REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 20 AOÛT 1955 – SKIKDA

FACULTE DE TECHNLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

Code N° : D012116004D

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Electronique

Option : Traitement du signal

Par

LEULMI Fouzia

THEME

Synthèse des Filtres Fractionnaires Numériques: Algorithmes et Applications

Devant le Jury:

Président :	A. GOUTAS	Maître de Conférences A, Université de Skikda
Rapporteur :	Y. FERDI	Professeur, École Nationale Supérieure de Technologie Constantine
Examinateurs :	S. LADACI	Professeur , École Nationale Polytechnique Constantine
	A. BELMEGUENAI	Maître de Conférences A , Université de Skikda

Année : 2015

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes celles et ceux qui m'ont apporté leur soutien et leur expérience tout au long de ce travail.

Je veux tout d'abord remercier vivement Monsieur Youcef Ferdi, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Biotechnologie Constantine pour son encadrement, son soutien avec patience et ses conseils qu'il m'a donnés lors de la réalisation de ce manuscrit. Ses critiques constructives m'ont été particulièrement précieuses dans l'élaboration finale de cette thèse.

De même, je remercie Monsieur Ahcène Goutas, maître de conférences A à l'Université de Skikda, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury de ma thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Samir Ladaci professeur à l'école nationale polytechnique de Constantine et Monsieur Aissa Belmeguenai, maître de conférences A à l'Université de Skikda, pour l'attention qu'ils ont accordée à la lecture de cette thèse et pour avoir bien voulu en êtres les examinateurs.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance à toute ma famille pour leur soutien et leur affection.

À la mémoire de mon cher père

À ma chère mère

À toute ma famille

À toutes mes amies

TABLE DES MATIERES

Remerciements ..... **i**

Liste des figures …...……..……vii

Liste des tableaux...……..ix

Introduction générale

1.Introduction **1**

2.Objectifs de la thèse **4**

3.Présentation de la thèse **4**

Chapitre1: Systèmes d'ordre fractionnaire

1.1 Introduction **6**

1.2 Calcul fractionnaire **6**

1.3 Définitions **7**

1.3.1 Définition de Grunwald Letnikov **7**

1.3.2 Définition de Riemann-Liouville **8**

1.3.3 Définition de Caputo **8**

1.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire **9**

1.5 Représentation des systèmes fractionnaires : **10**

1.5.1 Equation différentielle fractionnaire **10**

1.5.2 Fonction de transfert fractionnaire **10**

1.5.3 Représentation d'état Fractionnaire **10**

1.6 Représentation fréquentielle de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire **11**

1.7 Simulation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire **12**

1.7.1 Méthodes basées sur l'expression analytique de la sortie **12**

1.7.2 Méthodes basées sur les modèles discrets **12**

1.7.2.1 Méthodes directes 13

1.7.2.2 Méthodes indirectes 14

1.8. Conclusion **14**

Chapitre2:Conception des opérateurs fractionnaires numériques basée sur les méthodes de modélisation des signaux déterministes

2.1 Introduction **15**

2.2 Méthode de synthèse des filtres RII par la méthode de modélisation des signaux **15**

2.2.1 Méthodes de modélisation des signaux déterministes non itératives **19**

2.2.1.1 Approximation de Padé 19
2.2.1.1.1 Erreur de modélisation 19
2.2.1.1.2 Calcul des coefficients du filtre 19
2.2.1.2 Méthode de Prony 21
2.2.1.2.1 Erreur d'équation 21
2.2.1.2.2 Calcul des coefficients du filtre 22
2.2.1.3 Méthode de Shanks 24
2.2.1.4 Méthode de Kalman 26
2.2.1.4.1 Erreur de modélisation alternative 26
2.2.1.4.2 Calcul des coefficients 26
2.2.2 Méthodes de modélisation des signaux déterministes itératives 27
2.2.2.1Méthode de pré filtrage itérative (Steiglitz et McBride) 27
2.2.2.1.1 Erreur de modélisation alternative 27
2.2.2.1.2 Itération Mode1 28
2.2.2.1.3 Itération Mode2 29
2.2.2.2 Méthode de Shaw 30
2.2.2.2.1 Découplage du critère non linéaire exact 31
2.2.2.2.2 Algorithme de calcul pour estimer le dénominateur 33
2.4 Conclusion **34**

Chapitre3: Approche proposée et Applications

3.1 Introduction **35**
3.2 Fonction de transformation du plan s au plan z proposée **35**
3.2.1 Intégrateur numérique de Tseng **35**
3.2.2 Dérivateur proposé **38**
3.2.2.1 Approche de stabilisation **38**
3.3 Approximation de l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire **39**
3.3.1 Réponse impulsionnelle de l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire discret (ODIFD) **40**
3.4 Résultats de simulation et discussion **42**
3.4.1 Approximation rationnelle discrète de l'opérateur s^{α} **42**
3.4.2 Comparaison des méthodes DSP-Modélisation et DSP-troncature **51**
3.5Applications :Synthèse des filtres passe-bas et passe-haut fractionnaires numériques **58**
3.5.1 Introduction **58**
3.5.2 Les filtres à un élément fractionnaire simple **58**
3.5.2.1 Filtre passe-bas fractionnaire 59
3.5.2.2 Filtre passe-haut fractionnaire 60

3.5.3 Conception de filtre fractionnaire numérique par un filtre RII 60
3.5.3.1 Conception des filtres passe-bas fractionnaires numériques 61
3.5.3.2 Conception des filtres passe-haut fractionnaires numériques 74
3.6 Conclusion **85**
Conclusion générale
1. Conclusion **87**
2. Perspectives **88**
Références

Liste des figures

Figure 2. 1: Erreur de Kalman……26

Figure 2. 2 : Méthode de pré filtrage itérative……27

Figure3. 1: Erreur relative (%) en amplitude des intégrateurs T=1s……37

Figure3. 2 : Erreur relative (%) en amplitude des derivateurs, T=1s……39

Figure3. 3:Réponse impulsionnelle de ODIFD, L=500, T =1s, a) α = -0.5, b) α = 0.5……41

Figure3. 4 : Réponses en fréquence (amplitude et phase) de s^{α} et des approximations obtenues par la methode Steiglitz MC-Bride basées sur les opérateurs du 1er ordre, Al-Alaoui-Schneider, et NMF a) α =0.5, b) α =−0.5……44

Figure3. 5: Erreur relative correspondante a NMF, Al-Alaoui-Schneider, et les opérateurs d'ordre un a)α = 0.5, b) α = −0.5……45

Figure 3. 6 : Distribution des pôles et des zéros, a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = -0.5$……47

Figure3. 7: Erreur relative (%) correspondante à NMF, Al-Alaoui-Schneider et les opérateurs du 1er ordre a) α =0.7, b) α =−0.7……48

Figure 3. 8: Erreur relative (%) correspondante à NMF, Al-Alaoui-Schneider et les opérateurs du 1er ordre a) α =0.3, b) α =−0.3……49

Figure3. 9: Réponses en fréquence (amplitude et phase) de $s^{-1/3}$ et des approximations obtenues par NMF (DSP-modélisation) et Hsue (DFC), pour T =0.001s, q=p=3……50

Figure3. 10: Erreur relative (%) correspondante à NMF (DSP-modélisation) et Hsue (DFC)……51

Figure3. 11: Réponses en fréquence (amplitude et phase) de s^{α} et des approximations obtenues par les méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature basées sur NMF, a) $\alpha = 1/4$, b) $\alpha = -1/4$……53

Figure3. 12: Erreur relative (%) a) $\alpha = 1/4$, b) $\alpha = -1/4$……54

Figure3. 13 : Distribution des pôles et des zéros, a)DSP-troncature, b) DSP-modélisation……55

Figure3. 14: Réponses en fréquence (amplitude et phase) de s^{α} et des approximations obtenues par les méthodes DSP-modélisation et DSP- troncature bassées sur l'opérateur Al-Alaoui……56

Figure3. 15: Erreur relative (%) pour α = 0.5……56

Figure3. 16: Réponse fréquentielle (amplitude et phase) d'un filtre passe-bas analogique d'ordre 0.4……61

Figure3. 17: Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{0.4}$ et des approximations correpondantes obtenues bassées sur différents opérateurs……63

Figure3. 18: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-bas analogique et des filtres numériques d'ordre 0.4……64

Figure3. 19: Distribution des pôles et des zéros……65

Figure3. 20: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas fractionnaire analogique α = 1.6……66

Figure3. 21: Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{1.6}$ et des approximations obtenues basées sur différents opérateurs……68

Figure3. 22: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-bas analogique et des filtres numériques d'ordre 1.6 70
Figure3. 23: Distribution des pôles et des zéros..... 71
Figure3. 24 : Réponses fréquentielles (amplitude) des filtres numériques passe-bas obtenus par les méthode DSP-modélisation et DPS troncature a) α = 0.4, b) α =1.6 72
Figure3. 25:Réponse fréquentielle (amplitude et phase) d'un filtre passe-haut analogique d'ordre 0.4….74
Figure3.26 : Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{0.4}$ et des approximations obtenues basées sur différents opérateurs..... 76
Figure3. 27: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-haut analogique et des filtres numériques d'ordre 0.4 77
Figure3. 28: Distribution des pôles et des zéros..... 78
Figure3. 29: Réponse fréquentielle (amplitude et phase) d'un filtre passe-haut analogique d'ordre 1.6....79
Figure3.30: Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{1.6}$ et des approximations correspondantes obtenues basées sur différents opérateurs 80
Figure3. 31: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-haut analogique et des filtres numériques d'ordre 1.6 82
Figure3. 32: Distribution des pôles et des zéros..... 83
Figure3. 33: Réponses fréquentielles (amplitude) des filtres numériques passe-haut obtenus par la méthode DSP-modélisation et DSP troncature a) α = 0.4, b) α =1.6 84

Liste des tableaux

Tableau 3. 1 Fonctions de transformation du plan s au plan z..... 37

Tableau 3. 2: Coefficients a_i et b_i des approximations rationnelles de s^{α}..... 43

Tableau 3. 3: Coefficients des approximations rationnelles de $s^{\alpha}, \alpha = \pm 1/4$ obtenues par lesapproches DSP-modélisation et DSP-troncature..... 52

Tableau 3. 4: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de s^{α}..... 62

Tableau 3. 5: Coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques passe-bas d'ordre 0.4..... 63

Tableau 3. 6: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de $s^{1.6}$..... 67

Tableau 3. 7 : Coefficients des fonctions de transfert des filtres numeriques passe bas d'ordre 1.6..... 69

Tableau 3. 8: Coefficients des filtres numériques obtenus par la méthode DSP-troncature..... 73

Tableau 3. 9: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de $s^{0.4}$..... 75

Tableau 3. 10: Coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques passe- haut d'ordre 0.4 .. 78

Tableau 3. 11: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de $s^{1.6}$..... 80

Tableau 3. 12: Coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques passe- haut d'ordre 1.6 .. 81

Liste des publications et communications

- **Publications Internationales**

- F.Leulmi, Y.Ferdi,"Improved Digital Rational Approximation of the Operator s^{α} Using Second-Order s-to-z Transform and Signal Modeling", Circuits, Systems, and Signal Processing, June 2015, Volume 34, Issue 6, pp 1869-1891.

- **Publications Nationales**

- F.Leulmi, Y.Ferdi "Digital Implementation of Fractional Order Operator susing Iterative eterministic Signal Modeling Techniques'', Revue des Sciences et de la Technologie -RST- Volume 2, N°1, Janvier 2011.

- **Communications Internationales**

- Leulmi F, Ferdi Y, "An improvement of the Rational Approximation of the Fractional Operator s^{α}," In Proc.of the IEEE Inter. Conf. on Saoudiinterational Electronics, communications and photonics conference (SIECPC) '2011,24-26 April, Riyadh, Saudi Arabia.

-F.Leulmi, Y.Ferdi "Digital Implementation of Fractional Order Operators using Iterative Deterministic Signal Modeling Techniques'', In Proceedings of the 2nd International Conference on Electronics Systems (CISE'09), 25-26 October 2009, Batna, Algeria.

-F.Leulmi, Y.Ferdi "Synthèse du Conduit Vocal par Les techniques de Modélisation des Signaux Déterministes'', In Proceedings of the International Conference on Systems and Information Processing (ICSIP'09), May 2-4 2009, Guelma, Algeria.

- **Communications Nationales**

-F.Leulmi, Y.Ferdi "Rational Approximation of the Fractional Operator using Higher Order s-to-z Transforms and signal modeling Techniques '', 2ème Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications (SOFA 2011), 24-26 Octobre 2011, Tizi-Ouzou, Algérie.

-F.Leulmi, Y.Ferdi "On the use of Optimal Deterministic Signal Modeling Technique for Fractional Order Operator Approximation'', 1ère Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications (SOFA 2010), 18-19 Mai 2010, Skikda, Algérie.

Introduction générale

1.Introduction **1**
2.Objectifs de la thèse..... **4**
3.Présentation de la thèse..... **4**

1. Introduction

La synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire reste un problème ouvert en traitement du signal, en automatique et dans beaucoup de champs de recherche du fait de la nature de ces systèmes qui sont d'une part considéré comme des systèmes à mémoire longue et d'autre part ils présentent une dynamique complexe.

Plusieurs études expérimentales et théoriques montrent que certains systèmes tels qu'en électrochimie et en thermique, sont de nature fractionnaire, régi par des équations différentielles à dérivée non entière. L'utilisation de modèles classiques basés sur une déviation entière n'est donc pas appropriée pour la représentation de ces systèmes. Une nouvelle classe appelée modèles fractionnaires a été développée depuis 1945 par Bode, Tustin, Oustaloup en utilisant le concept de la dérivation fractionnaire [1].

Le calcul fractionnaire a été introduit le 30 septembre 1695. Ce jour-là, Leibnitz a écrit une lettre à L'Hôpital soulevant la possibilité de la généralisation du sens de la dérivée d'ordre entier à la dérivée non entière. L'Hôpital a voulu savoir le résultat de la dérivée d'ordre ½. Leibnitz a répondu « qu'il s'agit là d'un paradoxe, mais qu'un jour, il en découlera de très utiles conséquences». En effet, sa vision devient une réalité. Cependant, l'étude des dérivées d'ordre non entier n'a pas apparu dans la littérature jusqu'à 1819, où Lacroix a présenté une définition de la dérivée fractionnaire basée sur l'expression usuelle de la $n^{ème}$ dérivée de la fonction puissance. Au cours des années, le calcul fractionnaire devient un sujet attrayant aux mathématiciens et plusieurs formes de l'opérateur différentiel fractionnaire sont introduites : Grunwald Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamad, Pieisz Hilfer, Kilbasat et al, Podlubny, Sank et al et les plus récentes notions de Cresson, Katugampola, Kilmes, Kilbas et Saigo ou les opérateurs fractionnaires d'ordre variable introduit par Sank et Ross.

En 2010, une perspective intéressante sur le sujet unifiant toutes les notions mentionnées des dérivées et intégrales fractionnaires a été introduite dans Agraval et plus tard étudiée dans Bourdin, Klimek et Lupin [2].

Le calcul fractionnaire a été considérablement appliqué dans différents domaines de la science et de l'ingénierie depuis ces traces initiales dans les discussions entre Leibnitz et Bernoulli. Ce concept a montré son énorme potentiel pour comprendre mieux la nature, d'apprécier le monde merveilleux des mathématiques qui se trouve entre les dérivées et les intégrales d'ordre entier. Dans la phase initiale de la croissance du calcul fractionnaire, des mathématiciens ont centrés leurs efforts à établir l'extension parallèle des systèmes

d'ordre arbitraire par la généralisation des définitions fondamentales de différentes formules de la dérivée et de l'intégrale en leurs correspondants fractionnaires.

L'ingrédient de base des systèmes fractionnaires est l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre non entier. En effet, l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire ${}_aD_t^{\alpha}x(t)$, où a et t sont les limites inférieur et supérieur, respectivement et $\alpha \in R$, apparait naturellement dans les équations différentielles d'ordre fractionnaire qui modélisent au mieux plusieurs systèmes dans différents domaines de l'ingénierie et de la science [3-5]. Dans ce travail, La limite inférieure a égale à 0 et l'opérateur fractionnaire est simplement désigné par D^{α}, où α est un nombre réel positif (dérivation d'ordre fractionnaire) ou négatif (intégration d'ordre fractionnaire). Sous les conditions initiales nulles les opérateurs d'ordre fractionnaire sont représentés dans le domaine de Laplace par la fonction de transfert suivante :

$$H_{\alpha}(s) = s^{\alpha} \tag{1}$$

Les algorithmes basés sur la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire ont été utilisés pour résoudre plusieurs problèmes dans différents domaines y compris l'automatique [6-9], le traitement du signal numérique [10-15], et la théorie de conception des circuits [16-19]. Le problème principal rencontré en traitant l'opérateur d'ordre fractionnaire s^{α} est comment le réalisé physiquement ? . Ce problème est dû à la nature fractionnaire de cet opérateur qui est considéré comme un opérateur à mémoire infinie. Cependant, pour une implémention physique, des modèles approximatifs à mémoire finie, tels que les modèles à moyenne-mobile (MA), autorégressive (AR), ou modèles autorégressifs et moyenne mobile (ARMA) sont utilisés. Bien que de nombreuses méthodes aient été développées pour obtenir des approximations analogiques ou numériques, ce thème, important dans les applications du calcul fractionnaire, doit encore être abordé par le biais de nouvelles approches qui semblent être plus prometteuse en termes de précision et de complexité du calcul.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'implémentation numérique des filtres fractionnaires, dont l'étape clé est la discrétisation des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre non entier. Les méthodes de discrétisation de ces opérateurs sont, en général, de deux types : méthodes directes et méthodes indirectes.

L'approche de discrétisation directe développe les fonctions de transformation du plan s au plan z d'ordre un ou d'ordre supérieur élevé à la puissance α par l'une des méthodes de développement à savoir : le développement en fraction continue (DFC), développement

en série de puissance (DSP)-troncature et développement en série de puissance (DSP)-modélisation des signaux déterministes. Tandis que dans les méthodes indirectes, deux étapes sont nécessaires, i.e. l'ajustement du domaine de fréquence en continu puis la discrétisation de la fonction de transfert en s obtenue.

Dans les premières approches de discrétisation directes, les fonctions de transformation du plan s au plan z du premier ordre d'Euler, Tustin, et la combinaison linéaire des deux règles (opérateur Al-Alaoui), ont été utilisées pour la discrétisation de s^{α}. Dans [20], les auteurs ont proposé deux méthodes d'approximation de s^{α} à savoir : une discrétisation récursive de l'opérateur Tustin et la discrétisation directe basée sur l'opérateur Al-Alaoui via la méthode DFC-troncature. Dans [21] une famille de fonctions génératrice du deuxième ordre obtenues par l'inversion et la stabilisation de la combinaison des règles d'intégrateurs numériques trapézoïdale et Simpson ont été utilisées via la méthode DFC pour concevoir une approximation rationnelle de s^{α}. La conception des filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) et des filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) de l'intégrateur fractionnaire de Simpson utilisant l'approche DSP–troncature est proposée dans [22]. Récemment, des fonctions de transformations du plan s au plan z d'ordre supérieur ont été proposées pour la conception numérique de s^{α} dans l'espoir d'améliorer la précision de l'approximation. Dans [23,24], les auteurs ont proposé l'utilisation des fonctions de transformation du plan s au plan z d'ordre supérieur à savoir : l'opérateur du deuxième ordre de Schneider, la règle de troisième ordre stabilisé d'Al-Alaoui-Schneider-Kaneshige-Groutage (Al-Alaoui-SKG). Les approximations rationnelles obtenues ont été conçues en utilisant l'approche DSP-troncature et comparées avec des approximations basées sur Al-Alaoui (DFC). Ces règles de transformation d'ordre supérieur ont été modifiées dans [25] pour améliorer les approximations dans les basses fréquences. Cependant, les résultats de simulation ont montré que les approximations obtenues en utilisant l'opérateur Schneider et Al-Alaoui-SKG (DSP-troncature) possèdent des pôles et des zéros complexes conjuguées ce qui n'est pas souhaitable, car il s'avère que pour un meilleur ajustement de la réponse en fréquence de s^{α}, il serait d'un grand intérêt d'obtenir des approximations discrètes avec des pôles et des zéros distribués d'une manière alternée sur l'axe réel dans le cercle unité dans le plan z [26,27]. Récemment, plusieurs approches ont été proposées pour l'approximation rationnelle de s^{α} voir [28-30].

2. Objectifs de la thèse

L'étape clé dans la synthèse des filtres fractionnaires numériques est l'implémentation numérique des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre non entier par un modèle approximatif. Nous proposons dans ce travail une nouvelle approximation rationnelle discrète (filtre RII) de l'opérateur fractionnaire analogique s^{α} en utilisant la méthode de DSP-modélisation des signaux déterministes.

L'objectif de cette thèse est double : il s'agit donc d'utiliser la méthode DSP-modélisation des signaux déterministes, proposée par Ferdi dans [31-32], une méthode attrayantes par son potentiel de fournir des filtres RII stable et à phase minimale ayant des pôles et des zéros distribués d'une manière alternée sur l'axe réel dans le cercle unité dans le plan z. La seconde motivation est de profiter des performances des opérateurs d'ordre supérieur pour la conception des approximations numériques de l'opérateur s^{α}.

La première partie de la contribution de la présente étude est de proposer une nouvelle fonction de transformation du plan s au plan z (en anglais new mapping function (NMF)). La deuxième partie de notre contribution est inspirée d'un travail qui a été présenté récemment [23-24]. Il a été mentionné que la méthode DFC (l'équivalent de la méthode de Padé, méthode de modélisation de signaux déterministes), ne peut pas être appliquée aux opérateurs d'ordre supérieur. Pour remédier à ce problème, l'auteur a proposé une alternative, la méthode DSP-troncature, utilisée aussi par Tseng dans [22], pour l'approximation rationnelle de l'opérateur fractionnaire s^{α} mais au prix d'avoir des approximations ayant des pôles et des zéros complexes conjugués, ce qui est indésirable. Nous proposons dans ce travail une solution pour les opérateurs d'ordre supérieur, en appliquant la méthode DSP-modélisation des signaux déterministes basées sur les opérateurs d'ordre deux. Les résultats de simulation sont très satisfaisants. Enfin, nous présentons une nouvelle application des opérateurs fractionnaires discrets pour la synthèse des filtres passe-bas et passe-haut fractionnaires numériques.

3. Présentation de la thèse

Cette thèse est organisée comme suit :

Le chapitre1 rappel les différentes définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire, élément essentiel des systèmes d'ordre fractionnaire. Nous présentons ensuite trois modes de représentation des systèmes non entiers existants : équation différentielle fractionnaire, fonction de transfert fractionnaire, et représentation d'état fractionnaire. Enfin, nous présentons les méthodes d'implémentation numérique de l'opérateur fractionnaire s^{α}.

Le chapitre2 est consacré à la description détaillée des différentes méthodes de modélisation des signaux déterministes, les méthodes non itératives (Padé, Shanks, Prony, Kalman) et les méthodes itératives (Steiglitz-Mc Bride, Shaw).

Le chapitre3 présente la contribution principale de cette thèse, nous présentons la fonction de transformation du plan s au plan z proposée dans cette thèse, ensuite nous calculons la réponse impulsionnelle de l'opérateur de dérivation et d'intégration discret. Enfin les résultats de simulation sont présentés. **Ce chapitre** se termine par l'application de l'approximation obtenue pour la synthèse des filtres passe-bas et passe-haut fractionnaires numériques. Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus et suggère les futures perspectives.

Chapitre 1

Systèmes d'ordre fractionnaire

1.1 Introduction **6**

1.2 Calcul fractionnaire **6**

1.3 Définitions **7**

1.3.1 Définition de Grunwald Letnikov **7**

1.3.2 Définition de Riemann-Liouville **8**

1.3.3 Définition de Caputo **8**

1.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire **9**

1.5 Représentation des systèmes fractionnaires : **10**

1.5.1 Equation différentielle fractionnaire **10**

1.5.2 Fonction de transfert fractionnaire **10**

1.5.3 Représentation d'état Fractionnaire **10**

1.6 Représentation fréquentielle de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire **11**

1.7 Simulation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire **12**

1.7.1 Méthodes basées sur l'expression analytique de la sortie **12**

1.7.2 Méthodes basées sur les modèles discrets **12**

1.7.2.1 Méthodes directes 13

1.7.2.2 Méthodes indirectes 14

1.8. Conclusion **14**

1.1 Introduction

Commençons par les racines historiques du calcul fractionnaire, ce chapitre a pour objet de définir des notions fondamentales sur les dérivées fractionnaires, les systèmes d'ordre fractionnaire et les différentes représentations de ces systèmes. Enfin, nous terminons par une présentation des différentes méthodes de synthèse des opérateurs d'ordre fractionnaire numériques.

1.2 Calcul fractionnaire

De même que « la nature a horreur du vide », « le mathématicien en a horreur du discontinu ». Alors n'existe-il vraiment rien entre $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ et $\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}$?. Il faut remonter à 1695 pour trouver dans une lettre de G.W. Leibnitz à G.A. L'Hôpital, la mention d'une différentielle fractionnaire $d^{1/2}x$, qualifiée de « paradoxe apparent ». Dès le 18 ème siècle, les prémices du concept de dérivation fractionnaire, c'est-à-dire d'un opérateur de dérivation de degré non entier, apparaissent dans des écrits de L. Euler de J.L. Lagrange et au début du 19 ème siècle, avec P.S. Laplace et N.H. Abel.

Les avancés les plus marquantes sont celle de J-Liouville dans ses multiples mémoires à l'école polytechnique entre 1832 et 1835. Puis la contribution de B. Reimann en 1847 faisant que les noms de ces deux mathématiciens restent attachés à la fameuse définition que nous rappellerons plus loin.

Les développements ont été nombreux depuis lors. La très intéressante compilation réalisée par le Pr. Ross, outre sa valeur historique, montre la diversité et l'importance des applications récentes [34][35].

Durant les études de la théorie générale et l'application de la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire, il a été découvert que, bien que ce sujet soit ancien remontant au moins à Leibnitz dans sa théorie et à Heaviside dans son application, il a été relativement peu étudié dans les premiers articles.

Les applications de ce concept incluent des domaines non connexes tels que le traitement de signal, le traitement d'image, l'automatique et les domaines de la biologie, l'économie, l'électrochimie et le domaine de la thermique.

Le calcul fractionnaire fournit un excellent instrument pour la description des propriétés de mémoire et d'héréditaire des différents matériaux et processus. Ceci est l'avantage principal de la différentiation fractionnaire en comparaison avec des modèles classiques d'ordre entier, dont lesquels tels effets sont négligés. L'avantage de la différentiation fractionnaire devient apparent pour la modélisation des propriétés mécanique et électrique des matériaux.

Les dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire aussi apparaissent dans la théorie du contrôle des systèmes dynamiques lorsque le système de contrôle ou et le contrôleur sont décrit par une équation différentielle fractionnaire. L'idée de la dérivée fractionnaire semble être un sujet assez étrange, très dure à expliquer du fait que, contrairement aux opérateurs différentiels couramment utilisés, il n'est pas lié à un sens géométrique important. Mais plusieurs phénomènes physiques ont une description intrinsèque d'ordre fractionnaire et donc le calcul fractionnaire est nécessaire pour les expliqués.

1.3 Définitions

Les systèmes fractionnaires ou plus système d'ordre non entier peut être considéré comme une généralisation des systèmes d'ordre entier.

Le calcul fractionnaire est la généralisation de la dérivée et l'intégrale a une opération fondamentale d'ordre non entier ${}_aD_t^\alpha$ ou a et t sont les limites de l'opérateur et $\alpha \in R$

L'opérateur intégro- différentiel continu est définit comme suit

$$ {}_aD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \qquad (1.1) $$

Les trois définitions les plus fréquemment utilisées pour la généralisation de la dérivée et l'intégrale fractionnaire sont la définition de Grunwald Letnikov, Riemann-Liouville, et la définition de Caputo.

1.3.1 Définition de Grunwald Letnikov

La dérivation d'ordre non entier au sens de Grunwald Letnikov peut être obtenue par la généralisation au réel de l'intégrale et la dérivée d'ordre entier, où toute la différence par rapport au cas entier se situe à l'extension de la factorielle à travers la fonction gamma. La dérivée fractionnaire au sens de Grunwald Letnikov est définie par la relation suivante :

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \qquad (1.2) $$

Ou [.] désigne la partie entière et $\binom{\alpha}{j}$ sont les coefficients binomiaux.

1.3.2 Définition de Riemann-Liouville

La dérivée de Riemann-Liouville est la plus connue et la plus répandue. Cette définition est basée sur la primitive ou intégrale l[ème] d'une fonction, qui peut naturellement s'étendre au réel β .

Une primitive l[ème] $(l \in \mathbb{N}^*) de\ f(t)$, donnée par

$$ {}_aD_t^{-l} f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{l-1} f(\tau) d\tau \tag{1.3} $$

s'étend naturellement au réel $\beta > 0$, comme suit

$$ {}_aD_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \tag{1.4} $$

et la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ s'obtient en remplaçant $n - \alpha = -\beta$

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{1.5} $$

$$ n - 1 < \alpha < n $$

avec $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma.

1.3.3 Définition de Caputo

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo incorpore les conditions initiales de la fonction à traité, ainsi que ses dérivées entières, la dérivée d'une fonction *f(t)* au sens de Caputo est définie par la relation suivante :

$$ {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{\frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n}}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{1.6} $$

Avec $n - 1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}\ et\ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Dans les définitions ci-dessus, $\Gamma(m)$ est la fonction factorielle définit, pour $m \in \mathbb{R}^+$, par l'expression suivante

$$ \Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{m-1} du \tag{1.7} $$

Pour $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma(m+1) = m!$.

