

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**REFORMULATION DU PROBLÈME DE COMMANDE
OPTIMALE EN UN PROBLÈME DE CALCUL DES
VARIATIONS, ÉTUDES NUMÉRIQUES ET
APPLICATIONS.**

Option : Commande Optimale et Système Dynamique

Par : Chalabi Ichrak

Encadrée par : G. Khenniche

M.C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : L. Bouzatouta

M.C.A U. SKIKDA

Examineur: A. Lallouche

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2023/2024

Dédicaces

*Je dédie le fruit de mon humble effort à ceux qui m'ont donné la vie et à
ceux qui m'ont appris à gravir l'échelle de la vie*

*Avec patience et sagesse, mon cher père **Salim**, ma chère mère **Nadia** et
mon grand-père **Aïcha** bien aimé.*

*À ceux qui m'ont donné la bénédiction de leur présence, mes sœurs
Malek Djana et mon cher frère **dicc**, à ceux qui
M'ont appelé alors que nous tracions ensemble vers le succès, et enfin à
tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien cette
Étude.*

*Je demande à Allah de récompenser chacun avec la meilleure récompense
dans ce monde,*

Schrak

Remerciement

*Je tiens tout d'abord à remercier Allah qui nous a éclairé le bon chemin
et qui m'a permis de réaliser ce modeste
Travail.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements les plus chaleureux à mon
encadreur **Dr K. HENNGHE G. HANJA***

*Qu'a dirigée ce travail, pour ces précieux conseils et son suivi au cours
de ce travail.*

*Je tiens à exprimer notre parfaite considération aux membres de jury :
Dr L. Bouzettout comme *Président* et **Dr A. Lassouche** comme
*Examineur.**

Pour avoir bien voulu examiner et juger mon travail.

*Aussi je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin,
enseignants et étudiants, à la réalisation de ce
Mémoire.*

*A tout le corps enseignant du département de Mathématique pour
l'enseignement reçu.*

*Je remercie tout ma famille surtout à mes parents, qui me permis de
pour suivre ma étude jusqu'à présent.*

Ichrak

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudiés le problème fondamental de calcul des variations, dont on a déterminés l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. Suite à cette étude, nous avons déterminés les conditions nécessaires d'optimalité du problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations. Une étude numérique est effectuée par la méthode des différences finies de plus la consistance, la stabilité et la convergence ont été établies. La méthode de tir Newton-Raphson est utilisée pour le problème de commande optimale.

Mots clés : Calcul des variations, équation d'Euler-Lagrange, méthodes des différences finies, , consistance, stabilité, convergence, méthode de tir Newton- Raphson.

Abstract

In this memory, we studied the fundamental problem of calculus of variations, which we determined the Euler-Lagrange equation corresponding. Following this study, we determined the necessary conditions optimality of the optimal control problem using the calculation of variations. A numerical study is carried out using the finite difference method. Moreover, consistency, stability and convergence were established. The shooting Newton-Raphson method is used for the optimal control problem.

Key words : Calculation of variations, Euler-Lagrange equation, the finite difference method , consistency, stability, convergence, the shooting Newton-Raphson method

ملخص

في هذه المذكرة درسنا مسائل حساب المتغيرات والتي من خلالها حددنا معادلة اولر لاغرانج المقابلة. بعد هذه الدراسة قمنا بتحديد الشروط اللازمة لتحسين مشكلة التحكم الأمثل باستخدام حساب المتغيرات. وقد أجريت دراسة عددية بطريقة الفروق المنتهية وتم التوصل إلى الاستقرار والثبات والتقارب. تم استخدام طريقة نيوتن رافسن لمسائل الامثلية.

الكلمات المفتاحية : حساب التغيراتي ، معادلة اولر لاغرانج، طريقة الفروقات المنتهية، الاستقرار، الثبات ،التقارب ،طريقة نيوتن رافسن.

TABLE DES MATIÈRES

0.1	Introduction	7
1	Rappels Mathématiques	8
2	Problème fondamental du calcul des variations sans contrainte et problème de commande optimale	14
2.1	Problème fondamental du calcul des variations sans contrainte	14
2.1.1	Position du problème	14
2.1.2	Détermination de l'équation Euler- Lagrange	15
2.2	Problème de commande optimale	18
2.2.1	Position du problème	18
2.2.2	Conditions nécessaires d'optimalité	19
2.3	Le calcul des variations en commande optimale	21
2.3.1	Reformulation du problème de commande optimale en problème de calcul des variations sans contrainte	22
2.3.2	Description des étapes conduisant aux conditions nécessaires d'optimalités	23
3	Étude numérique du problème de calcul des variations et commande optimale	31
3.1	Discrétisation du problème obtenu par le calcul des variations d'ordre 2	31
3.1.1	Discrétisation du domaine	32
3.1.2	Discrétisation temporelle	32
3.1.3	Discrétisation spatiale	32
3.1.4	Discrétisation des conditions aux limites	34

3.1.5	Etude de la consistance, stabilité et convergence	35
3.2	Méthodes numérique en commande optimale	38
3.3	Méthodes indirectes	38
3.3.1	Méthode de tir simple	38
3.3.2	Méthode de tir multiple	39
3.4	Méthodes directes	41
3.4.1	Discretisation totale	41
3.5	Application numérique : Résolution d'un problème de commande optimale à entrée libre . . .	42
3.5.1	Position du problème	42
3.5.2	La solution exacte	46
3.5.3	Méthode de tir Newton Raphson	52

0.1 Introduction

Le calcul des variations est une branche des mathématiques qui est développée pour résoudre des problèmes nécessitant de trouver une fonction rendant extrémale une quantité donnée, comme la trajectoire rendant minimum le temps pour se rendre d'un point à un autre ou la distance minimale entre deux points sur une surface. On trouve le calcul des variations dans de nombreuses branches, physique, de l'économie, de l'énergie dans tous les problèmes théoriques et concrets où il est question d'optimisation, on cherche les valeurs maximales et minimales de fonctionnelles. Aussi, la théorie de la commande optimale a un champ d'application extrêmement vaste mécanique, électrique, électronique, biologie, chimie, économie. Chaque problème de commande nécessite une description des propriétés dynamiques du processus à commander. Elle permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement sous des contraintes pouvant porter sur la commande ou sur l'état du système, cette théorie est une généralisation du calcul des variations.

Dans ce travail, nous nous intéressons d'une part au problème fondamental de calcul des variations, nous avons déterminé l'équation d'Euler-Lagrange correspondante et d'autre part au problème de la commande optimale, ou nous avons reformulé ce dernier en problème de calcul des variations pour déterminer les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange. Nous avons fait une étude numérique du problème de calcul des variations; la méthode des différences finies, en outre la consistance, la stabilité et la convergence sont établies. La méthode de tir Newton Raphson est utilisée en problème de commande optimale.

Le mémoire est composée de trois chapitres :

le chapitre **1** est un rappels mathématiques nécessaires à la suite du travail.

le chapitre **2** est consacré à l'étude le problème fondamentale de calcul des variations et déterminer l'équation d'Euler-Lagrange, déterminer les conditions nécessaires d'optimalités du problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations.

le chapitre **3** contient la méthode des différences finies pour le problème de calcul des variations, on utilise la résolution analytique et la résolution numérique pour le problème de commande optimale méthode de tir Newton Raphson et on termine par une conclusion.

CHAPITRE

1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats d'analyse et également quelques notions et concepts qui seront nécessaires pour résoudre, les problèmes ci-dessous.

Définition 1.1 Fonction admissible

On appelle une fonction admissible toute fonction suffisamment régulière $\mathbf{x}(t)$ et vérifiant les conditions aux limites.

Définition 1.2 Accroissement d'une fonctionnelle

L'accroissement d'une fonctionnelle notée par ΔJ est définie par :

$$\Delta J = J(\mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)) - J(\mathbf{x}(t))$$

où $\delta \mathbf{x}(t)$ est la variation de la fonction $\mathbf{x}(t)$.

Ainsi l'accroissement $\Delta J(\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t))$ de la fonctionnelle dépend de la fonction $\mathbf{x}(t)$ et de sa variation $\delta \mathbf{x}(t)$.

Théorème 1.1 [7] Une condition nécessaire pour que l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt \tag{1.1}$$

atteigne un extremum sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{cases}$$

et que la fonction $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = 0.$$

Définition 1.3 Classification des EDPs

Soit l'EDP suivant d'ordre deux, linéaire à coefficients constants :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial x} + e \frac{\partial^2 u}{\partial y} + f u = g \quad (1.2)$$

tel que a, b, c, d, e et f sont des constantes.

-L'équation (2.1) est dite elliptique si $b^2 - 4ac < 0$.

-L'équation (2.1) est dite parabolique si $b^2 - 4ac = 0$.

-L'équation (2.1) est dite hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.

Théorème 1.2 Théorème de Taylor à deux variable

On suppose que $f(x, y)$ et toutes ses dérivés d'ordre inférieur à $n + 1$ sont continues dans

$$D = (x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \text{ (c'est à dire } f(x, y) \in C^{n+1})$$

soit $(x_0, y_0) \in D$, il existe ε compris entre x et x_0 et η compris entre y, y_0 avec

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$$

où

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \dots \\ &+ \dots + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n C_{n+1}^j (x - x_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\text{pour } j = 0 \quad \frac{(x - x_0)^n}{n} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0)$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j (x - x_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(\varepsilon, \eta)$$

Lemme 1.1 Lemme fondamental [7]

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\eta(x)$ où $f(x)$ est une fonction continue par morceaux dans l'intervalle $[a, b]$, s'annulant pour toute fonction $C^1[a, b]$ tel que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, alors $f(x)$ est identiquement nulle dans $[a, b]$.

Théorème 1.3 Théorème fondamental [7]

Soit $\mathbf{x}^*(t)$ un extremum, la première variation de J doit être nulle en \mathbf{x}^* . i.e; $\delta J(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{x}(t)) = 0$.
Pour toute variation admissible $\delta \mathbf{x}(t)$

Définition 1.4 Maillage

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer des différences finies. Pour une application définie sur un segment de \mathbf{IR} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment. Pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir éventuellement des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins.

Définition 1.5 Schéma numérique

Écrire un schéma numérique de la résolution d'une équation aux dérivées partielles signifie :
-Substituer les formulations des dérivées par approximations sur tout les point de maillage.
-Réorganiser les équations pour faire apparaître un schéma explicite ou bien implicite.
-Résoudre un schéma numérique signifie simplement trouver les valeurs discret de la fonction en chaque noeud.

Définition 1.6 -La méthode ou le schéma implicite calcul \mathbf{u}_{n+1} en fonction de \mathbf{u}_n c-à-d :

$$\mathbf{u}_{n+1} = f(\mathbf{u}_n)$$

-La méthode ou le schéma explicite calcul \mathbf{u}_{n+1} en fonction de $(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$ c-à-d :

$$\mathbf{u}_{n+1} = f(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$$

Définition 1.7 Erreur de troncature

On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant les dérivées par les différences divisées. Le calcul des erreur de troncature est usuellement basé sur les développements de Taylor. L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'équation est approchée par le schéma. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approché (erreur de convergence), mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

Définition 1.8 Consistance de schéma

Le schéma est consistant d'ordre deux en temps et en espace, si il existe $c \in \mathbf{IR}_+$ ne dépend que de U tel que : $\|E^{(n)}_u\| \leq c(k^2 + h^2)$.

Définition 1.9 Stabilité

Un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature, ...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant : Un schéma peut être :

-Inconditionnellement instable : Quels que soient k et h les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.

-Inconditionnellement stable : Quels que soient k et h les erreurs causées par le schéma numérique n'explose pas au fil des itérations.

-Conditionnellement stable : On doit poser une condition sur k et h pour que la solution n'explose pas.

Théorème 1.4 Théorème de Lax

Si la solution u de l'EDP est suffisamment régulière, un schéma stable et consistant est convergent dans la norme de stabilité.

Définition 1.10 Les réacteurs batch

Les réacteurs batch sont utilisées pour étudier le comportement des fluides avec des matériaux dans différentes conditions de température et de pression.

Dans les procédés chimiques, des récipients horizontaux ou verticaux sont également utilisés pour stocker des liquides ou pour fournir du volume afin qu'un mélange de liquide et de vapeur puisse se séparer en deux phases distinctes.

