

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Août 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Solutions périodiques dans le système de Chua

Option : COSD

Par : Rouami Meriem

Encadré par : Boulfoul Amel

M.C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Debz Nassima
Examineur: Mellahi Nawal

M.C.B U. SKIKDA
M.C.B U. SKIKDA

Année : 2023/2024

Remerciement

*En premier lieu et avant tout, j'adresse mes remerciements à **ALLAH** Tout Puissant qui m'éclairé mon chemin et qui ma donnée la force, la patience, la volonté et le courage pour réaliser ce travail.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr. Boulfoul Amel**, je la remercie pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.*

*On remercie les membres du jury **Dr. Debz Nassima** et **Dr. Mellahi Nawal** pour avoir accepté examiner ce travail.*

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui, m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde, mes chers parents.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, à la lumière qui a éclairé mon chemin, à l'être cher dont je porte le nom avec fierté et source de ma joie et de mon bonheur, à mon premier professeur, l'homme qui s'est efforcé toute sa vie d'être le meilleur : à mon cher père <<ABDE SSELEM>>.

A celui qui a été le premier à me soutenir dans la réalisation de mes ambitions, a été mon refuge et mon bras droit à cette étape, à celui qui m'a montré le chemin de ma vie et de mon estime de soi, au cœur compatissant, à celle dont les prières m'entouraient, à ma chère mère <<SOLTANI SIHEM>>.

A la source de ma force de soutien, à mon côté ferme et à la sécurité de mes jours, à ma chère sœur<<FATIMA>>.

A ma chère sœur <<OUMAIMA>> et à mon cher frère <<YAHYA>>.

Leur amour s'élève au-dessus de tout l'amour pour tous ceux qui ont aidé et soutenu sur ce chemin tous les membres de ma chère famille, <<ROUAMI>> et <<SOLTANI>>.

A mes amis.

ملخص

في هذه المذكرة سندرس الحلول الدورية التي تتشعب من نقطة استقرار صفر-أوف للنظام التفاضلي:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - cx - x^3), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -by, \end{cases}$$

بحيث a, b, c وسائط حقيقية حقيقية .

بشكل أكثر دقة نوضح أن نقطة توازن صفر-أوف المتمركزة عند نقطة أصل الاحداثيات يمكن أن تشعب مدارا دوريا واحدا. وعلاوة على ذلك، نقدم تقديرا تحليليا لتعبير على هذا المدار الدوري، وقد حددنا نوع استقرار المدار الدوري على أساس معاملات الاضطراب . كانت الأداة المستخدمة للتوصل إلى هذه النتائج هي نظرية المتوسط من درجة الثانية. كلمات مفتاحية: نظام ديناميكي، حل دوري، طريقة المتوسط.

Dans ce mémoire, nous étudions les solutions périodiques qui bifurquent du point d'équilibre zéro-Hopf pour le système différentiel de Chua :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - cx - x^3), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -by, \end{cases}$$

avec a , b et c sont des paramètres réels.

Plus précisément, nous montrons que d'un point d'équilibre zéro-Hopf localisé à l'origine des coordonnées peut bifurquer une orbite périodique. De plus, nous fournissons une estimation analytique de l'expression de cette orbite périodique et nous avons déterminé le type de stabilité de l'orbite périodique en fonction des paramètres de la perturbation. L'outil utilisé pour fournir ces résultats a été la théorie de la moyennisation du second ordre.

Mots clés : Bifurcation zéro-Hopf, orbites périodiques, méthode de moyennisation.

In this work, we study the periodic solutions bifurcating from a zero-Hopf equilibrium for the differential system :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - cx - x^3), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -by, \end{cases}$$

with a , b and c are real arbitrary parameters.

More precisely we show that from the zero-Hopf equilibrium point localized at the origin of coordinates can bifurcate one periodic orbit. Moreover, we provide an analytic estimation of the expression of this periodic orbit and we have determined the kind of the stability of the periodic orbit in function of the parameters of the perturbation. The tool used for proving these results has been the averaging theory of second order.

Key words : Dynamical system, periodic solution, averaging method.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	8
1 Notions préliminaires	11
1.1 Introduction	11
1.2 Systèmes dynamique	11
1.3 Flot	13
1.4 Point d'équilibre et linéarisation	13
1.5 Nature des points d'équilibre	14
1.6 Portrait de phase planaire	15
1.7 Orbites périodiques et cycles limites	16
1.8 Stabilité	17
1.8.1 Stabilité en première approximation	18
1.8.2 Instabilité en première approximation	18
1.8.3 Méthode de stabilité au sens de Lyapunov	19
1.8.4 Stabilité au sens Cetoev	21
1.9 Méthode de moyennisation du première et deuxième ordre	23

2	La théorie des bifurcations	25
2.1	Introduction à la théorie des bifurcations	25
2.2	Calcul de bifurcation	26
2.2.1	Bifurcations en dimension 2	26
3	Bifurcation zéro-Hopf dans le système de Chua par la méthode de moyennisation de second ordre	38
3.1	Introduction	38
3.2	Point zéro-Hopf	39
3.3	Preuve de la proposition 3.2.1	40
3.4	Preuve du théorème 3.3.1	43

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps. D'un point de vue historique, disons-nous, la théorie des systèmes dynamiques est née avec les travaux de H.Poincaré autour des années 1881-1890, notamment avec les deux grandes mémoires (sur les courbes définies par des équations différentielles, sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique) et prolongée par quelques mathématiciens et physiciens autour des années 1930.

Depuis 1920 jusqu'à présent les systèmes dynamiques jouent un rôle très important puisque il ya des application dans beaucoup de disciplines scientifiques par exemple : la physique (mécanique céleste, météo), la biologie (dynamique de population), l'informatique (traitement d'images),...etc.

L'un des problèmes les plus intéressants et classiques dans la théorie des systèmes dynamiques est l'étude des solutions périodiques, leur existence, leur nombres et leur stabilité. Les cycles limites des champs de vecteurs planaires ont défini par H.Poincaré. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Andronov ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de type vide était un cycle limite. Un cycle limite d'un système dynamique est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des solutions périodiques

de ce système. La bifurcation zéro-Hopf est aussi un outil important pour détecter l'existence des solutions périodiques qui dépend d'un paramètre " μ ". En général, le point zéro-Hopf est un équilibre qui a deux valeurs propres imaginaires pures et $n - 2$ valeurs propres nuls.

Il existe plusieurs méthodes pour prouver l'existence de solution périodique notamment la méthode de moyennisation. Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un certain système différentiel périodique et celles de son système différentiel moyenné.

Le travail réalisé dans ce mémoire se divise en trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de ce mémoire. On présentera la définition du système dynamique et d'un point d'équilibre. Ensuite on donnera la définition d'orbite périodique et d'un cycles limites. Enfin, on citera la stabilité et la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la théorie des bifurcations dans les systèmes dynamiques et les types de bifurcation (bifurcation noeud-selle, bifurcation transcritique, bifurcation fourche, bifurcation de Hopf).

Dans le troisième chapitre, nous introduisons un petit rappelle sur le point zéro-Hopf. Ensuite, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf dans le système de Chua

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - cx - x^3), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -by, \end{cases}$$

où a , b et c sont des paramètres réels, par la méthode de moyennisation du second ordre.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notions de base sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

1.2 Systèmes dynamique

Un systèmes dynamique est un phénomène qui évolue au cours du temps. Cette évolution est décrite généralement par des équations différentielles ordinaires. Il peut être également :

- autonome : si l'évolution ne dépend pas du temps.
- non autonome : si l'évolution dépend du temps.