Une propriété remarquable qui distingue une dérivation non entière d'une dérivation entière est qu'une dérivation non entière revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet, que la dérivée non entière de *f(t)* nécessite la connaissance de *f(t)* sur un intervalle alors que dans le cas entier, seule la connaissance 'locale' de *f* autour de t est nécessaire. Cette propriété permet d'interprété les systèmes non entiers comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétable comme des systèmes à mémoire courte.

1.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans la théorie des systèmes, l'analyse des comportements dynamiques est souvent faite par le moyen d'une fonction de transfert. Dans cette perspective, l'introduction de la transformée de Laplace des dérivées non entières est nécessaire pour une étude optimale. Heureusement, il n'existe pas de grandes différences par rapport au cas classique, confirmant l'utilité de cet outil mathématique même pour les systèmes fractionnaires.

La transformation inverse de Laplace est aussi utile pour une représentation dans le domaine temporelle, Dont laquelle seulement la réponse en fréquence est connue. La formule la plus générale est la suivante :

$$L\left\{\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right\} = s^m L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{m-1-k} f(t)}{dt^{m-1-k}}\right]_{t=0} \tag{1.8}$$

Où n est un entier tel que $n-1 < m < n$.
L'expression (1.8) devient très simple si toutes les dérivées sont nulles :

$$L\left\{\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right\} = s^m L\{f(t)\} \tag{1.9}$$

L'expression (1.9) est très utile pour le calcul de la transformée de Laplace inverse des fonctions de transfert élémentaires, tel que l'intégrateur d'ordre non entier $\frac{1}{s^m}$. En effet, remplaçant m avec -m et considérant $f(t) = \delta(t)$, l'impulsion de Dirac, au moyen de la définition (1.5), on a donc

$$L\left\{\frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)}\right\} = \frac{1}{s^m} \tag{1.10}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^m}\right\} = \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} \tag{1.11}$$

qui est la réponse impulsionnelle de l'intégrateur d'ordre non entier.

1.5 Représentation des systèmes fractionnaires :

Dans cette section nous présentons trois modes de représentation des systèmes non entiers existants : équation différentielle, fonction de transfert et représentation d'état.

1.5.1 Equation différentielle fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques naturels ont un comportement qui peut être modélisé par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire :

$$y(t) + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + \cdots + a_N D^{\alpha_N} y(t) = b_0 D^{\beta_0} u(t) + b_1 D^{\beta_1} u(t) \ldots + b_M D^{\beta_M} u(t) \qquad (1.12)$$

Où u(t) et y(t) désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $(a_j, b_i) \in \mathbb{R}^2$ et les ordres de dérivation sont ordonnés pour des raisons évidentes d'identifiabilité :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N \quad , 0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_M$$

Comme dans le cas d'une équation différentielle à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_N > \beta_N$ pour que le système soit strictement propre.

1.5.2 Fonction de transfert fractionnaire

La transformée de Laplace de l'équation différentielle (1.12), soit

$$Y(s) + a_1 s^{\alpha_1} Y(s) + \cdots + a_N s^{\alpha_N} Y(s) = b_0 s^{\beta_0} U(s) + b_1 s^{\beta_1} U(s) \ldots + b_M s^{\beta_M} U(s) \qquad (1.13)$$

détermine la forme classique d'une fonction de transfert non entière :

$$\mathrm{H(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{M}} \mathrm{b_i s^{\beta_i}}}{1+\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{a_j s^{\alpha_j}}} \qquad (1.14)$$

1.5.3 Représentation d'état Fractionnaire

La représentation d'état fractionnaire est définie, comme dans le cas entier, par deux équations

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad (1.15)$$

où

u est le vecteur d'entrée

x est le vecteur d'état non entier

y est le vecteur de sortie.

Les matrices A, B, C et D sont de dimension appropriée et à coefficients constants appelées respectivement matrice d'évolution, matrice de commande, matrice d'observation et matrice d'action directe.

1.6 Représentation fréquentielle de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire

Un dérivateur non entier réel est tel que sa grandeur de sortie y(t) s'identifie à un facteur près, à la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée u(t), soit :

$$y(t) = \tau^{\alpha} D^{\alpha} u(t) \tag{1.16}$$

Où τ désigne la constante de temps de différentiation et $\alpha \in R$ l'ordre de dérivation réel. L'opérateur considéré étant alors soit un dérivateur soit un intégrateur.

La transformée de Laplace de l'équation (1.16) avec l'hypothèse de conditions initiales nulles est

$$Y(s) = (\tau s)^{\alpha} U(s) \tag{1.17}$$

Soit $w_o = \frac{1}{\tau}$ appelée fréquence de transition, l'équation (1.17) devient

$$Y(s) = \left(\frac{s}{w_o}\right)^{\alpha} U(s) \tag{1.18}$$

d'où l'on tire la transmittance

$$H(s) = \left(\frac{s}{w_o}\right)^{\alpha} \tag{1.19}$$

La réponse en fréquence de la dérivée d'un entier réel se déduit de sa transmittance en posant $s = jw$ soit

$$H(jw) = \left(\frac{jw}{w_o}\right)^{\alpha} \tag{1.20}$$

Définis comme le module et l'argument de (1.20), le gain et la phase du dérivateur admettent des expressions de la forme

$$\begin{cases} |H(jw)| = \left(\frac{w}{w_o}\right)^{\alpha} \\ \arg\big(H(jw)\big) = \alpha \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{1.21}$$

Ce système d'équation révèle que :

- Le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente 20α dB par décade.
- Le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée $\varphi = \alpha\frac{\pi}{2}$ rad.

1.7 Simulation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire

La simulation de la sortie d'un système fractionnaire est compliquée du fait de son comportement de mémoire longue (Oustaloup). Plusieurs Méthodes ont été développées durant les derniers décennies telles que : Oustaloup, Al-Alaoui, Vinagre et al, Petras et al Chen [1]. Dans ce qui suit nous présentons de façon succincte les différentes méthodes qui existent.

1.7.1 Méthodes basées sur l'expression analytique de la sortie

La sortie du système est calculée en utilisant la fonction de transfert de forme modal

$$H(s) = \sum_{l=1}^{L} \frac{A_l}{s^n - \lambda_l}, l = 1, \ldots\ldots, L \tag{1.22}$$

Alors, la sortie du système est une combinaison linéaire d'éléments appelés modes propres. La sortie du l[ème] mode propre est :

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n - \lambda_l}\right\} \otimes u(t) = h_l(t) \otimes u(t) \tag{1.23}$$

Où $\otimes$ désigne le produit de convolution et $h_l(t)$ est la transformée de Laplace inverse de Mellin-Fourier du l[ième] mode propre.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^n - \lambda_l}\right) = \sum_{k=1}^{nombrede\ poles} \frac{s_k}{n\lambda_l} e^{ts_k} + \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{x^{2n} - 2\lambda_l x^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2} dx \tag{1.24}$$

L'expression analytique de la sortie n'est donc pas simple, elle nécessite le calcul d'une intégrale. De plus elle dépend de la précision utilisée lorsqu'on calcule le produit de convolution de l'entrée et $h_l(t)$ [1].

1.7.2 Méthodes basées sur les modèles discrets

Un système non entier peut être simulé en remplaçant, dans sa représentation adopté (représentation d'état, équation différentielle ou fonction de transfert), l'opérateur de dérivation non entière par une approximation numérique, afin d'obtenir une équation récurrente directement simulable.

Les méthodes de discrétisation de l'opérateur s^{α} sont, en général, de deux types méthodes directes et méthodes indirectes.

1.7.2.1 Méthodes directes

Il existe deux façons de simuler ces systèmes soit en discrétisant l'opérateur s^{α} dans le domaine temporel, soit par la synthèse d'une fonction de transfert entière rationnelle à partir de la fonction de transfert non entière dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine temporel, l'opérateur de dérivation d'ordre non entier peut être remplacé par une approximation numérique afin d'obtenir une équation récurrente directement simulable. La méthode la plus répondue étant celle issue de la définition de Grunwald, soit

$$ {}_{a}D_{t}^{\alpha} f(Kh) = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{K} (-1)^{k} \binom{\alpha}{k} f((K-k)h) \qquad (1.25) $$

Où h désigne la période d'échantillonnage.

Dans le domaine fréquentiel, une approximation discrète de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire continue est obtenue en deux étapes :

- Discrétiser l'opérateur d'ordre fractionnaire s^{α} en utilisant un opérateur discret approprié $H_{\alpha}(z^{-1})$, les opérateurs les plus utilisés sont :

L'opérateur d'Euler

$$ s^{\alpha} \rightarrow \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^{\alpha} $$

L'opérateur de Tustin

$$ s^{\alpha} \rightarrow \left(\frac{2}{T} \right)^{\alpha} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^{\alpha} $$

L'opérateur d'Al-Alaoui

$$ s^{\alpha} \rightarrow \left(\frac{8}{7T} \right)^{\alpha} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}/7} \right)^{\alpha} $$

La fonction irrationnelle ainsi obtenue est approximée soit par une approximation discrète ayant une forme polynomiale (filtre RIF) ou par une forme rationnelle, par un filtre RII.

Dans l'approximation polynomiale, un développement en série de puissance est effectué sur la fonction irrationnelle discrète, suivie d'une troncature.

L'approximation rationnelle quant à elle, approxime la fonction irrationnelle discrète obtenue en utilisant l'une des méthodes de développement de fonctions sous forme rationnelle à savoir : développement en fraction continue (DFC), développement en série de puissance (DSP) - modélisation des signaux déterministes, ou celle utilisée récemment DSP-troncature.

Pour l'approximation de l'intégrateur fractionnaire on trouve aussi la méthode proposée par Ferdi récemment basée sur le théorème de la valeur initiale, qui permet le choix de la valeur initiale de la réponse impulsionnelle, puis appliquer la méthode de modélisation des signaux.
On note que la méthode de DFC est équivalente à la méthode de Padé qui est une méthode de modélisation de signaux déterministes. Pour le but d'interpolation ou d'évaluation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes et à cause de leur capacité de modéliser des fonctions par des zéros et des pôles, les fonctions rationnelles convergent en général plus rapidement que le développement en série de puissance.

1.7.2.2 Méthodes indirectes

Dans ces méthodes, le modèle fractionnaire est approximé par un modèle rationnel à temps continu dans une bande de fréquence dans le domaine de Laplace. La fonction de transfert rationnelle obtenue est ensuite discrétisée en utilisant les fonctions de transformation du plan s au plan z.

Dans la référence [35], on trouve un résumé des méthodes d'approximations analogique des opérateurs fractionnaires existantes dans la littérature à savoir méthode de développement en fraction continue, la méthode de fonction de singularité, méthodes de Carlson, méthode de Matsuda, Méthode d'Oustaloup.

1.8. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des notions et définitions qui s'articulent autour des systèmes d'ordre fractionnaire. Un rappel sur les méthodes de discrétisation des systèmes d'ordre fractionnaire est ensuite présenté.
Dans le chapitre suivant nous présentons en détail la méthode utilisée dans ce travail celle du développement en série de puissance et modélisation des signaux déterministes.

Chapitre2:

Conception des opérateurs fractionnaires numériques basée sur les méthodes de modélisation des signaux déterministes

2.1 Introduction **15**

2.2 Méthode de synthèse des filtres RII par la méthode de modélisation des signaux **15**

2.2.1 Méthodes de modélisation des signaux déterministes non itératives **19**

2.2.1.1 Approximation de Padé 19

2.2.1.1.1 Erreur de modélisation 19

2.2.1.1.2 Calcul des coefficients du filtre 19

2.2.1.2 Méthode de Prony 21

2.2.1.2.1 Erreur d'équation 21

2.2.1.2.2 Calcul des coefficients du filtre 22

2.2.1.3 Méthode de Shanks 24

2.2.1.4 Méthode de Kalman 26

2.2.1.4.1 Erreur de modélisation alternative 26

2.2.1.4.2 Calcul des coefficients 26

2.2.2 Méthodes de modélisation des signaux déterministes itératives 27

2.2.2.1Méthode de pré filtrage itérative (Steiglitz et McBride) 27

2.2.2.1.1 Erreur de modélisation alternative 27

2.2.2.1.2 Itération Mode1 28

2.2.2.1.3 Itération Mode2 29

2.2.2.2 Méthode de Shaw 30

2.2.2.2.1 Découplage du critère non linéaire exact 31

2.4 Conclusion : **34**

2.1 Introduction

Il y a plusieurs méthodes de calcul de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire (IDOF) des signaux à temps discret. Ces méthodes comportent :

- Les algorithmes développés directement à partir des définitions de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire.
- L'approximation de la fonction de transfert de l'opérateur fractionnaire analogique dans une gamme de fréquence par une fonction rationnelle dont les zéros et les pôles sont réels négatifs et alternés suivie d'une transformation du plan s au plan z.
- La discrétisation de l'opérateur fractionnaire analogique utilisant les lois d'intégration numérique conventionnel (Euler, Tustin,….) et l'application du développement en série de puissance et la modélisation des signaux déterministes ou le développement en fraction continu tronqué et l'utilisation des techniques optimales de synthèse de filtre numérique.

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode DSP-modélisation des signaux déterministes pour obtenir une approximation rationnelle numérique (filtres RII) de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire continu s^{α}. Pour ce faire on suit les étapes suivantes :

- Discrétiser l'opérateur d'ordre fractionnaire s^{α} en utilisant une fonction génératrice appropriée $H^{\alpha}(z^{-1})$,

- Obtenir la séquence de la réponse impulsionnelle $h_{\alpha}(k)$, par le développement en série de puissance (DSP) (ou série de Taylor) de $H^{\alpha}(z^{-1})$,

- Appliquer les techniques de modélisation de signaux déterministes sur $h_{\alpha}(k)$ afin d'obtenir l'approximation rationnelle (filtre RII) de s^{α}.

2.2 Méthode de synthèse des filtres RII par la méthode de modélisation des signaux Déterministes

Dans le domaine de Laplace, l'opérateur de dérivation ou d'intégration d'ordre fractionnaire est décrit par la fonction de transfert

$$H_{\alpha}(s) = s^{\alpha} \tag{2.1}$$

Où α est un nombre réel positif (dérivation) ou négatif (intégration). La fonction de transfert analogique est, d'abord transformée du domaine s au domaine z par une fonction $s \approx M(z^{-1})$ qui est souvent donnée par des formules d'intégration numérique (conventionnel). Un DSP de $H^{\alpha}(z) = (M(z^{-1}))^{\alpha}$, est ensuite effectué pour avoir la réponse impulsionnelle désirée $h_d(n)$ donnée par l'expression suivante

$$H^{\alpha}(z) = h_d(0) + h_d(1)z^{-1} + \ldots\ldots\ldots \quad (2.2)$$

Une technique de modélisation des signaux déterministes est appliquée finalement pour estimer les coefficients de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}} \quad (2.3)$$

Les degrés des polynômes du numérateur et dénominateur p et q respectivement sont choisis par le concepteur. a_i et b_i sont les coefficients (finis) du filtre à déterminer pour réaliser le filtrage.

Ayant les valeurs de la réponse impulsionnelle $h_d(0)$ $h_d(1)$,....., $h_d(L-1)$,on cherche à déterminer sa fonction de transfert rationnelle inconnue.

On considère que la séquence $h(k)$ est la réponse d'un système de type ARMA *(q, p)* à une entrée impulsion unité $\delta(k)$, dont la réponse en *z* s'écrit

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}} = h(0) + h(1)z^{-1} + \ldots\ldots\ldots + h(L-1)z^{-(L-1)} + \ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

avec $\mathbf{h} = [h(0) \;\; h(1) \cdots\cdots h(L-1)]$ et $\mathbf{h_d} = [h_d(0) \;\; h_d(1) \;\; \cdots\cdots h_d(L-1)]$ désignent respectivement les vecteurs contenant les *L* premiers échantillons significatifs de la réponse impulsionnelle du modèle (2.4) et du filtre désiré $H_{\alpha}(z)$.

$\boldsymbol{a} = [1 \;\; a_1 \cdots\cdots a_p]$, $\boldsymbol{b} = [b_0 \;\; b_1 \cdots\cdots b_q]$ sont les vecteurs des coefficients a_i et b_i respectivement

- **Problématique**

Le problème de modélisation consiste alors à déterminer les coefficients a_i et b_i du filtre à partir des L premiers échantillons de la réponse impulsionnelle $h_d(n)$.

La question est donc comment calculer les coefficients a_i et b_i du modèle de façon à ce que $h(n)$, la transformé en z inverse de $H(z)$, soit la meilleure approximation de la réponse impulsionnelle désirée au sens d'un certain critère?

Un des critères les plus utilisés est le critère des moindres carrées.

Cette approche permet de calculer les coefficients a_i et b_i optimaux, qui minimise l'erreur entre la réponse impulsionnelle du modèle et la réponse impulsionnelle désirée

$$e(n) = h_d(n) - h(n) \tag{2.5}$$

au sens des moindres carrés, c'est à dire minimiser la fonction d'erreur suivante

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^2(n) \tag{2.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_d(n) - h(n)\right]^2$$

En pratique, on prend L échantillons significatifs de $h_d(n)$, c'est-à-dire $n = 0 : L-1$, alors (2.6) devient

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{n=0}^{L-1} \left[h_d(n) - h(n)\right]^2 \tag{2.6.a}$$

Une condition nécessaire pour minimiser $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial a_i} = 0 & 1 \le i \le p \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial b_i} = 0 & 0 \le i \le q \end{cases} \tag{2.7}$$

En substituant (2.6.a) dans (2.7) obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial a_i} = 2\sum_{n=0}^{L-1}([h_d(n) - h(n)]\dfrac{\partial h(n)}{\partial a_i}) = 0 & 1 \le i \le p \quad (2.8.a) \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial b_i} = 2\sum_{n=0}^{L-1}([h_d(n) - h(n)]\dfrac{\partial h(n)}{\partial b_i}) = 0 & 0 \le i \le q \quad (2.8.b) \end{cases}$$

Où la relation entre la réponse impulsionnelle du modèle *h(n)* et les coefficients a_i *et* b_i du modèle, d'après l'égalité (2.4), est donnée par

$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{p} a_i h(n-i) + b_n & 0 \le n \le q \quad (2.9.a) \\ -\sum_{i=1}^{p} a_i h(n-i) & n > q \quad (2.9.b) \end{cases}$$

Dans l'équation (2.8.a) il y' a p équations, et dans (2.8.b) il y'a (q+1) équations. Alors l'ensemble optimal des paramètres a_i et b_i du modèle, sont définit implicitement en terme d'un ensemble de (p+q+1) équations qui sont *non linéaires*, parce que *h(n)* est une fonction non linéaire par rapport aux coefficients a_i et b_i.

Bien que les techniques itératives telles que, descente rapide, Newton Raphson, pourraient être utilisé pour résoudre ces équations, l'approche des moindres carrés n'est pas traitable mathématiquement et n'est pas appropriée pour les applications de traitement de signal en temps réel. C'est pour cette raison que nous trouverons des méthodes indirectes, simples de la modélisation des signaux dont l'objectif est de linéariser le problème. Dans ces méthodes le problème de modélisation est légèrement modifié de sorte que les paramètres du modèle puissent être retrouvés par la résolution des équations linéaires mais au prix d'arriver à des solutions sous optimales.

Parmi plusieurs résultats, on trouve l'approximation de Padé [35],[36], où l'erreur de modélisation est nulle sur un intervalle de longueur égale au nombre des pôles et des zéros. La méthode de Prony [31],[35] qui est un mélange entre l'approche des moindres carrées et la méthode de Padé. Kalman [35] a présenté une méthode de minimisation d'une erreur linéaire.

Dans [37], Steiglitz et Mc Bride ont proposé de minimiser un critère de l'erreur de modélisation modifié, l'algorithme estime les coefficients du numérateur et du dénominateur simultanément. Shanks [31], [35] et Burrus et Park [35] ont proposé un couple de procédures en deux étapes basées sur la minimisation de l'erreur d'équation. Ces méthodes ne sont pas optimales parce qu'ils ne minimisent pas le critère de l'erreur de modélisation exacte. Evans et Fischl [32] ont proposé une solution optimale au sens des moindres carrés, mais cette méthode est applicable pour les systèmes ayant une fonction de transfert dont l'ordre du numérateur et inférieur de un de l'ordre du dénominateur.

Dans [40],[41] Shaw a proposé une méthode où le critère de l'erreur de modélisation est découplé en un linéaire et autre non linéaire de complexité réduite. Une version découplée de la méthode de Steiglitz et Mc Bride (DSM) est présenté dans [37]. Une autre méthode importante a été proposée par Brophy Salazar [36] basée sur le calcul du gradient. On trouve aussi la méthode de Judell [36] qui minimise l'erreur du filtre inverse.

2.2.1 Méthodes de modélisation des signaux déterministes non itératives

2.2.1.1 Approximation de Padé

2.2.1.1.1 Erreur de modélisation

L'approximation de Padé produit un filtre RII qui modélise exactement $h_d(n)$ pour les $p+q+1$ premières valeurs de n. Alors l'erreur de modélisation devient

$$e(n) = h_d(n) - h(n) = \begin{cases} 0 & pour\ n = 0,1,2...p+q \\ inconue & ailleurs \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2.1.1.2 Calcul des coefficients du filtre

Contrairement à la méthode des moindres carrée, l'approximation de Padé nécessite seulement la résolution d'un ensemble d'équations linéaires, pour déterminer les coefficients a_k et b_k.

Particulièrement, la méthode de Padé met $h(n) = h_d(n)\ \ pour\ \ n = 0,\ldots, p+q$ dans l'équation (2.9), on aboutit donc à un ensemble de ($p+q+1$) équations linéaires à ($p+q+1$) inconnus :

$$h_d(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k h_d(n-k) = \begin{cases} b_n, & n = 0,1,\ldots,q \\ 0, & n = q+1,\ldots,q+p \end{cases} \tag{2.11}$$

On note que $h_d(n) = 0\ pour\ \ n < 0$, parce que *h(n)* est causal et $h(n) = h_d(n)$. L'écriture matricielle du système d'équation (2.11) donne

$$\begin{bmatrix} h_d(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h_d(1) & h_d(0) & \cdots & 0 \\ h_d(2) & h_d(1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_d(q) & h_d(q-1) & \cdots & h_d(q-p) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_d(q+p) & h_d(q+p-1) & \cdots & h_d(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ bq \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

La résolution se fait en deux étapes :

Calcul des p coefficients a_k en utilisant les p dernières équations de la partie inférieure de l'équation (2.12) c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+2) & h_d(q+1) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ \vdots & & & \\ h_d(q+p) & h_d(q+p-1) & \cdots & h_d(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

En réarrangeant l'équation (2.13), on obtient l'ensemble de p équations avec p coefficients a_k suivantes :

$$\begin{bmatrix} h_d(q) & h_d(q-1) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ \vdots & & & \\ h_d(q+p-1) & h_d(q+p-2) & \cdots & h_d(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_d(q+1) \\ h_d(q+2) \\ \cdots \\ h_d(q+p) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

L'équation (2.14) peut être exprimée sous forme matricielle comme suit

$$H_d \mathbf{a} = -\mathbf{h_d} \tag{2.15}$$

Où $\mathbf{a} = [a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_p]^T$

$\mathbf{h_d} = [h_d(q+1) \;\; h_d(q+2) \;\; \cdots \;\; h_d(q+p)]^T$

$$H_d = \begin{bmatrix} h_d(q) & h_d(q-1) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_d(q+p-1) & h_d(q+p-2) & \cdots & h_d(q) \end{bmatrix}$$

H_d est une matrice Toeplitz non symétrique $(p \times p)$.

Selon que la matrice H_d est inversible ou non, on distingue trois cas :

1- H_d est non singulière, alors la matrice inverse H_d^{-1} existe et la solution est unique définit par $\mathbf{a} = -H_d^{-1}\mathbf{h}_d$

2- H_d est singulière et une solution $\bar{\mathbf{a}}$ de l'équation (2.15) existe. La solution n'est pas unique, c'est-à-dire $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + z$ est aussi une solution.

3- H_d est singulière et aucune solution de l'équation (2.15) n'existe. Dans ce cas, on doit poser $a_0 = 0$, et alors l'équation (2.15) devient $H_d \mathbf{a} = 0$

Après avoir calculé les coefficients a_k, l'étape suivante est de retrouver les coefficients du numérateur b_k en utilisant les (q+1) premières équations dans (2.12).

$$\begin{bmatrix} h_d(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_d(1) & h_d(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h_d(2) & h_d(1) & h_d(0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_d(q) & h_d(q-1) & h_d(q-2) & \cdots & h_d(q-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ bq \end{bmatrix}$$

Or $$H_0 \mathbf{a} = \mathbf{b} \qquad (2.16)$$

avec

$\mathbf{a} = [1 \quad a_1 \quad a_2 \cdots \quad a_p]^T$

$\mathbf{b} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_q]^T$

Egalement, les coefficients b_k peuvent être calculés en utilisant l'équation (2.11).

On note que le nombre de valeurs de $h_d(n)$ utilisé est $p+q+1$, qui est justement égal au nombre de coefficients, et $b_0 = h_d(0)$.

- **Limitations de la méthode**

Les données $h_d(n)$ pour $n > p+q$ ne sont jamais utilisées. La précision du modèle n'est donc pas garantie au-delà de cet intervalle.

Les coefficients a_k et b_k peuvent faire en sorte que H(z) soit instable.

2.2.1.2 Méthode de Prony

2.2.1.2.1 Erreur d'équation

La transformée en z de l'erreur de modélisation est

$$E(z) = H_d(z) - \frac{B(z)}{A(z)} \qquad (2.17)$$

si on multiplie l'équation (2.17) par $A(z)$, on aura

$$E_1(z) = A(z)E(z) = A(z)H_d - B(z) \qquad (2.18)$$

L'équation (2.18) peut être exprimée dans le domaine temporel comme suit :

$e_1(n) = a(n) * h_d(n) - b(n)$ *Erreur d'équation*

ce qui correspond à

$$e_1(n) = \begin{cases} h_d(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k h_d(n-k) - b(n) & 0 \le n \le q \\ h_d(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k h_d(n-k) & n > q \end{cases} \quad (2.19)$$

Au lieu de mettre $e(n) = 0$ pour $n = 0 : p + q$, comme dans la méthode de Padé, la méthode de Prony commence par retrouver les coefficients du dénominateur qui minimise le critère de l'erreur d'équation suivant

$$E_{p,q} = \sum_{n=q+1}^{\infty} [e_1(n)]^2 = \sum_{n=q+1}^{\infty} \left[h_d(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k h_d(n-k) \right]^2, \quad (2.20)$$

qui dépend que des a_k .

2.2.1.2.2 Calcul des coefficients du filtre

- Calcul des coefficients a_k

Les coefficients a_k optimaux obéissent aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial E_{p,q}}{\partial a_k} = 0 \quad pour\ k = 1, \cdots p$$

$$\frac{\partial E_{p,q}}{\partial a_k} = 2 \sum_{n=q+1}^{\infty} e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial a_k}$$

$$= 2 \sum_{n=q+1}^{\infty} e(n) h_d(n-1) \qquad k = 1 : p$$

$$= 2 \sum_{n=q+1}^{\infty} \left\{ h_d(n) + \sum_{l=1}^{p} a_l h_d(n-l) \right\} h_d(n-k) = 0$$

ce qui implique

$$\sum_{l=1}^{p} a_l \left\{ \sum_{n=q+1}^{\infty} h_d(n-l) h_d(n-k) \right\} = -\sum_{q+1}^{\infty} h_d(n) h_d(n-k) \quad (2.21)$$

On définit $$r_h(k,l) = \sum_{n=q+1}^{\infty} h_d(n-l)h_d(n-k)$$

(2.22)

Donc on obtient les équations normales de Prony suivante

$$\sum_{l=1}^{p} a_l r_h(k,l) = -r_h(k,0) \quad , k = 1,....p \tag{2.23}$$

qui représentent un ensemble de p équations linéaires à p inconnus a_k.

L'écriture matricielle de (2.23) donne

$$\begin{bmatrix} r_h(1,1) & r_h(1,2) & \cdots & r_h(1,p) \\ r_h(2,1) & r_h(2,2) & \cdots & r_h(2,p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_h(p,1) & r_h(p,2) & \cdots & r_h(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_h(1,0) \\ r_h(2,0) \\ \cdots \\ r_h(p,0) \end{bmatrix}$$

ou bien

$$R_h \mathbf{a} = -\mathbf{r}_h \tag{2.24}$$

Où R_h est la matrice $(p \times p)$ d'auto corrélation dont les éléments sont définit par l'équation (2.22).

$$R_h = \begin{bmatrix} r_h(1,1) & r_h(1,2) & \cdots & r_h(1,p) \\ r_h(2,1) & r_h(2,2) & \cdots & r_h(2,p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_h(p,1) & r_h(p,2) & \cdots & r_h(p,p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_p]^T$$

$$\mathbf{r}_k = [r_h(1,0) \quad r_h(2,0) \quad \cdots \quad r_h(p,0)]^T$$

On note que $r_h(k,l)$ représente l'autocorrélation du signal déterministe $h_d(n)$, obtenu en utilisant une infinité de valeurs de $h_d(n)$ *pour* $n = q+1, \cdots, \infty$, voir équation (2.22).