Définition 1.11 Méthode de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(x) = 0$, où $G : \mathbf{IR}^p \rightarrow \mathbf{IR}^p$ est une fonction de classe C^1 .

$$G(x) = G(x_k) + dG(x_k)(x - x_k) + o(x - x_k) = 0.$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$\Rightarrow x = x_k - \frac{G(x_k)}{dG(x_k)}$$

alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{G(x_k)}{dG(x_k)}$$

un point initial $x_0 \in \mathbf{IR}^p$ étant choisi, et on espère que x_k converge vers le zéro x . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement.

Théorème 1.5 Théorème de Pontryaguin(Principe du Maximum) [10]

Sous les hypothèses suivantes :

1. Il existe une paire $(x, u) \in AC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) Mes([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ admissible pour le problème (P).
2. f et l sont de classe C^0 par rapport à u et de classe C^1 par rapport à t et x .
3. g, φ_0 et φ_1 sont de classe C^1 par rapport à x si (x^*, u^*) est une paire optimale pour (P) alors :
 (a) Il existe $\lambda^* \neq 0 \in AC([t_0^*, t_f^*], \mathbb{R}^n)$ tel que (x^*, λ^*) vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \\ \dot{\lambda}^* = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = -f'_x(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) + l'_x(t, x^*(t), u^*(t)) \end{cases}$$

- (b) Pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$ la commande $u^*(t)$ minimise l'Hamiltonien :

$$u^*(t) = \operatorname{argmin} H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t))$$

- (c) Il existe $(k_0^*, k_1^*) \neq 0 \in \mathbb{R}^p \mathbb{R}^q$ tel que : Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} \varphi_0(t_0^*, x(t_0^*)) = 0, \\ \varphi_1(t_f^*, x(t_f^*)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^*(t_0^*) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t_0^*, x^*(t_0), t_f^*, k_0^*, k_1^*), \\ \lambda^*(t_f^*) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_0^*, x^*(t_0), t_f^*, x^*(t_f^*), k_0^*, k_1^*) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} \mathbb{R} \mathbb{R}^n \mathbb{R}^n \mathbb{R}^p \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (t_0, x_0, t_f, x_f, k_0, k_1) \longmapsto \varphi(t_0, x_0, t_f, x_f, k_0, k_1) = g(t_0, x_0, t_f, x_f) \\ \quad + (\varphi_0(t_0, x_0) \setminus k_0) + (\varphi_1(t_f, x_f) \setminus k_1) \end{cases}$$

Si t_0 est libre on a :

$$H(t_0^*, x^*(t_0^*), u^*(t_0^*), \lambda^*(t_0^*)) - \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t_0^*, x^*(t_0), t_f^*, x^*(t_f^*), k_0^*, k_1^*) = 0,$$

- Si t_f est libre :

$$H(t_f^*, x^*(t_f^*), u^*(t_f^*), \lambda^*(t_f^*)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_f}(t_0^*, x^*(t_0), t_f^*, x^*(t_f^*), k_0^*, k_1^*) = 0,$$

1. On cherche les commandes H -minimales : Pour $t \in [t_0, t_f]$ fixé on résout :

$$\left\{ \operatorname{Min}_{v \in U} H(t, x(t), v, \lambda(t)) \longrightarrow u^*(t) = u^*(t, x(t), \lambda(t)), \right.$$

2. On injecte la solution obtenue en (1) dans les systèmes différentiels en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ et on obtient un système différentiel aux deux bouts. (Two Point boundary value Problème \equiv **TPBVP**) de $2\mathbf{n}$ équations.

PROBLÈME FONDAMENTAL DU
CALCUL DES VARIATIONS SANS
CONTRAÎNTE ET PROBLÈME DE
COMMANDE OPTIMALE

2.1 Problème fondamental du calcul des variations sans contrainte

2.1.1 Position du problème

Soit $[t_0, t_f]$ un intervalle de \mathbf{IR} et soit $\mathbf{E} = C^1([t_0, t_f], \mathbf{IR})$ un ensemble des applications de classe C^1 définie sur $[t_0, t_f]$ à valeur dans \mathbf{IR} .

Considérons le problème suivant :

$$\mathbf{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (2.1)$$

et $F \in C^2$ et $x(t)$ est une fonction admissible de classe C^1 avec,

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } x(t_f) = x_{t_f}. \quad (2.2)$$

Notre objective consiste à déterminer l'extrémum $x(t)$ qui est la solution de l'équation d'Euler-Lagrange.

2.1.2 Détermination de l'équation Euler- Lagrange

Nous allons déterminés l' équation d'Euler-Lagrange à travers les étapes suivantes.

Étape 1 : Hypothèse d'extremum

On suppose que $x^*(t)$ est la courbe qui vérifie le problème (2.1) (2.2) et soit $x(t)$ un autre courbe qui s'écrit sous la forme suivante

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t), \quad (2.3)$$

où $\delta x(t)$ est une variation de $x^*(t)$ et vérifie

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0, \quad (2.4)$$

telle que : $J(x^*(t) + \delta x(t))$ est continument différentiable sur E.

Étape 2 : Accroissement

Considérons l'accroissement de la fonctionnelle J :

$$\Delta J(x^*(t), \delta x(t)) = J(x^*(t) + \delta x(t)) - J(x^*(t)) \quad (2.5)$$

En utilisant le développement de Taylor autour de $x^* + \delta x$ pour le terme $J(x^*(t) + \delta x(t))$, on a

$$\Delta J(x^*(t), \delta x(t)) = J(x) + \frac{\partial J}{\partial x} \delta x + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \delta x^2 + \dots - J(x) \quad (2.6)$$

d'ou

$$\Delta J(x^*(t), \delta x(t)) = \delta J + \delta^2 J + \dots \quad (2.7)$$

avec

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial x} \delta x \quad \text{et} \quad \delta^2 J = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \delta x^2.$$

Ainsi,

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} [F(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)] dt. \quad (2.8)$$

Étape 3 : Première variation

Pour déterminer la première variation de J en utilise le développement de Taylor autour de $\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}^* + \delta\dot{\mathbf{x}}$ pour le premier terme de l'intégrale (2.8) et gardant tout simplement les termes linéaires en $\delta\mathbf{x}(t)$ et $\delta\dot{\mathbf{x}}(t)$

alors, on a

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), t) &= F(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)_* \delta\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2} \delta\mathbf{x}^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \dot{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} \delta\dot{\mathbf{x}} + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

En prenant les termes linéaires de la relation (2.9) et en substituant ces derniers dans (2.8) on obtient :

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(F(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)_* \delta\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) - F(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) \right) dt, \quad (2.10)$$

alors, on a

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)_* \delta\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \right) dt. \quad (2.11)$$

Faisant une intégration par partie du deuxième terme de la relation (2.11)

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) dt, \quad (2.12)$$

en prenant,

$$\mathbf{U} = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \quad \mathbf{U}' = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \quad (2.13)$$

et

$$\mathbf{V}' = \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \quad \mathbf{V} = \delta\mathbf{x}(t).$$

Alors, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) dt = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\mathbf{x}(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\mathbf{x}(t) dt, \quad (2.14)$$

comme

$$\delta\mathbf{x}(t_0) = \delta\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

on a

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\mathbf{x}(t) dt. \quad (2.16)$$

Substituant la relation (2.16) dans (2.11) on a

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x^*}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \delta x(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \delta x(t) \right] dt \quad (2.17)$$

qui est valable pour tout $\delta x(t)$ de classe C^1 .

D'après le théorème fondamental [7], on déduit que la variation de J est nulle en extremum ,i.e.

$$\delta J(x^*(t) + \delta x(t)) = 0, \quad (2.18)$$

c'est -à- dire

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x^*}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta x^*(t) dt = 0, \quad (2.19)$$

d'après le lemme fondamental [7] , on a le résultat suivant :

$$\frac{\partial F}{\partial x^*}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^*(t)} \right) (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_f]. \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est appelée l'équation Euler- Lagrange qui est une condition nécessaire.

Remarque 2.1 Dans le cas où la fonction $F(x(t), \dot{x}(t), t)$ à l'intérieure de l'intégrale (2.2) est explicitement indépendante de t une condition nécessaire pour que l'intégrale ait un extremum est donnée par identité de Beltrami, qui est forme particulière de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} - F = c$$

ou c est un constante.

Condition suffisante

Pour établir la nature de l'extremum, c'est -à- dire, s'il est s'agit d'un minimum ou d'un maximum, nous devons prendre en considération la deuxième variation et examiner son signe. Donc, nous trouvons une condition suffisante

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_* (\delta x(t))^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_* (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* (\delta x(t) \delta \dot{x}(t)) \right] dt \quad (2.21)$$

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} [\delta x(t), \delta \dot{x}(t)] dt \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}}_I \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Si la deuxième variation $\delta^2 J$ est positive (négative) cela veut dire que la matrice (I) dans (2.20) doit être définie positive (négative). Ceci prouve la nature de l'extremum.

Dans beaucoup de cas $\delta x(t)$ est arbitraire, le coefficient de $(\delta \dot{x}^2)$ i.e., $(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2})$ détermine le signe de $\delta^2 J$.

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right) > 0 \quad \text{pour le minimum (*)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right) < 0 \quad \text{pour le maximum (**)}$$

Les conditions (*) et (**) sont appelées conditions de Legendre [1]

Application 1

Soit le problème suivant :

$$J(u) = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - c(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u^2 \right] dt dx. \quad (2.23)$$

notre objectif est de déterminer l'équation d'Euler - Lagrange du problème (2.23). On a

$$F(u, u_t, u_x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - c(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u^2 \right] \quad (2.24)$$

D'après l'équation d'Euler - Lagrange (2.20) on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -cu(t) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_t} = u_t \quad \implies \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial u_t} \right) = u_{tt} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = -cu_x \quad \implies \quad -\frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \quad (2.27)$$

où $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial u_t} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ sachant que $\frac{\partial F}{\partial u_t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Ainsi, l'équation d'Euler- Lagrange est

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) \right] = 0. \quad (2.28)$$

L'équation (2.28) est l'équation des ondes à coefficient variable.

2.2 Problème de commande optimale

2.2.1 Position du problème

On considère un système dynamique dont l'évolution est régie par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)dt, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.29)$$

où la commande $u(\cdot)$ est une fonctions définies de $[t_0, t_f]$ dans \mathbf{IR} .

Etant donné la fonction coût $F : [t_0, t_f] \mathbf{IR} \mathbf{U} \mathbf{I} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{IR}$, on définit le problème de minimisation de type Lagrange :

$$\min \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.30)$$

tel que :

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.31)$$

est une condition initiale donnée.

2.2.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Nous allons déterminer les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant le principe de minimum de pontriaguine [10].

Hamiltonien :

Nous formons le Hamiltonien H pour le problème d'écrit par le système (2.29)-(2.31) en posant :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = (F(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t)), \quad (2.32)$$

où $\lambda(t)$ l'état adjoint.

Équation d'état et état adjoint :

Soient $x^*(t)$, $u^*(t)$ et $\lambda^*(t)$ les valeurs optimales.

L'équation d'état est :

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^* \quad (2.33)$$

avec la condition initiale : $x^*(0) = x_0$.

L'état adjoint :

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^* \quad (2.34)$$

Condition d'optimalité :

La condition d'optimalité est donnée par :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^* = 0. \quad (2.35)$$

Application 2.1 : En médecine (la chimiothérapie)

La concentration de médicament x_1 et le nombre de cellules immunitaire saines et cancéreuses (x_2, x_3, x_4) dans un organe à tout moment de la chimiothérapie peuvent être exprimés comme suit

$$\frac{dx_1}{dt} = u(t) - \gamma_6 x_1 \quad (2.36)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_{2,in} + r_2 \frac{x_2 x_4}{\beta_2 + x_4} - \gamma_3 x_2 x_4 - \gamma_4 x_2 - \alpha_2 x_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) \quad (2.37)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = r_3 x_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_3 x_4 - \alpha_3 x_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3}) \quad (2.38)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = r_1 x_4 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 x_4 - \gamma_2 x_2 x_4 - \alpha_1 x_4 (1 - e^{-x_1 \lambda_1}) \quad (2.39)$$

où $\dot{x}_{2,in}$ est une constante qui signifie le taux de cellules immunitaires qui pénètrent dans l'organe pour combattre les cellules cancéreuses et $u(t)$ est le taux d'injection du médicament dans l'organe. $r_i s$ et le $\beta_i s$ sont des constantes dans les termes de croissance, tandis que $\alpha_i s$ et $\lambda_i s$ sont les constantes des termes de désintégration résultat de l'action du médicament. Les $\gamma_i s$ sont les constantes des termes de désintégration restants. Notez que le médicament a des effets secondaires toxiques puisqu'il tue également les cellules immunitaires et saines.