Définition 1.2.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(.; \mathbf{x}) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(\mathbf{t}; .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
- $U(\mathbf{t} + \mathbf{s}, \mathbf{x}) = U(\mathbf{t}, U(\mathbf{s}, \mathbf{x}))$ pour tout $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.2.1 Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0 \end{cases} ; \mathbf{t} \in \mathbb{R}^+; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où \mathbf{A} la matrice constante, la solution de (1.1) est

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \exp(\mathbf{t}\mathbf{A})\mathbf{x}_0.$$

Le système (1.1) engendré un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^+; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \exp(\mathbf{t}\mathbf{A})\mathbf{x}_0$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.3 Flot

Définition 1.3.1 Soit le système non linéaire autonome :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$. On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0),$$

où $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ est la solution (1.2) telle que $\phi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

1.4 Point d'équilibre et linéarisation

Définition 1.4.1 Le point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point d'équilibre ou point critique du système (1.2) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Définition 1.4.2 On appelle linéarisé du système (1.2) au voisinage du point d'équilibre \mathbf{x}_0 , le système

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1.3}$$

où $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ est la jacobienne de \mathbf{f} au point \mathbf{x}_0

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Exemple 1.4.1 Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x, \\ \dot{y} = 2y + x^3, \end{cases} \quad (1.4)$$

il est clair que $F(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$, entraîne que $\mathbf{X}_0 = (0, 0)$, est le seul point d'équilibre de ce système

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{X}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3x^2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}.$$

Définition 1.4.3 Le point d'équilibre \mathbf{x}_0 est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de $Df(\mathbf{x}_0)$ sont à partie réelle non nulle.

1.5 Nature des points d'équilibre

Soit le système (1.3) où \mathbf{A} est une matrice 2×2 , et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

□ Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

est un point selle, il est toujours instable. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de signe, on a deux cas

— Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un noeud stable.

— Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un noeud instable.

□ Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si il existe une valeur propre à partie réelle positive.

□ Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable.

1.6 Portrait de phase planaire

Définition 1.6.1 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.5) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan $(x \circ y)$ est appelé plan de phase.

1.7 Orbites périodiques et cycles limites

Définition 1.7.1 On appelle solution périodique toute solution $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{t})$ de l'équation (1.2) telle qu'il existe un nombre $\mathbf{T} > \mathbf{0}$ vérifiant

$$\phi(\mathbf{t} + \mathbf{T}) = \phi(\mathbf{t}), \quad (1.6)$$

le plus petit réel $\mathbf{T} > \mathbf{0}$ qui vérifie(1.5) est appelé période.

Une solution périodique du système (1.2) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.7.2 Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée. Ceci signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées. Elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.

Exemple 1.7.1 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

où que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

on a : $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 1$.

Pour $r = 1$. On a l'orbite périodique :

$$(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = (\cos(t + \boldsymbol{\theta}_0), \sin(t + \boldsymbol{\theta}_0)) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0.$$

Cette orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombre des orbites périodiques et il n'ya pas des cycles limites.

Remarque 1.7.1 Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle limite est dit stable ou attractif, sinon il est dit instable.

Remarque 1.7.2 Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaire.

1.8 Stabilité

Soit le système autonome :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{C}^1. \quad (1.7)$$

Définition 1.8.1 $\bar{\mathbf{x}}$ est un point d'équilibre stable du système (1.7) si pour tout voisinage

W de $\bar{\mathbf{x}}$, il existe un voisinage W_1 de $\bar{\mathbf{x}}$, dans W tel que :

tout solution $\mathbf{x}(t)$ avec $\mathbf{x}_0 \in W_1$ est défini et est dans W , $\forall t > 0$.

Définition 1.8.2 $\bar{\mathbf{x}}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable si pour tout voisinage

W de $\bar{\mathbf{x}}$, il existe un voisinage W_1 de $\bar{\mathbf{x}}$ dans W tel que :

pour tout solution $\mathbf{x}(t)$ avec $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{W}_1$ est défini par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) \longrightarrow \bar{\mathbf{x}} \iff \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

1.8.1 Stabilité en première approximation

Théorème 1.8.1 Soit le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ou $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$ et $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ un point équilibre hyperbolique de \mathbf{f} . On suppose que $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}$, à toutes des valeurs propres de \mathbf{A} sont à partie réelle strictement négative alors le point équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ est dit asymptotiquement stable pour le système $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ et il en est de même pour le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

1.8.2 Instabilité en première approximation

Théorème 1.8.2 Soit le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ou $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$ et $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ un point équilibre hyperbolique de \mathbf{f} . On suppose que $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}$, si existe λ un valeur propre de \mathbf{A} à partie réelle positive. Alors le point équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ est instable pour le système $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ et il en est de même pour le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Exemple 1.8.1 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{x}^2, \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (1.8)$$

— Les points d'équilibre :

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \mathbf{y} + \mathbf{x}^2 = 0 \\ \mathbf{x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{y} = 0 \end{cases},$$

donc $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un point d'équilibre du système (1.8).

— La jacobienne en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est

$$\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

— la polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Donc, d'après théorème de instabilité un existe un valeur propre a partie réelle positive le point d'équilibre $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est instable.

Remarque 1.8.1 Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive.

1.8.3 Méthode de stabilité au sens de Lyapunov

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibre que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(\mathbf{x})$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin

d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

Définition 1.8.3 Soit U ouvert dans \mathbb{R}^n et $\mathbf{0} \in U$ est V une fonction positive sur U si

$$\square V(\mathbf{0}) = 0.$$

$$\square V(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}.$$

V est dite défini négative sur U si $V(\mathbf{0}) = 0$.

$$V(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}.$$

Définition 1.8.4 Une fonction V de classe \mathbb{C}^1 $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ U ouvert dans \mathbb{R}^n est dite semi-défini positive (semi-défini négative) sur et si

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U, \quad (V(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U).$$

Théorème 1.8.3 Si $\mathbf{0}$ est un point d'équilibre du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et s'il existe une fonction $V \in \mathbb{C}^1$ défini positive sur un voisinage U de $\mathbf{0}$, alors on a :

$$\square \text{ Si } \frac{dV}{dt} \leq 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}, \text{ alors } \mathbf{0} \text{ est un équilibre stable.}$$

$$\square \text{ Si } \frac{dV}{dt} < 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}, \text{ alors } \mathbf{0} \text{ est un équilibre asymptotiquement stable.}$$

$$\square \text{ Si } \frac{dV}{dt} > 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}, \text{ alors } \mathbf{0} \text{ est un équilibre instable.}$$

Exemple 1.8.2 Étude de stabilité de $(0,0)$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 2y^3 \\ \dot{y} = -2xy^2 \end{cases} .$$

Ce système est non linéaire, $(0,0)$ est un équilibre. On a :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 0$. Donc $(0,0)$ est un équilibre non hyperbolique on va chercher une fonction de Lyapunov $V(x,y)$ de classe $V \in \mathbb{C}^1$. Posons :

$$V(x,y) = ax^\alpha + by^\beta, \quad a, b, \alpha, \beta > 0.$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha ax^{\alpha-1}\dot{x} + \beta by^{\beta-1}\dot{y}.$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha ax^{\alpha-1}(-x^3 + 2y^3) + \beta by^{\beta-1}(-2xy^2).$$

Si on choisit :

$$\begin{cases} a\alpha = b\beta \longrightarrow a = b \\ \alpha - 1 = 1 \longrightarrow \alpha = 2 \\ \beta + 1 - 3 \longrightarrow \beta = 2 \end{cases}.$$

$\alpha = \beta = 2$, et $a = b = 1$, $V(x,y) = x^2 + y^2$ et $\frac{dV}{dt} = -2x^4 - 2y^4$, est défini négative donc $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

1.8.4 Stabilité au sens Cetaev

Théorème 1.8.4 Soit U un voisinage ouvert suffisamment "petit" de l'origine.

S'il existe un ouvert Ω et une fonction de classe \mathbb{C}^1 $V : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

□ L'origine est un point de la frontière de Ω .

□ $V(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \cap U$.

□ $V(\mathbf{x}) > 0$ et $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega \cap U$.

Alors l'origine est un point instable.