Notons que les coefficients du dénominateur peuvent être aussi obtenus comme suit :

Soit

$$H_d = \begin{bmatrix} h_d(q) & h_d(q-1) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ h_d(q+2) & h_d(q+1) & \cdots & h_d(q-p+3) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Et

$$\mathbf{c} = [h_d(q+1) \quad h_d(q+2) \quad \cdots \quad h_d(L-1)]$$

On a

$$R_h = H_d^T H_d$$

Et

$$\mathbf{r}_h = H_d^T \mathbf{c}$$

L'équation normale dans (2.24) devient

$$H_d^T H_d \mathbf{a} = -H_d^T \mathbf{c} \tag{2.25}$$

La solution de (2.25) est donc

$$\mathbf{a} = -H_d^{\#} \mathbf{c} \tag{2.26}$$

Avec $H_d^{\#} = (H_d^T H_d)^{-1} H_d^T$ est la pseudo inverse de la matrice H_d.

- **Calcul des coefficients** b_k

Après avoir calculé les coefficients du dénominateur a_k, l'étape suivante est de déterminer les *q+1* coefficients du numérateur. Comme dans la méthode de Padé, on pose $h(n) = h_d(n)$ *pour* $n = 0,1,...,q$

On résout donc le système d'équations suivant :

$$b_n = h_d(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k h_d(n-k) \tag{2.27}$$

2.2.1.3 Méthode de Shanks

Dans la méthode de Prony les coefficients a_k sont déterminés de façon optimale par la minimisation de l'erreur au carré (2.20), mais les b_k ne le sont pas. Dans la méthode de Shanks, les coefficients b_k sont déterminés de façon optimale par la minimisation de la fonction de l'erreur $e_s = \sum_{n=0}^{\infty} [h(n) - h_d(n)]^2$, où a_k supposé fixe.

- **Calcul des coefficients** a_k

Les coefficients du dénominateur sont estimés par la minimisation de l'expression suivante :

$$\min_a \sum_{n=q+1}^{L-1} [A\{h_d(n)\}] \text{ ou } \min_a \sum_{n=q+1}^{L-1} \left[\sum_{k=0}^{p} a_k h(n-k) \right] \tag{2.28}$$

$A\{.\}$ désigne la convolution.

Ce résultat est similaire à la méthode de covariance de la prédiction linéaire et de la méthode de Prony.

- **Calcul des coefficients** b_k

Les coefficients du dénominateur b_k sont déterminés comme suit :

- Calcul de la réponse impulsionnelle $g(n)$ du filtre tout pôle $1/A(z)$, en utilisant par exemple la récurrence :

$$g(n) = \delta(n) - \sum_{l=1}^{p} a_l g(n-l), \qquad n = 0,1,\cdots,L-1 \tag{2.29}$$

avec $g(n) = 0$ *pour* $n < 0$

- Calcul des coefficients b_k du filtre tout zéros (MA) par minimisation du critère suivant :

$$\min_{b_k}\left\{\sum_{n=0}^{L}\left(\left(h_d(n) - \sum_{k=0}^{q} b_k g(n-k)\right)^2\right)\right\}$$

Ceci aboutit aux équations normales suivantes

$$G'Gb = G'c \tag{2.30}$$

où

$$G = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ g(q) & \cdots & & \cdots & g(0) \\ \vdots & & & & \\ g(L-1) & g(L-2) & & \cdots & g(L-q-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c} = [h_d(0) \quad h_d(1) \quad \cdots \quad h_d(L-1)]'$

La solution est donc

$$\mathbf{b} = G^{\#}\mathbf{c} \tag{2.31}$$

$G^{\#} = (G'G)^{-1}G'$

On note que dans ce cas les a_k et b_k sont déterminés de façon optimale, différente de celle de la méthode des moindres carrés puisque aucune de ces méthodes ne résout le problème des moindres carré

$$\min_{a,b}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(h_d(n) - h(n)\right)^2\right\}$$

2.2.1.4 Méthode de Kalman

2.2.1.4.1 Erreur de modélisation alternative

Une solution linéaire du problème non linéaire $\min f(\mathbf{a},\mathbf{b})$, proposée par Kalman, minimise une erreur linéaire illustrée par la figure 2.1

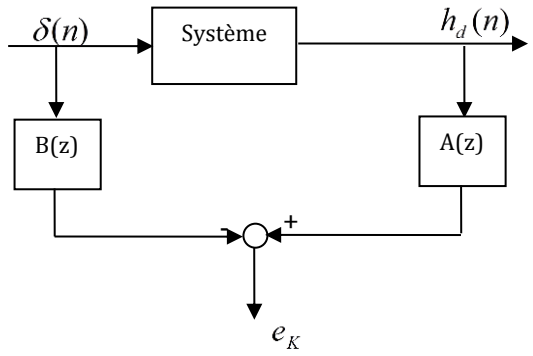


Figure2. 1: Erreur de Kalman

L'idée

Estimé le dénominateur et le numérateur A et B simultanément en minimisant le problème linéaire suivant

$$\min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \sum_n e_K(n) = \min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \sum_n \left[B\{\delta(n)\} - A\{h_d(n)\}\right]^2 \tag{2.32}$$

2.2.1.4.2 Calcul des coefficients

L'erreur à l'instant n peut être exprimée comme suit

$$e_K(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k \delta(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a_k h_d(n-k) - h_d(n) \tag{2.33}$$

Soit $\mathbf{c}$ le vecteur des coefficients et $\mathbf{s}_n$ le vecteur des entrées et sorties, définis par

$\mathbf{c}^T = [b_0,\ldots,b_q,-a_1,\ldots,-a_p]$,

$\mathbf{s}_n{}^T = [\delta(n),\ldots\ ,\delta(n-q),h_d(n-1),\ldots,h_d(n-p)]$;

La relation (2.33) devient

$$e_K(n) = \mathbf{s}_n^T\mathbf{c} - h_d(n) \tag{2.34}$$

En prenant la somme sur n et le gradient par rapport à $\mathbf{c}$ on obtient

$$grad(\sum_n [e_K(n)]^2) = \partial/\partial c(\sum_n [e_K(n)]^2) = 2\sum_n (\partial e_K(n)/\partial c)e_K(n) = 2\sum_n \mathbf{s}_n e_K(n) = 0 \tag{2.35}$$

Substituons (2.34) dans (2.35) on obtient

$$(\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^{T'})\mathbf{c} = \sum_n h_d(\mathrm{n})\mathbf{s}_n$$

La solution du problème (2.32) est donnée par

$$\mathbf{c} = Q^{-1}\beta \tag{2.36}$$

avec $Q = \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T$ matrice de corrélation

et $\beta = \sum_n h_d(n)\mathbf{s}_n$ le vecteur de corrélation

et le vecteur de paramètre

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{a} \end{bmatrix}$$

Bien que le problème de minimisation de l'erreur représentée graphiquement par la figure 2.1, peut être facilement résolu par ordinateur, l'erreur résiduelle de la relation (2.33) n'a pas un sens physique.

2.2.2 Méthodes de modélisation des signaux déterministes itératives

2.2.2.1Méthode de pré filtrage itérative (Steiglitz et McBride)

2.2.2.1.1 Erreur de modélisation alternative

La méthode de Steiglitz et McBride, représentée par le schéma bloc de la figure 2.2, est un algorithme itératif permet de retrouver les paramètres d'un modèle pôle-zéros par la minimisation du critère suivant :

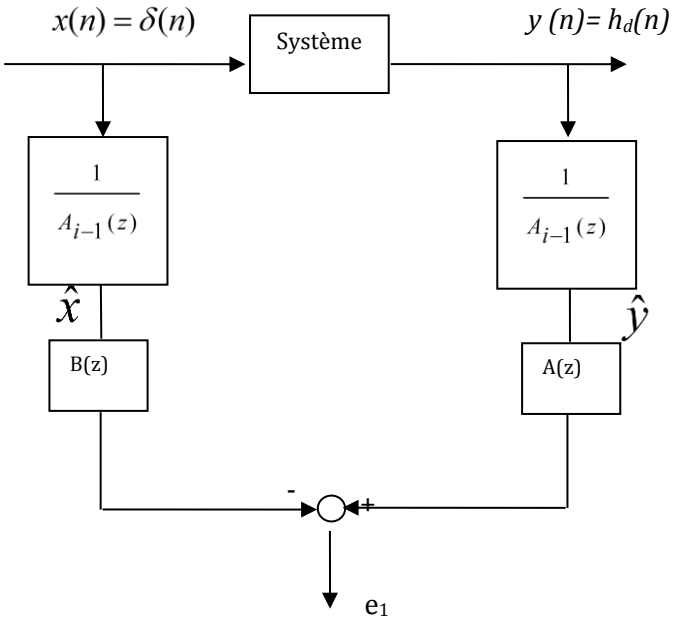


Figure2. 2 : Méthode de pré filtrage itérative

$$\min_{a,b}\left[e_1(n)\right]^2 = \min_{a,b}\sum_{n=0}^{L-1}\left[\frac{B(z)}{A^{(l)}(z)}\{\delta(n)\}-\frac{A(z)}{A^{(l)}(z)}\{h_d(n)\}\right]^2 \tag{2.37}$$

$A^{(l)}(z)$ désigne l'estimé du dénominateur à la l[ième] itération,

- Etapes de la méthode

- Obtenir l'estimée A_1 du dénominateur par la méthode de Kalman ou par la méthode de prédiction linéaire
- L'estimé suivant de *A* est obtenu par la résolution du problème linéaire (2.37).
- Le nouveau dénominateur obtenu est utilisé pour itérer la procédure. Cette procédure est appelée mode1.

2.2.2.1.2 Itération Mode1

Soit l'erreur $e_1(n)$ définit par

$$E_1(z) = \frac{B_j(z)}{A_{j-1}(z)}X(z) - \frac{A_j(z)}{A_{j-1}(z)}Y(z), \tag{2.38}$$

Avec *j* désigne l'itération. Il est supposé que les coefficients de A_{j-1} ont été calculés précédemment et considéré fixe durant la j[ème] itération. Ainsi

$$\frac{\partial E_1(z)}{\partial b_i} = \frac{z^{-i}}{A_{j-1}(z)}X(z) = \hat{X}(z)z^{-i}$$
$$\frac{\partial E_1(z)}{\partial a_i} = -\frac{z^{-i}}{A_{j-1}(z)}Y(z) = -\hat{Y}(z)z^{-i} \tag{2.39}$$

Comme les expressions (2.39) sont indépendantes des coefficients a_k et b_k, et $e_1(n)$ est une fonction linéaire de ces coefficients, le gradient de *f* (**a,b**) est linéaire et les valeurs optimales des coefficients peuvent être obtenues par régression linéaire sur l'entrée et la sortie (Kalman).

Si le vecteur des coefficients **c** et le vecteur des signaux ***s*** sont définit par

$$\mathbf{c}^T = [b_0,\cdots,b_q,-a_1,\cdots,-a_p],$$

$$\mathbf{s_n^T} = [\hat{x}(n),\cdots,\hat{x}(n-q),\hat{y}(n-1),\cdots,\hat{y}(n-p)];$$

Où les signaux $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont obtenus par le filtrage des signaux x et y, définit dans (2.39) et utilisant l'estimé précédent du dénominateur A_{j-1}.

$e_1(n)$ et $f_1(\mathbf{a},\mathbf{b})$, pourront s'écrire donc comme suit

$$e_1(n) = \mathbf{cs}^T(n) - \hat{y}(n) \tag{2.40}$$

$$f_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{n=0}^{L-1} e_1(n)^2$$

$$grad(\sum e_1^2(n)) = \partial / \partial c(\sum e_1^2(n)) = 2\sum(\partial e_1(n)/\partial c)e_1(n) = 2\sum \mathbf{s}(n)e_1(n) = 0$$

Ainsi les $(q+p+1)$ valeurs de a_k, b_k minimisent la somme de l'erreur au carré $f_1(\mathbf{a},\mathbf{b})$ pourront s'obtenir directement par

$$\mathbf{c} = Q^{-1}\mathbf{d} \tag{2.41}$$

Avec $Q = \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_\mathbf{n}^\mathbf{T}$ et $\mathbf{d} = \sum_n \hat{y}(n)\mathbf{s}_n$

Si A_0 est supposée être l'unité, e_1 est simplement l'erreur vraie filtré par un système de fonction de transfert A_1. Ainsi dans la première itération, $\mathbf{e}_1$ est analogue à l'erreur de Kalman. L'itération peut être alors initialisée soit avec la première estimée de A obtenu par d'autres sources ou avec l'équivalent de l'estimé de Kalman. Le calcul de $\mathbf{c}$ est répété ; si à une certaine étape de l'itération $A_{j-1}(z) \approx A_j(z)$, alors $e_1(n) \approx e(n)$ et $f_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) \approx f(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Telle convergence ne peut être garantie, mais l'épreuve expérimentale indique que la procédure converge dans plusieurs problèmes pratiques, et produit une réduction significative de la somme des carrés de l'erreur comparé avec celle de Kalman, ou autres techniques d'approximation non optimales.

2.2.2.1.3 Itération Mode2

Lorsque l'itération Mode1 converge, $f_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) = f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ mais $grad\ f_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq grad\ f(\mathbf{a},\mathbf{b})$, Parce que les deux erreurs, presque égales, sont des fonctions différentes des coefficients du modèle. La solution de ce deuxième problème est donnée par (2.36) mais la méthode de calcul de Q et β est différente. La transformée de z de l'erreur $e(n)$ est

$$E(z) = X(z)\frac{B(z)}{A(z)} - Y(z), \tag{2.42}$$

Ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial E(z)}{\partial b_i} = \frac{X(z)}{A(z)} z^{-i} = \hat{X}(z) z^{-i} \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial E(z)}{\partial a_i} = \frac{-X(z)N(z)}{A^2(z)} z^{-i} = -\frac{V(z)}{A(z)} z^{-i} = -\hat{V}(z) z^{-i}$$

Alors une approximation de (2.8) peut être écrite

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial b_i} \approx 2\sum_n e_1(n)\hat{x}(n-i) \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial a_i} \approx -2\sum_n e_1(n)\hat{v}(n-i) \end{cases} \tag{2.44}$$

On remarque que les expressions de (2.44) sont linéaires en a_k et b_k. Le calcul de ces coefficients est similaire à celui de Mode1.

Si on définit le vecteur p_n^T

$$\mathbf{p_n^T} = \left[\hat{x}(n)\ ,\cdots,\hat{x}(n-q),-\hat{v}(n-1)\cdots,-\hat{v}(n-p)\right]$$

Le gradient de *f* par rapport à $\mathbf{c}$ devient approximativement égal à

$$grad(\sum e_n^2) = 2\sum(\mathbf{p}_n e_n) = 2\sum(\mathbf{p}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{c} - \hat{y}_n \mathbf{p}_n)$$

Où la seconde égalité est vraie seulement à la convergence. La procédure est alors identique à celle de mode1 excepté que les définitions de Q et $\mathbf{d}$ seront

$$Q = \sum \mathbf{p}_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{d} = \sum y(n)\mathbf{p}_n \tag{2.45}$$

2.2.2.2 Méthode de Shaw

L'idée :

Le problème de minimisation de l'erreur de modélisation non linéaire a été théoriquement découplé en deux sous problèmes ; un problème d'estimation linéaire en $\mathbf{b}$ et un problème d'optimisation non linéaire en $\mathbf{a}$.

Le problème d'optimisation non linéaire peut être écrit comme suit

$$\min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} e(n)^2 = \min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \sum_{n=0}^{L-1} \left[h_d(n) - \frac{B(z)}{A(z)} \{\delta(n)\} \right]^2 \tag{2.46}$$

2.2.2.2.1 Découplage du critère non linéaire exact

Soit $H_{\mathbf{a}}(z)$ le filtre inverse correspondant à $A_{\mathbf{a}}(z)$, c'est-à-dire

$$A_{\mathbf{a}}(z) H_{\mathbf{a}}(z) = 1 \tag{2.47}$$

Ceci est une opération de convolution où la séquence a_k dans $A_{\mathbf{a}}(z)$ est finie, alors que les $h_{\mathbf{a}}(n)$ dans $H_{\mathbf{a}}(z)$ sont infinies. L'écriture matricielle de (2.47) est

$$A_{\mathbf{a}} H_{\mathbf{a}} = I_L \tag{2.48}$$

où I_L désigne la matrice identité $(L \times L)$, et $A_{\mathbf{a}}$, $H_{\mathbf{a}}$ les matrices de convolution formées par les éléments définis par

$A_{\mathbf{a}}(i, j) \hat{=} a(i - j),$

et

$H_a(i, j) \hat{=} h_a(i - j), \quad pour \quad i, j = 1, \cdots\cdots L$

Sous forme partitionnée on a

$$A_a = \begin{bmatrix} A_u^T \\ A^T \end{bmatrix} \text{ et } H_a = \begin{bmatrix} H_l H_r \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Avec $A_u \in R^{L \times (q+1)}$, $A \in R^{L \times (L-q-1)}$, $H_L \in R^{L \times (q+1)}$, $H_r \in R^{L \times (L-q-1)}$

Utilisant (2.38) le critère de l'optimisation (2.46) peut être écrit comme suit :

$$\min_{a,b} \sum_{n=0}^{L-1} \left[h_d(n) - \delta(n) * h_a(n) * b(n) \right]^2 \tag{2.50}$$

Où * indique l'opération de convolution. Sous forme matricielle, le problème (2.50) est équivalent à

$$\min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \left\| e(\mathbf{a},\mathbf{b}) \right\|^2 \hat{=} \min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \left\| \mathbf{h}_d - H_l \mathbf{b} \right\|^2 \tag{2.51}$$

Où le vecteur d'erreur définit dans (2.2) a la forme suivante :

$$\mathbf{e} = \mathbf{h}_d - H_l \mathbf{b} \tag{2.52}$$

Cette équation montre clairement la relation linéaire entre l'erreur **e** et le vecteur des coefficients **b**, et aussi la relation non linéaire entre **e** et le vecteur des coefficients **a** via la matrice H_l. Ceci est un problème d'optimisation mixte où les variables linéaires et non

linéaires paraissent séparément. L'objectif essentiel est d'optimiser les deux ensembles de variables indépendamment.

- **Etapes de la méthode**

Si H_l est connue, c'est à dire **a**, alors la minimisation de (2.52) fournit l'estimé linéaire de $\mathbf{b}$ au sens des moindres carrés suivante

$$\hat{\mathbf{b}} = H_l^{\#}\mathbf{h}_d \tag{2.53}$$

Où $H_l^{\#}$ désigne la pseudo inverse de H_l.

Utilisant $\hat{\mathbf{b}}$ dans (2.51), le critère d'optimisation pour $\mathbf{a}$ devient

$$\min_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \left\|\mathbf{h}_d - H_l\mathbf{b}\right\|^2 = \min_{\mathbf{a}} \left\|(I_L - P_{H_l})\mathbf{h}_d\right\|^2 \tag{2.54}$$

Où $P_{H_l} \triangleq H_L(H_L^T H_L)^{-1}H_L^T$ désigne la matrice de projection de H_l.

On note que dans (2.54), les paramètres $\mathbf{a}$ sont reliés au critère de l'erreur de façon non linéaire compliqué, par P_{H_l}. Le critère (2.54) est reformulé afin de le relier directement aux coefficients $\mathbf{a}$

$$\min_{\mathbf{a}} \left\|(I_L - P_{H_l})\mathbf{h}_d\right\|^2 = \min_{\mathbf{a}} d^T(\mathbf{a})(A^T A)^{-1}d(\mathbf{a}) \tag{2.55}$$

où $d(\mathbf{a})$ est l'erreur d'équation définit par

$d(\mathbf{a}) \triangleq H_{d2}\mathbf{a} = A^T\mathbf{h}_d$

Avec

$$H_{d2} = \begin{bmatrix} h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ h_d(q+2) & h_d(q+1) & \cdots & h_d(q-p+3) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_d(L-1) & h_d(L-2) & \cdots & h_d(L-p-1) \end{bmatrix} = [\mathbf{g} \vdots G]$$

Où

$$G = \begin{bmatrix} h_d(q) & h_d(q-1) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ h_d(q+2) & h_d(q+1) & \cdots & h_d(q-p+3) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_d(L-2) & \cdots & \cdots & h_d(L-p-1) \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

$$\mathbf{g} = [h_d(q+1) \quad h_d(q+2) \quad \cdots \quad h_d(L-1)]' \tag{2.57}$$

2.2.2.2.2 Algorithme de calcul pour estimer le dénominateur

Le critère dans (2.55) est non linéaire, donc on ne peut le minimiser directement. La méthode proposée a trois phases d'algorithme : phase 0, est l'étape d'initialisation, phase 1, minimise une version linéaire de (2.55) et dans la phase 2, la dérivée du critère de l'erreur est mis à zéros.

Phase 0 : initialisation

La norme L_2 de l'erreur d'équation $d(\mathbf{a})$ donnée par (2.56) est minimisée en premier, c'est à dire,

$$\min_{\mathbf{a}} \|d(\mathbf{a})\|^2 \quad avec \quad a_0 = 1$$

On aboutit à l'estimé initial suivant de $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -G^{\#}\mathbf{g} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

La matrice G est donnée par l'équation (2.56).

Phase 1 :

La forme finale du vecteur erreur peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{h}_d \\ &= WA^T \mathbf{h}_d \\ &= WH_{d2}\mathbf{a} \\ &= W[\mathbf{g} : G]\mathbf{a} \end{aligned}$$

Où

$$W = A(A^T A)^{-1} \tag{2.59}$$

Le dénominateur est estimé par

$$\mathbf{a}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -[X^{(l)}G]^{-1} X^{(l)}\mathbf{g} \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

Où

$$X^{(l)} = G^T W^{T(l)} W^{(l)} = G^T (A^{T(l)} A^{(l)})^{-1}$$

L'itération continu jusqu'à ce que $\left\|\mathbf{a}^{(l+1)} - \mathbf{a}^{(l)}\right\|^2 \le \theta$

Où θ est un nombre petit arbitraire. Il y a aussi une deuxième phase de l'algorithme où le gradient de la norme de l'erreur est mis à zéros. Les résultats de la simulation indiquent que (2.60) donne d'excellents résultats.

- **Remarques**

Les résultats de simulation, montrant l'efficacité de la méthode de DSP-modélisation des signaux déterministes pour l'approximation rationnelle de s^{α}, sont présentés et discutés dans les références [41-44]. Nous présentons dans ce qui suit les principaux résultats obtenus :

- Nous avons comparé, en premier lieu, les méthodes sous optimales non itératives. D'après les résultats de simulation, nous avons conclu que les filtres RII approximés par les méthodes de Prony et Shanks, sont de meilleure qualité que celui obtenu par la méthode de Padé.
- La méthode de Shanks présente la plus petite valeur de l'erreur relative maximale et de la somme des erreurs de modélisation au carré normalisée. Le temps de calcul est le même pour toutes les méthodes.
- La méthode de Shanks est la plus efficace que les méthodes de Prony, Padé et Kalman. L'inconvénient de ces méthodes réside dans le fait qu'elles n'ont pas de mécanisme pour réestimer les coefficients originaux.

Nous avons examiné deux méthodes sous optimales itératives, la méthode de pré filtrage et la méthode de Shaw. Nous avons conclu que la méthode de pré filtrage donne une approximation de meilleure qualité que celle de Shanks mais le temps de calcul de cette méthode est plus grand. Dans la méthode de Shaw, le problème de modélisation a été découplé en un linéaire et un autre non linéaire, les résultats obtenus après quatre itérations sont comparés à ceux de Shanks.

Les filtres approximés par les méthodes précédentes sont stables et à phase minimale, ce qui est désiré pour une réalisation numérique en temps réel. D'après tous ce qui précède nous avons conclu que les méthodes itératives sont plus efficaces que celles non itératives, l'inconvénient de ces méthodes est que le temps de calcul est long.

2.4 Conclusion :

Une description détaillée des méthodes de modélisation des signaux déterministes itératives (Steiglitz-Mc Bride, Shaw) et non itératives (Padé, Prony, Shanks, Kalman) est présentées dans ce chapitre. Dans le chapitre suivant nous allons appliquer la méthode de Steiglitz-Mc Bride pour calculer les coefficients de l'approximation rationnelle de s^{α} .

Chapitre3

Approche proposée et Applications

3.1 Introduction **35**

3.2 Fonction de transformation du plan s au plan z proposée **35**

3.2.1 Intégrateur numérique de Tseng **35**

3.2.2 Dérivateur proposé **38**

3.2.2.1 Approche de stabilisation **38**

3.3 Approximation de l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire **39**

3.3.1 Réponse impulsionnelle de l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire discret (ODIFD) **40**

3.4 Résultats de simulation et discussion **42**

3.4.1 Approximation rationnelle discrète de l'opérateur s^{α} **42**

3.4.2 Comparaison des méthodes DSP-Modélisation et DSP-troncature **51**

3.5 Applications : Synthèse des filtres passe-bas et passe-haut fractionnaires numériques **58**

3.5.1 Introduction : **58**

3.5.2 Les filtres à un élément fractionnaire simple **58**

3.5.2.1 Filtre passe-bas fractionnaire 59

3.5.2.2 Filtre passe-haut fractionnaire 60

3.5.3 Conception de filtre fractionnaire numérique par un filtre RII 60

3.5.3.1 Conception des filtres passe-bas fractionnaires numériques 61

3.5.3.2 Conception des filtres passe-haut fractionnaires numériques 74

3.6 Conclusion **85**

3.1 Introduction

Du point de vue système, la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire d'une fonction est calculée comme étant la sortie d'un système linéaire invariant décrit par la fonction de transfert irrationnelle, équation (1) . L'un des thèmes de recherche importants dans le calcul fractionnaire est l'implémentation numérique des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire. Plusieurs travaux récents ont dévoués au problème du calcul numérique de l'intégrale et de la dérivée fractionnaire. Les approches proposées dans la littérature sont regroupées en deux catégories principales appelées méthodes directes et méthodes indirectes. L'étape clé de l'implémentation numérique de l'opérateur de dérivation et d'intégration s^{α} est l'utilisation des fonctions de transformation du plan s au plan z dont les plus utilisées dans la littérature sont : Tustin, Euler, Al-Alaoui qui sont du premier ordre.

Il est bien connu [44], que l'avantage principal de l'utilisation des règles d'intégration d'ordre supérieur est la grande précision que présentent ces opérateurs pour la discrétisation des filtres à temps continu classique linéaire et invariant pour les applications en temps réel. Ceci nous a incités à proposer un opérateur de transformation du plan s au plan z d'ordre deux dont le but d'améliorer le processus de discrétisation et d'améliorer les performances du filtre discret approximant s^{α}. D'autre part, la technique de modélisation des signaux déterministes a prouvé son efficacité pour la synthèse des filtres RII, approximant s^{α}, basées sur des fonctions de transformation du plan s au plan z du premier ordre. Dans ce travail, nous confirmons ce résultat par l'application de cette méthode basée sur les opérateurs d'ordre supérieur. Nous démontrons aussi dans ce travail que la méthode DSP- troncature n'est pas appropriée pour l'approximation rationnelle de s^{α}.

3.2 Fonction de transformation du plan s au plan z proposée

La fonction de transformation du plan s au plan z proposée dans ce travail est obtenue par l'inversion et la stabilisation de la fonction de transfert de l'intégrateur numérique d'ordre deux proposé par Tseng [45].

3.2.1 Intégrateur numérique de Tseng

Dans [45], Tseng a proposé un nouveau intégrateur à phase non minimale afin d'améliorer la réponse en amplitude de l'intégrateur conventionnel de Simpson en réduisant l'intervalle d'échantillonnage de T à 0.5T. Les différentes étapes de la méthode sont résumées ci-après :

- Premièrement en remplaçant T par 0.5T dans l'expression analytique de la sortie y(n) de l'intégrateur conventionnel de Simpson et prenant la transformée en z, on obtient la fonction de transfert en z suivante :

$$G(z) = \frac{T(1+4z^{-1/2}+z^{-1})}{6(1-z^{-1})} \tag{3.1}$$

- L'opérateur de retard numérique d'ordre un demi $z^{-1/2}$ dans (3.1) est ensuite approximé par un filtre passe tout RII ou RIF en utilisant les techniques d'approximation de l'opérateur de retard d'ordre fractionnaire. La fonction de transfert du filtre RII approximant $z^{-1/2}$ considérée dans ce travail est la suivante :

$$z^{-1/2} = (1/3 + z^{-1})/(1 + 1/3z^{-1}) \tag{3.2}$$

En substituant l'équation (3.2) dans (3.1), on obtient la fonction de transfert de l'intégrateur de Tseng suivante :

$$G(z) = \frac{T}{6}\frac{7+16z^{-1}+z^{-2}}{3-2z^{-1}-z^{-2}} \tag{3.3}$$

L'intégrateur dans (3.3) possède deux zéros réels situés à $z = -2.2214$ et $z = -0.064309$, et deux pôles à $z = 1$ et $z = -0.33333$.

Pour illustrer les performances de l'intégrateur (3.3), la figure 3.1 montre l'erreur relative en amplitude (%) entre l'intégrateur idéal $\frac{1}{s}$ et les intégrateurs correspondant aux fonctions de transformation du plan s au plan z présentées dans le tableau 3.1.

$$Er = \left(\left|Hi\right| - \left|H_{app}\right|\right) \Big/ \left|Hi\right| \quad (\%) \tag{3.4}$$

Avec $H_i = s^{-1}\Big|_{s=j2\pi f}$, $H_{app} = [M(z)]^{-1}\Big|_{z=e^{j2\pi fT}}$ et $M(z)$ fonction de transformation du plan s au plan z .

