k_2-1} \left(\sum_{i=1}^s b_{2i-1, 2s-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s+1}. \quad (3.18)$$

Maintenant, (3.14) et (3.15) on a

$$G = \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=0}^s a_{2i-1, 2s} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i+2} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s+3}. \quad (3.19)$$

De plus, q_1 s'écrit en (3.4) avec $D = 0$ (voir éq.3.13) et

$$\begin{aligned} (q_1(x, y))^2 &= A^2 + 2BA + B^2 + 2BC + C^2 \\ &+ 2 \sum_{\hat{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\hat{i}=1}^{\hat{s}} \sum_{\hat{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{s}} a_{2\hat{i}, 2\hat{s}} a_{2\hat{i}-1, 2\hat{s}} x^{2\hat{s}-2\hat{i}+2\hat{s}-2\hat{i}+1} y^{2\hat{i}+2\hat{i}-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$r^3 \int_0^{2\pi} (q_1(x, y))^2 \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \sum_{\hat{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\hat{i}=1}^{\hat{s}} \sum_{\hat{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{s}} (a_{2\hat{i}, 2\hat{s}} a_{2\hat{i}-1, 2\hat{s}}) H r^{2\hat{s}+2\hat{s}+3},$$

où

$$H = \int_0^{2\pi} \cos^{2\tilde{s}-2\tilde{i}+2\tilde{s}-2i+2} \theta \sin^{2i+2\tilde{i}} \theta d\theta.$$

Par conséquent, (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19), nous avons défini $F_{2,0}(r)$ par

$$\begin{aligned} 2\pi F_{2,0}(r) &= 2A_1 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1,2s} \sum_{a=0}^{s-i} \binom{s-i}{a} \frac{\int_0^{2\pi} \sin^{2a+2i+2} \theta d\theta}{2a+2i+1} (-1)^{a+1} \right) r^{2s+3} \\ &+ A_1 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1,2s} \int_0^{2\pi} \cos^{2s+2i+2} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) (2s+2) r^{2s+3} \\ &+ \sum_{\tilde{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} \sum_{i=0}^s (a_{2\tilde{i}-1,2\tilde{s}} a_{2i,2s}) (2\tilde{s}+2) Q r^{2\tilde{s}+2s+3} \\ &+ \sum_{\tilde{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\tilde{i}=0}^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^s (a_{2i-1,2s} a_{2\tilde{i},\tilde{s}}) (2\tilde{s}+2) K r^{2\tilde{s}+2s+3} \\ &+ \sum_{s=1}^{k_2-1} \left(\sum_{i=1}^s b_{2i-1,2s-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s+1} \\ &+ 2A_1 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1,2s} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i+2} \theta \sin^{2i} \theta \right) r^{2s+3} \\ &- 2 \sum_{\tilde{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} \sum_{\hat{s}=1}^{\lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor} \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{s}} (a_{2\hat{i},2\hat{s}} a_{2\tilde{i}-1,2\tilde{s}}) G r^{2\tilde{s}+2\hat{s}+3}. \end{aligned}$$

Alors le polynôme $F_{20}(r)$ peut avoir au plus max $\{k_2 - 2; 2 \lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor - 2\}$ racines positives. Par conséquent, le système différentiel (3.3) peut avoir au plus max $\{k_2 - 2; 2 \lfloor \frac{n_1-2}{2} \rfloor - 2\}$ cycles limites.

3.2.5 Application

Nous donnons maintenant un exemple de système différentiel polynomial avec $n_1 = n_2 = 6$ qui ont deux cycles limites.

Proposition 3.2.3 *Le nombre maximum de cycles limites des système différentiels (3.3) avec $n_1 = n_2 = 6$, qui peuvent bifurquer du centre linéaire, en utilisant la théorème de moyennisation du deuxième ordre est deux cycles limites.*

Preuve. On considère le système (3.3) avec $A_1 > 0$ et $q_1(x, y)$ est un polynôme de degré 4 > 0, pour $i = 1, 2$ donc

$$q_1(x, y) = \sum_{d=1}^4 \left(\sum a_{j,d} x^{d-j} y^j \right).$$

et

$$q_2(x, y) = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{j=0}^d b_{j,d} x^{d-j} y^j \right).$$

Dans ce cas, $n_1 = n_2 = 6$ et $k_1 = k_2 = 3$ ($n_i = 2k_i$, si n_i paire).