Pour traiter un cancer par chimiothérapie, l'objectif pourrait être de minimiser le nombre de cellules cancéreuses dans un temps donné en utilisant un minimum de médicaments pour réduire leurs effets toxiques. Le problème de commande optimale dans ce cas est de trouver la commande $u(t)$ qui minimise la fonctionnelle

$$I = x_4(t_f) + \int_0^{t_f} u(t) dt \quad (2.40)$$

Soumis aux équations (2.36)-(2.39) et aux valeurs initiales de la concentration du médicament et le nombre de cellules avec $u(t)$ ne soit jamais inférieur à zéro. D'autres contraintes peuvent être présentes par exemple, le nombre de cellules saines pendant le traitement ne doit pas descendre en dessous d'un certain minimum, c'est-à-dire, i.e.,

$$x_3(t) \geq x_{3,min}$$

En outre, il pourrait y avoir une limite supérieure à la posologie du médicament, c'est-à-dire, i.e.,

$$u(t) \leq u_{max}$$

D'après le Hamiltonien on a

$$H = F + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i. \quad (2.41)$$

Alors

$$\begin{aligned}
H = & u(t) + \lambda_1 (u(t) - \gamma_6 x_1) + \lambda_2 \left(\dot{x}_{2,in} + r_2 \frac{x_2 x_4}{\beta_2 + x_4} - \gamma_3 x_2 x_4 - \gamma_4 x_2 - \alpha_2 x_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) \right) \\
& + \lambda_3 (r_3 x_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_3 x_4 - \alpha_3 x_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3})) + \lambda_4 (r_1 x_4 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 x_4 - \gamma_2 x_2 x_4 - \alpha_1 x_4 (1 - e^{-x_1 \lambda_1}))
\end{aligned} \tag{2.42}$$

D'après le principe du minimum de Pontriaguine les conditions nécessaire d'optimalité sont données respectivement

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \\ \dot{x}_3 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \\ \dot{x}_4 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} \end{cases} \quad \left\{ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \right. \tag{2.43}$$

donc

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t) - \gamma_6 x_1 + \lambda_4 \alpha_1 x_4 e^{-x_1 \lambda_1} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_{2,in} + r_2 \frac{x_2 x_4}{\beta_2 + x_4} - \gamma_3 x_2 x_4 - \gamma_4 x_2 - \alpha_2 x_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) + \alpha_2 x_2 e^{-x_1 \lambda_2} \\ \dot{x}_3 = r_3 x_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_3 x_4 - \alpha_3 x_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3}) + \alpha_3 x_3 e^{-x_1 \lambda_3} \\ \dot{x}_4 = r_1 x_4 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 x_4 - \gamma_2 x_2 x_4 - \alpha_1 x_4 (1 - e^{-x_1 \lambda_1}) \end{cases} \tag{2.44}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \gamma_6 \lambda_1 - \alpha_2 x_2 e^{-x_1 \lambda_2} - \alpha_3 x_3 e^{-x_1 \lambda_3} - \alpha_1 x_4 e^{-x_1 \lambda_1} \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 \left[r_2 \frac{x_4}{(\beta_2 + x_4)^2} - \gamma_3 x_4 - \gamma_4 - \alpha_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) \right] \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 [r_3 (1 - \beta_3 2x_3) - \gamma_5 x_4 - \alpha_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3})] \\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_4 [r_1 (1 - \beta_1 2x_4) - \gamma_1 x_3 - \gamma_2 x_2 - \alpha_1 (1 - e^{-x_1 \lambda_1})] \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\lambda_1 + 1 = 0 \tag{2.46}$$

2.3 Le calcul des variations en commande optimale

Considérons le problème de commande optimale de type Lagrange (2.29)-(2.31).

Notre objectif consiste à déterminer les conditions nécessaires d'optimalité du problème en utilisant le calcul des variations. Nous allons reformuler le problème de commande optimale en problème de calcul des variations en prenant le système dynamique (2.29) comme une contrainte de type différentielle.

2.3.1 Reformulation du problème de commande optimale en problème de calcul des variations sans contrainte

Dans cette section, nous allons déterminer les conditions nécessaire d'optimalité en utilisant le calcul des variations c'est à dire á travers équation d'Euler-Lagrange. Pour cela nous allons traiter l'équation différentielle qui régit le système(2.29) comme une contrainte d'égalité de la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Cependant, nous allons incorporés la contrainte de l'équation d'état (2.47) à \mathbf{I} à l'aide du multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ et nous obtenons la fonctionnelle augmentée \mathbf{J}_α .

Supposons que la commande optimale $\mathbf{u}^*(t)$ et l'état associe $\mathbf{x}^*(t)$ existent, alors par analogie au calcul des variations on a :

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \int_{t_0}^{tf} \mathbf{F}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \int_{t_0}^{tf} \boldsymbol{\lambda}^*(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}^*(t))dt, \quad (2.48)$$

alors, la fonction augmentée pour ce problème est

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \int_{t_0}^{tf} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^*(t)\mathbf{f} - \boldsymbol{\lambda}^*(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t))dt. \quad (2.49)$$

Par définition de L'Hamiltonien on a

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = (\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^*(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)), \quad (2.50)$$

en substituant (2.50) dans (2.49) on obtient

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \int_{t_0}^{tf} (\mathbf{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) - \boldsymbol{\lambda}^*(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t))dt. \quad (2.51)$$

on note par

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) - \boldsymbol{\lambda}^*(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t). \quad (2.52)$$

Où $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$ est le Lagrangien.

Remarque 2.2 *Le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ est également connu sous le nom de variable adjointe ou le co-état. C'est une fonction indéterminée d'une variable indépendante, qui est t .*

2.3.2 Description des étapes conduisant aux conditions nécessaires d'optimalités

On souhaite déterminer la commande optimale \mathbf{u} qui optimise (c'est-à-dire-dire qui minimise ou maximise) la fonctionnelle J_α . Donc, nous devons obtenir la variation de J_α pour nous aider à déterminer l'optimum J_α . Nous développons la solution du problème à travers les étapes suivantes :

Étape 1 : Variation de la commande et de l'état

Soient $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, alors l'indice de performance (2.51) s'écrit :

$$J_\alpha(\mathbf{u}(t)^* + \delta\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)^* + \delta\mathbf{u}(t), \lambda(t)^* + \delta\lambda(t), t) dt. \quad (2.53)$$

Où

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)^* + \delta\mathbf{u}(t), \lambda(t), t) &= H(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)^* + \delta\mathbf{u}(t)) \\ &\quad - \varphi(\lambda^*(t) + \delta\lambda(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t)), \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec

$$\varphi(\lambda(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \lambda(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$$

Étape 2 : première variation

On a

$$\int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} L(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), \lambda^*(t) + \delta\lambda(t), t) dt. \quad (2.55)$$

La variation de J_α est donnée par

$$\delta J_\alpha = \delta \left[\int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} L(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), \lambda^*(t) + \delta\lambda(t), t) dt \right],$$

en appliquant le théorème de la moyenne on a

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha &= \int_{t_0}^{t_f} \delta L(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), \lambda^*(t) + \delta\lambda(t), t) dt + L|_{t_f} \delta t_f. \\ \delta J_\alpha &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \delta\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^* \delta\mathbf{u}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^* \delta\dot{\mathbf{x}}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)^* \delta\lambda(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)^* \delta\dot{\mathbf{u}}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right)^* \delta\dot{\lambda}(t) \right] \\ &\quad dt + (H - \varphi)|_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ou

$$\delta J_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} \delta H(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - \delta \varphi(\lambda(t) + \delta \lambda(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t)) dt + (H - \varphi)|_{t_f} \delta t_f \quad (2.57)$$

alors

$$\delta J_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \delta \lambda(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \delta \lambda(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + (H - \varphi)|_{t_f} \delta t_f \right] dt, \quad (2.58)$$

comme $\varphi(\lambda(t), \dot{x}(t)) = \lambda(t)\dot{x}(t)$, alors on obtient

$$\delta J_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} (H_x \delta x(t) + H_\lambda \delta \lambda(t) + H_u \delta u(t) - \lambda \delta \dot{x}(t) - \dot{x} \delta \lambda(t)) dt + (H - \varphi)|_{t_f} \delta t_f, \quad (2.59)$$

où le dernier terme de la relation (2.59) est la dérivée partielle de la fonctionnelle J par rapport a t_f résultant de la formule d'intégral de la Leibniz .

En appliquant l'intégration par parties á l'intégrale de $\lambda \delta \dot{x}(t)$, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda \delta \dot{x}(t) dt = \lambda(t_f) \delta x(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda} \delta x(t) dt \quad (2.60)$$

En substituant (2.60) dans (2.59) on a

$$\delta J_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} (H_x \delta x(t) + H_\lambda \delta \lambda(t) + H_u \delta u(t) - \dot{x} \delta \lambda(t)) dt - \lambda(t_f) \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda} \delta x(t) dt + (H - \varphi)|_{t_f} \delta t_f, \quad (2.61)$$

Notez que $\delta x(t_f)$ est la variation de l'état optimal \hat{x} au temps

$$\delta x(t_f) = x(t_f) - \hat{x}(t_f) \quad (2.62)$$

cette variation est différente de la variation de l'état final

$$\delta x_f = x(t_f + \delta t_f) - \hat{x}(t_f) \quad (2.63)$$

La figure (2.1) illustre ces deux variation pour un état optimal unique \hat{x} . Pour rendre compatible les spécifications de l'état final libre et du temps final libre, nous devons introduire dans l'équation une approximation du premier ordre en temps de δx_f de terme $\delta x(t_f)$ comme suit. La variation peut être exprimée comme suit

$$\begin{aligned} \delta x_f &= x(t_f + \delta t_f) - \hat{x}(t_f) = x(t_f) + \dot{x}(t_f) \delta t_f - \hat{x}(t_f) \\ &= \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f) \delta t_f \end{aligned}$$

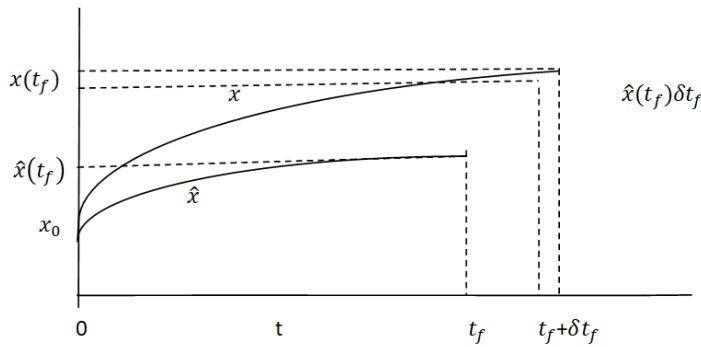
Figure Relation entre δx_f et δt_f .

FIGURE 2.1:

où nous avons utilisé le développement de Taylor du premier ordre pour $x(t_f + \delta t_f)$.