Méthode	Conversion s-z
Euler	$s \approx \frac{1-z^{-1}}{T}$
Tustin	$s \approx \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
Al-Alaoui	$s \approx \frac{8}{7T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/_7}$
Al-Alaoui- Simpson	$s \approx \frac{0.8038475773}{T}\frac{1-z^{-2}}{(1+0.2679491924z^{-1})^2}$
Al-Alaoui -SKG	$s \approx \frac{1.1272}{T}\frac{(z^3-z^2)}{(z^3+0.168z^2-0.0607z+0.0199)}$
Al-Alaoui-Schneider	$s \approx \frac{1.39818166724}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+0.4660655596z^{-1}-0.06787888z^{-2})}$

Tableau 3. 1 Fonctions de transformation du plan s au plan z

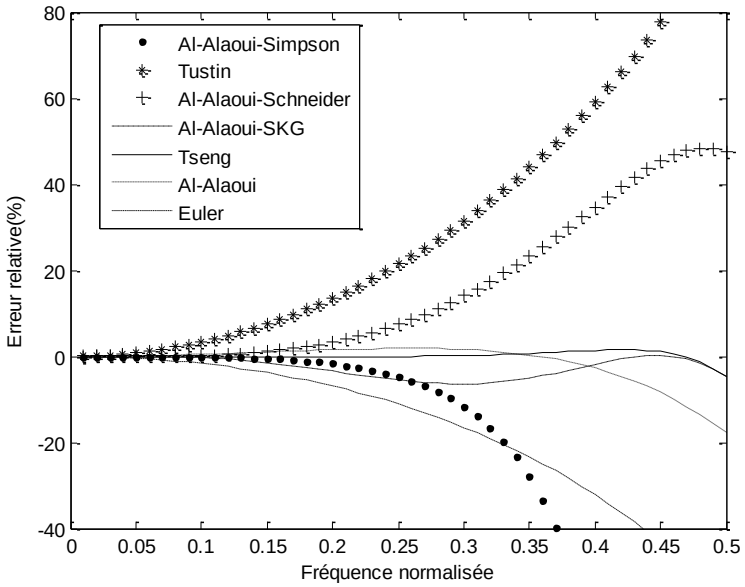


Figure3. 1: Erreur relative (%) en amplitude des intégrateurs T=1s

D'après la figure 3.1, il est clair que l'intégrateur (3.3) donne une approximation de la réponse en fréquence d'amplitude avec la plus petite valeur de l'erreur dans presque toute la gamme de fréquence surtout dans les hautes fréquences où la courbe de celle-ci est superposée à celle d'Al-Alaoui – SKG.

3.2.2 Dérivateur proposé

D'après l'équation (3.3), l'intégrateur G(z) a un zéros ($z = -2.2214$) à l'extérieur du cercle unité, G(z) est donc un intégrateur à phase non minimale, son inverse est donc un dérivateur instable.

Soit

$$H(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{6}{T}\frac{3-2z^{-1}-z^{-2}}{7+16z^{-1}+z^{-2}} \tag{3.5}$$

L'équation (3.5) peut être écrite sous la forme suivante :

$$H(z) = \frac{1}{G(z)} = \left(\frac{18}{7T}\right)\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})} \tag{3.6}$$

Avec $z_1 = 1$, $z_2 = -0.33333$ et $p_1 = -2.2214$, $p_2 = -0.064309$, sont les zéros et les pôles de H(z) respectivement. On note que $p_1$est un pôle instable.

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode de placement de pôles afin d'obtenir un dérivateur stable.

3.2.2.1 Approche de stabilisation

L'idée [46] **:**

Soit *H(z)* une fonction de transfert de la forme (2.3). Supposons que *H(z)* a un pôle réel à $z = \alpha$, en plaçant ce dernier par un pôle à $z = \frac{1}{\alpha}$ est équivalent à multiplier par la fonction $\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\alpha}}$ qui a une amplitude égale à $|\alpha|$.

Donc en appliquant cette approche pour stabiliser le dérivateur instable (3.6) en inversant le pôle instable p_1, ensuite en compensant les changements en amplitude on obtient un dérivateur stable de fonction de transfert suivante :

$$s \approx H(z) = \left(\frac{18}{7T(-p_1)} \right) \left(\left(1 - z_1 z^{-1}\right)\left(1 - z_2 z^{-1}\right) / \left(\left(1 - (1/p_1) z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right) \right) \right) \quad (3.7)$$

Pour illustrer les performances du nouveau dérivateur stable, figure 3.2 montre l'erreur relative en amplitude entre le dérivateur idéal, le dérivateur proposé et les fonctions de transformation du plan s au z rapportées dans le tableau3.1.

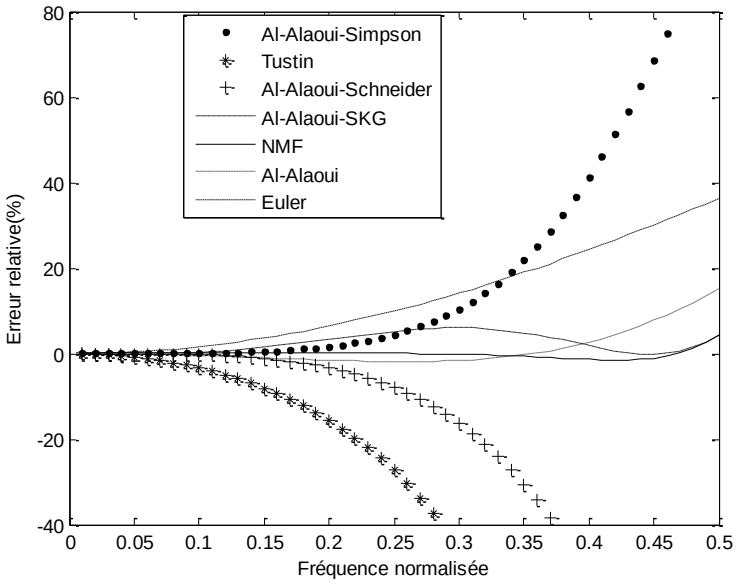


Figure3. 2 : Erreur relative (%) en amplitude des dérivateurs, T=1s

Nous remarquons d'après la figure 3.2 que le nouveau dérivateur (NMF) de fonction de transfert donnée par l'équation (3.7) présente la plus petite erreur relative dans presque toute la gamme de fréquence. En effet la NMF permet d'approximer le dérivateur idéal avec une erreur $E_r \leq 2.91\%$.

3.3 Approximation de l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire numérique par un filtre RII:

L'objectif est de faire profiter le monde numérique de la satisfaction acquise dans le monde analogique concernant les opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire. Il est due nécessaire d'établir la correspondance entre le domaine analogique et le domaine numérique.

L'équivalent numérique de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire s^{α} est obtenu en substituant l'équation (3.7) dans s^{α}:

$$s^{\alpha} \approx H^{\alpha}(z) = \left(\frac{18}{7T(-p_1)}\right)^{\alpha} \left((1 - z_1 z^{-1})^{\alpha} (1 - z_2 z^{-1})^{\alpha}\right) \Big/ \left(\left(1 - \frac{z^{-1}}{p_1}\right)^{\alpha} (1 - p_2 z^{-1})^{\alpha}\right) \tag{3.8}$$

La fonction $H^{\alpha}(z)$ dans (3.8) ne décrit pas un système linéaire discret puisque $H^{\alpha}(z)$ n'est pas une fonction rationnelle, le filtre correspondant n'est donc pas réalisable. Donc il faut trouver une approximation de $H^{\alpha}(z)$ sous forme d'un quotient de deux polynômes en z et déterminer les coefficients b_i et a_i du numérateur et dénominateur, respectivement de cette fonction *F(z)*, donnée par l'expression suivante :

$$F(z) = B(z) \big/ A(z) = \left(\sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}\right) \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}\right) \tag{3.9}$$

Plusieurs méthodes ont été utilisées dans la littérature. Dans ce travail nous avons appliqué la méthode de DSP -modélisation des signaux déterministes.

Les coefficients a_i et b_i sont donc calculés tel que la réponse impulsionnelle $h_F(n)$, la transformée en z inverse de *F(z)*, soit la meilleure approximation de la réponse désirée, $h_{\alpha}(n)$ la transformée en z inverse de $H^{\alpha}(z)$, selon un certain critère.

3.3.1 Réponse impulsionnelle de l'opérateur de dérivation et d'intégration fractionnaire discret (ODIFD)

Notre contribution dans ce travail consiste en l'obtention de la réponse impulsionnelle d'un opérateur fractionnaire d'ordre deux, équation (3.8), il est supposé que $h(n) = 0 \; pour \; n < 0$ correspond à un système causal.

Premièrement, réécrivons l'équation (3.8) sous la forme suivante

$$S^{\alpha} \approx H^{\alpha}(z) = \left(\frac{18}{7T(-p_1)}\right)^{\alpha} (1 - z_1 z^{-1})^{\alpha} (1 - z_2 z^{-1})^{\alpha} \left(1 - \frac{z^{-1}}{p_1}\right)^{-\alpha} (1 - p_2 z^{-1})^{-\alpha} \tag{3.10}$$

Soit

$$A_1(z) = (1 - z_1 z^{-1})^{\alpha}, \quad A_2(z) = (1 - z_2 z^{-1})^{\alpha}, \quad A_3(z) = \left(1 - \frac{z^{-1}}{p_1}\right)^{-\alpha}, \quad A_4(z) = (1 - p_2 z^{-1})^{-\alpha}$$

Donc

$$S^{\alpha} \approx \left(\frac{18}{7T(-p_1)}\right)^{\alpha} A_1(z) A_2(z) A_3(z) A_4(z) \tag{3.11}$$

Le développement en série de puissance de chaque élément $A_i(z)$ donne

$$A_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_i(n) \, z^{-n} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{3.12}$$

$$A_1(z) = \left(1 - z_1 z^{-1}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} h_1(n) z^{-n} = h_1(0) + h_1(1) z^{-1} + h_1(2) z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_2(z) = \left(1 - z_2 z^{-1}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} h_2(n) z^{-n} = h_2(0) + h_2(1) z^{-1} + h_2(2) z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_3(z) = \left(1 - 1/\, p_1 z^{-1}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} h_3(n) z^{-n} = h_3(0) + h_3(1) z^{-1} + h_3(2) z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

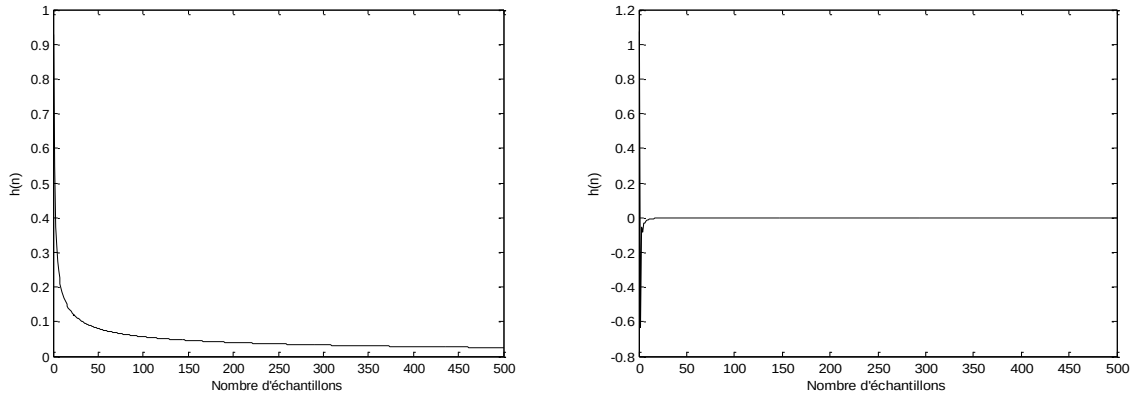
$$A_4(z) = \left(1 - p_2 z^{-1}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} h_4(n) z^{-n} = h_4(0) + h_4(1) z^{-1} + h_4(2) z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les L premières valeurs de la réponse impulsionnelle de ODIFD désirées, nécessaires pour le calcul de l'approximation rationnelle de $H^{\alpha}(z)$, peuvent être calculé par la convolution discrète des L première valeurs de $h_i(n)$,i =1,2,3,4 , i.e.

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n) * h_4(n) \quad et\, donc \quad h_{\alpha}(n) = \left(\frac{-18}{7Tp_1}\right)^{\alpha} h(n) \tag{3.12}$$

Une fois la réponse impulsionnelle désirée a été calculée, la méthode de modélisation de signaux déterministes est ensuite utilisée pour calculer les coefficients de la fonction de transfert *F(z).*

Basées sur l'équation (3.12) la réponse impulsionnelle désirée de ODIFD pour $\alpha = 0.5$, L =500,T=1s, est tracée sur la figure 3.3.



a) b)

Figure3. 3:Réponse impulsionnelle de ODIFD, L=500,T =1s, a) α = -0.5, b) α = 0.5

Dans la section suivante, la réponse impulsionnelle *h(n)* est modélisée pour calculer les coefficients des approximations rationnelles de s^{α}.

3.4 Résultats de simulation et discussion

3.4.1 Approximation rationnelle discrète de l'opérateur s^{α}

Dans cette section, nous présentons en premier lieu les résultats de simulation pour l'approximation rationnelle numérique (filtre RII) du dérivateur et intégrateur fractionnaire analogique s^{α} . Un exemple est présenté pour $\alpha = \mp 0.5$.

Le dérivateurs et l'intégrateur d'ordre un demi numérique est obtenu en utilisant la technique DSP-modélisation basée sur l'opérateur NMF proposé dans ce travail, en modélisant la réponse impulsionnelle présentée dans la figure 3.3.

Les résultats de simulation sont obtenus pour T=1s, et p=q=5. Les coefficients de la fonction de transfert du filtre RII désiré sont calculés en utilisant la fonction Matlab *stmcb.m*. Pour des raisons de comparaison des approximations rationnelles basées sur les opérateurs d'ordre deux (Al-Alaoui Schneider), d'ordre un (Hsue) [23], et celles basées sur les opérateurs les plus utilisés du premier ordre, Al-Alaoui, Tustin, Euler, sont conçus en utilisant la même méthode.

La fonction de transfert de l'opérateur Hsue est donnée par (3.13) [23]

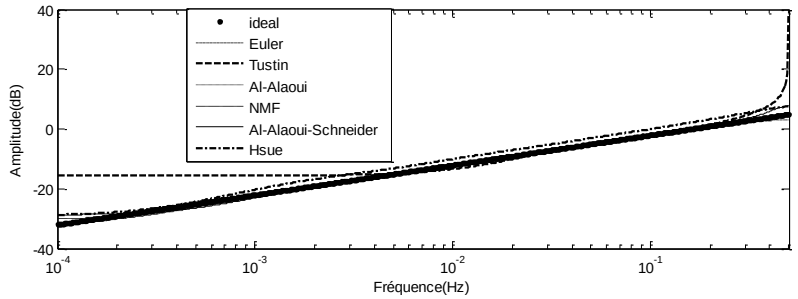
$$H(z) = \frac{T}{2}\left(\frac{1+0.1658z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) \tag{3.13}$$

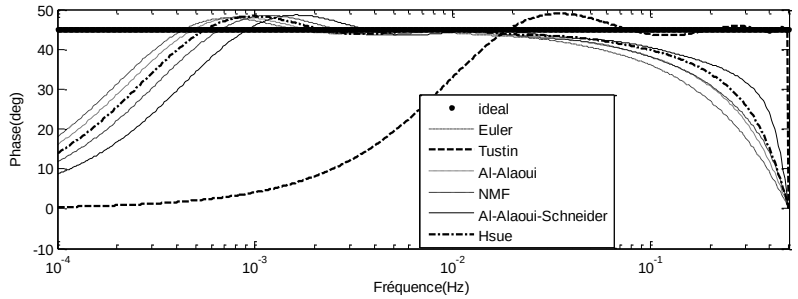
Les coefficients a_i et b_i des approximations rationnelles obtenues sont rapportés dans le tableau 3.2. Les coefficients sont écrits au format long (quatorze chiffres après la virgule) puisque le logiciel Matlab travaille en double précision.

Tableau3.2: Coefficients a_i et b_i des approximations rationnelles de s^{α}

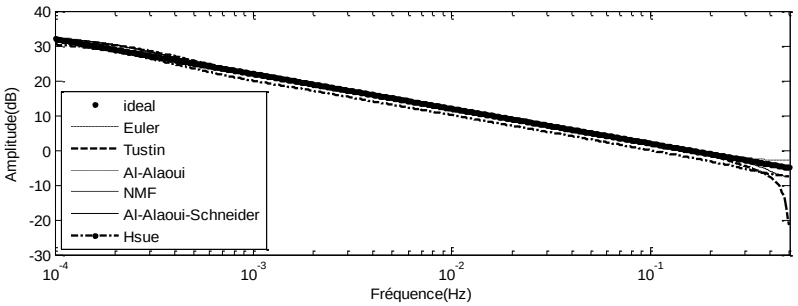
			Al-Alaoui	Tustin	Euler	Hsue	NMF	Al-Alaoui-Schneider
$\alpha = 0.5$	A(z)	a_0	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000
		a_1	-2.97314461443737	2.45474351965396	-3.27430826548467 7	-2.65021609677644 3	-2.26113548553470 2	-1.79908336977196 8
		a_2	3.13523856198332 7	1.39634170217726 9	3.98684182217921 7	2.29608003103799 6	1.37504715191108 6	0.49147590822983 6
		a_3	-1.32054197872299 8	-0.74190625741104 5	-2.16883554207261 8	-0.58490509809538 9	0.10867400570764 4	0.52432373289311 2
		a_4	0.14083739877276 2	-0.85000121668381 6	0.48040350236572 3	-0.09326736862168 2	-0.24836068683186 9	-0.20567990201891 6
		a_5	0.01786859124044 5	-0.16650221175637 5	-0.02406442552729 5	0.03251786519663 6	0.02629640519901 1	-0.00927333187003 9
	B(z)	b_0	1.06904496764456 7	1.41421356240795 6	0.99999999997338	1.41421356237113 1	1.07590361790363 7	1.18244732140346 5
		b_1	-3.78948956178130 1	2.05809851800663 6	-3.77430806144669 3	-4.63611225259713 5	-3.06816043772200 1	-2.99411427319328 6
		b_2	5.08079171180189 4	-0.78261241992909 0	5.49898889212734 5	5.61158571093562 1	2.86050900176912 6	2.26702117112511 7
		b_3	-3.12984076140204 3	-1.97826569033355 2	-3.81538607307839 2	-2.90627523906760 3	-0.71335596720078 9	-0.20659729256216 1
		b_4	0.83143609227549 4	-0.37472409428865 3	1.23167058853263 3	0.52497994409475 0	-0.25479915267642 9	-0.30384706143542 6
		b_5	-0.06194014250570 5	0.17659707581929 6	-0.14096443286953 7	0.00911146566368 2	0.09991898660804 3	0.05515370074128 6
$\alpha = -0.5$	A(z)	a0	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000
		a1	-3.98953858300241 7	-2.45474351596523 8	-4.11392135155079 2	-3.86021944005601 7	-3.62597714859318 4	-3.46406212720033 8
		a2	6.18880820030362 6	1.39634170217624 6	6.63556045200079 6	5.73149285837461 1	4.91998666572346 2	4.36547188080430 8
		a3	-4.61677395872010 3	0.74190625741177 8	-5.21430357443400 8	-4.01611135748847 0	-2.97615223390440 6	-2.27540157217495 2
		a4	1.62541443908685 3	-0.85000121668366 9	1.97770029389010 0	1.27881500651377 3	0.69659918568677 5	0.31111050874468 8
		a5	-0.20790796323380 8	0.16650221175615 9	-0.28503573303557 5	-0.13397686485848 7	-0.01445608600564 1	0.06288184859498 3
	B(z)	b0	0.93541434685411 5	0.70710678113386 5	1.00000000059568 99	0.70710677846410 3	0.92945128510520 1	0.84570363579040 9
		b1	-3.19749156109865 5	-1.02904925884185 8	-3.61411487811144 2	-2.27683029972431 2	-2.82126098426969 9	-2.30964626701529 0
		b2	4.03994669132761 2	-0.39130621003739 4	4.95534595967264 0	2.61352160810671 3	2.95490748536061 6	1.90806664715383 1
		b3	-2.22383705468241 6	0.98913284509890 2	-3.13289900003644 9	-1.18180393284108 8	-1.09877188538647 3	-0.15465414710389 0
		b4	0.44233625720925 1	-0.18736204708579 1	0.85732774651897 5	0.09665421645070 9	-0.02546250099566 6	-0.39954366107091 1
		b5	0.00363768060306 3	-0.08829853791881 0	-0.06565656568389 3	0.04135917897483 9	0.06115403065105 7	0.11009804477645 5

a)





b)



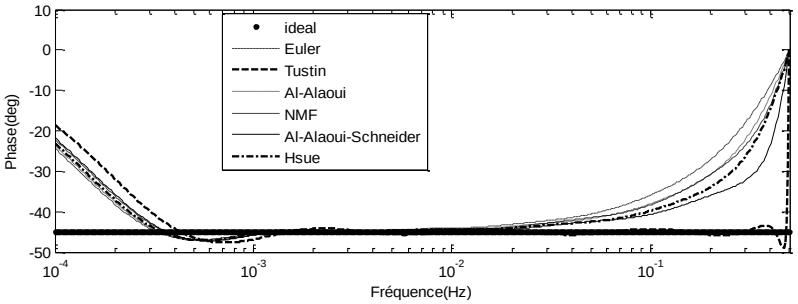


Figure3. 4 : Réponses en fréquence (amplitude et phase) de s^{α} et des approximations obtenues par la méthode Steiglitz MC-Bride basées sur les opérateurs du 1er ordre, Al-Alaoui-Schneider, et NMF a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = -0.5$

La figure 3.4 compare les réponses en amplitudes et de phase des approximations rationnelles définit par les coefficients rapportés dans le tableau 3.2, avec celles du dérivateur et de l'intégrateur d'ordre un demi idéal $s^{\pm 0.5}$.

En faisant un zoom sur la figure des réponses en fréquences d'amplitude, nous avons remarqué que la NMF améliore la réponse en amplitude dans les hautes fréquences comparée avec les opérateurs Al-Alaoui Schneider, Al-Alaoui, Tustin, Euler et Hsue. De plus les approximations basées sur la NMF ont des réponses en phase meilleurs que celles basées sur les opérateurs Al-Alaoui, Euler dans les hautes fréquences et la phase et plus proche de l'idéale pour une bande de fréquence plus large en utilisant l'opérateur de Tustin.

Afin de mieux analyser les réponses en amplitude dans toute la gamme de fréquence pour le dérivateur et l'intégrateur d'ordre un demi, la figure 3.5 montre l'erreur relative en amplitude entre l'opérateur idéal $s^{\alpha}, \alpha = \mp 0.5$ et les approximations définit par les coefficients donnés au tableau 3.2.

a)

b)

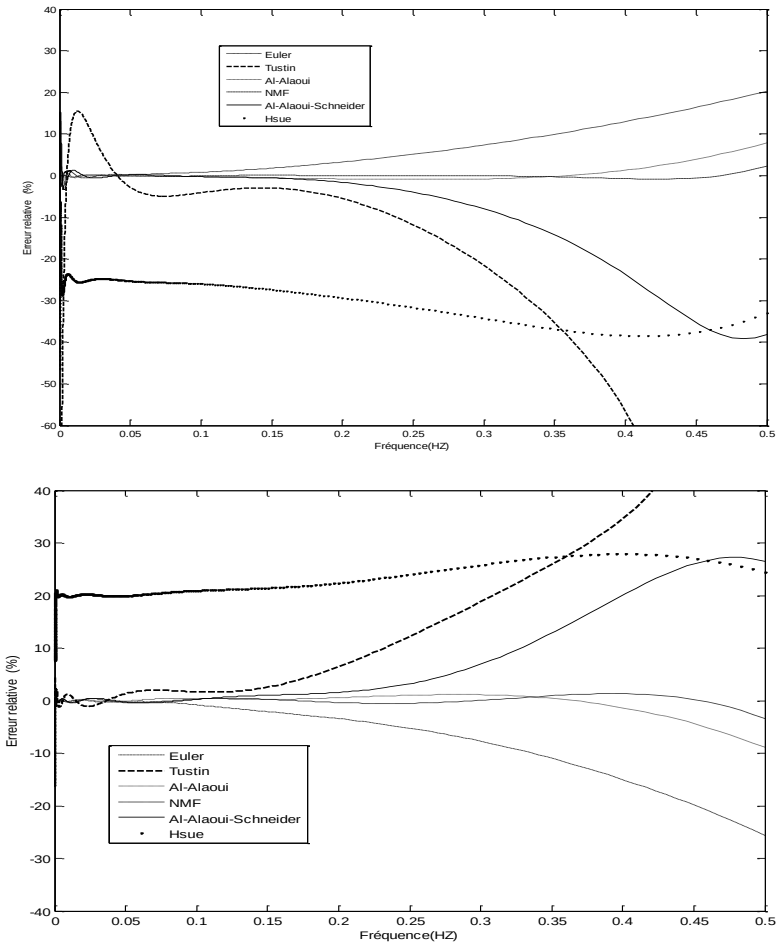


Figure3. 5: Erreur relative correspondante à NMF, Al-Alaoui-Schneider, et les opérateurs d'ordre un a)α = 0.5, b) α = −0.5

Nous pouvons observer d'après la figure 3.5 que la NMF permet d'obtenir un filtre avec la plus petite erreur relative comprise entre $Er = \pm 2.39\%$ pour $\alpha = \mp 0.5$.

Pour étudier la stabilité des filtres obtenus, la figure 3.6 montre la distribution des pôles et des zéros. D'après cette figure, nous observons que tous les pôles et les zéros des fonctions de transfert sont à l'intérieur du cercle unité et ils sont réparties de façon alternée sur l'axe réel, cela signifie que ces fonctions de transfert correspondent à des systèmes stable et à phase minimale.

Considérons maintenant différentes valeurs de l'ordre de dérivation et d'intégration α. Les figures 7 et 8 montrent l'erreur relative (%) en amplitude des approximations des dérivateurs et intégrateurs d'ordre $\alpha = 0.7$ et $\alpha = 0.3$, respectivement. D'après les tracés des erreurs nous pouvons conclure que la NMF donne la plus petite erreur quel que soit l'ordre de dérivation.