L'équation $F_{20}(r)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} 2\pi F_{2,0}(r) &= 2A_1 \sum_{s=1}^2 \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1,2s} \sum_{a=0}^{s-i} \binom{s-i}{a} \frac{\int_0^{2\pi} \sin^{2a+2i+2} \theta d\theta}{2a+2i+1} (-1)^{a+1} \right) r^{2s+3} \\ &+ A_1 \sum_{s=1}^2 \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1,2s} \int_0^{2\pi} \cos^{2s+2i+2} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) (2s+2) r^{2s+3} \\ &+ \sum_{\tilde{s}=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} \sum_{i=0}^s [(a_{2\tilde{i}-1,2\tilde{s}} a_{2i,2s}) (2\tilde{s}+2) Q + (a_{2i-1,2s} a_{2\tilde{i},\tilde{s}}) (2\tilde{s}+2) K] r^{2\tilde{s}+2s+3} \\ &+ \sum_{s=1}^2 \left(\sum_{i=1}^s b_{2i-1,2s-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s+1} \\ &+ 2A_1 \sum_{s=1}^2 \left(\sum_{i=1}^s a_{2i-1,2s} \int_0^{2\pi} \cos^{2s-2i+2} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) r^{2s+3} \\ &- 2 \sum_{\tilde{s}=1}^2 \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} \sum_{\hat{s}=1}^2 \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{s}} (a_{2\hat{i},2\hat{s}} a_{2\tilde{i}-1,2\tilde{s}}) G r^{2\tilde{s}+2\hat{s}+3}. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 2\pi F_{2,0}(r) = & \sum_{s=1}^2 \sum_{i=1}^s R_{i,s} r^{2s+3} + \sum_{\tilde{s}=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} \sum_{i=0}^s F_{i,\tilde{i},s,\tilde{s}} r^{2\tilde{s}+2s+3} \\
 & + \sum_{s=1}^2 \sum_{i=1}^s G_{i,s} r^{2s+1} - 2 \sum_{\tilde{s}=1}^2 \sum_{\tilde{i}=1}^{\tilde{s}} \sum_{\hat{s}=1}^2 \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{s}} V_{\hat{i},\tilde{i},\hat{s},\tilde{s}} r^{2\tilde{s}+2\hat{s}+3},
 \end{aligned}$$

où $R_{i,s}, F_{i,\tilde{i},s,\tilde{s}}, G_{i,s}$ et $V_{\hat{i},\tilde{i},\hat{s},\tilde{s}}$ sont des constantes.

Alors le polynôme $F_{20}(r)$ peut avoir au plus deux racines positives. Par conséquent, le système différentiel (3, 3) peut avoir au plus deux cycles limites.

Conclusion et perspectives

La méthode de moyennisation permet de simplifier l'analyse des systèmes de Kukles en transformant les équations différentielles non linéaires complexes en systèmes moyennés plus simples. Cela facilite l'étude qualitative du comportement des solutions, notamment l'identification des cycles limites. Nous continuons à travailler sur des problèmes analogues, on se propose d'étudier le nombre maximum de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Kukles (3.3), en utilisant la théorie de moyennisation *d'ordre trois*.

Bibliographie

- [1] A. Boulfoul, A.Makhlouf and N.Mellahi, *On the limit cycles for a class of generalized Kukles differential systems*, *J. App. Anal. comp.* 9(3)(2019), 864-883.
- [2] A. Buica, L.P. Francoise and J. Llibre, *Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter*, *Comm. On Pure and Appl. Anal.*, 6 : 103-111, 2007.
- [3] A. Buică, J. Gin'è, J. Llibre, *Bifurcation of limit cycles from a polynomial degenerate center*, *Adv. Nonlinear Stud.* 10 (2010) 597-609.
- [4] A. Buica and J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, *Bull. Sci. Math.*, 128 : 7-22, 2004.
- [5] J. Chavarriga, E. Saez, I. Szanto and M. Grau, *Coexistence of limit cycles and invariant algebraic curves for a Kukles system*, *Nonlinear. Anal. Theo. Meth. Appl.* 59(5) (2004), 673-693.
- [6] B.Garcia, J. Lilibre, J. S. Pérez del Rio, *Limit cycles of generalised Liénard polynomial differential systems via averaging theory*, *chaos solution fractals* 2014, 62-63 :1-9.
- [7] D. Hilbert, *Mathematische probleme (lecture)*, in ; *Second Internat. Congress Math., Paris, 1900*, *Nach. Ges. Wiss. Gottingen Math.-phys. Kl.*, 1900. pp. 253-297.
- [8] J. Llibre and A.C.Mereu, *Limit cycles for generalized Kukles polynomial systems*, *Nonlinear Anal.* 2011, 74, 1261-1271.
- [9] J. Llibre and C. Mereu, *limit cycles for generalized kukles polynomial differential systems*, *Non linear analysis* 74(2011)1261-1271.
- [10] A. Makhlouf and A. Menaceur, *On the Limit cycles of a class of generalized Kukles polynomial differential systems via averaging theory*, *Int. J. Differ. Equ.* 2015, 2015, 325102.

- [11] *I.S. Kukles, Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS(N. S.), 42 (1944), 208-211 (French).*
- [12] *J.A. Sanders and F. verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, vol.59 of Applied Mthematical Sciences, Springer, NewYork, NY, USA 1985.*
- [13] *L.S. Pontrjagin, Uber Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen, Phys. Z. Sowjetunion 6 (1934) 25–28.*
- [14] *R. Rabanal, on the limit cycles of a class of kukles type differential systems, Nonlinear Analysis 95(2014), 676-690.*
- [15] *F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, Berlin, Germany, 1996.*