Exemple 1.8.3 Soit le système suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - xy \\ \dot{y} = y^2 \end{cases} .$$

Ce système est non linéaire, $(0,0)$ est un équilibre. On a :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 0$. Donc $(0,0)$ est un équilibre non hyperbolique et le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Soit la fonction : $V(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$.

$$\dot{V}(x, y) = 6\alpha x^4 + (4\beta - 3\alpha)x^3 y + (2\gamma - \beta)x^2 y^2 + \gamma x y^3 + 3\delta y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4 \implies \begin{cases} 3\delta = 1 \\ 4\beta - 3\alpha = 4 \\ 2\gamma - \beta = 6 \\ \gamma = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \\ \delta = \frac{1}{3} \end{cases} .$$

$$\dot{V}(x, y) = 8x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + 1y^4 = 7x^4 + (x + y)^4 > 0.$$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 y + 4x y^2 + \frac{1}{3}.$$

Vérification des condition du théorème de Cetaev

(1) $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie sur \mathbb{R}^2 donc on peut prendre pour $D = \{\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\| \leq r\}$ n'importe que cercle de centre $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ et de rayon r .

(2) Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{y^3}{3} > 0$

Donc il existe des points aussi près que l'on veut de l'origine pour lesquels $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est strictement positive.

(3) $\dot{V} > 0$ sur $D - \mathbf{0}$.

(4) $V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Donc l'origine est instable.

1.9 Méthode de moyennisation du première et deuxième ordre

Théorème 1.9.1 *Soit :*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^3 \mathbf{R}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (1.9)$$

soit un système différentiel non autonome tel que D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n où

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{R} : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon f, \varepsilon f) \rightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues,

T -périodiques par rapport à la première variable. Supposons que :

(i) $\mathbf{F}_1(t, \cdot), \mathbf{F}_2(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(D)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{R}, D_x \mathbf{F}_1$ et $D_x \mathbf{F}_2$ sont localement

Lipschitz par rapport à x . \mathbf{R} est différentiable par rapport à ε , on définit $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$

comme suit :

$$\mathbf{f}_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{F}_1(s, z) ds,$$

$$\mathbf{f}_2(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z \mathbf{F}_1(s, z) \int_0^s \mathbf{F}_1(t, z) dt + \mathbf{F}_2(t, z)] ds. \quad (1.10)$$

(ii) pour $V \subset D$ un ensemble ouvert et borné et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon \mathbf{f}, \varepsilon \mathbf{f}) \setminus \{0\}$, il existe $\mathbf{a} \in V$ tel que $\mathbf{f}_1(\mathbf{a}) + \varepsilon \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ et

$$\det \left(\frac{\partial(\mathbf{f}_1 + \varepsilon \mathbf{f}_2)}{\partial z} \right) \Big|_{z=\mathbf{a}} \neq \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

De plus, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\mathbf{x}(\cdot, \varepsilon)$ du système (1.9) telle que $\mathbf{x}(\mathbf{0}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

En outre, les valeurs propres de la matrice Jacobienne $D(\mathbf{f}_1(\mathbf{a}) + \varepsilon \mathbf{f}_2(\mathbf{a}))$ fournissent le type de stabilité de la carte de Poincaré associée à la solution périodique $\mathbf{x}(\mathbf{t}, \varepsilon)$.

-Si les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 ne sont pas identiquement nulles. Alors les zéros de $\mathbf{f}_1 + \varepsilon \mathbf{f}_2$ sont principalement les zéros de \mathbf{f}_1 pour ε suffisamment petit. Dans ce cas le théorème est dit la théorème de moyennisation du première ordre.

-Si la fonction \mathbf{f}_1 est identiquement nulle et \mathbf{f}_2 n'est pas identiquement nulle, ensuite les zéros de $\mathbf{f}_1 + \varepsilon \mathbf{f}_2$ sont les zéros de \mathbf{f}_2 . Le théorème est dit la théorie de moyennisation du second ordre (voir[11]).

CHAPITRE 2

LA THÉORIE DES BIFURCATIONS

2.1 Introduction à la théorie des bifurcations

On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant paramètres. De tels changement sont appelés bifurcations. Pour les système continus dérivant d'un potentiel, le mathématicien **René Thom** emploie, au lieu de bifurcation, le terme catastrophe, terme qui a connu une fortune médiatique importante. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. Nous nous intéressons ici aux bifurcation locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu.

2.2 Calcul de bifurcation

2.2.1 Bifurcations en dimension 2

2.2.1.1 Bifurcation noeud-selle

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} .$$

— Si $\mu = 0$

Le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre unique de ce système.

La jacobienne en $(0, 0)$ est donnée par :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = -\lambda(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$. Pour $\lambda_1 = 0$, l'origine est un point non hyperbolique (instable).

— Si $\mu < 0$

Il n'y a pas de points d'équilibre pour ce système.

— Si $\mu > 0$

Il y a deux points d'équilibre $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$. La jacobienne au point $(\sqrt{\mu}, 0)$ est donnée

par :

$$Df(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (-2\sqrt{\mu} - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2\sqrt{\mu}$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\sqrt{\mu}, 0)$ est un noeud stable.

La jacobienne en le point $(-\sqrt{\mu}, 0)$ est donnée par :

$$Df(-\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (2\sqrt{\mu} - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu}$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(-\sqrt{\mu}, 0)$ est un point selle (instable).

Donc la valeur $\mu = 0$ est une valeur de bifurcation de ce système et cette bifurcation est appelée bifurcation noeud-selle. Le portrait de phase de ce système est montré dans les figures 2.1 et 2.2.

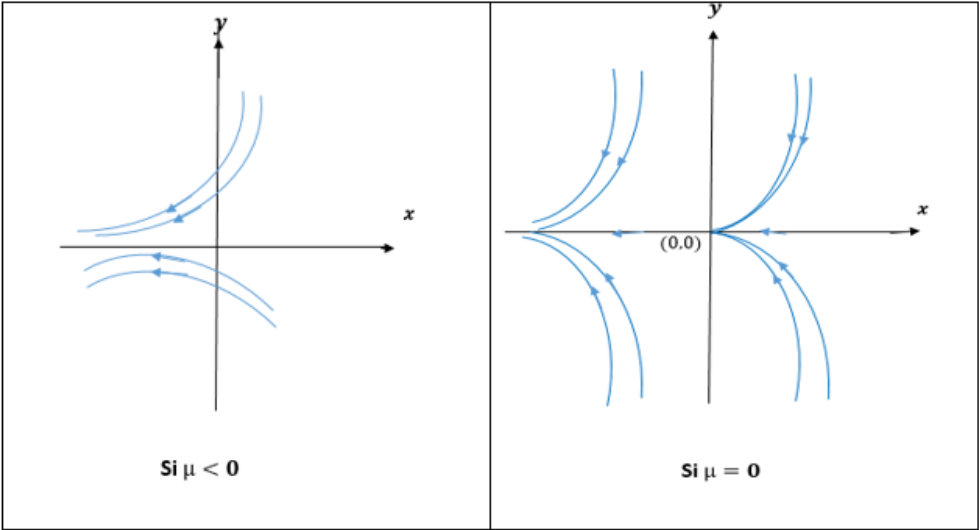


FIGURE 2.1:

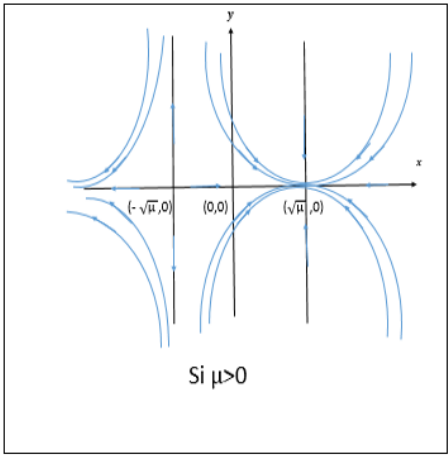


FIGURE 2.2:

2.2.1.2 Bifurcation transcritique

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

— Si $\mu = 0$, le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre unique de ce système.

La jacobienne en $(0, 0)$ est donnée par :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = -\lambda(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$. Pour $\lambda_1 = 0$, l'origine est un point non hyperbolique (instable).