En différenciant ensuite l'équation par rapport à t , nous obtenons

$$\dot{x}(t_f) = \dot{x}(t_f) + \delta \dot{x}(t_f)$$

Après avoir combiné les deux dernières équations et en négligeant le terme du second ordre $\delta x(t_f) \delta t_f$, nous obtenons

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + \hat{x}(t_f) \delta t_f \quad \text{ou} \quad \delta x(t_f) = \delta x_f - \hat{x}(t_f) \delta t_f \quad (2.64)$$

Enfin en soustrayant l'équation ci-dessus, nous obtenons le minimum de J_α (où $\delta J_\alpha = 0, u = \hat{u}, x = \hat{x}$, et en particulier $x(t_f) = \hat{x}(t_f)$)

ceci permis aussi d'écrire (2.61) sous la forme

$$\delta J_\alpha = \int_{t_0}^{t_f} [(H_x + \dot{\lambda}) \delta x + (H_\lambda - \dot{x}) \delta \lambda] + H_u \delta u dt - \lambda(t_f) \delta x(t_f) + (H - \varphi)|_{t_f} \delta t_f, \quad (2.65)$$

Étape 3 : Condition d'extremum

En utilisant le théorème fondamental [7] pour le calcul des variations, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 & \implies H_x + \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 & \implies H_\lambda - \dot{x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0 & \implies H_u = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\delta x(t_f) \simeq \delta x_f - \dot{x}(t_f) \delta t_f. \quad (2.67)$$

alors

$$[L + \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}] \delta t_f + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x = 0. \quad (2.68)$$

Comme $x(tf) = \mathbf{0}$ ceci conduit a

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_\lambda = g \\ H_u = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Application 2.2

Reprenant l'application 2.1 précédent développé dans la section 2.3 ou la fonctionnelle augmenté est donnée par

$$J = \int_0^{t_f} L(x^T, \dot{x}^T, \lambda^T, u) dt \quad (2.70)$$

où

$$L = H - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \dot{x}_i \quad (2.71)$$

$$\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \quad \text{et} \quad x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Alors,

$$\begin{aligned} L = & u(t) + \lambda_1 (u(t) - \gamma_6 x_1 - \dot{x}_1) + \lambda_2 \left(\dot{x}_{2,in} + r_2 \frac{x_2 x_4}{\beta_2 + x_4} - \gamma_3 x_2 x_4 - \gamma_4 x_2 - \alpha_2 x_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) - \dot{x}_2 \right) \\ & + \lambda_3 (r_3 x_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_3 x_4 - \alpha_3 x_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3}) - \dot{x}_3) + \lambda_4 (r_1 x_4 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 x_4 - \gamma_2 x_2 x_4 - \alpha_1 x_4 (1 - e^{-x_1 \lambda_4}) - \dot{x}_4) \end{aligned} \quad (2.72)$$

D'après le calcul des variations on a respectivement les systèmes des équations état, co-état et la commande

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_4} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_4} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_4} \right) = 0 \end{cases} \quad \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0, \right. \quad (2.73)$$

ainsi on a

$$\begin{cases} -\gamma_6 \lambda_1 + \alpha_2 x_2 e^{-x_1 \lambda_2} + \alpha_3 x_3 e^{-x_1 \lambda_3} + \alpha_1 x_4 e^{-x_1 \lambda_4} + \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \lambda_2 \left[r_2 \frac{x_4}{(\beta_2 + x_4)^2} + \gamma_3 x_4 + \gamma_4 + \alpha_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) \right] + \dot{\lambda}_2 = 0 \\ \lambda_3 [r_3 (1 - \beta_3 2x_3) + \gamma_5 x_4 + \alpha_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3})] + \dot{\lambda}_3 = 0 \\ \lambda_4 [r_1 (1 - \beta_1 2x_4) + \gamma_1 x_3 + \gamma_2 x_2 + \alpha_1 (1 - e^{-x_1 \lambda_4})] + \dot{\lambda}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) - \gamma_6 x_1 + \lambda_4 \alpha_1 x_4 e^{-x_1 \lambda_1} - \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_{2,in} + r_2 \frac{x_2 x_4}{\beta_2 + x_4} - \gamma_3 x_2 x_4 - \gamma_4 x_2 - \alpha_2 x_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) + \alpha_2 x_2 e^{-x_1 \lambda_2} - \dot{x}_2 = 0 \\ r_3 x_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_3 x_4 - \alpha_3 x_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3}) + \alpha_3 x_3 e^{-x_1 \lambda_3} - \dot{x}_3 = 0 \\ r_1 x_4 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 x_4 - \gamma_2 x_2 x_4 - \alpha_1 x_4 (1 - e^{-x_1 \lambda_1}) - \dot{x}_4 = 0 \\ \lambda_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

ceci permis d'écrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t) - \gamma_6 x_1 + \lambda_4 \alpha_1 x_4 e^{-x_1 \lambda_1} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_{2,in} + r_2 \frac{x_2 x_4}{\beta_2 + x_4} - \gamma_3 x_2 x_4 - \gamma_4 x_2 - \alpha_2 x_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) + \alpha_2 x_2 e^{-x_1 \lambda_2} \\ \dot{x}_3 = r_3 x_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_3 x_4 - \alpha_3 x_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3}) + \alpha_3 x_3 e^{-x_1 \lambda_3} \\ \dot{x}_4 = r_1 x_4 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 x_4 - \gamma_2 x_2 x_4 - \alpha_1 x_4 (1 - e^{-x_1 \lambda_1}) \end{cases} \quad (2.74)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \gamma_6 \lambda_1 - \alpha_2 x_2 e^{-x_1 \lambda_2} - \alpha_3 x_3 e^{-x_1 \lambda_3} - \alpha_1 x_4 e^{-x_1 \lambda_1} \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 \left[r_2 \frac{x_4}{(\beta_2 + x_4)^2} - \gamma_3 x_4 - \gamma_4 - \alpha_2 (1 - e^{-x_1 \lambda_2}) \right] \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 [r_3 (1 - \beta_3 x_3) - \gamma_5 x_4 - \alpha_3 (1 - e^{-x_1 \lambda_3})] \\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_4 [r_1 (1 - \beta_1 x_4) - \gamma_1 x_3 - \gamma_2 x_2 - \alpha_1 (1 - e^{-x_1 \lambda_1})] \end{cases} \quad (2.75)$$

Application 3

Considérons le problème de réacteur batch suivant :

$$I = - \int_0^{t_f} c k x^a dt \quad (2.76)$$

où

$$k = k_0 \exp - \frac{E}{Ru} \quad (2.77)$$

avec $u(t)$ est commande, $x(0) = x_0$ est la condition initiale, et t_f le temps final. R et E sont des constantes.

Le problème (2.76) est un problème de type Lagrange, en substituant la relation (2.77) dans (2.76) on a

$$I = - \int_0^{t_f} c \left(k_0 \exp - \frac{E}{Ru} \right) x^a dt \quad (2.78)$$

Commencant par former le Hamiltonien

$$H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = -c \left(k_0 \exp - \frac{E}{Ru} \right) x^a - \lambda a k x^a, \quad (2.79)$$

et la condition initiale est $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Nous reformulons le problème de commande optimale en problème de calcul des variations

$$L(x, \lambda, u, \dot{x}, t) = -c(k_0 \exp -\frac{E}{Ru})x^a + \lambda(-akx^a - \dot{x}) \quad (2.80)$$

Alors, le système d'équations obtenue par rapport à l'état, co-état et la commande est le suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 & \implies akx^{a-1}(c + a\lambda) + \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 & \implies -akx^a - \dot{x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0 & \implies -\frac{kE}{Ru^2}x^a(c + a\lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -akx^{a-1}(c + a\lambda) \\ \dot{x} = -akx^a \\ -\frac{kE}{Ru^2}x^a(c + a\lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\lambda(tf) = 0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

alors

$$L((x, \lambda, u, \dot{x}, t)_{tf} = -ckx^a + \lambda akx_t^a f = 0. \quad (2.83)$$

Maintenant considérons la réaction consécutive $A \longrightarrow B \rightleftharpoons C$ et les fractions $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ et \mathbf{x}_3 d'espace A, B et C on réacteur batch définie par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1^2 \exp^{E_1/u} & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1^2 \exp^{E_1/u} - a_2 x_2 \exp^{E_2/u} & x_2(0) &= 0 \\ \dot{x}_3 &= -a_1 x_2 \exp^{E_1/u} - a_3 x_3 \exp^{E_3/u} & x_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

$E_i (i = 1, 2, 3)$ sont des constantes et u est la commande .

Considérons la fonctionnelle qui est définie par le problème de Mayer

$$I = -x_3(tf) \quad (2.84)$$

Transformant le problème (2.84) en problème de Lagrange

$$I = - \int_0^{x_3(tf)} dx_3 = - \int_0^{tf} \dot{x}_3 dt = \int_0^{tf} -a_2 x_2 \exp^{E_1/u} + a_3 x_3 \exp^{E_3/u} dt \quad (2.85)$$

Alors la fonctionnelle augmentée est donnée par

$$I_\alpha = \int_0^{t_f} L(x^T, \lambda^T, u, \dot{x}^T, t) dt.$$

avec

$$\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{et} \quad x^T = (x_1, x_2, x_3).$$

où

$$\begin{aligned} L = & -a_2 x_2 \exp^{E_1/u} + a_3 x_3 \exp^{E_3/u} - \lambda_1 (a_1 x_1^2 \exp^{E_1/u} - \dot{x}_1) + \lambda_2 (a_1 x_1 \exp^{E_1/u} - a_2 x_2 \exp^{E_1/u} - \dot{x}_2) + \\ & \lambda_3 (a_2 x_2 \exp^{E_2/u} - a_3 x_3 \exp^{E_3/u} - \dot{x}_3). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nous déterminons les conditions nécessaires d'optimalité à l'aide du calcul des variations.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

alors, le système d'équations du co-état est donné par

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = (-\lambda_1 + \lambda_2) 2a_1 x_1 \exp^{E_1/u} \\ \dot{\lambda}_2 = (-1 - \lambda_2 + \lambda_3) a_2 \exp^{E_2/u} \\ \dot{\lambda}_3 = (1 - \lambda_3) a_3 \exp^{E_3/u} \end{cases} \quad (2.88)$$

Le système d'équations d'état est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_3} \right) = 0 \end{cases}, \quad (2.89)$$

alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1^2 \exp^{E_1/u} \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1^2 \exp^{E_1/u} - a_2 x_2 \exp^{E_2/u} \\ \dot{x}_3 = a_2 x_2 \exp^{E_2/u} - a_3 x_3 \exp^{E_3/u} \end{cases} \quad (2.90)$$

et la commande donnée par

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \right. \quad (2.91)$$

$$= -\frac{1}{u^2} \left[(-\lambda_1 + \lambda_2) a_1 x_1^2 E_1 \exp^{E_1/u} + (-1 - \lambda_2 + \lambda_3) a_2 x_2 E_2 \exp^{E_2/u} + (1 - \lambda_3) a_3 x_3 E_3 \exp^{E_3/u} \right] = 0 \quad (2.92)$$

D'après la condition nécessaire on a

$$\lambda^T(tf) = \mu^T q_x(tf) \quad (2.93)$$

tell que

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - b_1 x_1 \\ x_3 - b_2 x_2 \end{bmatrix}, q_x(tf) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

En substituant (2.94) dans (2.93) on obtient

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_{tf}^T = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Alors

$$\lambda^T(tf) = -\mu_1 b_1 + \mu_1 \quad -\mu_2 b_2 + \mu_2 \quad (2.96)$$

ceci donne

$$L(tf) = (-\lambda_1 + \lambda_2) a_1 x_1^2 \exp^{E_1/u} + (-1 - \lambda_2 + \lambda_3) a_2 x_2 \exp^{E_2/u} + (1 - \lambda_3) a_3 x_3 \exp^{E_3/u} |_{tf} = 0. \quad (2.97)$$

ÉTUDE NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE CALCUL DES VARIATIONS ET COMMANDE OPTIMALE

Ce chapitre est consacré à la discrétisation par la méthode des différences finies le problème issu du calcul des variations. Aussi, à la méthode de tir Newton-Raphson pour le problème de commande optimale d'écrit dans le chapitre précédent.

3.1 Discrétisation du problème obtenu par le calcul des variations d'ordre 2

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème sur le domaine $\Omega = [0, 1][t_0, t_f]$, ceci consiste à remplacer, par un schéma approché, le problème continue par un système algébrique. Considérons le problème (1.2) de la section précédente ou l'équation d'Euler-Lagrange est donnée par

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) \right] = 0. \quad (3.1)$$

Cette équation est équivalente à l'équation hyperbolique sur le domaine Ω où $u : [0, 1][0, T] \rightarrow \mathbf{IR}$ est une fonction suffisant régulière et $c(x)$ est une fonction régulière. L'approximation s'effectue en trois étapes

successives.

-La première étape consiste à discrétiser le domaine $\Omega = [0, 1][0, T]$.

-La deuxième étape consiste à discrétiser les opérateurs $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

-La troisième étape consiste à discrétiser les conditions aux limites.