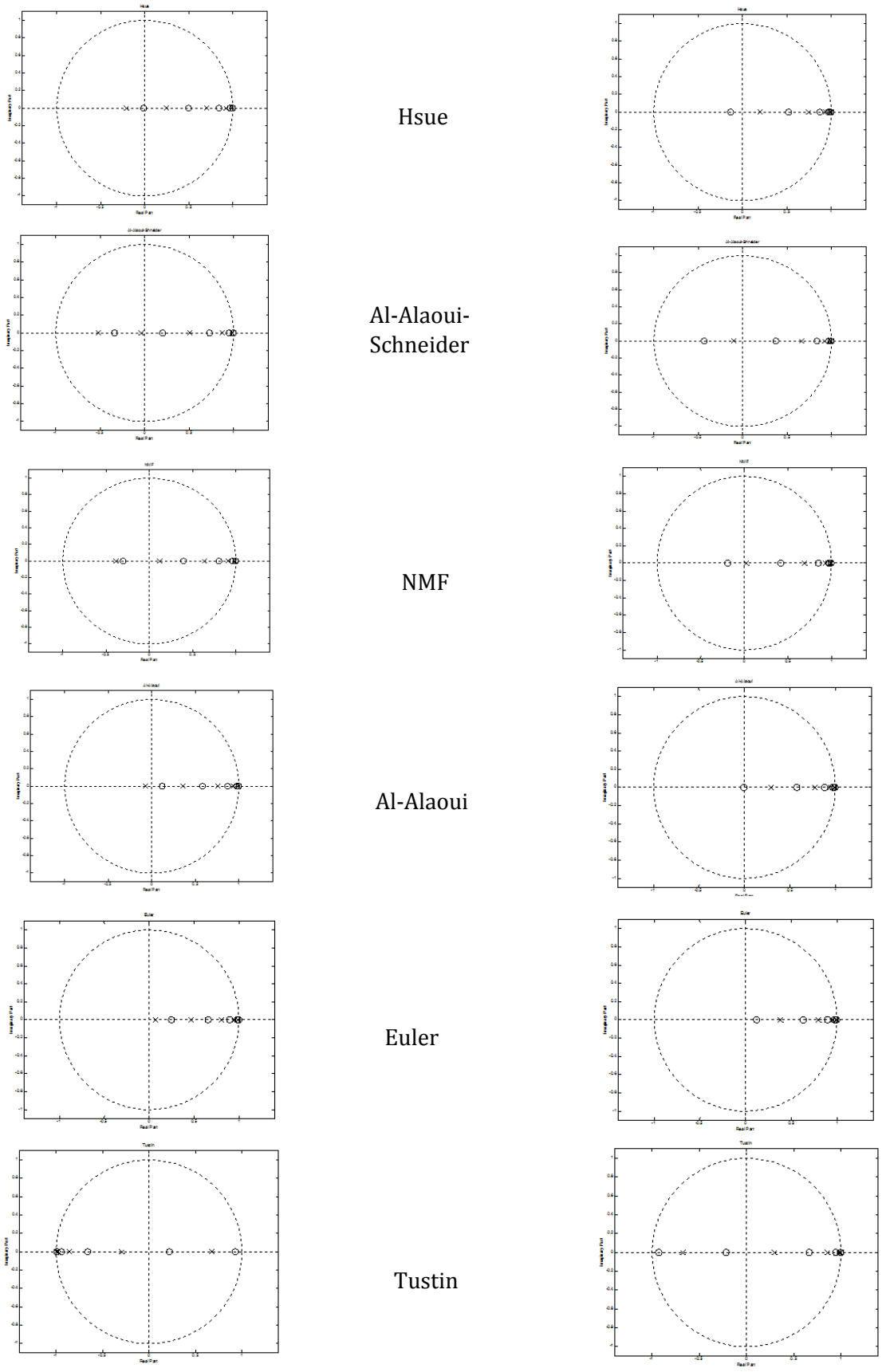
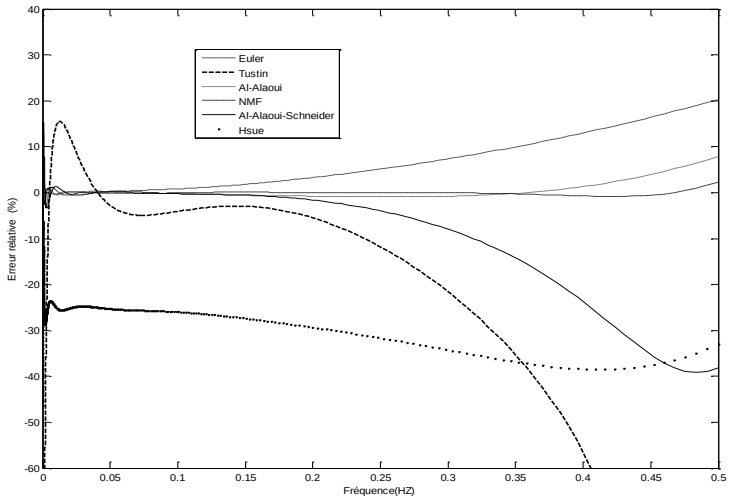


Figure 3. 6 : Distribution des pôles et des zéros, a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = -0.5$

a)



b)

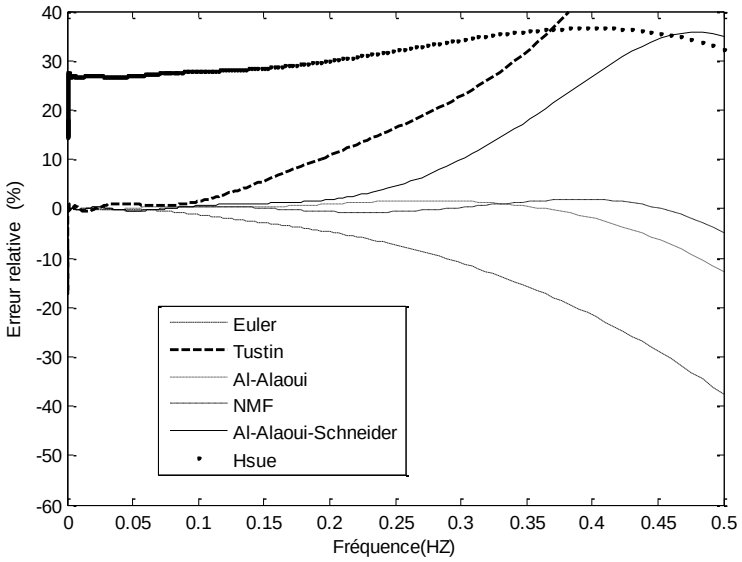
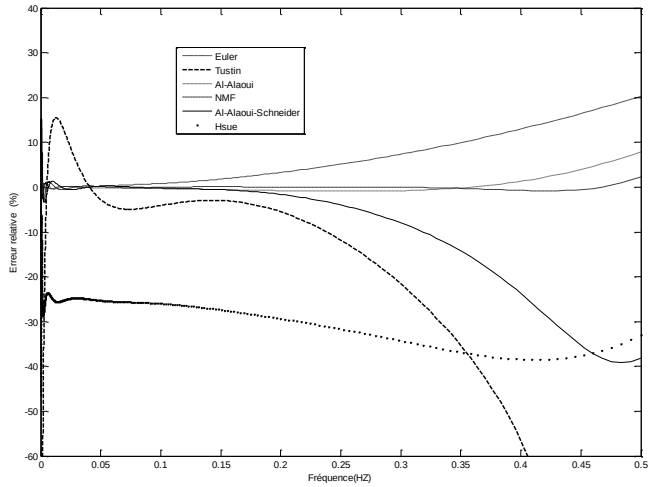


Figure3. 7: Erreur relative (%) correspondante à NMF, Al-Alaoui-Schneider et les opérateurs du 1er ordre a) $\alpha = 0.7$, b) $\alpha = -0.7$

a)



b)

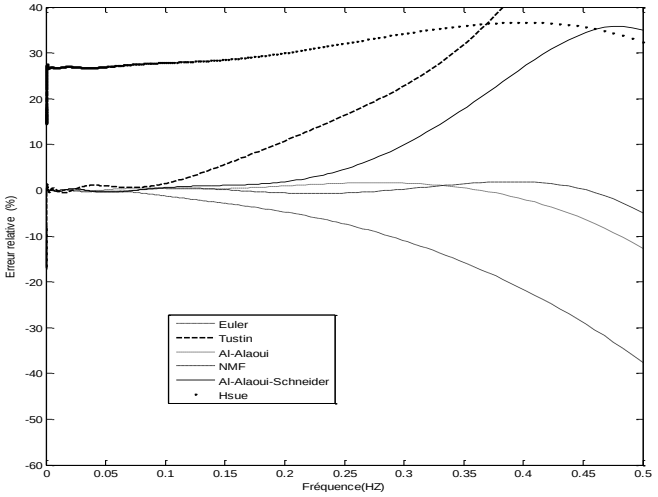


Figure 3. 8: Erreur relative (%) correspondante à NMF, Al-Alaoui-Schneider, et les opérateurs du 1er ordre a) α =0.3, b) α =−0.3

Pour étudier davantage la performance de l'approche proposée, nous avons comparé l'approximation de l'intégrateur d'ordre 1/3, obtenue par l'approche proposée dans ce travail, avec celle proposée dans [23] basée sur l'opérateur Hsue, obtenue en utilisant la méthode DFC. D'après [23] la fonction de transfert du modèle d'ordre trois basé sur l'opérateur Hsue est donnée par l'équation (3.14) avec T=0.001.

$$H_{\text{Hsue}-\text{cfe}-\frac{1}{3}} = 0.0794\,\frac{(1-0.793z^{-1})(1-0.2646z^{-1})(1+0.1922z^{-1})}{(1-0.9108z^{-1})(1-0.4548z^{-1})(1+0.07365z^{-1})} \qquad (3.14)$$

La fonction de transfert du modèle du 3ème ordre de l'intégrateur d'ordre 1/3 basée sur l'opérateur NMF est donnée par l'équation (3.15).

$$H_{\mathrm{NMF}-\frac{1}{3}} = \frac{0.0952-0.1964z^{-1}+0.1174z^{-2}-0.0161z^{-3}}{1-2.4474z^{-1}+1.9240z^{-2}-0.4766z^{-3}} \tag{3.15}$$

Les réponses en fréquence d'amplitude et de phase de l'intégrateur d'ordre 1/3, obtenues en utilisant la méthode proposée NMF (DSP-Modélisation) et l'intégrateur obtenu par Hsue (DFC) comparé à l'idéal sont montrées à la figure 3.9.

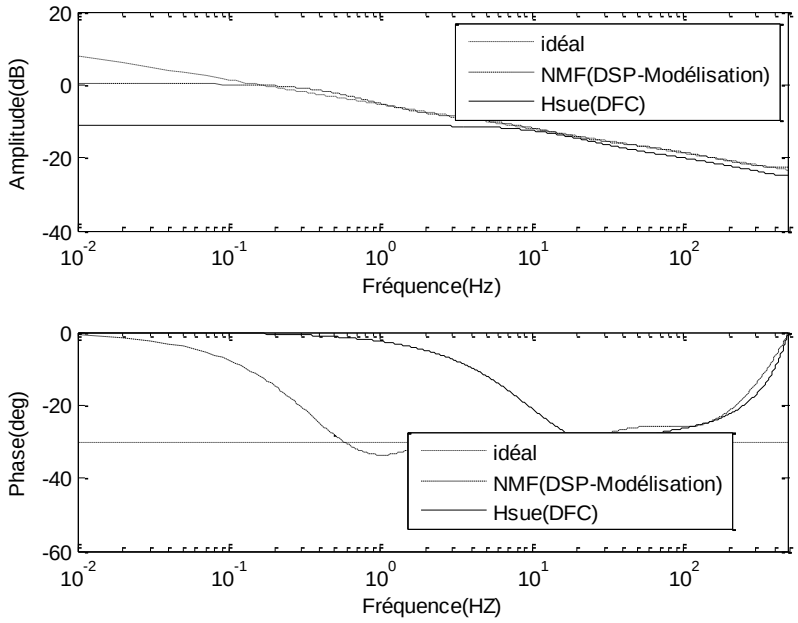


Figure3. 9: Réponses en fréquence (amplitude et phase) de $s^{-1/3}$ et des approximations obtenues par NMF (DSP-modélisation) et Hsue (DFC), pour T=0.001s, q =p=3

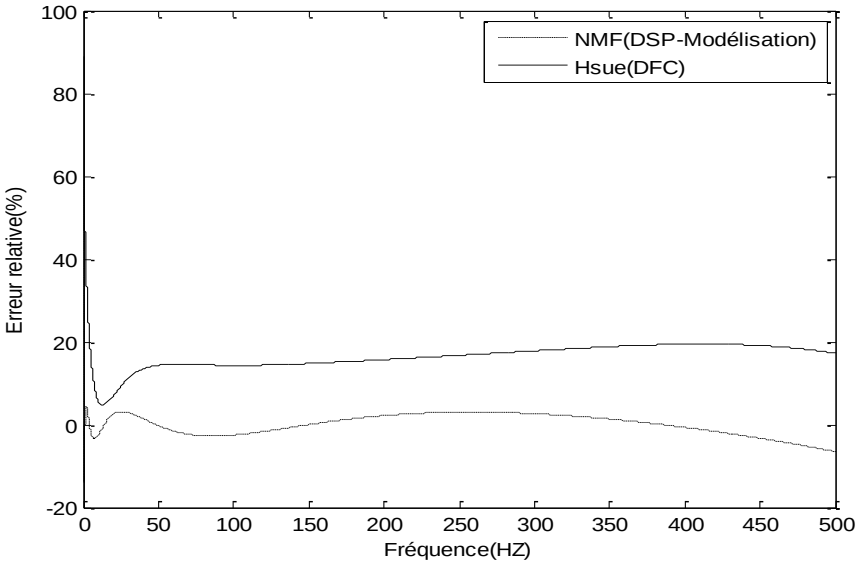


Figure3. 10: Erreur relative (%) correspondante à NMF (DSP-modélisation) et Hsue (DFC)

La figure 3.10 montre l'erreur relative (%) en amplitude entre l'intégrateur idéal $s^{-1/3}$ et les approximations données par les équations (3.14) et (3.15). Il est clair que l'intégrateur d'ordre 1/3 basé sur la NMF présente la plus petite erreur d'approximation que celle basé sur Hsue.

3.4.2 Comparaison des méthodes DSP-Modélisation et DSP-troncature

La méthode DSP-troncature consiste à développer en série de puissance le numérateur et le dénominateur de l'ODIFD, équation (3.8), suivie d'une troncature de chaque série. La fonction de transfert obtenue est une approximation rationnelle de s^{α} .

Dans le reste de cette première section nous allons comparer les performances de la méthode DSP-modélisation et la méthode de DSP-troncature pour l'approximation rationnelle de s^{α}. Un exemple est présenté pour $\alpha = \pm 1/4$.

Le tableau3.3 présente les coefficients des approximations rationnelles de s^{α}, $\alpha = \mp 1/4$ obtenues en utilisant les approches DSP-Modélisation et DSP-troncature basées sur la NMF pour L=500, T=1s, p=q=5.

		DSP-modélisation	DSP-troncature
B(z)	b_0	1.069044967644567	1.069044967649698
	b_1	-3.789489561781301	-0.534522483824849
	b_2	5.080791711801894	-0.133630620956212
	b_3	-3.129840761402043	-0.066815310478106
	b_4	0.831436092275494	-0.041759569048816
	b_5	-0.061940142505705	-0.029231698334171
A(z)	a_0	1.000000000000000	1.000000000000000
	a_1	-2.973314461443737	0.071428571428571
	a_2	3.135238561983327	-0.002551020408163
	a_3	-1.320541978722998	0.000182215743440
	a_4	0.140837398772762	-0.000016269262807
	a_5	0.017868591240445	0.000001626926281

Tableau 3. 3: Coefficients des approximations rationnelles de $s^{\alpha}, \alpha = \pm 1/4$ obtenues par les approches DSP-modélisation et DSP-troncature.

La figure 3.11 présente les réponses en fréquence (amplitude et phase) des approximations rationnelles obtenues et de s^{α}, $\alpha = 1/4$ et $\alpha = -1/4$.

La figure 3.12 présente l'erreur relative (%) en amplitude, entre l'opérateur d'ordre fractionnaire idéal s^{α}, $\alpha = \pm 1/4$ et l'amplitude des approximations obtenues en utilisant DSP-modélisation et DSP-troncature.

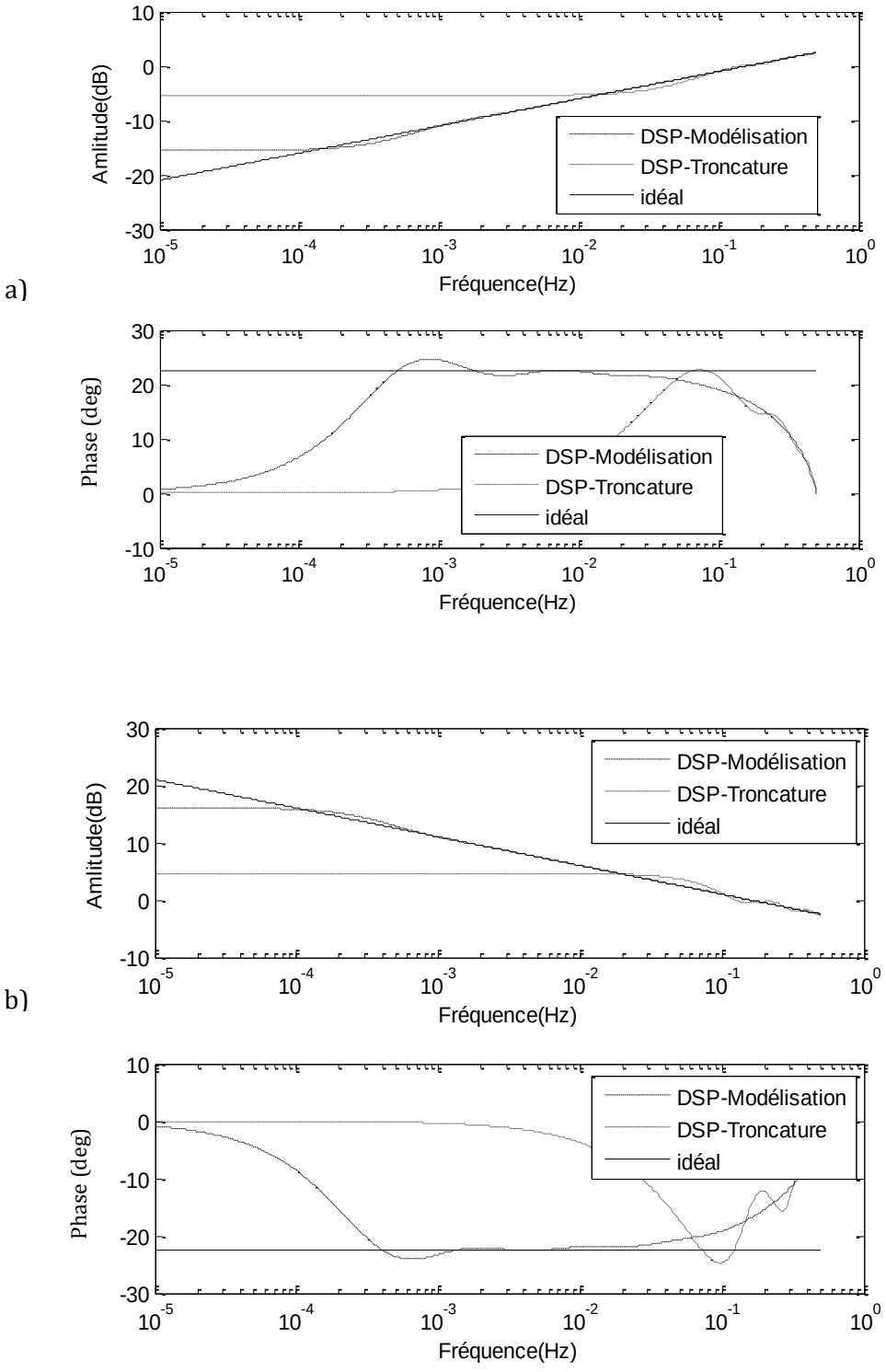
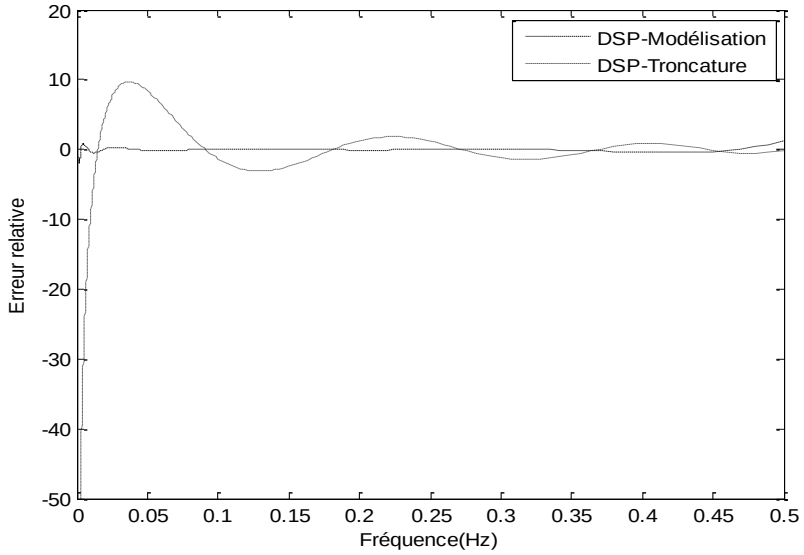


Figure3. 11: Réponses en fréquence (amplitude et phase) de s^{α} et des approximations obtenues par les méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature basées sur NMF, a) $\alpha = 1/4$, b) $\alpha = -1/4$

a)



b)

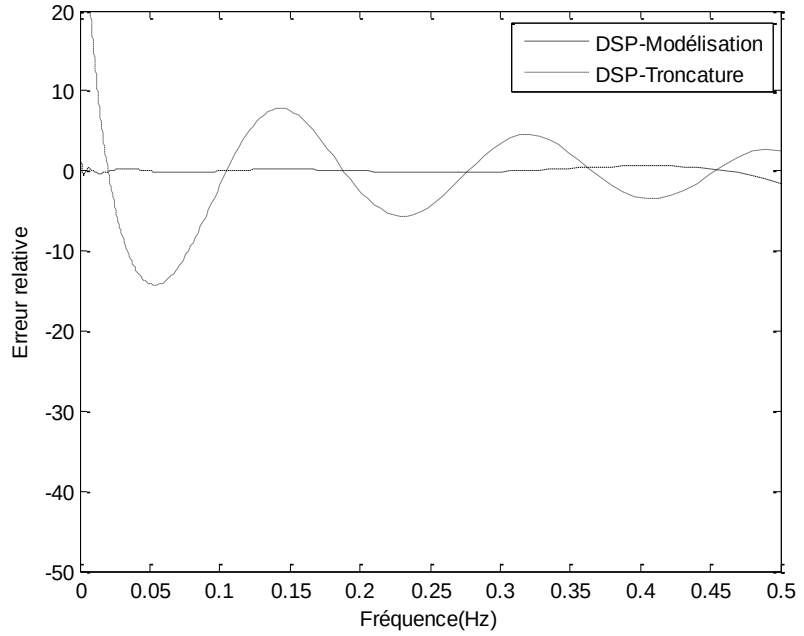


Figure3. 12: Erreur relative (%) a) $\alpha = 1/4$, b) $\alpha = -1/4$

De la figure 3.11 il est clair que la phase est plus proche de l'idéale pour une bande de fréquence plus large en utilisant la méthode de modélisation des signaux

La figure 3.12 montre clairement que l'erreur correspondante à la méthode de DSP-modélisation est plus petite que celle de la méthode de DSP- troncature.

.

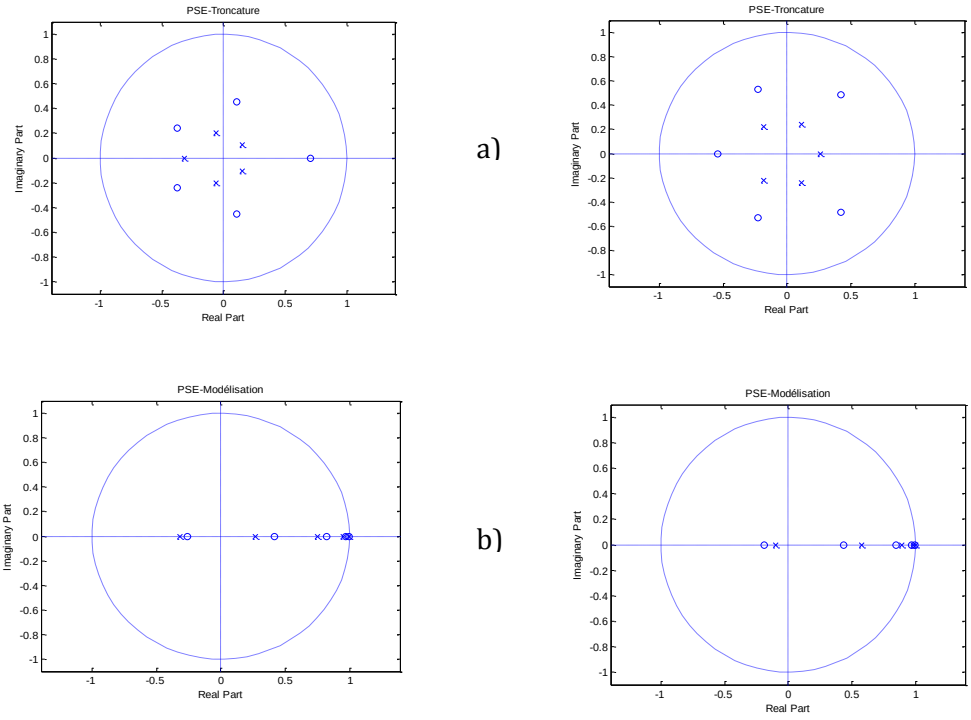


Figure3. 13 : Distribution des pôles et des zéros, a)DSP-troncature, b) DSP- modélisation

La figure 3.13 montre le diagramme des pôles et des zéros des approximations basées sur la NMF. Nous pouvons conclure que chacune des méthodes DSP-Modélisation et DSP-troncature, fournit des filtres stables à phase minimale puisque les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité, mais contrairement à la méthode DSP-modélisation, la méthode DSP-troncature fournit des approximations ayant des pôles et des zéros qui sont complexes conjugués, ils ne sont pas distribués de façon alternée ce qui n'est pas désirable pour l'approximation rationnelle de l'opérateur s^{α}.

Maintenant comparons les méthodes précédentes en utilisant l'opérateur du 1er ordre Al-Alaoui. Les réponses en fréquence (amplitude et phase) des modèles rationnels obtenus pour $\alpha = 0.5$, p=q=5, T=1, L=500, et comparé au modèles obtenus en utilisant la méthode DSP-troncature avec p=q=40 sont illustrés par la figure 3.14.

La figure 3.15 présente l'erreur relative en amplitude. Nous pouvons observer que la méthode DSP-modélisation présente la plus petite erreur. Aussi, nous pouvons déduire qu'en augmentant l'ordre p et q du numérateur et dénominateur mène à une amélioration dans la qualité des approximations en utilisant la méthode DSP-troncature.

On note que les pôles et les zéros des approximations obtenues par la méthode DSP-troncature basé sur l'opérateur Al-Alaoui sont complexes conjugués.

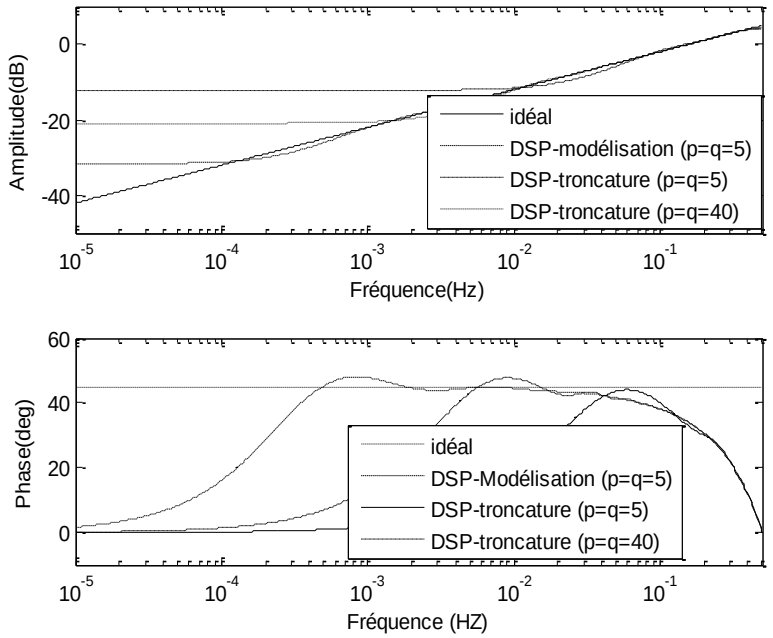


Figure3. 14:Réponses en fréquence (amplitude et phase) de s^{α} et des approximations obtenues par les méthodes DSP-modélisation et DSP- troncature basées sur l'opérateur Al-Alaoui

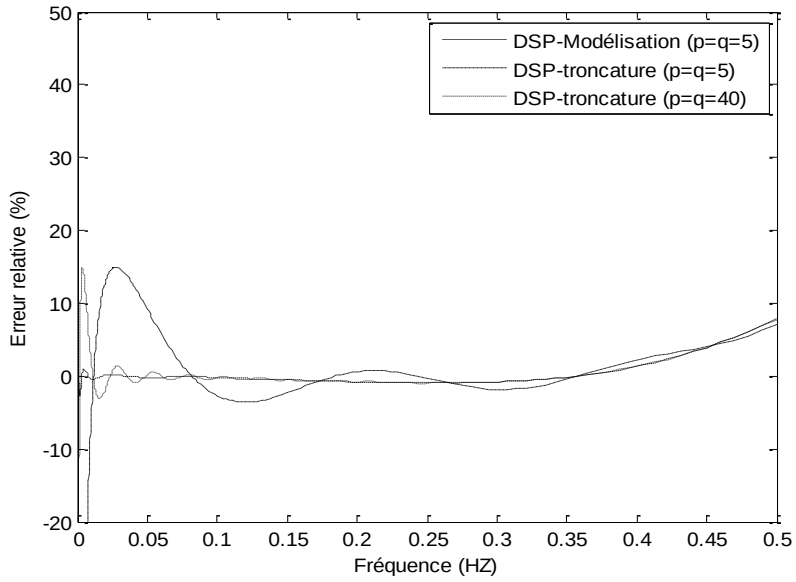


Figure3. 15: Erreur relative (%) pour $\alpha = 0.5$

- **Remarque**

Il est clair que l'utilisation de ces résultats dans des applications qui utilisent des intégrateurs et des dérivateurs simples vont contribuer à l'amélioration des performances dans ces domaines. Nous considérons dans la suite de ce chapitre, l'application de ces résultats pour l'approximation des fonctions de transfert composées basées sur l'opérateur s^{α}.

3.5 Applications : Synthèse des filtres passe-bas et passe-haut fractionnaires numériques

3.5.1 Introduction :

Bien qu'il n'y a pas une interprétation physique de la dérivée fractionnaire, comme la pente de la tangente, ou surface, les concepts du calcul fractionnaire et systèmes fractionnaires ont été peu à peu migré dans l'ingénierie montrant de nombreuses applications utiles dans plusieurs domaines. Ceux-ci incluent la théorie des matériaux, la théorie de diffusion bio ingénierie, conception et théorie de circuit, la théorie de contrôle, électromagnétique et robotiques. L'importation de ces concepts dans la théorie des circuits est relativement nouvelle et elle a montré des applications dans l'électronique de puissance, les circuits dérivateurs et intégrateurs, les oscillateurs, les circuits multivibrateurs, et dans la théorie de filtre [17].

Les filtres à temps continus traditionnels sont d'ordre entier. Cependant, utilisant le calcul fractionnaire, les filtres peuvent être représentés par des équations différentielles d'ordre fractionnaire dont les filtres d'ordre entier sont un sous ensemble de ces filtres [15-18]. La synthèse des filtres est l'un des domaines de l'ingénierie dont laquelle une théorie de conception complète existe. Soit passifs ou actifs, les filtres incorporent nécessairement des capacités et inductances.

Une inductance ou une capacité est un cas spécial de « la Fractance » qui est un élément électrique dont l'impédance dans le domaine fréquentiel est donnée par

$$Z(s) = as^{\alpha}$$

$$\Rightarrow\ z(jw) = aw^{\alpha}e^{j(\frac{\pi\alpha}{2})} \qquad (3.14)$$

- Pour $\alpha = 1$, cet élément représente une inductance et pour $\alpha = -1$, il représente un condensateur.
- Pour $0 < \alpha < 2$, cet élément représente généralement une inductance d'ordre fractionnaire. Tandis que pour $-2 < \alpha < 0$, il représente un condensateur d'ordre fractionnaire.