— Si $\mu \neq 0$, il existe deux points d'équilibre qui sont $(0, 0)$ et $(\mu, 0)$.

- $\mu > 0$, la jacobienne en $(0, 0)$ est donnée par :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ instable(selle).

La jacobienne en $(\mu, \mathbf{0})$ est donnée par :

$$Df(\mu, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -\mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\mu, \mathbf{0})$ stable(noeud).

$-\mu < \mathbf{0}$, la jacobienne en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est donnée par :

$$Df(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ stable(noeud).

La jacobienne en $(\mu, \mathbf{0})$ est donnée par :

$$Df(\mu, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

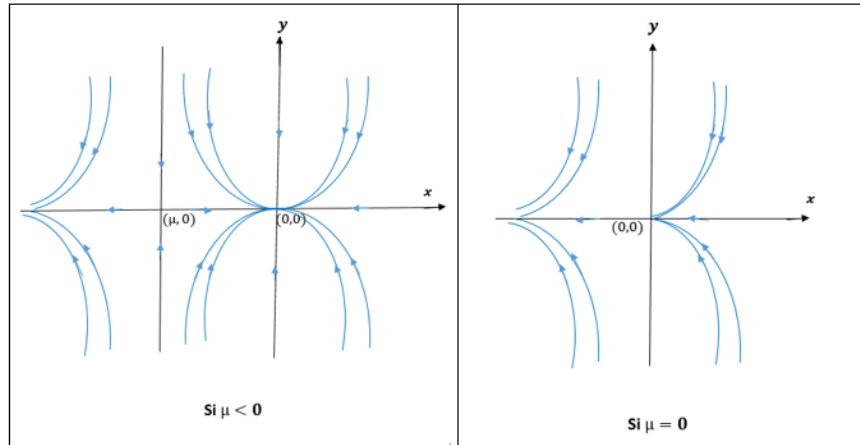


FIGURE 2.3:

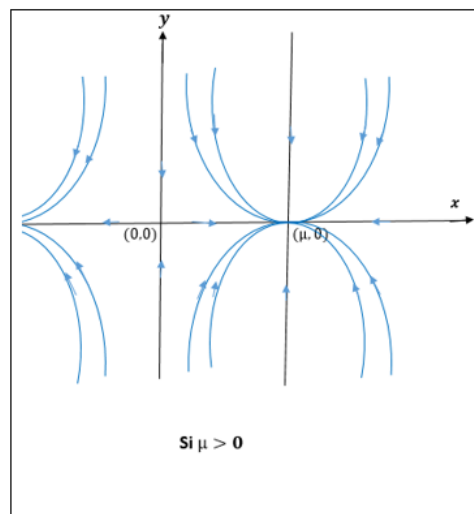


FIGURE 2.4:

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -\mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\mu, 0)$ instable(selle).

Donc la valeur $\mu = 0$ est une valeur de bifurcation de ce système et cette bifurcation est appelée bifurcation transcritique. Le portrait de phase de ce système est monté dans les figures 2.3 et 2.4.

2.2.1.3 Bifurcation fourche

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} .$$

— $\mu = 0$, on a un seul point d'équilibre $(0, 0)$. La jacobienne en $(0, 0)$ est donnée par :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = -\lambda(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$. Pour $\lambda_1 = 0$, l'origine est un point non hyperbolique(stable).

— Si $\mu < 0$, on a aussi un seul point $(0, 0)$.

La jacobienne en $(0, 0)$ est donnée par :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ stable (noeud).

- Si $\mu > 0$, on a trois points d'équilibre qui sont $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\sqrt{\mu}, \mathbf{0})$ et $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{0})$. La jacobienne en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est donnée par :

$$Df(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ instable (selle).

La jacobienne en $(\sqrt{\mu}, \mathbf{0})$ est donnée par :

$$Df(\sqrt{\mu}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (-2\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2\mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(\sqrt{\mu}, \mathbf{0})$ stable (noeud).

La jacobienne en $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{0})$ est donnée par :

$$Df(-\sqrt{\mu}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

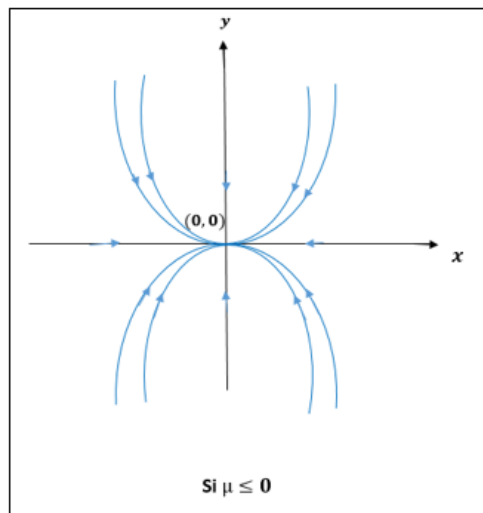


FIGURE 2.5:

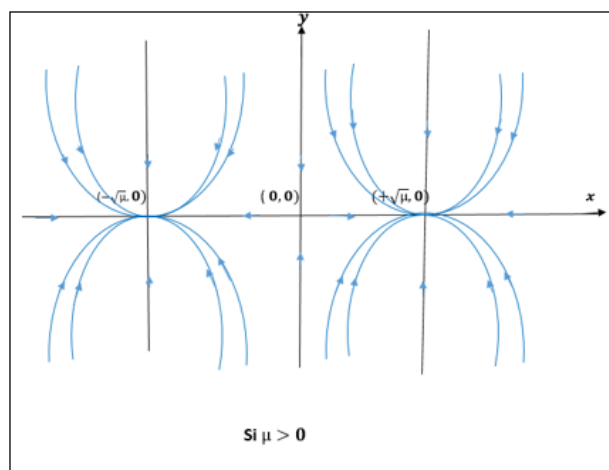


FIGURE 2.6:

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (-2\mu - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2\mu$ et $\lambda_2 = -1$. Alors le point $(-\sqrt{\mu}, 0)$ stable (noeud).

Donc la valeur $\mu = 0$ est une valeur de bifurcation de ce système et cette bifurcation est appelée bifurcation fourche. Le portrait de phase de ce système est monté dans les figures 2.5 et 2.6.

2.2.1.4 Bifurcation de Hopf

Théorème 2.2.1 *On considère le système (2.1) et supposons qu'il existe pour chaque valeur de μ un équilibre $\phi(\mu)$. On note Df_μ la matrice Jacobienne de f en $\phi(\mu)$ et suppose que toutes les valeurs propres de Df_μ sont à parties réelles strictement négatives sauf une paire $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ telle que*

- $\beta(0) \neq 0$.
- $\mu = 0 \implies \alpha(\mu) = 0$.
- $\mu < 0 \implies \alpha(\mu) < 0$.
- $\mu > 0 \implies \alpha(\mu) > 0$.
- $\alpha' > 0$.
- pour $\mu = 0$ équilibre est stable.

Alors le système (2.1) possède un cycle limite stable.

Exemple 2.2.1 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + \mu y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Ce système admet l'origine comme un point d'équilibre unique. La partie linéaire l'origine est caractérisée par

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

et comme $P(\lambda) = (\mu - \lambda)^2 + 1$ alors les valeurs propres de la matrice $Df(0,0)$ sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. La partie réelle des valeurs propres est $Re(\lambda_{1,2}) = \mu$, et la partie imaginaire est $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$.

Lorsque le paramètre μ change de signe, l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable.

Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre μ est égale à zéro. Dans ce cas, pour déterminer la stabilité de l'origine considérons la fonction définie positive suivante

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

donc

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, y) = \dot{x}x + \dot{y}y = -(x^2 + y^2)^2.$$

$\frac{\partial V}{\partial t}$ est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine, alors l'origine est asymptotiquement stable lorsque $\mu = 0$.