3.1.1 Discrétisation du domaine

Pour établir le schéma d'approximation du problème précédent nous commençons par discrétiser le domaine $\Omega = [0, 1]$. On subdivise d'une part, l'intervalle $[0, 1]$ en $n + 1$ parties de longueur h tel que $h = \frac{1}{n + 1}$ est le pas de discrétisation dans la direction x avec $x_i = ih$ et d'autre part, l'intervalle $[0, T]$ en M intervalle de temps telle que : $T = Mk$ où k le pas de discrétisation temporelle $t_m = mk$ pour $m = 1, \dots, M$.

3.1.2 Discrétisation temporelle

La dérivée par rapport au temps est approchée par la combinaison de deux schémas avant et arrière

$$u(x, t + h) = u(x, t) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(k^3) \quad (3.2)$$

$$u(x, t - h) = u(x, t) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(k^3) \quad (3.3)$$

Le schéma centrée de discrétisation temporelle est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \simeq \frac{1}{k^2} [u(x, t - k) + u(x, t + k) - 2u(x, t)] \quad (3.4)$$

3.1.3 Discrétisation spatiale

La discrétisation de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x} [c(x)u_x(x, t)]$ consiste à remplacer la dérivée par le quotient différentielle faisant intervenir la valeur de la fonction $u(x, t)$ aux point du maillage. Pour établir le schéma de discrétisation de l'opérateur définissant le problème, deux schémas sont pris en compte, le schéma Avant-Arrière [3] et le schéma Arrière- Avant [3] puis on procède à la moyenne de ces deux schémas.

On pose : $c(x)u_x(x, t) = v_1(x, t)$.

Schéma Avant-Arrière

On a

$$v_1(x + h) = v_1(x, t) + h \frac{\partial v_1(x)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (3.5)$$

donc

$$\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = \frac{v_1(x + h, t) - v_1(x, t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial x^2} + o(h^2). \quad (3.6)$$

Substituant $v_1(x, t) = c(x) \frac{\partial u}{\partial x}$ dans (3.6) on obtient

$$\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{h} [c(x+h) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - c(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)] - \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (c(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) + o(h^2) \quad (3.7)$$

pour de raisons de simplicité, on note par $c_i \equiv c(x_i)$ et $u_i \simeq u(x_i)$

Aussi on a :

$$u(x+h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + o(h^3) \quad (3.8)$$

alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{i+1}^n - u_i^n - 2u_i^n}{h^2} \quad (3.9)$$

et

$$u(x-h, t) = u(x, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + o(h^3) \quad (3.10)$$

donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_i^n - u_{i-1}^n - 2u_i^n}{h^2} \quad (3.11)$$

et substituant (3.9) (3.11) dans (3.7) on obtient :

$$\frac{\partial v_1(x_i)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h} \left[c_{i+1} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right] - \frac{1}{h} \left[c_i \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right] - \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (c_i \frac{\partial u}{\partial x}) \right] \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v_1(x_i)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h^2} [c_{i+1} u_{i+1}^n - (c_i + c_{i+1}) u_i^n + c_i u_{i-1}^n] + \xi_x^{av}(x_i). \quad (3.13)$$

Où $\xi_x^{av}(x_i)$ est l'erreur de troncature donnée par :

$$\xi_x^{av}(x_i) = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x_i) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{\partial K}{\partial x}(x_i) \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x_i) + o(h^2) \right) \quad (3.14)$$

Schéma Arrière-Avant

On a

$$v_1(x-h, t) = v_1(x, t) - h \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = \frac{v_1(x, t) - v_1(x-h, t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial x^2} + o(h^2). \quad (3.16)$$

D'où

$$\frac{\partial v_1(x_i, t)}{\partial x} = \frac{v_1(x_i, t) - v_1(x_{i-1}, t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_1(x_i, t)}{\partial x^2} + o(h^2). \quad (3.17)$$

Substituant $v_1(x, t) = c(x) \frac{\partial u}{\partial x}$ dans (3.17) en obtient

$$\frac{\partial v_1(x_i, t)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h} \left[c_i \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right] - \frac{1}{h} \left[c_i \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right] - \frac{h}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (c_i \frac{\partial u}{\partial x}) \right] \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v_1(x_i, t)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h^2} [c_i u_{i+1}^n - (c_i + c_{i-1}) u_i^n + c_{i-1} u_{i-1}^n] + \xi_x^{ar}(x_i). \quad (3.19)$$

Où $\xi_x^{ar}(x_i)$ est l'erreur de troncature donnée par

$$\xi_x^{av}(x_i, t) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_i, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t) \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x_i, t) + o(h^3) \right). \quad (3.20)$$

En prenant la moyenne des deux expressions précédentes(3.13) et (3.19) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{2h^2} [(c_i + c_{i+1}) u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1}) u_i^n + (c_i + c_{i-1}) u_{i-1}^n] + \frac{1}{2} (\xi_x^{av}(x_i) + \xi_x^{ar}(x_i)) \quad (3.21)$$

Le schéma final par rapport à x et t est donnée par

$$\frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_i^n}{k^2} - \frac{1}{2h^2} [(c_i + c_{i+1}) u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1}) u_i^n + (c_i + c_{i-1}) u_{i-1}^n] - u_i^n = 0. \quad (3.22)$$

Donc

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \mu [(c_i + c_{i+1}) u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1}) u_i^n + (c_i + c_{i-1}) u_{i-1}^n] + k^2 u_i^n \quad (3.23)$$

telle que $\mu = \frac{k^2}{2h^2}$

3.1.4 Discrétisation des conditions aux limites

Les conditions au bord $u(x, t) = 0$ et la condition $u(x, 0) = H(x)$ sont discrétisées par :

$$u_i^n = 0 \quad (3.24)$$

$$u_0^i = 0 \quad (3.25)$$

La discrétisation complète est

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \mu [(c_i + c_{i+1}) u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1}) u_i^n + (c_i + c_{i-1}) u_{i-1}^n] + 2u_i^n - u_i^{n-1} + k^2 u_i^n = 0 \\ u_i^n = 0 \\ u_0^i = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.26)$$

3.1.5 Étude de la consistance, stabilité et convergence

Consistance

On démontre que le schéma de discrétisation (3.26) est consistant avec le problème continue (3.1)

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) \right] = 0. \quad (3.27)$$

Le schéma de discrétisation est dite consistant si

$$|A(u) - \tilde{A}(u)| \longmapsto 0 \quad h \longmapsto 0 \quad k \longmapsto 0 \quad (3.28)$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u) &= \frac{1}{k^2} [u(x_i, t_n + k) + u(x_i, t_n - k) - 2u(x_i, t_n)] - \frac{1}{2h^2} [(c(x_i) + c(x_{i+h}))u(x_i + h, t_n) \\ &- (2c(x_i) + c(x_i + h) + c(x_i - h))u(x_i, t_n) + (c(x_i) + c(x_i - h))u(x_i - h, t_n)] + k^2 u(x_i, t_n) + o(h^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Calculant $c(x_i + h)$, $c(x_i - h)$

$$\begin{cases} c(x_i + h) = c(x_i) + h \frac{\partial c}{\partial x}(x_i) + \dots \\ u(x_i - h) = c(x_i) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) - \dots \end{cases} \quad (3.30)$$

En précédant le même développement de Taylor pour $u(x_i + h, t_n)$, $u(x_i - h, t_n)$, alors on a

$$\begin{cases} u(x_i, t_j + k) = u(x_i, t_j) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{k^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j) + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) + \dots \\ u(x_i, t_j - k) = u(x_i, t_j) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \frac{k^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j) + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \dots \end{cases} \quad (3.31)$$

et

$$\begin{cases} u(x_i + h, t_j) = u(x_i, t_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \dots \\ u(x_i - h, t_j) = u(x_i, t_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) - \dots \end{cases} \quad (3.32)$$

Substituant (3.30), (3.31) et (3.32) dans l'opérateur \tilde{A} on trouve

$$\tilde{A}(u) \simeq \frac{1}{k^2} \left[\left(u(x_i, t_j) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j) + O(k^4) \right) + \left(u(x_i, t_j) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \dots \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2h^2} \left[2c(x_i)u(x_i, t_j) + h \frac{\partial c}{\partial x}(x_i) \right] \left[u(x_i, t_j) + h \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \dots \right] \\
& + 8c(x_i)u(x_i, t_{n+k}) - \left[2c(x_i) - h \frac{\partial c}{\partial x}(x_i) \right] \left[u(x_i, t_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \dots \right] - u(x_i, t_j)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

par conséquant

$$A(u) - \tilde{A}(u) = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{12} c(x_i) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial c}{\partial x}(x_i) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) \tag{3.35}$$

D'où

$$|A(u) - \tilde{A}(u)| \leq \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{12} c(x_i) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial c}{\partial x}(x_i) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) \tag{3.36}$$

Alors, on a

$$|A(u) - \tilde{A}(u)| = 2O(k^2) + 2O(h^2) \quad h \mapsto 0 \quad k \mapsto 0 \tag{3.37}$$

Danc,

$$|A - \tilde{A}| = 0 \quad h \mapsto 0 \quad k \mapsto 0 \tag{3.38}$$

Le schéma est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace, l'erreur de troncature tend vers $\mathbf{0}$ lorsque \mathbf{h} et \mathbf{k} tendent vers $\mathbf{0}$.

Stabilité

Dans le cas schémas numériques appliquées à des problèmes hyperbolique nous choisirons comme condition de stabilité est d'imposer au vecteur des solutions approchées d'être conservé ou de décroître.

on an

$$\tilde{A}(u) = \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_i^n}{k^2} - \frac{(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^n + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^n}{h^2} - u_i^n \tag{3.39}$$

alors

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \mu \left[(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^n + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^n \right] + k^2 u_i^n \tag{3.40}$$

donc

$$u_i^{n+1} = (2+k^2)u_i^n - u_i^{n-1} + \mu \left[(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^n + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^n \right] \tag{3.41}$$

on suppose que

$$\sup_{i \in IR} |c(x)| \frac{k^2}{2h^2} \leq 1 \tag{3.42}$$

on a

$$u_i^{n+1} = (2+k^2)u_i^n - u_i^{n-1} + \mu \left[(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^n + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^n \right] \quad (3.43)$$

donc par l'hypothèse (3.42)

$$\left| u_i^{n+1} \right| \leq (2+k^2) \sup_{i \in IR} |u_i^n| + \sup_{i \in IR} |u_i^{n-1}| + \mu [(2c_i + c_{i+1} + c_{i-1}) - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})] \sup_{i \in IR} |u_i^n| \quad (3.44)$$

On en déduit

$$\sup_{i \in IR} |u_i^{n+1}| \leq N \sup_{i \in IR} |u_i^n| + \sup_{i \in IR} |u_i^{n-1}|$$

alors on a l'inégalité

$$\sup_{i \in IR} |u_i^n| \leq \sup_{i \in IR} |u_0(x)|.$$

supposons maintenant $u_0 \geq 0$ et raisonnons par récurrence sur n , supposons que $u_i^n \geq 0$ pour tout $i \in Z$. l'égalité

ou $n = 0$ alors

$$u_i^1 = (2+k^2)u_i^0 - u_i^{-1} + \mu \left[(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^0 - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^0 + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^0 \right]$$

et $n = n + 1$ alors

$$u_i^{n+2} = (2+k^2)u_i^{n+1} - u_i^{n+1} + \mu \left[(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^{n+1} - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^{n+1} + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^{n+1} \right]$$

et l'hypothèse (3.42) impliquent $u_i^{n+1} \geq 0$. On suppose que la solution u du problème est de classe C^1 et que la condition CFL (3.42) est satisfait. Alors, il existe une constante c , indépendante de h et de λ telle que

$$\sup_{i \in Z, 0 \leq n \leq N} |u(x_i, t^n) - u_i^n| \leq c_i \frac{k^2}{2h^2}$$

alors notons $e_i^n = u(x_i, t^n) - u_i^n$ pour $i \in Z, n \in N$. on a en utilisant la définition de l'erreur de troncature : on a

$$\frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_i^n}{k^2} - \frac{(c_i + c_{i+1})u_{i+1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u_i^n + (c_i + c_{i-1})u_{i-1}^n}{h^2} - u_i^n \quad (3.45)$$

et

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) + u(x_i, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_n)}{k^2} - \frac{(c_i + c_{i+1})u(x_{i+1}, t_n) + (c_i + c_{i-1})u(x_{i-1}, t_n) - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})u(x_i, t_n)}{h^2} \quad (3.46)$$

donc

$$\frac{e_i^{n+1} + e_i^{n-1} - 2e_i^n}{k^2} - \frac{(c_i + c_{i+1})e_{i+1}^n + (c_i + c_{i-1})e_{i-1}^n - (2c_i + c_{i+1} + c_{i-1})e_i^n}{h^2} - e_i^n = \varepsilon_i^{n+1} \quad (3.47)$$

3.2 Méthodes numérique en commande optimale

Dans cette section, on s'intéresse à deux types de méthodes numériques en commande optimale d'abord aux méthodes indirectes puis aux méthodes directes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le commande, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par un méthode de tir un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

3.3 Méthodes indirectes

3.3.1 Méthode de tir simple

Considérons le problème de commande optimale

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.48)$$

Supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable à partir de la condition de maximum, d'exprimer la commande extrémal en fonction de $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), t),$$

où $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $\mathbf{R}(\mathbf{z}(0), \mathbf{z}(t_f)) = \mathbf{0}$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), t), \\ \mathbf{R}(\mathbf{z}(0), \mathbf{z}(t_f)) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Notons $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{z}(t)), \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0,$$

et posons

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{R}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}(t_f, \mathbf{z}_0)).$$

Le problème (3.49) aux valeurs limites est alors équivalent à $\mathbf{G}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$,

i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction \mathbf{G} . Ceci peut se résoudre par la méthode de Newton.