3.5.2 Les filtres à un élément fractionnaire simple

La fonction de transfert générale d'un filtre avec un élément fractionnaire est donnée par l'expression suivante [15] :

$$T(s) = \frac{bs^{\beta}+d}{s^{\alpha}+a} \qquad (3.15)$$

La position des pôles est importante pour déterminer la fréquence centrale du filtre w_0 et son facteur de qualité Q. À partir de l'équation (3.15), il est clair que les pôles dans le plan s sont positionnés à $s_{p=}a^{1/\alpha}e^{\mp j(2m+1)\pi/\alpha}$, m∈ $\mathbb{N}^+$.Pour $1<\alpha<2$, il y a seulement deux pôles positionnés à $s_{1,2=}a^{1/\alpha}e^{\mp j(\frac{\pi}{\alpha})}$.

Comparé avec un système du second ordre classique, ayant des pôles positionnés à $s_{1,2}=(-\frac{w_0}{2Q})\mp jw_0\sqrt{1-(1/4Q^2)}=w_0e^{\mp j\delta}$ où $\delta=cos^{-1}(-\frac{1}{2Q})$,

il est clair que la pulsation centrale w_0 et le facteur de qualité Q sont défini par :

$$w_0=a^{1/\alpha} \tag{3.16}$$

$$Q=\frac{-1}{2\cos(\frac{\pi}{\alpha})} \tag{3.17}$$

À partir de l'équation ci-dessus, Q est négatif pour $\alpha<1$, est positif pour $\alpha\geq 1$.Pour $\alpha=1$ (filtre du premier ordre classique), Q=0.5.

Il est important de définir les fréquences critiques suivantes :

1-w_m est la fréquence à laquelle la réponse en amplitude a un maximum ou un minimum et elle est obtenue par la résolution de l'équation $(d/dw)|T(jw)|_{w=w_m}$=0.

2-$w_h$est la fréquence à laquelle,$|T(jw_h)|=(\frac{1}{\sqrt{2}})\left|T(jw_{bande\ passante})\right|$.

3- w_{rp} la fréquence à laquelle $\angle T(jw_{rp})=\mp\pi/2$.

3.5.2.1 Filtre passe-bas fractionnaire :

Considérons un filtre passe-bas fractionnaire de fonction de transfert [15]

$$T_{FPBF}(s)=\frac{d}{s^{\alpha}+a} \tag{3.18}$$

L'amplitude et la phase de la fonction de transfert (3.18), sont données par les expressions suivantes :

$$|T_{FPBF}(jw)|=\frac{d}{\sqrt{w^{2\alpha}+2\alpha w^{\alpha}\cos(\frac{\alpha\pi}{2})+a^2}} \tag{3.19}$$

$$\angle T_{FPBF}(jw)=-tan^{-1}\frac{w^{\alpha}\sin(\alpha\pi/_2)}{w^{\alpha}\cos(\alpha\pi/_2)+a} \tag{3.20}$$

Les fréquences critiques correspondantes sont

$$w_m=w_0/(-\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right))^{1/\alpha} \tag{3.21}$$

$$w_{rp} = \frac{w_0}{\left(-\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^{1/\alpha}} \tag{3.22}$$

$$w_h = w_0\left(\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right) \quad -\cos(\alpha\pi/2))^{1/\alpha} \tag{3.23}$$

Avec $w_0$est donnée par (3.16).

3.5.2.2 Filtre passe-haut fractionnaire :

Considérons un filtre passe-haut fractionnaire de fonction de transfert :

$$T(s) = \frac{bs^\alpha}{s^\alpha + a} \tag{3.24}$$

L'amplitude et la phase de cette fonction de transfert sont :

$$|T_{FFPH}(jw)| = \frac{bw^\alpha}{\sqrt{w^{2\alpha}+2aw^\alpha\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+a^2}} \tag{3.25}$$

$$\angle T_{FFPH}(jw) = \frac{\alpha\pi}{2} - tan^{-1}\frac{w^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{w^\alpha\cos(\alpha\pi/2)+a} \tag{3.26}$$

et les fréquences critiques correspondantes sont :

$$w_m = (-a/\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right))^{1/\alpha} \tag{3.27}$$

$$w_{rp} = \left(-a\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^{1/\alpha} \tag{3.28}$$

$$w_h = w_0[\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}) \quad +\cos(\alpha\pi/2)]^{1/\alpha} \tag{3.29}$$

3.5.3 Conception de filtre fractionnaire numérique par un filtre RII

Dans cette section, nous allons synthétiser un filtre fractionnaire de type passe-bas et passe-haut présentés par les fonctions de transfert (3.18), (3.24) respectivement, par un filtre RII numérique. La procédure consiste à transformer la fonction de transfert du filtre analogique fractionnaire du plan s au plan z en remplaçant s^α dans (3.18) et (3.24) par son équivalent numérique calculé selon l'approche proposée dans ce travail.

On cherche à réaliser un filtre numérique de fonction de transfert :

$$\mathrm{T(z)} = \frac{\mathrm{N(z)}}{\mathrm{D(z)}} \tag{3.30}$$

en remplaçant s^α par son expression en z conformément à la transformation proposée dans la section précédente.

$$T(z) = \frac{N(z)}{(z)}\Big|_{s^\alpha = \frac{B(z)}{A(z)}} \tag{3.31}$$

3.5.3.1 Conception des filtres passe-bas fractionnaires numériques

Soit un filtre passe-bas fractionnaire analogique (FPBFA) de fonction de transfert (3.18) avec $d = a = 4$ et $\alpha = 0.4$ [15].

Le filtre $T_{FPBF}(w)$ a une pulsation de coupure, calculée par l'équation (3.23), égale à w_c= 5,0.365rad/sec (fréquence de coupure $f_c = 0.8015Hz$).

La réponse en fréquence (Amplitude et phase) du filtre passe-bas d'ordre 0.4 est représentée sur la figure ci-après

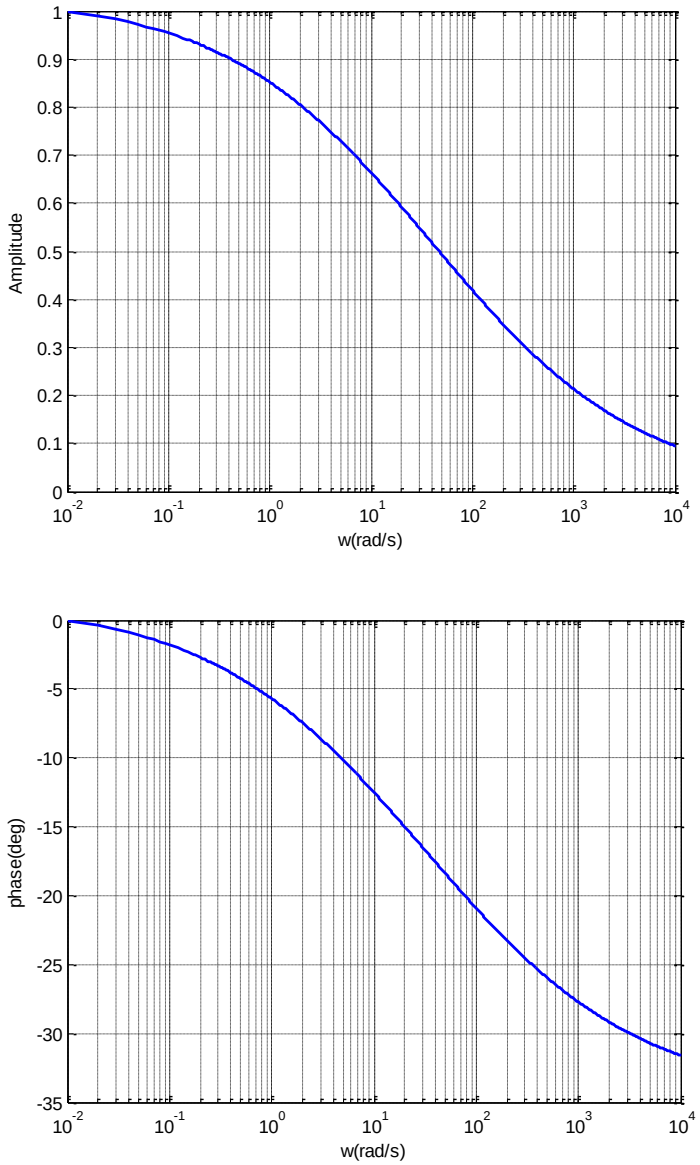


Figure3. 16: Réponse fréquentielle (amplitude et phase) d'un filtre passe-bas analogique d'ordre 0.4

La fonction de transfert du filtre numérique RII synthétisé est obtenue en remplaçant l'opérateur $s^{0.4}$ dans $T_{FPBF}(w)$ par son équivalent discret basé sur les différents opérateurs NMF, Al-Alaoui, Tustin, Euler, selon l'approche proposée dans la section précédente. La fréquence d'échantillonnage est choisie égale à f_e= 8 *Hz*.

Les coefficients des fonctions de transfert des approximations rationnelles discrètes de $s^{0.4}$ pour q=p=5, T=1/f_e, basée sur les différentes règles de transformation sont rapportés dans le tableau 3.4

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
b0	2.430438204063079	2.418035472819406	2.292270624379821	3.024669222561531
b1	-7.015567720062053	-8.572396695454859	-8.638290530597633	3.765379727804805
B(z) b2	6.685913804083634	11.485523531405436	12.555810385613851	-2.520475368037470
b3	-1.811749571199935	-7.056652189906744	-8.678365140669131	-3.938687715472264
b4	-0.510395368599198	1.859209760593504	2.782581334338387	-0.144490466113493
b5	0.221394246371496	-0.133714186802380	-0.314004221270688	0.531535180644826
a0	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
a1	-2.414089391189892	-3.088047862725250	-3.368443228471341	2.044895454542958
A(z) a2	1.679629387332545	3.429686073967113	4.250092516354393	0.481967294887436
a3	-0.046370690645471	-1.572755271217969	-2.426238169379182	-1.228885057373236
a4	-0.258912165542439	0.216524239568441	0.579985570517413	-0.713649368342969
a5	0.039988691439236	0.014638703203224	-0.035376182040625	-0.047712732613602

Tableau 3. 4: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de s^{α}

La figure 3.17 montre la réponse en fréquence d'amplitude de $s^{0.4}$ et des approximations numériques basées sur différents opérateurs.

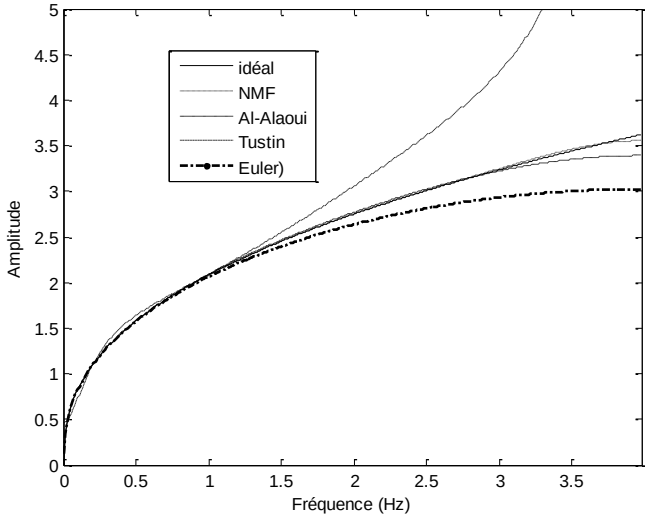


Figure3. 17: Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{0.4}$ et des approximations correspondantes obtenues basées sur différents opérateurs

Après remplacement de $s^{0.4}$ par son équivalent discret dans l'expression de $T_{FPBF}(w)$, équation (3.18), on obtient finalement la fonction de transfert $T(z)$ du filtre numérique correspondant. Les coefficients des filtres obtenus, basés sur différents opérateurs, sont rapportés dans le tableau 3.5.

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
n_0	4.000000000000000	4.000000000000000	4.000000000000000	4.000000000000000
n_1	-9.656357564759569	-12.352191450901001	-13.473772913885362	8.179581818171833
N(z) n_2	6.718517549330179	13.718744295868452	17.000370065417570	1.927869179549743
n_3	-0.185482762581884	-6.291021084871877	-9.704952677516726	-4.915540229492942
n_4	-1.035648662169755	0.866096958273766	2.319942282069650	-2.854597473371875
n_5	0.159954765756944	0.058554812812897	-0.141504728162499	-0.190850930454408
d_0	6.430438204063080	6.418035472819407	6.292270624379821	7.024669222561531
d_1	-16.671925284821622	-20.924588146355859	-22.112063444482995	11.944961545976639
D(z) d_2	13.404431353413813	25.204267827273888	29.556180451031423	-0.592606188487727
d_3	-1.997232333781819	-13.347673274778622	-18.383317818185859	-8.854227944965206
d_4	-1.546044030768953	2.725306718867270	5.102523616408037	-2.999087939485367
d_5	0.381349012128440	-0.075159373989484	-0.455508949433188	0.340684250190418

Tableau 3. 5: Coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques passe-bas d'ordre 0.4

Les réponses en fréquences de la fonction de transfert du filtre analogique et de son équivalent numérique basé sur la NMF et comparé à ceux basés sur les opérateurs Al- Alaoui, Euler, Tustin sont représentées dans les figures suivantes :

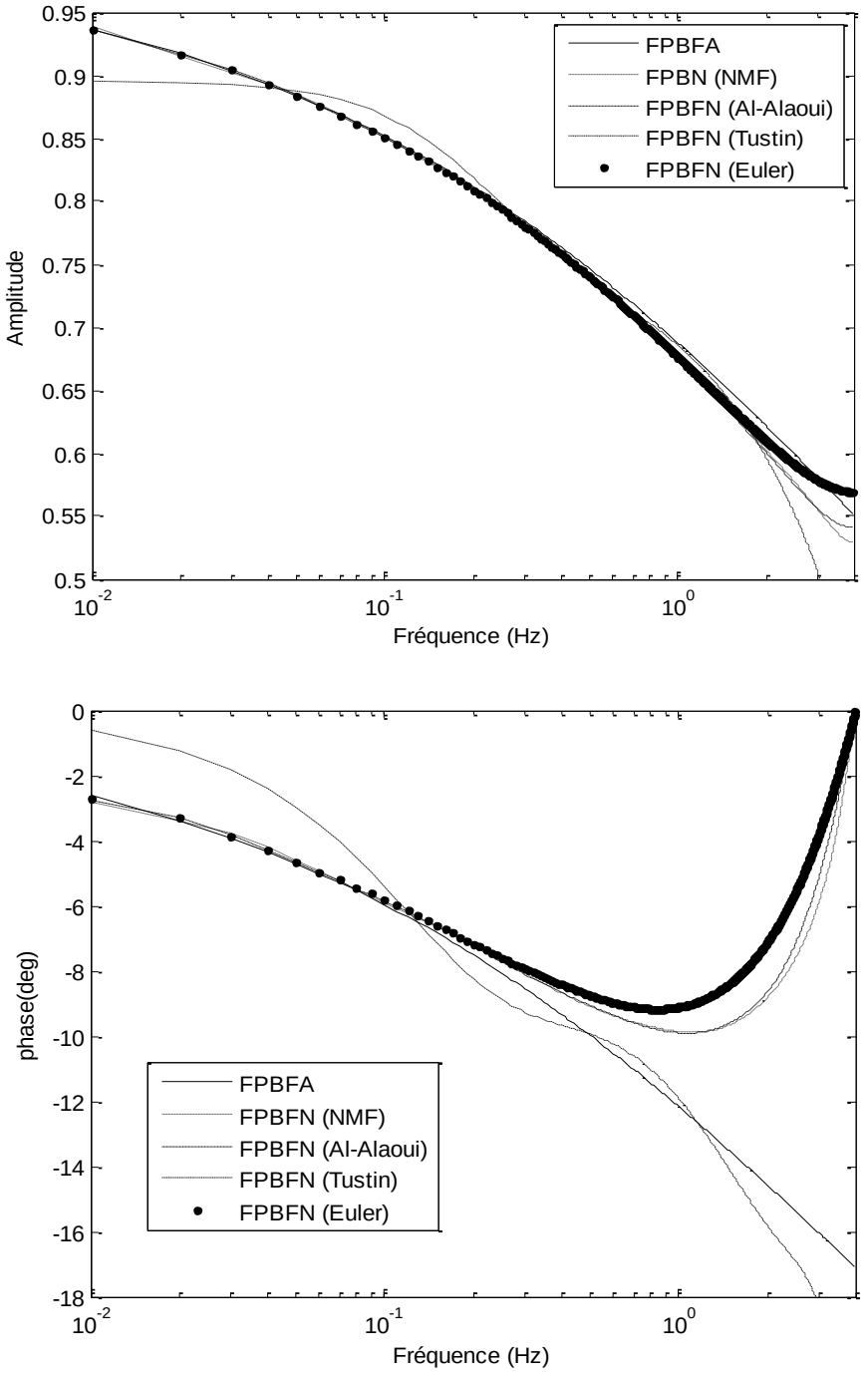
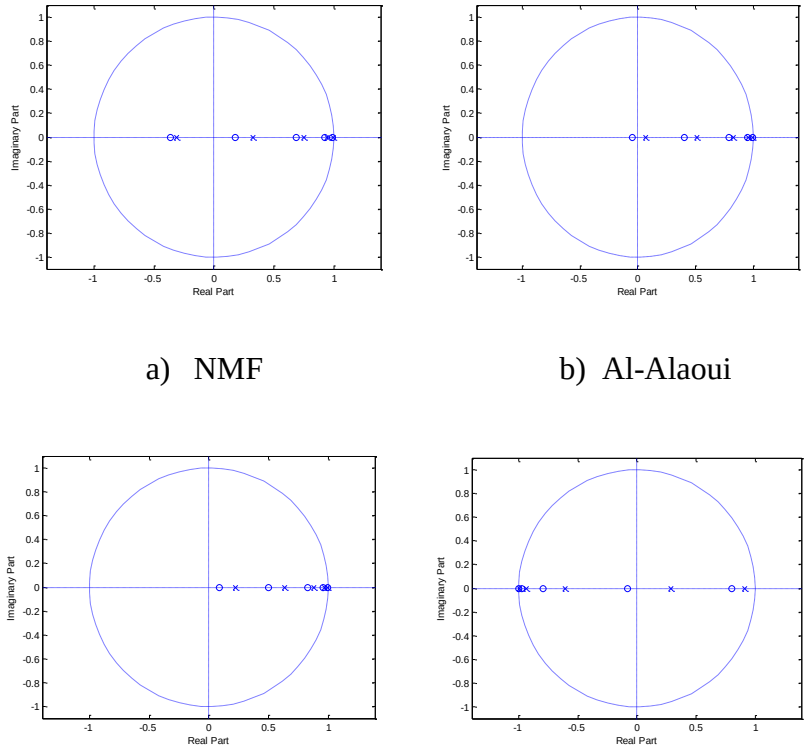


Figure3. 18: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-bas analogique et des filtres numériques d'ordre 0.4.



a) NMF b) Al-Alaoui

c) Euler d) Tustin

Figure3. 19: Distribution des pôles et des zéros

La figure 3.19 représente la distribution des pôles et des zéros des filtres passe-bas numériques d'ordre 0.4 obtenus.

Comme un deuxième exemple, on considère la conception numérique du filtre passe-bas (3.18), avec $\alpha = 1.6\,, d = a = 4$. Le filtre d'ordre 1.6 est de fréquence de coupure f_c=*0.6013Hz* et de réponse en fréquence illustré sur la figure 3.20.

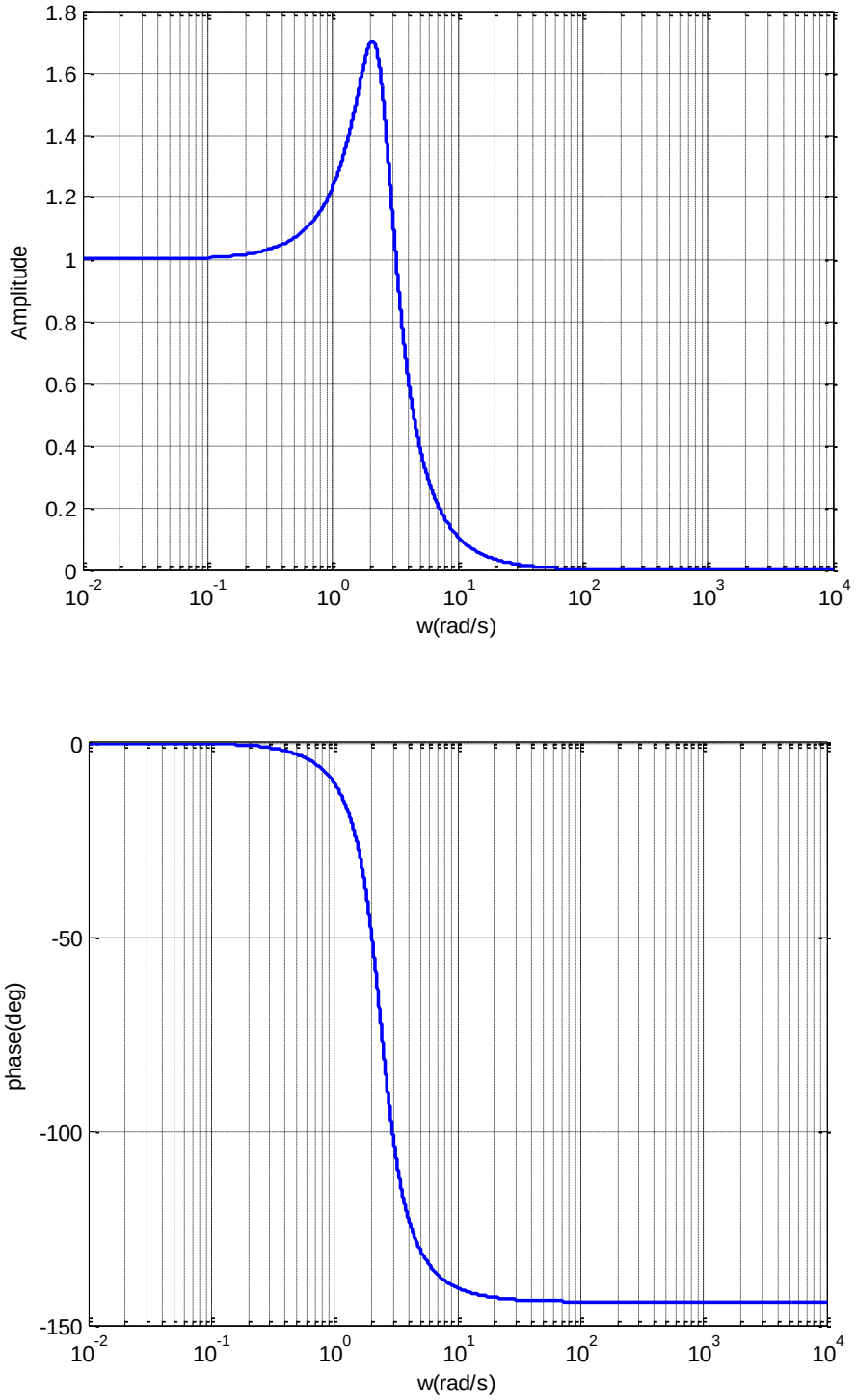


Figure3. 20: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas fractionnaire analogique $\alpha = 1.6$

La fréquence d'échantillonnage est choisie égale à : f_e=6*Hz.*

Les coefficients des fonctions de transfert des approximations rationnelles discrètes de $s^{1.6}$ pour q= p =5, T=1/f_e basée sur les différentes règles de transformation sont rapportés dans le tableau 3.6.

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
		10^2 *		10^2 *
b_0	22.297038232883583	0.218453756116003	17.642998664553431	0.606201245132902
b_1	-62.810771297569488	-0.776632052583920	-67.236372992568420	1.041381358768089
B(z) b_2	58.148413414721496	1.050709532530377	99.425133695821174	0
b_3	-15.324578991366501	-0.662258248115226	-70.667960417927404	-0.575705219657265
b_4	-3.917734764394798	0.186857612620533	23.797891211855735	0
b_5	1.606229137857212	-0.017132078398468	-2.961726847490234	0.140390646585454
a_0	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
a_1	-0.927174097669383	-1.726561091813484	-2.210937940337138	4.488570726818606
A(z) a_2	-0.206560795792759	0.764453685319585	1.617886771820559	7.997760234278301
a_3	0.227306143399923	0.020664191204240	-0.419570273031015	7.061132157634511
a_4	0.000978847792473	-0.035552539045226	0.020058948272970	3.083267808500932
a_5	-0.001507164003846	-0.001348155670115	0.000852973950164	0.531325159436805

Tableau 3. 6: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de $s^{1.6}$

La figure 3.21 montre les réponses en fréquence d'amplitude de $s^{1.6}$ et des approximations numériques pour différents opérateurs.

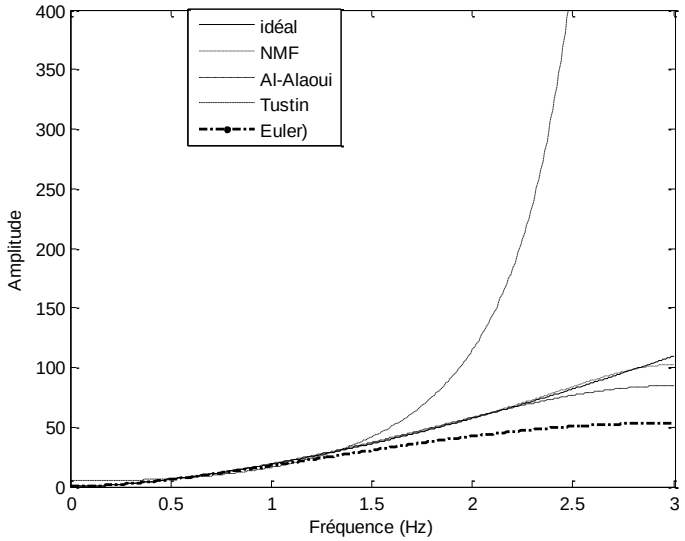


Figure3. 21: Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{1.6}$ et des approximations obtenues basées sur différents operateurs

Après remplacement de $s^{1.6}$ par son équivalent numérique dans l'expression de $T_{FPBF}(s)$, équation (3.18), on obtient finalement la fonction de transfert *T(z)* du filtre numérique correspondant. Les coefficients des filtres obtenus, basés sur les différents opérateurs, sont rapportés dans le tableau 3.7.