Afin de préciser l'allure du portrait de phase, on effectue le changement en coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases},$$

finalement, le système (2.2) s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}, \quad (2.2)$$

cela veut dire que les solutions du système donné tournent en spirale à vitesse constante au sens indirect. Selon le signe du paramètre μ , le nombre de points d'équilibre varie

□ si $\mu \leq 0$: le système (2.3) admet un seul point d'équilibre $r = 0$ qui est asymptotiquement stable.

- si $\mu > 0$: système (2.3) admet deux points d'équilibre positifs $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{r} = \sqrt{\mu}$, le premier est instable et le second est asymptotiquement stable. Le second point d'équilibre de (2.3) correspond donc à un cercle de rayon $\mathbf{r} = \sqrt{\mu}$ qui est une trajectoire fermée isolée. Donc nous pouvons conclure que
- $\mu < 0$: l'origine est un point d'équilibre unique et il est foyer stable.
 - $\mu = 0$: l'origine est un point d'équilibre unique et il est asymptotiquement stable.
 - $\mu > 0$: l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon $\mathbf{r} = \sqrt{\mu}$.

CHAPITRE 3

BIFURCATION ZÉRO-HOPF DANS LE SYSTÈME DE CHUA

PAR LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DE SECOND

ORDRE

3.1 Introduction

Le circuit de Chua est analysé à l'aide des lois de Kirchhoff. Ensuite, la dynamique du circuit de Chua est modélisé par le système suivant de trois équations différentielles ordinaires non linéaires dans les variables sont $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ et $\mathbf{z}(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{y} - \mathbf{c}\mathbf{x} - \mathbf{x}^3), \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z}, \\ \dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{b}\mathbf{y}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} sont des paramètres réels et le point indique la dérivée au temps \mathbf{t} (voir [3],[4]).

Dans ce chapitre, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf dans un système de Chua nucléaire et l'existence d'orbites périodiques qui bifurquent d'un point zéro-Hopf du système par la méthode de moyennisation du second ordre.

3.2 Point zéro-Hopf

Définition 3.2.1 *Un équilibre d'un système différentiel*

$$\dot{x} = f(x),$$

avec $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ et A un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n est appelé un équilibre zéro-Hopf, s'il a deux valeurs propres imaginaires pures et $n - 2$ valeurs propres nulles.

Les points d'équilibre d'un système Chua

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - cx - x^3) = 0, \\ \dot{y} = x - y + z = 0, \\ \dot{z} = -by = 0, \end{cases}$$

les points d'équilibre de ce système sont :

$$\begin{cases} a(y - cx - x^3) = 0, \\ x - y + z = 0, \\ -by = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0, \\ x_1 = 0 \vee x_{2,3} = \pm\sqrt{-c}, \\ z_1 = 0 \vee z_{2,3} = \pm\sqrt{-c}, \end{cases} \quad , \quad c < 0.$$

-Si $c < 0$, alors les points d'équilibre sont $E_1 = (0, 0, 0)$, $E_2 = (\sqrt{-c}, 0, -\sqrt{-c})$ et $E_3 = (-\sqrt{-c}, 0, \sqrt{-c})$.

Proposition 3.2.1 *Les déclarations suivantes sont valables.*

- *Le point E_1 est un point équilibre zéro-Hopf si seulement si $b = 0$, $c = \frac{-1}{a}$ et $a < -1$.*
- *Les points E_2 et E_3 sont des équilibre zéro-Hopf si seulement si $b = 0$, $c = \frac{-1}{2a}$ et $a < -1$.*

3.3 Preuve de la proposition 3.2.1

Montrons que $E_1(0, 0, 0)$ est un point équilibre zéro-Hopf si seulement si $b = 0$, $c = \frac{-1}{a}$ et $a < -1$.

- La matrice jacobienne du système (3.1) en $E_1 = (0, 0, 0)$ est

$$M(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -ac & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_1(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -ac - \lambda & a & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -b & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$P_1(\lambda) = -\lambda^3 + (ac - 1)\lambda^2 + (-ac + b - a)\lambda - abc = 0.$$

si $abc = 0 \implies \lambda_1 = 0$.

Alors

$$P_1(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + (ac + 1)\lambda + (ac + b - a)) = 0.$$

pour que $(0, 0, 0)$ soit un point d'équilibre zéro-Hopf, le polynôme caractéristique doit avoir la forme suivante :

$$P_1(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + W) \quad ; \quad W > 0$$

Alors $ac + 1 = 0 \implies c = \frac{-1}{a}, a \neq 0 \wedge c \neq 0$ donc $b = 0$.

$$P_1(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + ac - a) = 0.$$

$$ac - a > 0 \implies a < -1.$$

Alors, $(0, 0, 0)$ est un point d'équilibre zéro-Hopf si seulement si $b = 0, c = \frac{-1}{a}$ et $a < -1$.

Montrons que $E_2(\sqrt{-c}, 0, -\sqrt{-c})$ et $E_3(-\sqrt{-c}, 0, \sqrt{-c})$ sont des d'équilibres zéro-Hopf si seulement si $b = 0, c = \frac{1}{2a}$ et $a < -1$.

- La matrice jacobienne du système (3.1) $E_2(\sqrt{-c}, 0, -\sqrt{-c})$ et $E_3(-\sqrt{-c}, 0, \sqrt{-c})$ sont donné par

$$M(\sqrt{-c}, 0, -\sqrt{-c}) = \begin{pmatrix} 2ac & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M(-\sqrt{-c}, 0, \sqrt{-c}) = \begin{pmatrix} 2ac & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Les points $\mathbf{E}_2(\sqrt{-c}, 0, -\sqrt{-c})$ et $\mathbf{E}_3(-\sqrt{-c}, 0, \sqrt{-c})$ ont le même polynôme caractéristique donné sous la forme suivante :

$$P_2(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2ac - \lambda & a & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -b & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$P_2(\lambda) = -\lambda^3 + (2ac - 1)\lambda^2 + (2ac - b + a)\lambda + 2abc = 0.$$

$$\text{si } abc = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

Alors

$$P_2(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + (1 - 2ac)\lambda + (b - 2ac - a)) = 0.$$

Pour qu les points $\mathbf{E}_2(\sqrt{-c}, 0, -\sqrt{-c})$ et $\mathbf{E}_3(-\sqrt{-c}, 0, \sqrt{-c})$ sont zéro-Hopf, le polynôme caractéristique doit avoir la forme suivante :

$$P_2(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + W) \quad ; \quad W > 0$$

$$\text{Alors } 1 - 2ac = 0 \implies c = \frac{1}{2a}, a \neq 0 \quad \wedge \quad c \neq 0 \text{ donc } b = 0.$$

$$P_2(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + (-2ac - a)) = 0.$$

$$-2ac - a > 0 \implies a < -1.$$

Alors, les points $\mathbf{E}_2(\sqrt{-c}, \mathbf{0}, -\sqrt{-c})$ et $\mathbf{E}_3(-\sqrt{-c}, \mathbf{0}, \sqrt{-c})$ sont des points d'équilibre zéro-Hopf si seulement si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $c = \frac{1}{2c}$ et $\mathbf{a} < -1$.

Théorème 3.3.1 *Le point d'équilibre \mathbf{E}_1 du circuit de Chua (3.1) présente une bifurcation zéro-Hopf lorsque $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $c = \frac{-1}{a}$ et $\mathbf{a} = -1 - \mathbf{a}_1^2 < -1$ avec $\mathbf{a}_1 > 1$*

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_2\varepsilon^2, \quad c = \frac{-1}{a} + c_2\varepsilon^2, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{b}_2c_2 \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_1^2c_2(1 + \mathbf{a}_1^2) > \mathbf{0}$. Alors, pour $\varepsilon \neq \mathbf{0}$ suffisamment petit, la solution périodique $(\mathbf{x}(t, \varepsilon), \mathbf{y}(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ égal à

$$\varepsilon(r_0 \cos(\mathbf{a}_1 t), r_0(\mathbf{a}_1 + \frac{1}{\mathbf{a}_1}) \sin(\mathbf{a}_1 t) + \frac{1}{\mathbf{a}_1} \cos(\mathbf{a}_1 t), o(1)) + o(\varepsilon^2). \quad (3.3)$$

De plus, cette solution périodique est asymptotiquement instable si $\mathbf{b}_2 > \mathbf{0}$ (voir [6]).