Remarque 3.1 *Si le temps final t_f est libre, on peut utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.*

3.3.2 Méthode de tir multiple

La méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, t_f]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $\mathbf{z}(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Considérons un problème de commande optimale général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t), t) = \begin{cases} \mathbf{F}_0(\mathbf{z}(t), t) & \text{Si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{z}(t), t) & \text{Si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots & \\ \mathbf{F}_s(\mathbf{z}(t), t) & \text{Si } t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (3.50)$$

où $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{IR}^{2n}$ ($\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$ peuvent être des temps de commutation ; dans le cas où le problème inclut des contraintes sur l'état. De plus on a des conditions aux limites sur l'état, le vecteur adjoint (conditions de transversalité), et sur le Hamiltonien si le temps final est libre.

Remarque 3.2 *A priori le temps final t_f est inconnu. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé ; on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.*

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N sous intervalles, la valeur de $\mathbf{z}(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus précisément, soit $t_0 < \delta_1 < \dots < \delta_k < t_f$ une subdivision fixée de l'intervalle $[t_0, t_f]$. En tout point δ_j la fonction \mathbf{z} est continue. On peut considérer δ_j comme un point de commutation fixe, en lequel on a

$$\begin{cases} \mathbf{z}(\delta_j^+) = \mathbf{z}(\delta_j^-), \\ \delta_j = \delta_j^* \text{ fixé.} \end{cases}$$

On définit maintenant les noeuds

$$\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\delta_1, \dots, \delta_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}. \quad (3.51)$$

Finalement on est conduit au problème aux valeurs limites

$$\dot{Z}(t) = F(Z(t), t) = \begin{cases} F_0(z(t), t) & \text{Si } \tau_0 \leq t \leq \tau_1 \\ F_1(z(t), t) & \text{Si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ \vdots & \\ F_{m-1}(z(t), t) & \text{Si } \tau_{m-1} \leq t \leq \tau_m \end{cases} \quad (3.52)$$

$$-\forall j \in \{2, \dots, m-1\} \quad r_j(\tau_j, Z(\tau_j^-), Z(\tau_j^+)) = 0$$

$$-r_m(\tau_m, Z(\tau_1), z(\tau_m)) = 0$$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Remarque 3.3 *On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de noeuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale. Bien dans la méthode de tir multiple il y a beaucoup plus d'inconnues que dans la méthode de tir simple. Posons $z_j^+ = z(\tau_j^-)$, et soit $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ la solution du problème de Cauchy*

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+$$

On a

$$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\forall j \in \{2, \dots, m-1\} \quad r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) = 0, \quad (3.53)$$

$$r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) = 0$$

Posons maintenant

$$Z = (z_1^+, \tau_m, z_2^+, \tau_2, \dots, z_{m-1}^+, \tau_{m-1})^T \in \mathbf{IR}^{(2n+1)(m-1)}$$

(où $z \in \mathbf{IR}^{2n}$). Alors les conditions (3.53) sont vérifiées si

$$G(Z) = \begin{pmatrix} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2^-, \tau_1, z_1^+), z_2^+) \\ r_{m-1}(\tau_m, z(\tau_{m-1}^-, \tau_{m-2}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.54)$$

L'équation $G = 0$ peut alors être résolue itérativement par une méthode de type Newton (voir la section

suivante).

3.4 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de commande optimale en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

3.4.1 Discrétisation totale

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de commande optimale. En discrétisant l'état et le commande, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

$$\min_{Z \in CF(Z)}, \quad (3.55)$$

où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$, et

$$\begin{aligned} C = \{Z | g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r, \\ g_j(Z) \leq 0, j \in r + 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les commandes dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$. Réduisons l'espace des commandes en considérant (par exemple) des commandes constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire :

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N - 1$$

$$\min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N),$$

$$u_i \in U, i = 0, \dots, N - 1$$

Remarque 3.4 *Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.*

3.5 Application numérique : Résolution d'un problème de commande optimale à entrée libre

3.5.1 Position du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } \mathbf{u} \in U_{ad} \text{ tel que,} \\ J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in U_{ad}; \end{cases}$$

où

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} ((x - x_d)^2 + k u^2) dt \quad (3.57)$$

\mathbf{x}_d correspond à un état désiré, \mathbf{u} est la commande et k sert à doser deux critères distincts à minimiser, un critère de précision et un autre de minimisation d'énergie et U_{ad} est l'ensemble des commandes admissibles. sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u, \\ x_0 = z \in X_0 = z \in \mathbb{R}^2 : Gz = \gamma, -2 \leq z \leq 2, \\ k^* x(t_f) = g, \end{cases}$$

avec

$$G = (1.2), \quad \gamma = 3, \quad k^* = (1, 0), \quad g = 2, \quad t_f = 2, \quad a > 0, b > 0.$$

On peut formuler le problème d'une autre manière

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u, \\ x_1(0) = z_1, x_2(0) = z_2 \text{ tel que } z_1 + 2z_2 = 3, \quad -2 \leq z_1 \leq 2, -2 \leq z_2 \leq 2, \\ x(t_f) = 2, \end{cases} \quad (3.58)$$

La forme matricielle du système d'état s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

3.5 Application numérique : Résolution d'un problème de commande optimale à entrée libre

avec

$$J(u) = \frac{1}{2} \left[(x_1 - x_{1d}, x_2 - x_{2d}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1d} \\ x_2 - x_{2d} \end{pmatrix} + ku^2 \right] dt$$

Déterminons le Lagrangien en fonction du Hamiltonien

$$L = \frac{1}{2} [((x_1 - x_{1d})^2 + (x_2 - x_{2d})^2 + ku^2) + \lambda_1(-bx_1 + ax_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(ax_1 - bx_2 + u - \dot{x}_2)] \quad (3.59)$$

où

$$H = \frac{1}{2} [((x_1 - x_{1d})^2 + (x_2 - x_{2d})^2 + ku^2) + \lambda_1(-bx_1 + ax_2) + \lambda_2(ax_1 - bx_2 + u)] \quad (3.60)$$

En substituant la relation(3.60) dans(3.59) donc en obtient

$$L = H - \lambda_1 \dot{x}_1 - \lambda_2 \dot{x}_2 \quad (3.61)$$

Alors,le système d'équation d'Euler Lagrange par rapport vecteur co-état est

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

De (3.62) on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - (x_1 - x_{1d}) \\ \dot{\lambda}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - (x_2 - x_{2d}) \end{cases} \quad (3.63)$$

Maintenant donnons le système par rapport a létat

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_2} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

de (3.64) on a

$$\begin{cases} -bx_1 + ax_2 - \dot{x}_1 = 0 \\ ax_1 - bx_2 + u - \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u \end{cases} \quad (3.65)$$

pour la commande on a

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Alors

$$\begin{cases} ku - \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont données par :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - (x_1 - x_{1d}) & \lambda_1(0) = a_1, \lambda_1(t_f) = a_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - (x_2 - x_{2d}) & \lambda_2(0) = a_3, \lambda_2(t_f) = a_4 \\ ku - \lambda_2 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.68)$$

où $a_i, i = \overline{1, 4}$ seront précisées ci-dessous.

On rajouté au système précédent les conditions de transversalité : $\exists(k_0, k_1) \neq \mathbf{0}$ tel que :

$$\varphi(0, z, t_f, x(t_f), k_0, k_1) = (\varphi_0(0, z/k_0) + (\varphi_1(t_f, x(t_f)/k_1)),$$

Avec

$$\varphi(0, z) = G - \gamma \quad \varphi_1(t_f, x(t_f)) = k^* x(t_f) - g, \quad (3.69)$$

$$\varphi(0, z, t_f, x(t_f), k_0, k_1) = (G - \gamma/k_0) + (k^* x(t_f) - g/k_1) \quad (3.70)$$

$$\begin{cases} \lambda(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, z, t_f, x(t_f), k_0, k_1) = G' k_0 \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}(0, z, t_f, x(t_f), k_0, k_1) = -k'^* k_1 \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\begin{cases} (\lambda_1(0), \lambda_2(0)) = (1, 2)k_0 = (k_0, 2k_0), \\ (\lambda_1(t_f), \lambda_2(t_f)) = -(1, 0)k_1 = (-k_1, 0), \end{cases}$$

Les coefficients $a_i, i = 1, 2, 3, 4$, dépendent des paramètres k_0, k_1 , qui seront calculés en utilisant la méthode du tir. Cette méthode consiste à résoudre le système suivant en utilisant les conditions aux limites.

Les équations d'Hamilton-Pontryaguin s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u \\ x(0) = x_0 \\ \dot{\lambda}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - (x_1 - x_{1d}) \quad \lambda_1(0) = k_0, \lambda_1(t_f) = -k_1 \\ \dot{\lambda}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - (x_2 - x_{2d}) \quad \lambda_2(0) = 2k_0, \lambda_2(t_f) = 0 \\ ku - \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ 0 \\ \lambda_1(0) \\ \lambda_1(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ u \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -x_{1d} \\ -x_{2d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le système précédent, notons que $\lambda_1(t_f), \lambda_1(0), k_0, k_1$ sont des inconnues dans les relations suivantes $\lambda_1(t_f) = -k_1, \lambda_1(0) = k_0, \lambda_2(0) = 2k_0$. Pour déterminer la solution du problème de commande optimale à entrée libre, on considère la méthode de tir qui permet de déterminer $\lambda(0)$ tel que la condition sur l'état final $x_1(t_f) = 2$ soit satisfaite, et de déterminer $\lambda(t_f)$ tel que la condition sur l'état initial $x_1(0) + 2x_2(0) = 3$ soit satisfaite.