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
n_0	4.000000000000000	4.000000000000000	4.000000000000000	4.000000000000000
n_1	-3.708696390677530	-6.906244367253934	-8.843751761348552	17.954282907274425
N(z) n_2	-0.826243183171038	3.057814741278341	6.471547087282236	31.991040937113205
n_3	0.909224573599690	0.082656764816960	-1.678281092124061	28.244528630538042
n_4	0.003915391169893	-0.142210156180904	0.080235793091878	12.333071234003729
n_5	-0.006028656015384	-0.005392622680461	0.003411895800656	2.125300637747221
		10^2 *	10^2 *	10^2 *
d_0	26.297038232883583	0.258453756116003	0.216429986645534	0.646201245132902
d_1	-66.519467688247019	-0.845694496256459	-0.760801247539170	1.220924187840834
D(z) d_2	57.322170231550459	1.081287679943161	1.058966807831034	0.319910409371132
d_3	-14.415354417766810	-0.661431680467056	-0.723462415100515	-0.293259933351885
d_4	-3.913819373224905	0.185435511058724	0.238781270049476	0.123330712340037
d_5	1.600200481841828	-0.017186004625273	-0.029583149516896	0.161643652962926

Tableau 3. 7 : Coefficients des fonctions de transfert des filtres numeriques passe- bas d'ordre 1.6

Les réponses en fréquences de la fonction de transfert du filtre passe-bas analogique d'ordre 1.6 et des filtres numériques calculées basés sur NMF et les opérateurs, Tustin, Euler Al-Alaoui, sont représentées dans la figure suivante :

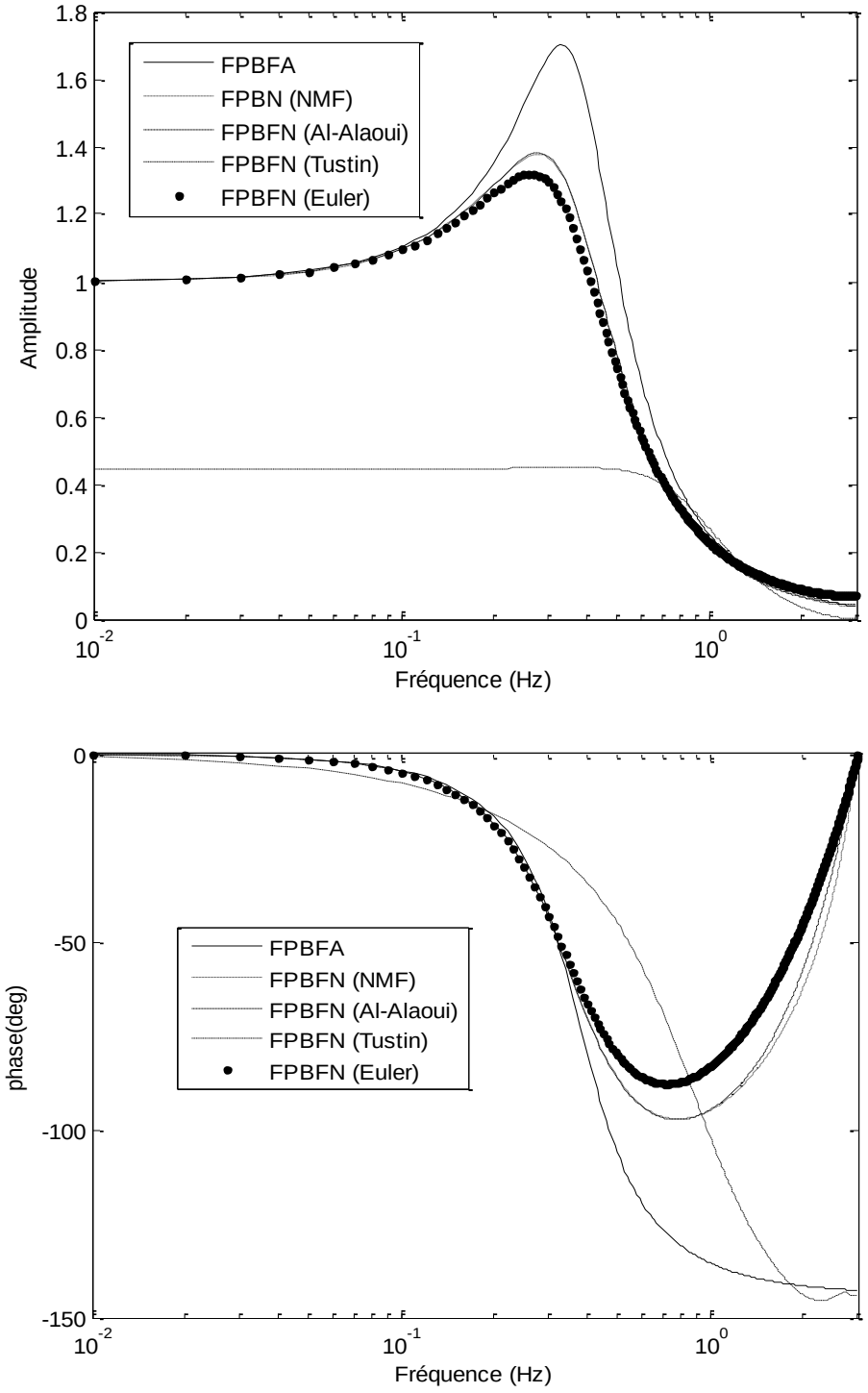


Figure3. 22: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-bas analogique et des filtres numériques d'ordre 1.6

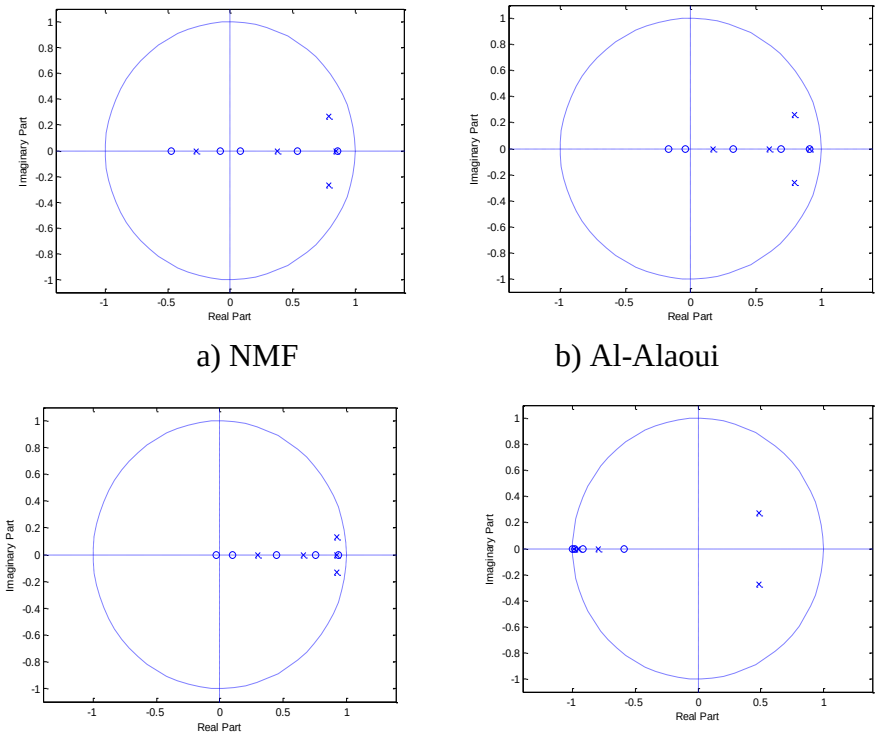


Figure3. 23: Distribution des pôles et des zéros

La figure 3.23 montre la distribution des pôles et des zéros des filtres passe-bas numériques d'ordre 1.6 obtenus.

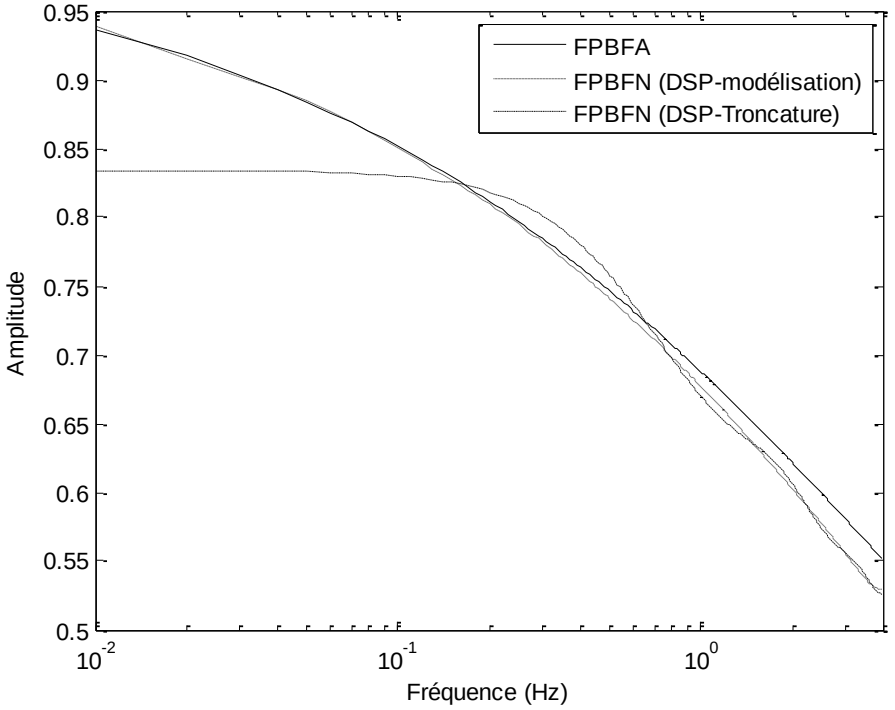
- **Comparaison des méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature**

Dans cette partie nous allons comparer les méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature, basées sur la NMF, pour la synthèse des filtres passe-bas fractionnaires numériques.

Reprenons l'exemple des filtres passe bas analogiques d'ordre 0.4 et 1.6. Les coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques calculés par la méthode DSP-troncature sont donnés dans le tableau 3.8.

La figure 3.24 illustre les réponses en fréquence d'amplitude des filtres obtenus.

a)



b)

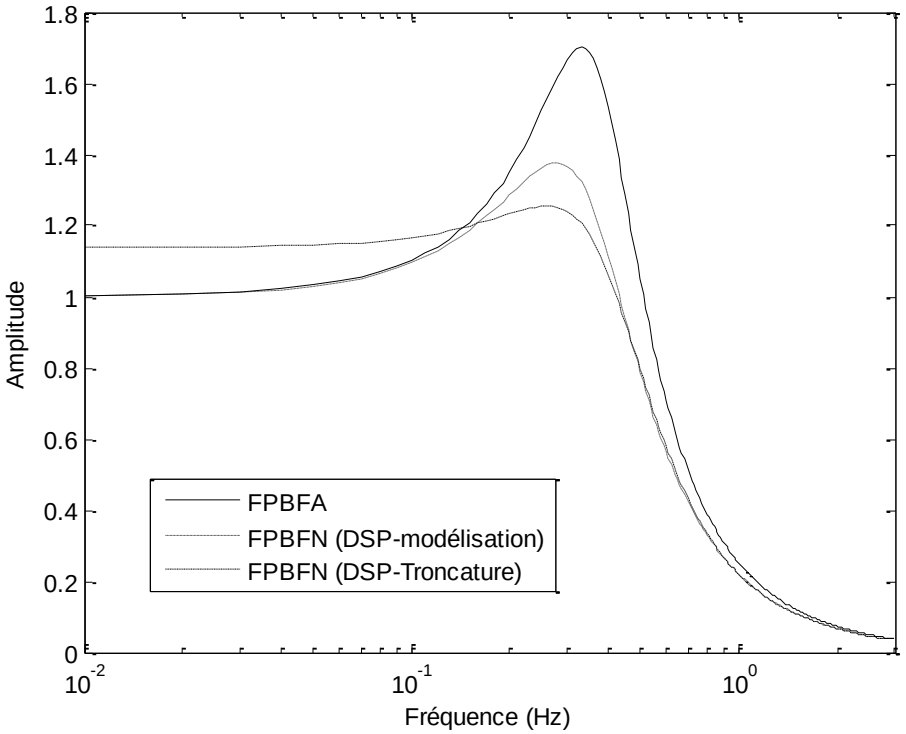


Figure3. 24 : Réponses fréquentielles (amplitude) des filtres numériques passe-bas obtenus par les méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature
a) $\alpha = 0.4$, b) $\alpha = 1.6$

		$\alpha = 0.4$	$\alpha = 1.6$
N(z)	n_0	4.000000000000000	4.000000000000000
	n_1	0.823159889790625	3.292639559162502
	n_2	-0.080728758698765	0.693473271445111
	n_3	0.020562201010502	0.022332456726635
	n_4	-0.006175053083649	0.002001465504626
	n_5	0.002025455137014	-0.000468396975435
D(z)	d_0	6.430438204063690	26.232831778755454
	d_1	0.175043035373641	-20.422381004843320
	d_2	-0.534410556790654	-6.421032897756633
	d_3	-0.155149479520325	5.186936935110126
	d_4	-0.127684961122863	1.918526460714281
	d_5	-0.082070347199663	0.543958208446541

Tableau 3. 8: Coefficients des filtres numériques obtenus par la méthode DSP-troncature

➢ **Commentaires**

- De la figure 3.18, on remarque que la réponse en fréquence (amplitude) des filtres numériques est confondue avec le tracé analogique, mais s'en éloigne dans les hautes fréquences proche de la limite de Shannon $f = \frac{f_e}{2}$, et dans les basses fréquences pour la courbe de Tustin.

- De la figure 3.22, on remarque que la réponse en fréquence (amplitude) des filtres numériques suit bien celle du filtre analogique sauf pour le pic, on constate une différence remarquable. Le tracé de la courbe de Tustin s'éloigne du tracé analogique sur toute la gamme de fréquence.

- L'allure des courbes basées sur l'approximation de s^{α} obtenue par la NMF (DSP-modélisation) est plus proche du tracé analogique dans une large bande de fréquence par rapport aux autres opérateurs.

- L'examen de la position des pôles et zéros des filtres numériques d'ordre 0.4 et 1.6, révèle que les filtres numériques obtenus sont stables et à phase minimale.

- Les filtres numériques passe-bas basés sur l'approximation de s^{α} obtenue par la méthode DSP- modélisation des signaux sont plus proches de l'analogique que celles basées sur la méthode DSP-troncature.

3.5.3.2 Conception des filtres passe-haut fractionnaires numériques

Soit un filtre passe-haut fractionnaire analogique (FPHFA) de fonction de transfert donnée par (3.24), avec $\alpha = 0.4\,, a = 4$.

La réponse en fréquence (amplitude et phase) du filtre est représentée sur la figure ci-après

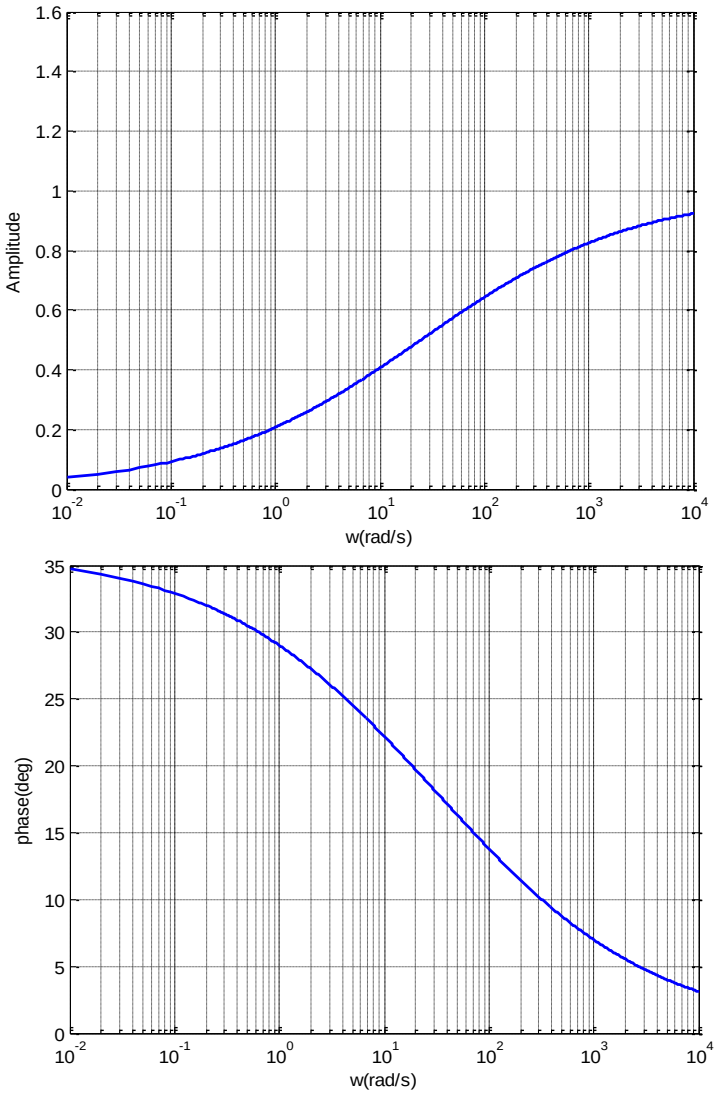


Figure3. 25: Réponse fréquentielle (amplitude et phase) d'un filtre passe-haut analogique d'ordre 0.4

Le filtre est de pulsation de coupure w_c= 203.35 rad/sec (fréquence de coupure f_c =*32.36Hz)* calculée selon l'expression (3.29). La fréquence d'échantillonnage est choisie égale à f_e=*323Hz*

Les coefficients des fonctions de transfert des approximations rationnelles discrètes de $s^{0.4}$ pour q=p=5, T=1/f_e basée sur les différentes règles de transformation sont rapportés dans le tableau 3.9.

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
b_0	10.687448052090240	10.632909102875812	10.079879084607825	13.300480191799220
b_1	-30.849793028582127	-37.695689695713362	-37.985446883978703	16.557631528905578
B(z) b_2	29.400194723118990	50.505680781512375	55.212089336221467	-11.083371516089953
b_3	-7.966867618068684	-31.030455156502200	-38.161668321087731	-17.319724600149428
b_4	-2.244378803288673	8.175565912877824	12.235938939650044	-0.635372809651682
b5	0.973544401650930	-0.587985912548945	-1.380781374053605	2.337337613234579
a_0	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
a_1	-2.414089391191289	-3.088047862727625	-3.368443228474905	2.044895454543041
A(z) a_2	1.679629387335792	3.429686073973449	4.250092516363023	0.481967294887681
a_3	-0.046370690647687	-1.572755271223621	-2.426238169386334	-1.228885057373139
a_4	-0.258912165542163	0.216524239570204	0.579985570519751	-0.713649368343177
a_5	0.039988691439338	0.014638703203164	-0.035376182040890	-0.047712732613746

Tableau 3. 9: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de $s^{0.4}$

La figure 3.25 montre la réponse en fréquence d'amplitude de $s^{0.4}$ et des approximations numériques obtenues.

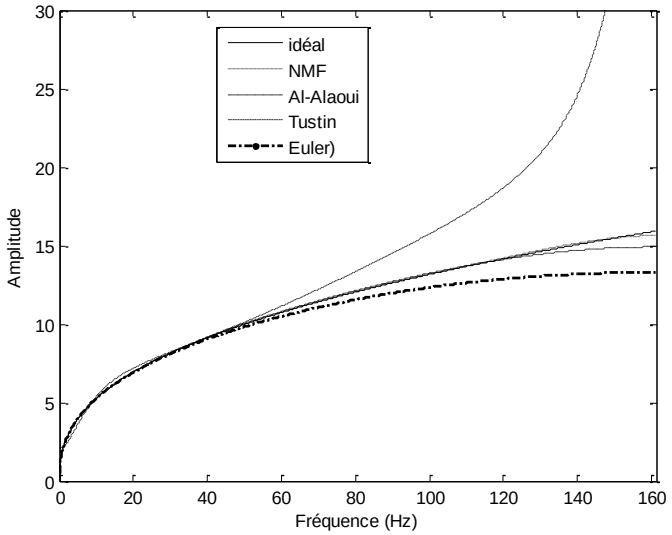


Figure3. 26 : Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{0.4}$ et des approximations obtenues basées sur différents operateurs

Les figures suivantes permettent de comparer les filtres numériques obtenus par l'approximation du dérivateur fractionnaire $s^{0.4}$. Les coefficients des fonctions de transfert des filtres obtenus sont rapportés dans le tableau 3.10.

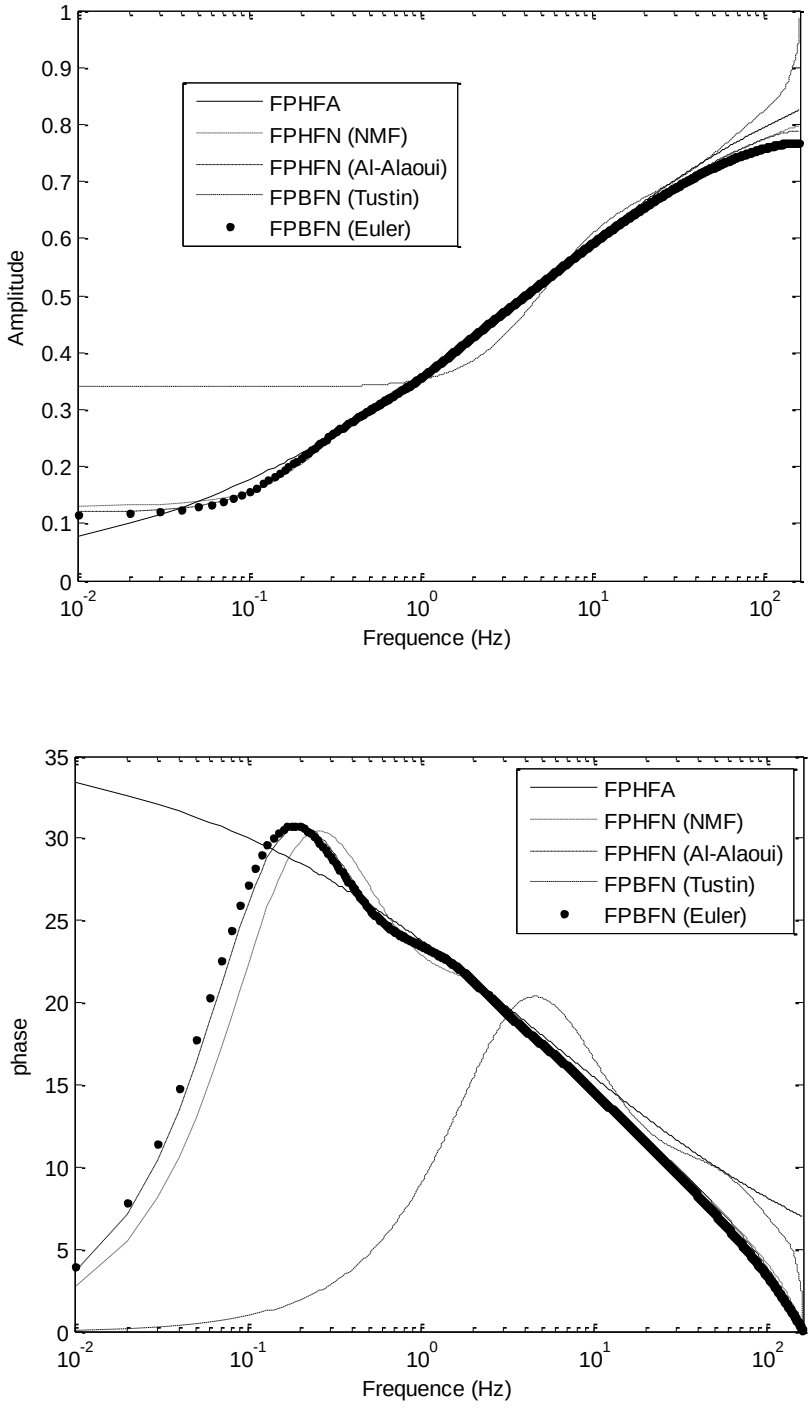
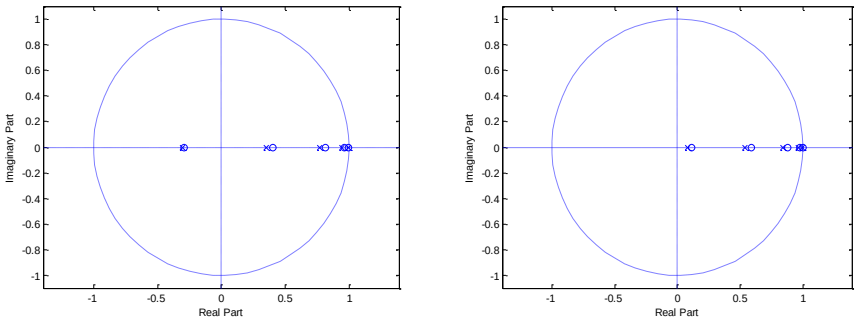


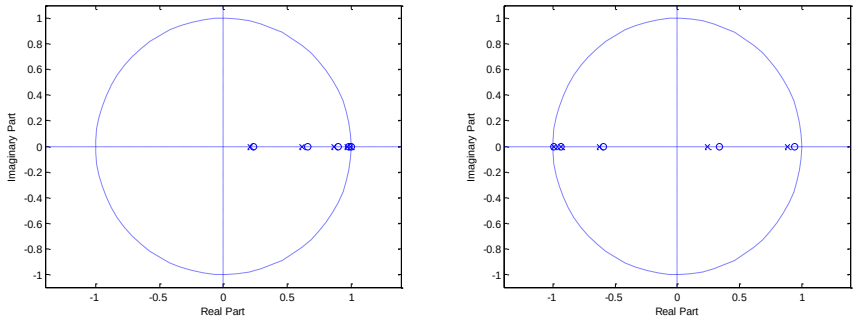
Figure3. 27: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-haut analogique et des filtres numériques d'ordre 0.4

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
n_0	10.687448052090240	10.632909102875812	10.079879084607825	13.300480191799220
n_1	-30.849793028582127	-37.695689695713362	-37.985446883978703	16.557631528905578
N(z) n_2	29.400194723118990	50.505680781512375	55.212089336221467	-11.083371516089953
n_3	-7.966867618068684	-31.030455156502200	-38.161668321087731	-17.319724600149428
n_4	-2.244378803288673	8.175565912877824	12.235938939650044	-0.635372809651682
n_5	0.973544401650930	-0.587985912548945	-1.380781374053605	2.337337613234579
d_0	14.687448052090240	14.632909102875812	14.079879084607825	17.300480191799220
d_1	-40.506150593347286	-50.047881146623865	-51.459219797878319	24.737213347077741
D(z) d_2	36.118712272462155	64.224425077406167	72.212459401673556	-9.155502336539229
d_3	-8.152350380659433	-37.321476241396681	-47.866620998633067	-22.235264829641981
d_4	-3.280027465457327	9.041662871158637	14.555881221729047	-3.489970283024388
d_5	1.133499167408282	-0.529431099736290	-1.522286102217166	2.146486682779597

Tableau 3. 10: Coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques passe-haut d'ordre 0.4



a) NMF b) Al-Alaoui



c) Euler d) Tustin

Figure3. 28: Distribution des pôles et des zéros

La figure 3.28 montre la distribution des pôles et des zéros des filtres numériques passe-haut obtenus.

Soit maintenant un filtre passe-haut fractionnaire avec $\alpha = 1.6$, $a = 4$, de fréquence de coupure f_c=*0.2384 Hz*, f_e=*2Hz*. Les réponses en fréquence du filtre sont illustrées sur la figure 3.29.

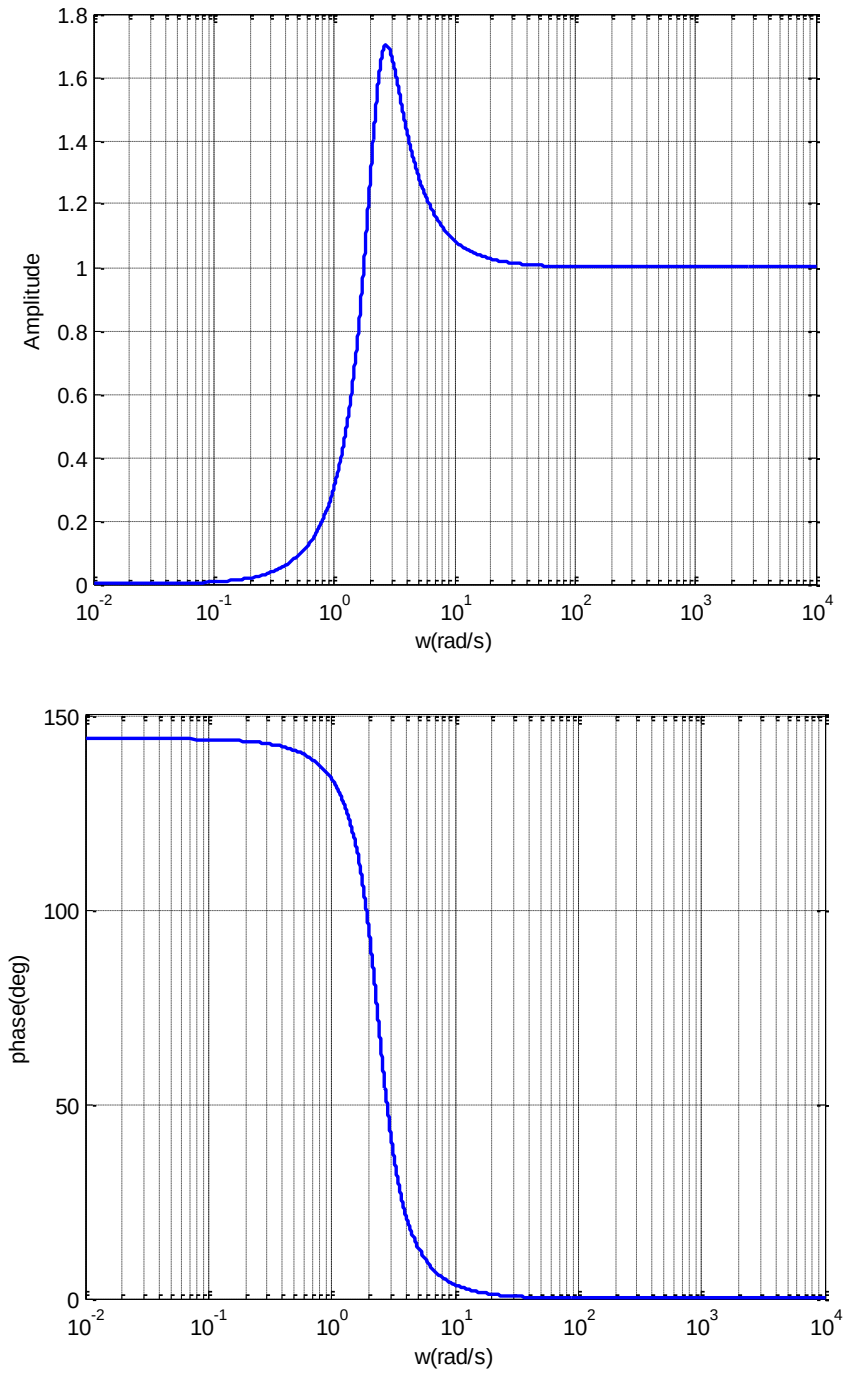


Figure3. 29: Réponse fréquentielle (amplitude et phase) d'un filtre passe-haut analogique d'ordre1.6

Les coefficients des fonctions de transfert des approximations rationnelles discrètes de $s^{1.6}$ pour q=p=5, $T=1/f_e$ basées sur les différentes règles de transformation sont rapportés au tableau 3.11.

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
b_0	5.075388548846420	4.972578333782709	4.016007527731729	12.174563971491606
b_1	-14.297372864425279	-17.678174944940093	-15.304755456203894	15.892576649975137
B(z) b_2	13.236098377558541	23.916894584219925	22.631758521243320	-18.311363182720822
b_3	-3.488274627162634	-15.074728283413446	-16.085874425438856	-36.031576127202101
b_4	-0.891778807254926	4.253367543484091	5.417021905811230	-14.124600172726916
b_5	0.365619724375882	-0.389970872421678	-0.674166423780177	-0.124760949667209
a_0	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
a_1	-0.927174097669275	-1.726561091811585	-2.210937940331254	4.552053337767452
A(z) a_2	-0.206560795792847	0.764453685317272	1.617886771810567	8.243618225008278
a_3	0.227306143399915	0.020664191204713	-0.419570273026301	7.417969326541610
a_4	0.000978847792484	-0.035552539045086	0.020058948272573	3.313298309279414
a_5	-0.001507164003848	-0.001348155670142	0.000852973950122	0.586893870809043

Tableau 3. 11: Coefficients des fonctions de transfert des approximations discrètes de $s^{1.6}$

La figure 3.30 montre la réponse en fréquence d'amplitude de $s^{1.6}$ et des approximations obtenues.