3.4 Preuve du théorème 3.3.1

Soit $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2\varepsilon^2$, $c = \frac{-1}{a} + c_2\varepsilon^2$ et $\mathbf{a} = -1 - \mathbf{a}_1^2 < -1$ avec $\varepsilon > \mathbf{0}$ suffisamment petit.

Le système (3.1) dans ce cas s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (-1 - \mathbf{a}_1^2)(\mathbf{y} + \frac{1}{1+\mathbf{a}_1^2}\mathbf{x} - c_2\varepsilon^2\mathbf{x} - \mathbf{x}^3), \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + z, \\ \dot{z} = -\mathbf{b}_2\varepsilon^2\mathbf{y}, \end{cases} \quad (3.4)$$

D'abord, on prend le changement $(x, y, z) = (\mathbf{X} - (\frac{1}{a_1^2} + 1)\mathbf{Z}, \frac{a_1 Y + X}{a_1^2 + 1} - \frac{Z}{a_1^2}, \mathbf{Z})$. Le système

(3.4) se transforme en

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \dot{x} + (\frac{1}{a_1^2} + 1)\dot{\mathbf{Z}}, \\ \dot{\mathbf{Y}} = (a_1^2 + 1)(\frac{\dot{y}}{a_1} + \frac{\dot{z}}{a_1^3}) - \frac{\dot{x}}{a_1}, \\ \dot{\mathbf{Z}} = -b_2 \varepsilon^2 y, \end{cases}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = -a_1 Y + c_2 \varepsilon^2 X + a_1^2 c_2 \varepsilon^2 X - c_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1^2} - 2c_2 \varepsilon^2 Z - a_1^2 c_2 \varepsilon^2 Z \\ + (a_1^2 + 1)(X^3 - \frac{Z^3}{a_1^6} - Z^3 - 3\frac{Z^3}{a_1^4} - 3\frac{Z^3}{a_1^2} + 3\frac{XZ^2}{a_1^4} + 3XZ^2 + \\ 6\frac{XZ^2}{a_1^2} - 3\frac{Z^2 X^2}{a_1^2} - 3ZX^2) - b_2 \varepsilon^2 (\frac{a_1 Y + X + a_1^3 Y + a_1^2 X}{a_1^2(a_1^2 + 1)}) + b_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1^2} + b_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1^4}, \\ \dot{\mathbf{Y}} = (a_1^2 + 1)(\frac{X}{a_1} - \frac{Z}{a_1^3} - \frac{Z}{a_1} - \frac{a_1 Y + X}{a_1(a_1^2 + 1)} + \frac{Z}{a_1^3} + \frac{Z}{a_1} - \frac{b_2 \varepsilon^2}{a_1^3} (\frac{a_1 Y + X}{a_1^2 + 1}) \\ - b_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1^5}) + Y - c_2 \varepsilon^2 \frac{X}{a_1} - c_2 \varepsilon^2 a_1 X + \varepsilon^2 c_2 \frac{Z}{a_1^3} + 2c_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1} + a_1 c_2 \varepsilon^2 Z + \\ (a_1^2 + 1)(-\frac{X^3}{a_1} + \frac{Z^3}{a_1^7} + \frac{Z^3}{a_1} + 3\frac{Z^3}{a_1^5} - 3\frac{Z^2 X}{a_1^5} - 3\frac{Z^2 X}{a_1} + 3\frac{Z^3}{a_1^3} \\ - 6\frac{Z^2 X}{a_1^3} + 3\frac{X^2 Z}{a_1^3} + 3\frac{X^2 Z}{a_1}) + b_2 \varepsilon^2 (\frac{Y}{a_1^2} + \frac{X}{a_1^3}) - b_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1^3} - b_2 \varepsilon^2 \frac{Z}{a_1^5}, \\ \dot{\mathbf{Z}} = -b_2 \varepsilon^2 (\frac{a_1 Y + X}{a_1^2 + 1} - \frac{Z}{a_1^2}), \end{cases} \quad (3.5)$$

En fin, le système (3.5) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -a_1 Y + \frac{(a_1^2+1)(a_1^2(X-Z)-Z)^3}{a_1^6} + \varepsilon^2 \left(-\frac{b_2(a_1 Y+X)}{a_1^2} + (a_1^2 + 1)c_2 X + \right. \\ \left. \frac{(a_1^2+1)Z(b_2-a_1^2(a_1^2+1)c_2)}{a_1^4} \right) + o(\varepsilon^3), \\ \dot{Y} = a_1 X + \frac{3(a_1^2+1)^2 a_1^2 X Z (a_1^2 X - (a_1^2+1)Z) + (a_1^2+1)^4 Z^3 - (a_1^2+1)a_1^6 X^3}{a_1^7} + \\ \varepsilon^2 \frac{(a_1+1)c_2(a_1^2(Z-X)+Z)}{a_1^3} \\ + o(\varepsilon^3), \\ \dot{Z} = \varepsilon^2 \left(\frac{b_2 Z}{a_1^2} - \frac{b_2(a_1 Y+X)}{a_1^2+1} \right) + o(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Ensuite, en effectuant un autre changement de variables $(X, Y, Z) = (\varepsilon U, \varepsilon V, \varepsilon W)$, le système (3.6) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{U} = -a_1 \varepsilon V + \frac{(a_1^2+1)(a_1^2(\varepsilon U - \varepsilon W) - \varepsilon W)^3}{a_1^6} + \varepsilon^2 \left(-\frac{b_2(a_1 \varepsilon V + \varepsilon U)}{a_1^2} + (a_1^2 + 1)c_2 \varepsilon U \right. \\ \left. + \frac{(a_1^2+1)\varepsilon W(b_2-a_1^2(a_1^2+1)c_2)}{a_1^4} \right), \\ \varepsilon \dot{V} = a_1 \varepsilon U + \frac{3(a_1^2+1)^2 a_1^2 \varepsilon^2 U W (a_1^2 \varepsilon U - (a_1^2+1)\varepsilon W) + (a_1^2+1)^4 \varepsilon^3 W^3 - (a_1^2+1)a_1^6 \varepsilon^3 U^3}{a_1^7} \\ + \varepsilon^2 \frac{(a_1+1)c_2(a_1^2(\varepsilon W - \varepsilon U) + \varepsilon W)}{a_1^3}, \\ \varepsilon \dot{W} = \varepsilon^2 \left(\frac{b_2 \varepsilon W}{a_1^2} - \frac{b_2(a_1 \varepsilon V + \varepsilon U)}{a_1^2+1} \right), \end{array} \right.$$

Nous obtenons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = -a_1 V + \varepsilon^2 \left(\frac{(a_1^2+1)(a_1^2(U-W)-W)^3}{a_1^6} - \frac{b_2(a_1 V+U)}{a_1^2} + (a_1^2+1)c_2 U \right. \\ \left. + \frac{(a_1^2+1)W(b_2-a_1^2(a_1^2+1)c_2)}{a_1^4} \right) + o(\varepsilon^3), \\ \dot{V} = a_1 U + \varepsilon^2 \left(\frac{3(a_1^2+1)^2 a_1^2 U W (a_1^2 U - (a_1^2+1)W) + (a_1^2+1)^4 W^3 - (a_1^2+1)a_1^6 U^3}{a_1^7} \right. \\ \left. + \frac{(a_1+1)c_2(a_1^2(W-U)+W)}{a_1^3} \right) + o(\varepsilon^3), \\ \dot{W} = \varepsilon^2 \left(\frac{b_2 W}{a_1^2} - \frac{b_2(a_1 V+U)}{a_1^2+1} \right) + o(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (3.7)$$