Ainsi, on aura un problème aux deux bouts qu'on peut formuler de cette manière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u \\ x(0) = x_0 \\ \dot{\lambda}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - (x_1 - x_{1d}) \quad \lambda_1(0), \lambda_1(t_f) \\ \dot{\lambda}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - (x_2 - x_{2d}) \quad \lambda_2(0), \lambda_2(t_f) \\ k_0 = \lambda_1(0) \\ k_1 = -\lambda_1(t_f) \\ u = -\frac{\lambda_2(t)}{k} \end{array} \right.$$

Une méthode itérative permet, le problème de point fixe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -bx_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - bx_2 + u \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 1 \\ \dot{\lambda}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - (x_1 - x_{1d}) \quad \lambda_1(0) = k_0, \lambda_1(t_f) = -k_1 \\ \dot{\lambda}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - (x_2 - x_{2d}) \quad \lambda_2(0) = 2k_0, \lambda_2(t_f) = 0 \\ u = -\frac{\lambda_2(t)}{k} \end{array} \right.$$

3.5.2 La solution exacte

On utilise la méthode de dérivation au niveau des équations. On obtient :

$$\dot{\lambda}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - x_1 + x_{1d}, \quad (3.72)$$

$$\ddot{\lambda}_1 = b\dot{\lambda}_1 - a\dot{\lambda}_2 - \dot{x}_1, \quad (3.73)$$

$$\ddot{\lambda}_1 = b(b\lambda_1 - a\lambda_2 - x_1 + x_{1d}) - a(-a\lambda_1 + b\lambda_2 - x_2 + x_{2d}) - (-bx_1 + ax_2), \quad (3.74)$$

$$\ddot{\lambda}_1 = b^2\lambda_1 - ab\lambda_2 - bx_1 + bx_{1d} + a_2\lambda_1 - ab\lambda_2 + ax_2 - ax_{2d} + bx_1 - ax_2, \quad (3.75)$$

$$\ddot{\lambda}_1 = (a^2 + b^2)\lambda_1 - 2ab\lambda_2 + bx_{1d} - ax_{2d}, \quad (3.76)$$

d'où

$$\ddot{\lambda}_1 = (a^2 + b^2)\lambda_1 - 2ab\lambda_2 + bx_{1d} - ax_{2d},$$

De la même manière :

$$\ddot{\lambda}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - x_2 + x_{2d}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -a\dot{\lambda}_1 + b\dot{\lambda}_2 - \dot{x}_2,$$

$$\ddot{\lambda}_2 = -a(b\lambda_1 - a\lambda_2 - x_1 + x_{1d}) + b(-a\lambda_1 + b\lambda_2 - x_2 + x_{2d}) - (ax_1 - bx_2 - \frac{\lambda_2}{k}), \quad (3.77)$$

$$\ddot{\lambda}_2 = -ab\lambda_1 + a^2\lambda_2 + ax_1 - ax_{1d} - ab\lambda_1 + b^2\lambda_2 + bx_{2d} - ax_1 + bx_2 - ax_1 + bx_2 + \frac{\lambda_2}{k}, \quad (3.78)$$

$$\ddot{\lambda}_2 = -2ab\lambda_1 + (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\lambda_2 - ax_{1d} + bx_{2d}, \quad (3.79)$$

d'où

$$\ddot{\lambda}_2 = (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\lambda_2 - ab\lambda_1 - ax_{1d} + bx_{2d}, \quad (3.80)$$

Dérivons deux fois l'équation (3.80), on obtient :

$$\lambda_1^{(4)} = (a^2 + b^2)\ddot{\lambda}_1 - 2ab\ddot{\lambda}_1, \quad (3.81)$$

$$\lambda_1^{(4)} = (a^2 + b^2)\ddot{\lambda}_1 - 2ab(-2ab\lambda_1 + (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\lambda_2 - ax_{1d} + bx_{2d}) \quad (3.82)$$

$$\lambda_1^{(4)} = (a^2 + b^2)\ddot{\lambda}_1 + 4a^2b^2\lambda_1 - 2ab(a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\lambda_2 + 2a^2bx_{1d} - 2ab^2x_{2d}; \quad (3.83)$$

d'où

$$\lambda_1^{(4)} = (a^2 + b^2)\ddot{\lambda}_1 + 4a^2b^2\lambda_1 - 2ab(a^2 + b^2 + \frac{1}{k}) + 2a^2bx_{1d} - 2ab^2x_{2d}, \quad (3.84)$$

(3.84) entraîne :

$$2ab\lambda_2 = (a^2 + b^2)\lambda_1 - \ddot{\lambda}_1 + bx_{1d} - ax_{2d}, \quad (3.85)$$

En injectant (3.85) dans (3.84), on obtient :

$$\lambda_1^{(4)} = (a^2 + b^2)\ddot{\lambda}_1 + 4a^2b^2\lambda_1 - (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})((a^2 + b^2)\lambda_1 - \dot{\lambda}_1 + bx_{1d} - ax_{2d}) + 2a^2bx_{1d} - 2ab^2x_{2d},$$

$$\lambda_1^{(4)} = (a^2 + b^2)\ddot{\lambda}_1 + 4a^2b^2\lambda_1 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{k}(a^2 + b^2))\lambda_1 + (a^2 + b^2 + \frac{1}{k})\dot{\lambda}_1 - b(a^2 + b^2 + \frac{1}{k})x_{2d} + 2a^2bx_{1d} - 2ab^2x_{2d},$$

$$\lambda_1^{(4)} = (2a^2 + 2b^2 + \frac{1}{k})\ddot{\lambda}_1 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{a^2 + b^2}{k} - 4a^2b^2)\lambda_1 + (-b^3 - \frac{b}{k} + a^2b)x_{1d} + (a^3 - ab^2 + \frac{a}{k})x_{2d},$$

d'où

$$\lambda_1^{(4)} - (2a^2 + 2b^2 + \frac{1}{k})\ddot{\lambda}_1 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{a^2 + b^2}{k} - 4a^2b^2)\lambda_1 = (-b^3 - \frac{b}{k} + a^2b)x_{1d} + (a^3 - ab^2 + \frac{a}{k})x_{2d}, \quad (3.86)$$

L'équation caractéristique correspondante à l'équation (3.86) s'écrit :

$$C^{(4)} - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{2k})C^2 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{a^2 + b^2}{k} - 4a^2b^2) = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{4k^2} + 4a^2b^2$$

Les racines de l'équation caractéristique sont données par :

$$C_1^2 = (a^2 + b^2 + \frac{1}{2k}) - \sqrt{\frac{1}{2k} + 4a^2b^2} \quad (3.87)$$

$$C_1^2 = (a^2 + b^2 + \frac{1}{2k}) + \sqrt{\frac{1}{2k} + 4a^2b^2}$$

D'où

$$\lambda_1(t) = \eta e^{C_1 t} + \beta e^{-C_1 t} + \mu e^{C_2 t} + \alpha e^{-C_2 t} + \nu. \quad (3.88)$$

Détermination de ν , on a :

$$\dot{\lambda}_1(t) = \eta C_1 e^{C_1 t} - \beta C_1 e^{-C_1 t} + \mu C_2 e^{C_2 t} - \alpha C_2 e^{-C_2 t},$$

$$\ddot{\lambda}_1(t) = \eta C_1^2 e^{C_1 t} + \beta C_1^2 e^{-C_1 t} + \mu C_2^2 e^{C_2 t} + \alpha C_2^2 e^{-C_2 t}.$$

$$\lambda_1^{(3)}(t) = \eta C_1^3 e^{C_1 t} - \beta C_1^3 e^{-C_1 t} + \mu C_2^3 e^{C_2 t} - \alpha C_2^3 e^{-C_2 t}.$$

$$\lambda_1^{(4)}(t) = \eta C_1^4 e^{C_1 t} + \beta C_1^4 e^{-C_1 t} + \mu C_2^4 e^{C_2 t} + \alpha C_2^4 e^{-C_2 t}.$$

On remplace dans (3.88), et on obtient :

$$\begin{aligned} & \eta [C_1^4 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{k}(a^2 + b^2) - 4a^2b^2) - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{2k})C_1^2] e^{C_1 t} \\ & + \beta [C_1^4 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{k}(a^2 + b^2) - 4a^2b^2) - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{2k})C_1^2] e^{-C_1 t} \\ & + \mu [C_2^4 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{k}(a^2 + b^2) - 4a^2b^2) - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{2k})C_2^2] e^{C_2 t} \\ & + \alpha [C_2^4 - ((a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{k}(a^2 + b^2) - 4a^2b^2) - 2(a^2 + b^2 + \frac{1}{2k})C_2^2] e^{-C_2 t} \\ & + ((a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{k}(a^2 + b^2) - 4a^2b^2)\nu = (-b^3 - \frac{b}{k} + a^2b)x_{1d} + (a^3 - ab^2 + \frac{a}{k})x_{2d} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\nu = \frac{-b^3 - \frac{b}{k} + a^2b)x_{1d} + (a^3 - ab^2 + \frac{a}{k})x_{2d}}{((a^2 + b^2)^2 + \frac{a^2+b^2}{k} - 4a^2b^2)} \quad (3.89)$$

On en déduit aisément $\lambda_2(t)$:

De (3.85), on obtient :

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{2ab} \left[(a^2 + b^2)\lambda_1 - \ddot{\lambda}_1 + bx_{1d} - ax_{2d} \right]$$

$$\lambda_2(t) = \frac{a^2 + b^2}{2ab} [\eta e^{C_1 t} + \beta e^{-C_1 t} + \mu e^{C_2 t} + \alpha e^{-C_1 t} + \nu] - \frac{1}{2ab} [\eta C_1^2 e^{C_1 t} + \beta C_1^2 e^{-C_2 t} + \mu C_2^2 e^{C_2 t} + \alpha C_2^2 e^{-C_1 t}] + \frac{1}{2a} x_{1d} - \frac{1}{2b} x_{2d} \quad (3.90)$$

De même comptenu des équations :

$$\dot{x}_1 = b\lambda_1 - a\lambda_2 - \dot{\lambda}_1 + x_{1d},$$

$$\dot{x}_2 = -a\lambda_1 + b\lambda_2 - \dot{\lambda}_2 + x_{2d},$$

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} x_1(t) = & b[\eta e^{C_1 t} + \beta e^{-C_1 t} + \mu e^{C_2 t} + \alpha e^{-C_1 t} + \nu] + \alpha[\eta(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab})e^{-C_1 t} + \\ & + \mu(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab})e^{C_2 t} + \alpha(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab})e^{-C_2 t} + \frac{a^2 + b^2}{2ab}\nu + \frac{1}{2a}x_{1d} - \frac{1}{2b}x_{2d} \\ & - [\eta C_1 e^{C_1 t} - \beta C_1 e^{-C_1 t} + \mu C_2 e^{C_2 t} - \alpha C_2 e^{-C_2 t}] + x_{1d}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \eta[\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} - C_1]e^{C_1 t} + \beta[\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} + C_1]e^{-C_1 t} + \mu[\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} - C_2]e^{C_2 t} + \alpha[\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} + C_2]e^{-C_2 t} \\ & + \frac{a^2 + b^2}{2ab}\nu + \frac{1}{2}x_{1d} - \frac{a}{2b}x_{2d}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & b[\eta(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab})e^{C_1 t} + \beta(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab})e^{-C_1 t} + \mu(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab})e^{C_2 t} + \alpha(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab})e^{-C_2 t} \\ & + \frac{a^2 + b^2}{2ab}\nu + \frac{1}{2a}x_{1d} - \frac{1}{2d}] - [\eta C_1(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab})e^{C_1 t} - \beta C_1(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab})e^{-C_1 t} \\ & + \mu C_2(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab})e^{C_2 t} - \alpha C_2(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab})e^{-C_2 t}] + x_{2d} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \eta[\frac{b^2 - a^2 - C_1^2}{2a} - C_1(\frac{b^2 + a^2 - C_1^2}{2ab})]e^{C_1 t} + \beta[\frac{b^2 - a^2 - C_1^2}{2a} + C_1(\frac{b^2 + a^2 - C_1^2}{2ab})]e^{-C_1 t} \\ & + \mu[\frac{b^2 - a^2 - C_2^2}{2a} - C_2(\frac{b^2 + a^2 - C_2^2}{2ab})]e^{C_2 t} + \alpha[\frac{b^2 - a^2 - C_2^2}{2a} + C_2(\frac{b^2 + a^2 - C_2^2}{2ab})]e^{-C_2 t} \\ & + \frac{a^2 - b^2}{2a}\nu + \frac{b}{2a}x_{1d} + \frac{1}{2}x_{2d}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Les constantes étant déterminées par les conditions aux limites suivantes :