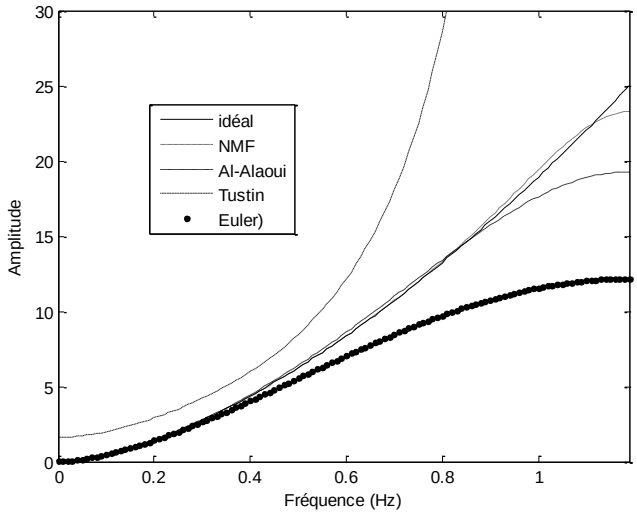


Figure3. 30: Réponses en fréquence d'amplitude de $s^{1.6}$ et des approximations correspondantes obtenues basées sur différents operateurs

Après remplacement de $s^{1.6}$ par son équivalent numérique dans l'expression de $T_{FPHF}(s)$, on obtient finalement la fonction de transfert *T(z)* du filtre numérique correspondant. Les coefficients des filtres obtenus, basés sur différents opérateurs, sont rapportés dans le tableau 3.12.

	NMF	Al-Alaoui	Euler	Tustin
n_0	5.075388548846420	4.972578333782709	4.016007527731729	16.174563971491608
n_1	-14.297372864425279	-17.678174944940093	-15.304755456203894	34.100790001044942
N(z) n_2	13.236098377558541	23.916894584219925	22.631758521243320	14.663109717312292
n_3	-3.488274627162634	-15.074728283413446	-16.085874425438856	-6.359698821035661
n_4	-0.891778807254926	4.253367543484091	5.417021905811230	-0.871406935609260
n_5	0.365619724375882	-0.389970872421678	-0.674166423780177	2.222814533568962
d_0	9.075388548846419	8.972578333782710	8.016007527731729	12.174563971491606
d_1	-18.006069255102378	-24.584419312186434	-24.148507217528909	15.892576649975137
D(z) d_2	12.409855194387152	26.974709325489012	29.103305608485588	-18.311363182720822
d_3	-2.579050053562972	-14.992071518594594	-17.764155517544058	-36.031576127202101
d_4	-0.887863416084988	4.111157387303747	5.497257698901521	-14.124600172726916
d_5	0.359591068360492	-0.395363495102246	-0.670754527979688	-0.124760949667209

Tableau 3. 12: Coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques passe-haut d'ordre 1.6

Les réponses en fréquence d'amplitude et de phase sont illustrées sur la figure 3.31.

La distribution des pôles et des zéros des filtres obtenus est illustrée sur la figure 3.32.

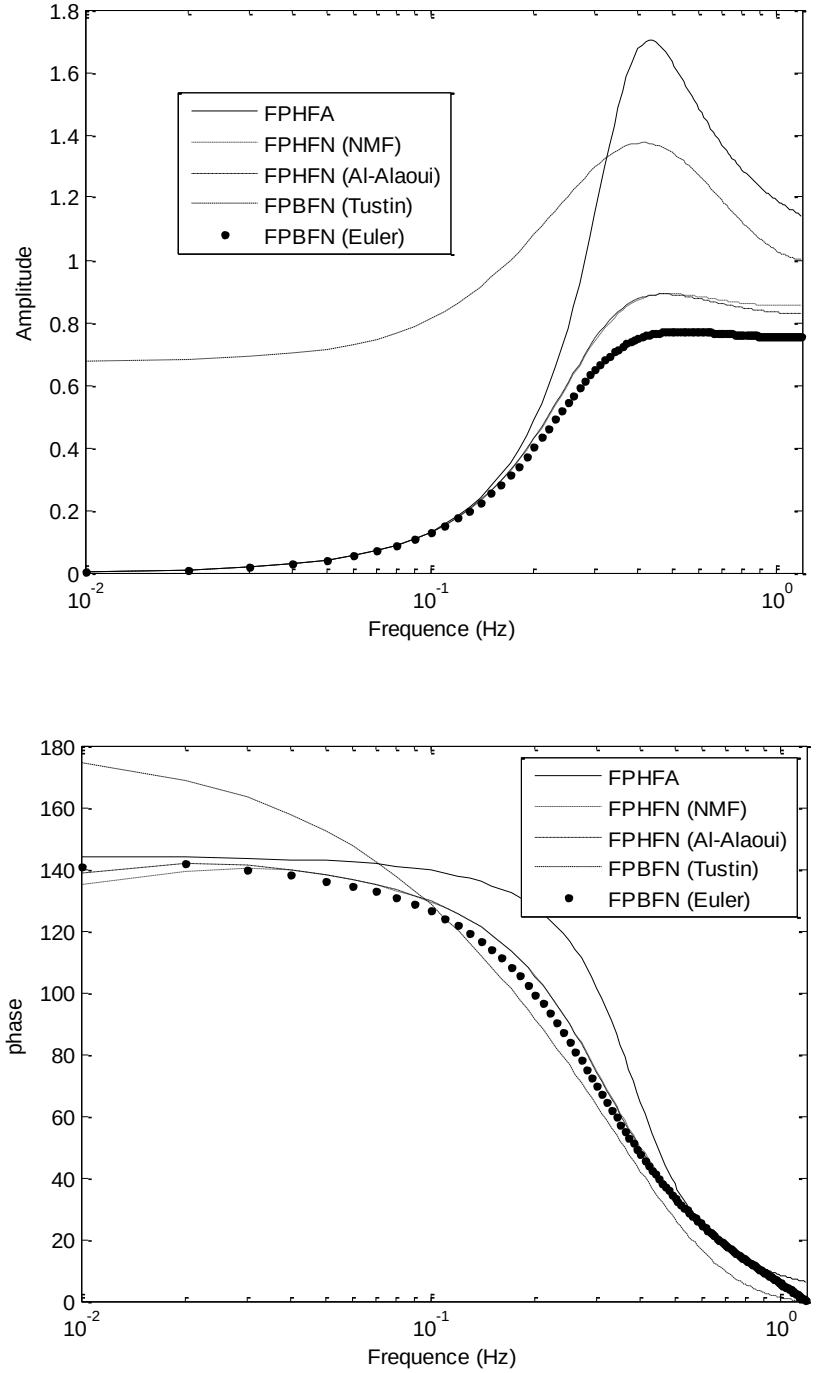
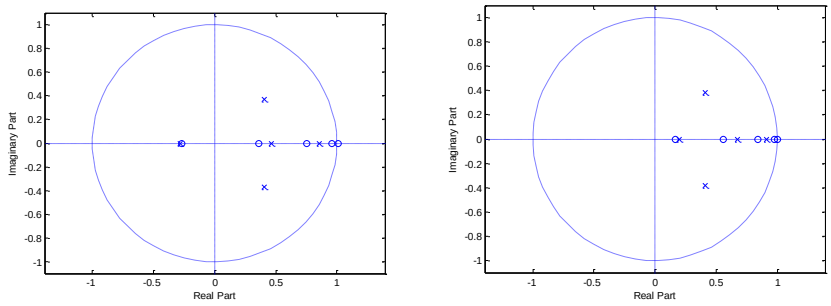
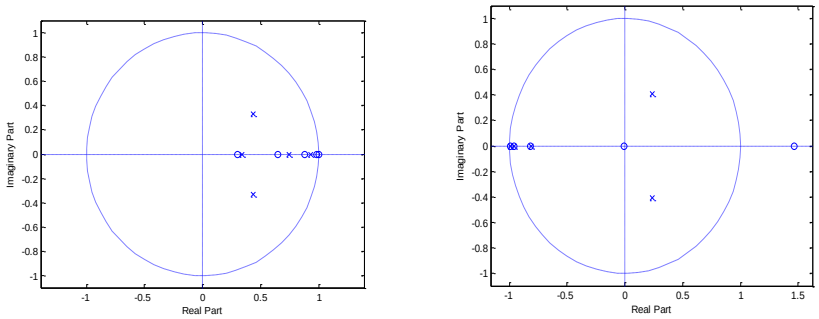


Figure3. 31: Réponses fréquentielles (amplitude et phase) du filtre passe-haut analogique et des filtres numériques d'ordre 1.6



a) NMF b) Al-Alaoui



b) Euler d) Tustin

Figure3. 32: Distribution des pôles et des zéros

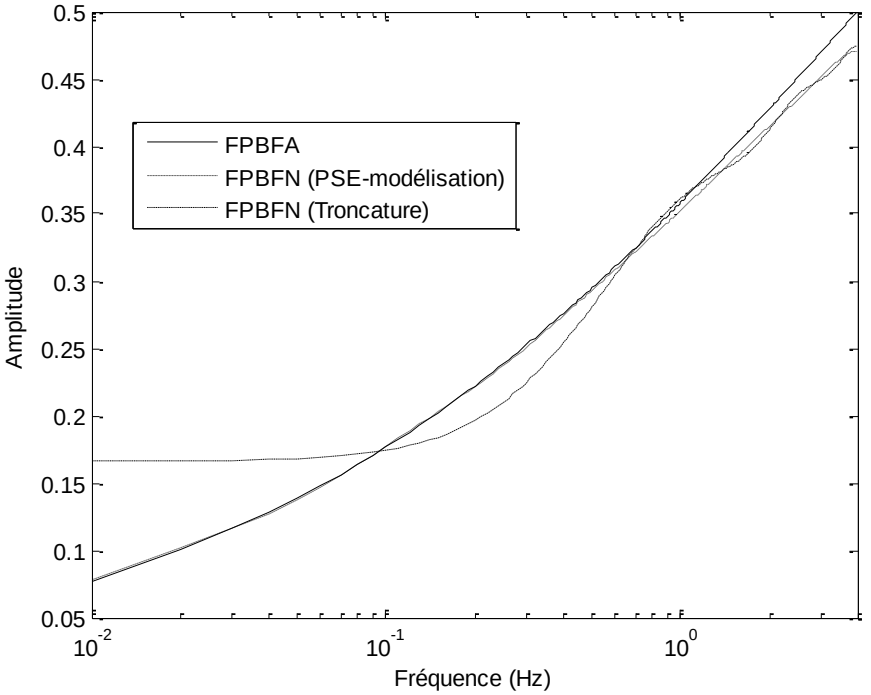
- **Comparaison des méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature**

Dans cette partie, nous allons comparer les méthodes DSP-modélisation et DSP-troncature basées sur la NMF, pour la synthèse des filtres passe-haut fractionnaires numériques.

Reprenons l'exemple des filtres passe-haut analogiques d'ordre 0.4 et 1.6, les coefficients des fonctions de transfert des filtres numériques obtenus par la méthode DSP-troncature sont donnés dans le tableau 3.13

La figure 3.33, illustre les réponses en fréquence d'amplitude des filtres obtenus.

a)



b)

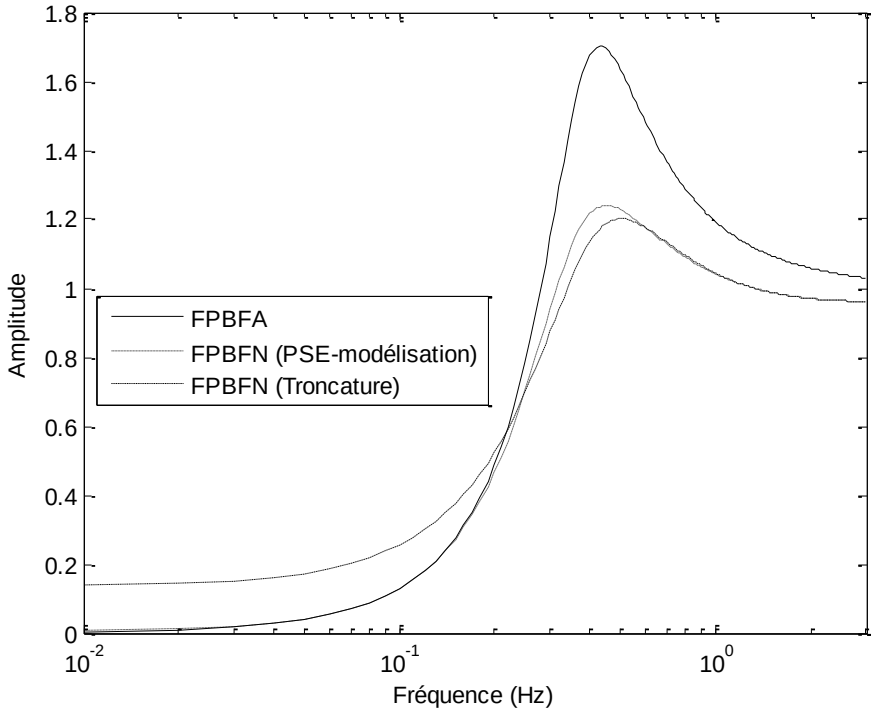


Figure3. 33: Réponses fréquentielles (amplitude) des filtres numériques passe-haut obtenus par les méthodes DSP-modélisations et DSP-troncature

a) $\alpha = 0.4$, b) $\alpha = 1.6$

➢ **Commentaires**

- De la figure 3.27, on remarque que la réponse en fréquence (amplitude) du filtre numérique est confondue avec le tracé analogique, mais s'en éloigne dans les hautes et les basses fréquences.

- La courbe basée sur NMF suit bien le tracé analogique et elle est plus proche surtout dans les hautes fréquences.

- De la figure 3.31, on remarque que la réponse en fréquence (amplitude) du filtre numérique suit bien celle du filtre analogique dans les basses fréquences et on constate une différence importante dans les hautes fréquences. Le tracé de la courbe de Tustin s'éloigne du tracé analogique sur toute la gamme de fréquence.

- L'examen de la position des pôles et des zéros des filtres numériques d'ordre 0.4 et 1.6, révèle que les filtres numériques obtenus sont stables et à phase minimale. Pour le cas de l'opérateur de Tustin, le filtre est stable mais à phase non minimale.

- Les filtres numériques passe-haut obtenus basés sur l'approximation de s^{α} par la méthode DSP- modélisation sont plus proches de l'analogique que ceux basés sur la méthode DSP-troncature.

3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de simulation obtenus pour l'approximation rationnelle discrète de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire s^{α}, pour différentes valeurs de α. Les résultats de simulation montrent que l'approximation rationnelle proposée basée sur NMF est la meilleure approximation en termes de précision en comparaison avec celles basées sur les opérateurs du premier ordre. Des exemples sont présentés pour comparer l'approximation proposée avec celles obtenues par les méthodes récentes. Enfin, Nous avons présenté les résultats de simulation obtenus pour la synthèse des filtres numériques fractionnaires passe-bas et passe-haut basée sur l'opérateur proposé dans ce travail. Les résultats sont satisfaisants.

Conclusion générale

1. Conclusion **87**

2. Perspectives **88**

1. Conclusion

La synthèse des filtres numériques fractionnaires porte essentiellement sur l'implémentation numérique de l'opérateur de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire s^{α} par un modèle discret entier.

Dans ce mémoire, nous avons présenté une novelle approximation rationnelle discrète efficace de l'opérateur de dérivation et intégration fractionnaire s^{α}.

Bien que de nombreuses méthodes aient été développées pour obtenir des approximations analogiques ou numériques, ce sujet aussi important dans les applications du calcul fractionnaire doit encore être abordé via de nouvelles approches qui semblent être plus prometteuse en termes de précision et de complexité du calcul. L'étape clé dans l'implémentation numérique de s^{α}, par les méthodes directes ou indirectes, est l'utilisation des fonctions de transformation qui permettent le passage du plan s au plan z.

Ceci nous a incités de proposer dans ce travail une nouvelle fonction de transformation du plan s au plan z. Comparé aux opérateurs les plus utilisés du premier ordre : Euler, Tustin, et la combinaison linéaire des deux règles (opérateur Al-Alaoui), et les opérateurs d'ordre supérieur utilisés dans les travaux récents, les résultats de simulation montrent que le nouveau opérateur est plus performant.

La deuxième partie de notre contribution consiste à l'utilisation de la méthode de modélisation des signaux déterministes, basée sur la nouvelle transformation du plan s au plan z d'ordre deux proposée dans ce travail, pour calculer l'approximation rationnelle discrète de l'opérateur fractionnaire s^{α}. Les résultats de simulation montrent que les approximations obtenues ont de meilleurs caractéristiques fréquentielles (amplitude et phase) comparées à celles obtenues basées sur les opérateurs d'ordre un et deux cités dans ce travail.

De plus, on a conclu d'après les résultats que la méthode de modélisation des signaux déterministes est plus performante en termes de précision de l'approximation que la méthode DSP-troncature et que les approximations obtenues sont stables, à phase minimale et ayant des pôles et zéros distribués de façon alternée dans l'axe réel du plan z, contrairement à la méthode DSP-troncature qui donne des approximations ayant des pôles et des zéros complexes conjugués.

Enfin, nous avons appliqué l'approximation discrète de l'opérateur fractionnaire, proposée dans ce travail, pour la synthèse des filtres passe- bas et passe-haut fractionnaires numériques. La procédure consiste à réaliser un filtre numérique fractionnaire, en remplaçant l'opérateur s^{α} dans la fonction de transfert du filtre analogique fractionnaire par son équivalent discret, proposé dans ce travail. Les résultats de simulation sont satisfaisants.

2. Perspectives

Les perspectives qui peuvent être envisagées à l'issue de ce travail sont :

- Améliorer l'approche proposée en minimisant la complexité du calcul.
- Appliquer le nouveau dérivateur dans des applications diverses et le comparé avec les dérivateurs les plus récents.
- Appliquer la nouvelle approximation rationnelle discrète de s^{α} dans différents domaines pour l'implémentation numérique des systèmes introduisant l'opérateur s^{α}, tels que en électrochimie, en rhéologie et en automatique.

Références

[1] M.A. Aoun, R. Malti, F. Levronet , A. Oustaloup, Numerical Simulation of Fractional Systems, Proceedings of DETC'03,Chicago,linois,USA,sep,2003

[2] A.B. Malinowska et al, Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations, Springer Briefs in Applied Sciences and Technology, DOI 10.1007/978-3-319-14756-7,2015.

[3] T. Blaszczyk, M. Ciesielski, M. Klimek, J. Leszczynski, Numerical solution of fractional oscillator equation. Appl. Math. Comput. 218(6), 2480–2488, 2011.

[4] P. Kumar, O.P. Agrawal, An approximate method for numerical solution of fractional differential equations. Signal Process 86, 2602–2610, 2006.

[5] A. Razminia, A.F. Dizaji, V.J. Majd, Solution existence for non-autonomous variable-order fractional differential equations, Math. Comput. Model. 55, 1106–1117, 2012.

[6] O. Cem, S. Melin, Y. Yavuz, An experimental performance evaluation for the suppression of vibrations of the second mode of a smart beam, in Proceedings of Ankara International Aerospace Conference, METU, Ankara, Turkey, 14–16 Sept., 1–9, 2011.

[7] P. Lanusse, H. Benlaoukli, D. Nelson-Gruel, A. Oustaloup, Fractional-order control and interval analysis of SISO systems with time-delayed state, IET Cont. Theory Appl. 2(1), 16–23,2008.

[8] G. Maione, High-speed digital realizations of fractional operators in delta domain, IEEE Trans. Autom. Control 56(3), 697–702,2011.

[9] C.A. Monje, F. Ramos, V. Feliu, B.M. Vinagre, Tip, position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller, IET Cont. Theory Appl. 1(5), 1451–1460,2007.

[10] M. Benmalek, A. Charef, Digital fractional order operators for R-wave detection in electrocardiogram signal, IET signal process 3(5), 381–391,2009.

[11] Y. Ferdi, Impulse invariance-based method for the computation of fractional integral of order $0<\alpha<1$.Comput. Electr. Eng. 35(5),722–729,2009.

[12] Y. Ferdi, Improved low pass differentiator for physiological signal processing. In Proceedings of IEEE 7th Inter. Conf. on Communication Sys. Networks and Digital Signal Process.(CSNDSP), Newcastle upon Tyne, England,21–23, 747–750,2010.

[13] A. Goutas et al, ”Digital fractional order differentiation-based algorithm for P and T- waves detection and delineation. ITBM-RBM, Elsevier, 2005

[14] J. Lu, M. Xie, Use fractional calculus in iris localization. in Proceedings of Inter. Conf. Communications, Circuits and Systems (ICCCAS), Fujian, China, 25–27, May. 946–949, 2008.

[15] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, C. Ceyral, Fractional differentiation for edge detection. Signal Process 83(11), 2421–2432 (2003)

[16] A. Radwan, A. Soliman, and A. Elwakil, ” First – order filters generalized to the fractional domain,” J. of circuits, Systems and computers.17,(1),55-66, 2008.

[17] B. Maundy, A.S. Elwakil, T.J. Freeborn, "On the practical realization of higher-order filters with fractional stepping," Signal Process., 91,(3), 484-491, 2011.

[18] T.J. Freeborn, B. Maundy, A.S. Elwakil, " Field programmable analogue array implementation of fractional step filters," IET Circuits Devices Syst., 4(6), 514-524, 2010.

[19] T.J. Freeborn, B. Maundy, A.S. Elwakil, “Towards the realization of fractional step filters," IEEE Int. Symp. Circuits Syst., 1037-1040, Paris, France, 2010.

[20] Y.Q. Chen, K.L. Moore, Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators. IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl. 49(3), 363–367, 2002.

[21] B.T. Krishna, K.V.V.S. Reddy, Design of fractional order digital differentiators and integrators using indirect discretization. Int. J. Circ. Theor. Appl. 11(2), 143–151, 2008.

[22] C.C. Tseng, Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators. Signal Process 87(5), 1045–1057, 2007.

[23] M. Gupta, P. Varshney, G.S. Visweswaran, Digital fractional order differentiator and integrator models based on first and higher order operators. Int. J. Circ. Theor. Appl. 2010. doi:10.1002/cta.650

[24] P. Varshney, G.S. Visweswaran, First and higher order operator based fractional order differentiator and integrator models. in Proceedings of 2009 IEEE Region 10 Conference, 1–6,TENCON 2009,

[25] G.S. Visweswaran, P. Varshney, M. Gupta, New approach to realize fractional power in z-domain at low frequency. IEEE Trans. Circuits syst. II Express. Briefs 58(3), 179 183, 2011.

[26] I.Petras, Fractional-order feedback control of DC motor. J. Electr. Eng. 60(3), 117–128, 2009.

[27] A.G. Radwan, K.N. Salama, Fractional-order RC and RL circuits. Circuits Syst. Signal Process 31(6), 1901–1915,2012.

[28] G Maione , Closed-form rational approximations of fractional, anlog and digital differentiators/integrators. IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems 3(3), 322 – 329, 2013.

[29] Y. Wei, Q. Gao, C. Peng, Y. Wang, A rational approximate method to fractional order systems. International Journal of Control, Automation and Systems1.2,(6), 1180-1186, 2014.

[30] R. EL-Khazali, Biquadratic approximation of fractional-order Laplacian operators, IEEE 56th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS) , 69 – 72,2013.

[31] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, V. Feliu, Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. Fract. Calc. Appl. Anal. 3(3), 231–248, 2000.

[32] Y. Ferdi, Computation of fractional order derivative and integral via power series expansion and signal modeling. Nonlinear Dyn. 46(1–2), 1–15,2006.

[33] Y. Ferdi, A. Taleb-Ahmed, M.R. Lakehal, Efficient generation of $1/f^{\beta}$noise using signal modeling techniques. IEEE Trans. Circuits Syst. I 55(6), 1704–1710 (2008)

[34] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[35] J. Jacquelin, "LA DERIVATION FRACTIONNAIRE", EDP Sciences, 17 av. du Hoggar, PA de Courtabœuf, 91944 Les ULIS, France

[36] F. Brophy and A. C. Salazar, "Recursive filter synthesis in the time domain," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing..ASSP-22. 45-55, Feb. 1974.

[37] L.B. Jackson,'' Digital filters and signal processing, with Matlab exercises'', Kluwer Academic publishers, Boston Dordrecht London, 1996.

[38] A.K. Steiglitz, "On the simultaneous estimation of poles and zeros in speech analysis," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, vol.ASSP-25, 229-234, June 1977.

[39] A.K. Shaw, "An optimal method for identification of pole-zero transfer functions," in Proc. Int Symp. Circuits Syst. (San Diego, CA), 2409-2412. May1992.

[40] K. Shaw, "Optimal identification of discrete-time systems from impulse response data," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42,(1), 113-120, Jan. 1994.

[41] F .Leulmi "synthèse des filtres numériques récursifs par les techniques de modélisation des signaux déterministes, mémoire de magister, 2007

[42] F. Leulmi, Y. Ferdi "Synthèse du Conduit Vocal par Les techniques de Modélisation des Signaux Déterministes'', In Proceedings of the International Conference on Systems and Information Processing (ICSIP'09), May 2-4 2009, Guelma, Algeria.

[43] F .Leulmi, Y. Ferdi "Digital Implementation of Fractional Order Operators using Iterative Deterministic Signal Modeling Techniques'', Revue des Sciences et de la Technologie -RST- 2(1), Janvier 2011.

[44] A.M. Schneider et al., "Higher order s to z mapping function and their digiting continuous- time filter, proceeding of the IEEE, 79,(11), 1991

[45] C.C. Tseng, Digital integrator design using Simpson rule and fractional delay filter. IEE Proc. Vis. Image Signal Process 153(1), 79–85, 2006.

[46] S. K. Steiglitz, “Computer-aided design of recursive digital filters,” IEEE Transactions Audio and Electro-acoustic, 18, (2), 123–129, 1970.

[47] M.A. Al-Alaoui, Novel stable higher order s-to-z transforms. IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl. 48(11), 1326–1329, 2001.

Résumé

L'ingrédient de base des filtres fractionnaires est l'opérateur de dérivation et de l'intégration d'ordre non entier s^{α}. L'étape clé dans la synthèse des filtres fractionnaires numériques est l'implémentation numérique des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre non entier par un modèle approximatif.

Dans cette thèse, nous avons proposé une nouvelle approximation rationnelle numérique stable de l'opérateur de dérivation et d'intégration s^{α}, $\alpha \in R$. Un nouveau dérivateur numérique efficace est dérivé à partir de la fonction de transfert de l'intégrateur de Tseng. Ensuite, Nous avons appliqué la méthode de développement en série de puissance-modélisation des signaux pour le développement de l'expression du dérivateur fractionnaire discret obtenu. Les résultats de simulation montrent que l'approximation rationnelle proposée, stable et à minimum de phase, ayant des caractéristiques fréquentielles (amplitude et phase) meilleurs dans presque toute la gamme de fréquence en comparaison avec les approximations existantes basées sur des opérateurs du premier ordre. Les résultats de simulation obtenus ont été discutés et comparés avec des méthodes récentes de l'approximation rationnelle de s^{α}.

Enfin, nous présentons une application de l'approximation proposée pour la synthèse des filtres fractionnaires passe-bas et passe haut numériques.

Mots clés : Transformation du plan s au plan z, développement en série de puissance, modélisation des signaux, dérivateur et intégrateur d'ordre fractionnaire, opérateur d'Al-Alaoui.

Abstract

The basic ingredient of fractional order filter is the operator of derivation and integration of fractional order s^{α} . The key step in digital design of fractional filter is the digital implementation of fractional order operator with approximate models. In this Thesis, an improved stable digital rational approximation of the fractional-order operator s^{α}, $\alpha \in R$ is developed. First, a novel efficient second order digital differentiator is derived from the transfer function of the digital integrator proposed by Tseng. Then, the fractional power of the new s-to-z transform is expanded using power series expansion –signal modeling technique to obtain stable rational approximation of s^{α}. Simulation results show that the proposed rational approximation has better frequency characteristics in almost the whole frequency range than that of existing first-order s-to-z transforms based approximations for different values of the fractional-order α. The simulation results were discussed and compared with recent methods of rational approximation of s^{α}. Finally, we present in this work the application of the proposed approximation to design fractional low-pass and high- pass filters.

Keywords : s-to-z transforms, Power series expansion, Deterministic signal modeling , Fractional-order differentiator, Fractional-order integrator , Al-Alaoui's operator

ملخص

إن المكون الاساسي للمرشحات الكسرية هو معامل الاشتقاق الكسرىs^{α}. الخطوة الأساسية في تصميم المرشحات الرقمية الكسرية هي التصميم الرقمي لمعامل الاشتقاق والتكامل الكسري عن طريق نموذج تقريبي .

نقدم في هذا العمل مرشح رقمي تقريبي جديد لمعامل الاشتقاق الكسريs^{α} .اقترحنا أولا معامل الاشتقاق من الدرجة الثانية، نتائج المحاكاة أتبثت فعالية هذا المعامل مقارنة مع المعاملات الموجودة من الدرجة الاولى الأكثر استعمالا. ثانيا بإستعمال طريقة تصميم نموذج الاشارات المحددة تحصلنا على مرشح رقمي تقريبي لـ s^{α} . قدمنا أمثله توضيحية للتدليل على فعالية ودقة النتائج المتحصل عليها مقارنة بالمرشحات المتحصل عليها حديثا . أخيرا قمنا بتطبيق المرشح الرقمي لـ α من أجل تصميم مرشح كسري رقمي للعبور السفلي والعلوي.

كلمات المفاتيح: معامل الاشتقاق الكسرى، تحويلات من s الى z، تصميم نموذج الإشارات المحددة ، معامل Al-Alaoui .