En fin, le système (3.7) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = -a_1 V + \varepsilon^2 R_{12}(U, V, W) + o(\varepsilon^3), \\ \dot{V} = a_1 U + \varepsilon^2 R_{22}(U, V, W) + o(\varepsilon^3), \\ \dot{W} = \varepsilon^2 R_{32}(U, V, W) + o(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où

$$\begin{aligned} R_{12}(U, V, W) &= \frac{(a_1^2+1)(a_1^2(U-W)-W)^3}{a_1^6} - \frac{b_2(a_1 V+U)}{a_1^2} + (a_1^2+1)c_2 U + \frac{(a_1^2+1)W(b_2-a_1^2(a_1^2+1)c_2)}{a_1^4}, \\ R_{22}(U, V, W) &= \frac{3(a_1^2+1)^2 a_1^2 U W (a_1^2 U - (a_1^2+1)W) + (a_1^2+1)^4 W^3 - (a_1^2+1)a_1^6 U^3}{a_1^7} + \frac{(a_1+1)c_2(a_1^2(W-U)+W)}{a_1^3}, \\ R_{32}(U, V, W) &= \frac{b_2 W}{a_1^2} - \frac{b_2(a_1 V+U)}{a_1^2+1}, \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, le système (3.8) devient

$$\begin{cases} \dot{U} = -a_1 V, \\ \dot{V} = a_1 U, \\ \dot{W} = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

La matrice jacobienne de système linéarisée en $(0, 0, 0)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) \begin{vmatrix} -\lambda & a_1 & 0 \\ a_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + a_1^2) = 0.$$

Comme $P_A(\lambda) = 0$, alors les valeurs propres de système (3.9) sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm a_1 i$ on peut écrire le système (3.8) de telle sorte que la partie linéaire en $(0, 0, 0)$ sera à sa normale de Jordan. C'est-à-dire sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit le système (3.7) coordonnées cylindrique (θ, r, u) par $U = r \cos(\theta)$, $V = r \sin(\theta)$, $W = u$, puis en prend θ comme une variable indépendante on a :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{U\dot{U} + V\dot{V}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{\dot{V}U - \dot{U}V}{r^2} \end{cases}$$

Après les calculs on a

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon^2 \left(\frac{(a_1^2+1) \cos(\theta)(a_1^2(r \cos(\theta)-u)-u)^3}{a_1^6} - b_2 r \frac{(a_1 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos^2(\theta))}{a_1^2} + (a_1^2 + 1)c_2 r \cos^2(\theta) \right. \\ \left. \frac{(a_1^2+1)u \cos(\theta)(b_2 - a_1^2(a_1^2+1)c_2)}{a_1^4} + \frac{3(a_1^2+1)^2 a_1^2 r \cos(\theta) \sin(\theta) u (a_1^2 r \cos(\theta) - (a_1^2+1)u) + (a_1^2+1)^4 \sin(\theta) u^3}{a_1^7} \right. \\ \left. - \frac{(a_1^2+1)a_1^6 r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta)}{a_1^7} + \frac{(a_1^2+1)c_2 \sin(\theta)(a_1^2(u-r \cos(\theta))+u)}{a_1^3} \right), \\ \dot{\theta} = a_1 + \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\frac{3(a_1^2+1)^2 a_1 r \cos^2(\theta) u (a_1^2 r \cos(\theta) - (a_1^2+1)u) + (a_1^2+1)^4 u^3 \cos(\theta) - (a_1^2+1)a_1^6 r^3 \cos^4(\theta)}{a_1^7} \right. \\ \left. \frac{(a_1^2+1)c_2 \cos(\theta)(a_1^2(u-r \cos(\theta))+u)}{a_1^3} - \frac{(a_1^2+1) \sin(\theta)(a_1^2(r \cos(\theta)-u)-u)^3}{a_1^6} - (a_1^2 + 1)c_2 r \cos(\theta) \sin(\theta) \right. \\ \left. + b_2 r \frac{a_1 \sin^2(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta)}{a_1^2} - \frac{(a_1^2+1)u \sin(\theta)(b_2 - a_1^2(a_1^2+1)c_2)}{a_1^4} \right), \\ \dot{u} = \varepsilon^2 \left(\frac{b_2 u}{a_1^2} - \frac{b_2 r (a_1 \sin(\theta) + \cos(\theta))}{a_1^2 + 1} \right), \end{cases} \quad (3.10)$$

Par conséquent, en prenant θ comme une nouvelle variable indépendante du système différentiel (3.10) et par le développement de Taylor :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^3), \quad |x| < 1$$

on peut écrire le système (3.10) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon^2}{a_1^8} ((a_1^2 + 1)a_1^7 r^3 \cos^4(\theta) - (a_1^2 + 1)a_1^5 r^2 \cos^3(\theta)(3(a_1^2 + 1)u + \\ a_1 r \sin(\theta)) - a_1 \cos(\theta)(a_1^2(a_1^2 + 1)u(a_1^2(a_1^2 + 1)c_2 - b_2) + (a_1^2 + 1)^4 u^3 \\ + a_1 r \sin(\theta)(3(a_1^2 + 1)^3 u^2 + a_1^4(a_1^2 c_2 + b_2 + c_2))) + (a_1^2 + 1)^2 u \sin(\theta)(a_1^4 c_2 \\ + (a_1^2 + 1)^2 u^2) + a_1^3 r \cos^2(\theta)(a_1^6 c_2 + a_1^4 c_2 - a_1^2 b_2 + 3(a_1^2 + 1)^2 a_1 r u \sin(\theta) \\ + 3(a_1^2 + 1)^3 u^2)) + o(\varepsilon^3), \frac{du}{d\theta} = \frac{\varepsilon^2 b_2}{a_1^3} (u - \frac{a_1^2(a_1 \sin(\theta) + \cos(\theta))}{a_1^2 + 1}) + o(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Maintenant, le système (3.11) est au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon^2 F_{21} + o(\varepsilon^3), \\ \dot{u} = \varepsilon^2 F_{22} + o(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (3.12)$$

où

$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{\varepsilon^2}{a_1^8} ((a_1^2 + 1)a_1^7 r^3 \cos^4(\theta) - (a_1^2 + 1)a_1^5 r^2 \cos^3(\theta)(3(a_1^2 + 1)u + a_1 r \sin(\theta)) \\ &- a_1 \cos(\theta)(a_1^2(a_1^2 + 1)u(a_1^2(a_1^2 + 1)c_2 - b_2) + (a_1^2 + 1)^4 u^3 + a_1 r \sin(\theta)(3(a_1^2 + 1)^3 u^2 \\ &+ a_1^4(a_1^2 c_2 + b_2 + c_2))) + (a_1^2 + 1)^2 u \sin(\theta)(a_1^4 c_2 + (a_1^2 + 1)^2 u^2) + a_1^3 r \cos^2(\theta)(a_1^6 c_2 \\ &+ a_1^4 c_2 - a_1^2 b_2 + 3(a_1^2 + 1)^2 a_1 r u \sin(\theta) + 3(a_1^2 + 1)^3 u^2)), \\ F_{22} &= \frac{\varepsilon^2 b_2}{a_1^3} (u - \frac{a_1^2(a_1 \sin(\theta) + \cos(\theta))}{a_1^2 + 1}). \end{aligned}$$

Le système différentiel (3.12) est écrit sous la forme normale (1.9). Pour l'application de la théorie de la moyenne, où en utilisant la notation (3.2) nous avons $t = \theta$, $x = (r, u)$, $T = 2\pi$, $n = 2$, $F_1 = (F_{11}, F_{12}) = (0, 0)$ et $F_2 = (F_{21}, F_{22})$. Puisque toutes les hypothèses du **le théorème 1.5** dans le **chapitre 1** sont satisfaites, nous pouvons l'appliquer au système différentiel (3.12). Alors la première fonction moyennée $f_1(r, u)$ définie en (1.10)

est identiquement nulle, et la seconde fonction moyennée $\mathbf{f}_2(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = (f_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{u}), f_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{u}))$

est

$$f_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_{11}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u}) \int_0^T F_{11}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u}) dt + F_{21}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u})] ds.$$

$$f_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_{11}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u}) \int_0^T F_{11}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u}) dt + F_{22}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u})] ds.$$