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1,$$

3.5 Application numérique : Résolution d'un problème de commande optimale à entrée libre

$$\lambda_1(0) = k_0, x_1(t_f) = 2,$$

$$\lambda_1(t_f) = -k_1, \lambda_2(t_f) = 0,$$

On résoud le système linéaire numériquement :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \eta + \beta + \mu + \alpha, \\ -k_1 = \eta e^{C_1 t_f} + \beta e^{-C_1 t_f} + \mu e^{C_2 t_f} + \alpha e^{-C_2 t_f} + \nu, \\ 0 = \eta \left(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab} \right) e^{C_1 t_f} + \beta \left(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab} \right) e^{-C_1 t_f} + \mu \left(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab} \right) e^{C_2 t_f} + \alpha \left(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab} \right) e^{-C_2 t_f} \\ + \frac{a^2 + b^2}{2ab} \nu + \frac{1}{2a} x_{1d} - \frac{1}{2b} x_{2d} \\ 1 = \eta \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} - C_1 \right) + \beta \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} + C_1 \right) + \mu \left(\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} - C_2 \right) + \alpha \left(\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} + C_2 \right) \\ + \frac{b^2 - a^2}{2ab} \nu + \frac{1}{2} x_{1d} + \frac{a}{2b} x_{2d} \\ 1 = \eta \left[\frac{b^2 - a^2 - C_1^2}{2a} - C_1 \left(\frac{b^2 + a^2 - C_1^2}{2ab} \right) \right] + \beta \left[\frac{b^2 - a^2 - C_1^2}{2a} + C_1 \left(\frac{b^2 + a^2 - C_1^2}{2ab} \right) \right] + \mu \left[\frac{b^2 - a^2 - C_2^2}{2a} - C_2 \right] \\ + \alpha \left[\frac{b^2 - a^2 - C_2^2}{2a} + C_2 \left(\frac{b^2 + a^2 - C_2^2}{2ab} \right) \right] + \frac{a^2 - b^2}{2a} \nu + \frac{b}{2a} x_{1d} + \frac{1}{2} x_{2d} \\ 2 = \eta \left[\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} - C_1 \right] e^{C_1 t_f} + \beta \left[\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} + C_1 \right] e^{-C_1 t_f} + \mu \left[\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} - C_2 \right] e^{C_2 t_f} + \alpha \left[\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} + C_2 \right] e^{-C_2 t_f} \\ + \frac{a^2 + b^2}{2ab} \nu + \frac{1}{2} x_{1d} - \frac{a}{2b} x_{2d}. \end{array} \right.$$

Soit encore sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 e^{C_1 t_f} & e^{-C_1 t_f} & e^{C_2 t_f} & e^{-C_2 t_f} & 0 & 1 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 \\
 a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \eta \\
 \beta \\
 \mu \\
 \alpha \\
 k_0 \\
 k_1
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -\nu \\
 -\nu \\
 -\frac{(a^2 + b^2)}{2ab}\nu - \frac{1}{2a}x_{1d} + \frac{1}{2b}x_{2d} \\
 1 - \frac{(b^2 - a^2)}{2b}\nu - \frac{1}{2}x_{1d} - \frac{a}{2b}x_{2d} \\
 1 - \frac{(a^2 + b^2)}{2a}\nu - \frac{b}{2a}x_{1d} - \frac{1}{2}x_{2d} \\
 2 - \frac{(b^2 - a^2)}{2b}\nu - \frac{1}{2}x_{1d} - \frac{a}{2b}x_{2d}
 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= \left(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab}\right)e^{C_1 t_f}, & a_{32} &= \left(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab}\right)e^{-C_1 t_f} \\
 a_{33} &= \left(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab}\right)e^{C_2 t_f}, & a_{34} &= \left(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab}\right)e^{-C_2 t_f} \\
 a_{41} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b}\right) - C_1, & a_{42} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b}\right) + C_1 \\
 a_{43} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b}\right) - C_2, & a_{44} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b}\right) + C_2 \\
 a_{51} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2a}\right) - C_1 \left(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab}\right), \\
 a_{52} &= \left(\frac{b^2 - a^2 - C_1^2}{2b}\right) + C_1 \left(\frac{a^2 + b^2 - C_1^2}{2ab}\right) \\
 a_{53} &= \left(\frac{b^2 - a^2 - C_2^2}{2a}\right) - C_2 \left(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab}\right), \\
 a_{54} &= \left(\frac{b^2 - a^2 - C_2^2}{2a}\right) + C_2 \left(\frac{a^2 + b^2 - C_2^2}{2ab}\right) \\
 a_{61} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} - C_1\right)e^{C_1 t_f}, \\
 a_{62} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_1^2}{2b} + C_1\right)e^{-C_1 t_f}, \\
 a_{63} &= \left(\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} - C_2\right)e^{C_2 t_f},
 \end{aligned}$$

$$a_{63} = \left(\frac{b^2 - a^2 + C_2^2}{2b} + C_2 \right) e^{-C_2 t_f},$$

Algorithme de relaxation associé

- Approximation initiale de la commande : $u^{(0)}(t), t \in [t_0, t_f]$ donnée
- détermination de l'état $x^{(r+1)}(t)$ par intégration numérique de l'équation d'état

$$\begin{cases} \frac{dx_1^{(r+1)}(t)}{dt} = -bx_1^{(r+1)}(t) + ax_2^{(r+1)}(t) \\ \frac{dx_2^{(r+1)}(t)}{dt} = ax_1^{(r+1)}(t) - bx_2^{(r+1)}(t) + u^{(r)}(t) \\ x_1^{(r+1)}(t)(0) = 1, x_2^{(r+1)}(t)(0) = 1 \end{cases}$$

- détermination de l'état adjoint $\lambda^{(r+1)}(t)$ par intégration numérique dans le sens rétrograde de l'équation d'état adjoint

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1^{(r+1)}(t)}{dt} = b\lambda_1^{(r+1)}(t) - a\lambda_2^{(r+1)}(t) - (x_1 - x_{1d}) & \lambda_1^{(r+1)}(t)(0) = k_0, \lambda_1^{(r+1)}(t)(t_f) = -k_1 \\ \frac{d\lambda_2^{(r+1)}(t)}{dt} = -a\lambda_1^{(r+1)}(t) + b\lambda_2^{(r+1)}(t) - (x_2 - x_{2d}) & \lambda_2^{(r+1)}(t)(0) = 2k_0, \lambda_2^{(r+1)}(t)(t_f) = 0 \end{cases}$$

- détermination de la commande :

$$u^{(r+1)}(t) = -\frac{\lambda_2^{(r+1)}(t)}{k}$$

Résolution numérique

Pour la résolution numérique, nous allons simuler la méthode de relaxation qui utilise la méthode numérique de Runge Kutta pour l'intégration du système différentiel. Nous allons déterminer les multiplicateurs de Lagrange k_0 et k_1 en utilisant la méthode de tir.

Remarque 3.5 Telle que $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$, et $\frac{d\lambda_i}{dt} = \dot{\lambda}_i$

3.5.3 Méthode de tir Newton Raphson

Parfois, la condition de stationnarité $L_u = 0$ d'un problème optimal peut être résolue pour obtenir une expression explicite de u en termes de l'état x et du co-état λ . Ainsi les équations d'état devient dépendante de λ et devient être intégrées simultanément aux équations de co-état.

L'intégration simultanée constitue un problème aux limites dans lequel

1. l'état est spécifié à la première frontière, c'est-à-dire, i.e au moment initial,
2. le co-état est spécifié à la deuxième limite, c'est-à-dire, i.e au moment final,
3. les équations d'état et de co-état dépendent des variables d'état et de co-état.

La méthode de tir Newton Raphson permet de résoudre ce problème avec un choix du co-état initial, les équations d'état et de co-état sont intégrées vers l'avant "tirées" jusqu'au temps final.

L'ecart entre le co-état final obtenue de cette manière et celle spécifiée est améliorée par la méthode de Newton-Raphson.

3.5 Application numérique : Résolution d'un problème de commande optimale à entrée libre

Nous expliquons la méthode de tir Newton Raphson à l'aide d'un problème de commande optimale ayant un état, une commande et un temps final fixe. L'objectif du problème est de trouver la fonction de commande $u(t)$ qui minimise la fonctionnelle

$$I = \int_0^{t_f} F[x(t), u(t), t] dt$$

avec

$$\dot{x} = g[x(t), u(t), t], \quad x(0) = x_0.$$

On a

$$L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda) = H(x(t), u(t), \lambda) - \lambda \dot{x}.$$

Les conditions nécessaires d'optimalité pour le minimum sont

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0, \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 \Rightarrow g - \dot{x} = 0, \quad \lambda(t_f) = 0,$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Supposons qu'il soit possible de résoudre $\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u} = 0$ et d'obtenir une expression explicite de $u = u(x, \lambda)$. En utilisant cette expression, les équations d'état et de co-état pour le minimum se transforment en problème aux limites en deux points

$$\dot{x} = g(x, u(x, \lambda), t) = g(x, \lambda), \quad x(0) = x_0$$

$$\dot{\lambda} = -H_x(x, u(x, \lambda), t) - g_x(x, u(x, \lambda), t) = h(x, \lambda), \quad \lambda(t_f) = \lambda_f$$

Application de la méthode de tir Newton Raphson

Considérons le co-état final obtenu par l'intégration simultanée des équations ci-dessus avec $\lambda(0)$ considéré comme λ_0 , i.e., $\lambda(\lambda_0, t_f)$. Sa différence par rapport au co-état est la fonction d'écart

$$f(\lambda_0) \equiv \lambda(\lambda_0, t_f) - \lambda_f \tag{3.93}$$

qui peut être réduite à zéro en améliorant itérativement λ_0 à l'aide de la méthode de Newton Raphson.

Ainsi, la valeur améliorée $\lambda_{0, \text{suivant}}$ est donnée par

$$\lambda_{0, \text{suivant}} = \lambda_0 - \frac{f(\lambda_0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \bigg|_{t_f}}$$

ou d'après l'équation (3.93) la dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_{0 t_f}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{0 t_f}}$$

Notons que la dérivée ci-dessus la valeur temporelle finale de la variable dépendante du temps.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{0 t_f}}(t)$$

Nous allons maintenant trouver les équations régissant cette variable $\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{0 t_f}}(t)$. En différenciant les équations d'état et de co-état par rapport à λ_0 , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \lambda_0} \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \lambda_0}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0}$$

où

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_0}(0) = 0 \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0}(0) = 1$$

Les deux dernière équations résultent de la différenciant par rapport aux conditions initiales des équations d'état et de co-état, qui sont respectivement :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \lambda(0) = \lambda$$

Suite au développement ci-dessus, l'algorithme de calcul pour la méthode de tir de Newton Raphson est le suivant.

Algorithme de calcul

Pour déterminer u au minimum,

- 1-Choisir le co-état initial, λ_0 .
- 2-Intégrer simultanément au temps final les équations différentielle pour l'état, co-état, $\partial x / \partial \lambda_0$ et $\partial \lambda / \partial \lambda_0$ en utilisant les conditions initiales respectivement.
- 3-Utiliser $\partial \lambda / \partial \lambda_0$ ainsi obtenu au moment final pour améliorer λ_0 en utilisant la méthode de Newton Raphson.
- 3-Passez à l'étape 2 jusqu'à ce que l'amélioration soit négligeable. Lorsque cela se produit, l'état et la commande sont optimaux.

Conclusion

On a déterminé l'équation d'Euler-Lagrange du problème fondamental de calcul des variations, de plus nous avons déterminés les conditions nécessaires d'optimalités du problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations. La méthode des différences finies utilisée ainsi que la méthode de tir Newton-Raphson sont utilisés pour la résolution numérique du problème de calcul des variation respectivement le problème de commande optimale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Codounov.S, V.Riabnki, schéma aux différences,office des publication universitaires.
- [2] Eric Goncalvés, méthode,analyse et calculs numériques, institut polytechnique de Grenoble, Septembre 2005.
- [3] H.Batatia,C.Tauber,P.Speteri,Iterative methode for anisotropic diffusion of speekle medical images. Applied numerical mathematics ;60 :1115-1130, 2010.
- [4] JAIN.M.K :numircale Solution of Différential Equation, Indian Institue of Technology, Delhi, 1979.
- [5] Jean.Paul,Formes différentielles, Intégrales Curvilignes, 28 février 2012.
- [6] Laurances ; C.Evaus, Partial Différential Equation, American Mathematical society Providences, Rholde Istaud, 2002.
- [7] Leitman.G, the calculus of variations optimal contral,Plemum Press, 1981.
- [8] Moise Sibony, Jean-claude Mardon : analyse numérique 2, Approximation et équations différentielle, Hermann, Éditeurs des sciences et des arts.
- [9] Peirre Spiteri, méthode des différences finis pour les **EDP_s** d'évolution.
- [10] Richard Epenoy. Contrôle optimale - Application à la mécanique spatiale.
- [11] Upreti, Simant Ranjan , Optimal Control for Chemical Engineers,ISBN 978-1-4398-3894-5 by Taylor et Francis Group, LLC,2013.
- [12] Jean-Pierre Denailly. Analyse numérique et équations différentielles. EDP Sciences. 2006.