En utilisant les intégrales suivantes :

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \int u du = \frac{1}{1+n} u^{n+1} + c,$$

$$\int \sin^2(\theta) = \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta,$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

$$\int \cos^2(\theta) = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

On a aussi :

$$f_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{21}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u}) d\theta = \frac{1}{a_1^8} \left(\frac{3}{4} (a_1^2 + 1) a_1^7 r^3 + r (a_1^9 c_2 + a_1^7 c_2 - a_1^5 b_2 + 3(a_1^3 + a_1)^3 u^2) \right).$$

$$f_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{22}(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{u}) d\theta = \frac{b_2 u}{a_1^3}.$$

D'après le théorème 1.5, nous avons

$$\begin{cases} \frac{1}{a_1^8} \left(\frac{3}{4} (a_1^2 + 1) a_1^7 r^3 + r (a_1^9 c_2 + a_1^7 c_2 - a_1^5 b_2 + 3(a_1^3 + a_1)^3 u^2) \right) = 0 \dots (1) \\ \frac{b_2 u}{a_1^3} = 0 \dots (2) \end{cases}$$

de (2) on a :

$$\frac{b_2 u}{a_1^3} = 0 \implies u = 0,$$

de (1) on a :

$$\frac{1}{a_1^8} \left(\frac{3}{4} (a_1^2 + 1) a_1^7 r^3 + r (a_1^9 c_2 + a_1^7 c_2 - a_1^5 b_2) \right) = 0 \implies r = 2 \sqrt{\frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{3 a_1^2 (a_1^2 + 1)}}.$$

L'équation $\mathbf{f}_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ a une solution unique (\mathbf{r}, \mathbf{u}) où $(b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)) >$

$\mathbf{0}$.

Cette solution est

$$(r, u) = \left(2\sqrt{\frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{3a_1^2 (a_1^2 + 1)}}, 0 \right) = (r_0, 0).$$

Où $(b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)) > 0$, il est facile de vérifier que :

$$D = \frac{\partial(f_{21}, f_{22})}{\partial(r, u)} \Big|_{(r_0, 0)}.$$

Dans cette situation, la matrice jacobienne est :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial r} & \frac{\partial f_{21}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial r} & \frac{\partial f_{22}}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{a_1^3} & 0 \\ 0 & \frac{b_2}{a_1^3} \end{pmatrix}.$$

Et

$$\det(D) = b_2 \left(\frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{a_1^6} \right) \neq 0.$$

-Pour $f_{21}(r_0, 0) = f_{22}(r_0, 0) = 0$ a un solution unique non triviale $(r_0, 0)$ et $\det(D(r, u)) \Big|_{(r_0, 0)} = b_2 \left(\frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{a_1^6} \right)$. Du le **théorème 1.5** pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système **(3.12)** admet une solution périodique $(r(\theta, \varepsilon), u(\theta, \varepsilon))$ tel que :

$$(r(0, \varepsilon), u(0, \varepsilon)) = (r_0, 0) + o(\varepsilon).$$

-La polynôme caractéristique de la matrice jacobienne D est donné par :

$$P(\lambda) = \det(D - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{a_1^3} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{b_2}{a_1^3} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$p(\lambda) = \left(\frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{a_1^3} - \lambda \right) \left(\frac{b_2}{a_1^3} - \lambda \right) = 0.$$

Puisque les valeurs propres de la matrice jacobienne D sont :

$$\frac{b_2 - a_1^2 c_2 (a_1^2 + 1)}{a_1^3} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{b_2}{a_1^3}.$$

D'après le **théorème 1.5**, la solution périodique correspondante $(r(\theta, \lambda), u(\theta, \varepsilon))$ est asymptotiquement instable si $b_2 > 0$.

En revenant sur les changements de variables, la solution périodique $(r(\theta, \varepsilon), u(\theta, \varepsilon))$ du système (3.12) devient la solution périodique $(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))$ du système différentiel $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{u})$, où comme d'habitude le point dénote dérivée par rapport au temps t .

Nous n'avons pas écrit explicitement la différentielle (3.6) et (3.12). La solution périodique suivant :

$$(r(0, \varepsilon), \theta(0, \varepsilon), u(0, \varepsilon)) = (r_0, a_1 t, 0) + o(\varepsilon).$$

Et cette solution périodique devient la solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ du système (3.6) telle que

$$(X(0, \varepsilon), Y(0, \varepsilon), Z(0, \varepsilon)) = \varepsilon(r_0 \cos(a_1 t), r_0 \sin(a_1 t), 0) + o(\varepsilon^2).$$

Enfin, en revenant aux coordonnées (x, y, z) après le changement $(x, y, z) = (X - (\frac{1}{a_1^2} + 1)Z, \frac{a_1 Y + X}{a_1^2 + 1} - \frac{Z}{a_1^2}, Z)$, nous retrouvons la solution périodique suivant :

$$\varepsilon(r_0 \cos(a_1 t), r_0(a_1 + \frac{1}{a_1}) \sin(a_1 t) + \frac{1}{a_1} \cos(a_1 t), o(1)) + o(\varepsilon^2).$$

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons prouvé qu'à partir du d'équilibre de zéro-Hopf localisé à l'origine des coordonnées du circuit de Chua peut bifurquer une orbite périodique. En outre, nous avons fourni une estimation analytique de cette orbite périodique ainsi que son type de stabilité en fonction de la perturbation des paramètres $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \frac{-1}{a}$ et $\mathbf{a} < -1$. L'outil utilisé pour prouver ces résultats est la méthode de moyennisation second ordre.

Malheureusement, la théorie de la moyennisation ne fournit aucune information sur les deux autres équilibre zéro-Hopf \mathbf{E}_2 et \mathbf{E}_3 du système de Chua .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Buica and J. Llibre, Avariaging methods for finding period orbits via Brouwer degree, Bulletin. des Sciences Mathématiques 128(2004), 7-22.
- [2] V. Castellanos, J. Llibre, I. Quilantan, Simultaneous periodic orbits bifurcating from two zero-Hopf equilibria in a tritrophic food chain model, J. Applied Mathematics and Physics 1(2013), 31-38.
- [3] L.O. Chua, Chaos synchronization in Chua's circuit, Berkeley, Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, OCLC :44107698, 1992.
- [4] L. Fortuna, M. Frasca and M.G.Xibilia, Chua's circuit implementations : yesterday, today and tomorrow, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol.65, 2009.
- [5] I.A. Garcia, J.Llibre and S.Maza, On the periodic orbit bifurcating from a zero-Hopf bifurcation in systems with two slow and one fast variables, Appl. Math. Comput. 232 (2014), 84-90.
- [6] J.M.Ginoux, J.Llibre, "zero-Hopf Bifurcation in the Chua's circuit", J.Math.Phys.64, (2023), 072701.
- [7] W. Huang, D. Wang and A. Chen, Hopf bifurcation and the centers on center manifold for a class of three-dimensional circuit system, Math. Methods Appl. Sci. 43 (2020), no

- 4, 1988-2000.
- [8] A.I. Khibnik, D. Roose and L.O. Chua, On periodic orbits and homoclinic bifurcations in Chua's circuit with a smooth nonlinearity, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 3(2) (1993) 363-384.
- [9] Y.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition, *Appl. Math. Sci.* 112, Springer, 1998.
- [10] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira, Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree, *Nonlinearity* 27 (2014), 563-583.
- [11] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [12] C. Mira, Chua's Circuit and the Qualitative Theory of Dynamical Systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9(7) (1997) 1911-1916.
- [13] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics* 7. Third Edition Springer New York 2001.
- [14] J. A. Sanders F. Verhulst and J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Second edition, *Applied Mathematical Sciences* 59, Springer, New York, 2007.