

Cours d'Analyse Numérique  
Deuxième Année Licence Mathématiques

Présentée par : Dr. Nassima Nasri  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
Université 20 aout 1955 Skikda-Algérie

Année universitaire 2022/2023



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Résolution d'équation non-linéaire</b>	<b>3</b>
2.1	Introduction . . . . .	3
2.2	Existence et localisation des solutions . . . . .	3
2.2.1	Localisation des solutions . . . . .	3
2.3	Méthode de dichotomie . . . . .	4
2.3.1	Etude de convergence . . . . .	5
2.4	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	6
2.4.1	Etude de la convergence . . . . .	7
2.5	Méthode de point fixe . . . . .	9
2.6	Série d'exercices n°1 : Résolution des équations non linéaires . .	13
<b>3</b>	<b>Résolution des systèmes linéaires</b>	<b>15</b>
3.1	Introduction . . . . .	15
3.2	Méthodes Directes . . . . .	16
3.2.1	Méthode d'élimination de Gauss . . . . .	16
3.2.2	Méthode de Gauss-Jordan . . . . .	19
3.2.3	Méthode de décomposition LU . . . . .	21
3.2.4	Méthode de Cholesky . . . . .	24
3.3	Série d'exercices n°2 : Systèmes Linéaires (Méthodes Directes) .	27
3.4	Méthodes itératives . . . . .	28
3.4.1	Principe des méthodes itératives . . . . .	28
3.4.2	Matrice d'itération et les conditions de convergence . . . .	28
3.4.3	Principales méthodes itératives . . . . .	30
3.5	Série d'exercices n°3 : Systèmes Linéaires (Méthodes Itératives) .	36

<b>4</b>	<b>Interpolation et Approximation polynômiale</b>	<b>37</b>
4.1	Interpolation polynômiale . . . . .	37
4.1.1	Introduction . . . . .	37
4.1.2	Interpolation directe . . . . .	41
4.1.3	Interpolation de Lagrange . . . . .	43
4.1.4	Interpolation de Newton . . . . .	47
4.2	Approximation polynômiale . . . . .	52
4.2.1	Approximation au sens des moindres carrés . . . . .	52
4.3	Série d'exercices n°4 : Interpolation et Approximation Polynômiale	56
<b>5</b>	<b>Dérivation numérique</b>	<b>57</b>
5.1	Utilisation de la formule de Taylor . . . . .	57
5.1.1	Dérivée première . . . . .	57
5.1.2	Dérivée seconde . . . . .	58
5.2	Utilisation des formules d'interpolation . . . . .	59
5.2.1	Dérivée première . . . . .	59
5.2.2	Dérivée seconde . . . . .	60
5.3	Erreur de dérivation numérique . . . . .	62
5.3.1	Dérivée premier ordre . . . . .	62
5.3.2	Dérivée second ordre . . . . .	63
5.4	Série d'exercices n°5 : Dérivation numérique . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Integration numérique</b>	<b>67</b>
6.1	Introduction . . . . .	67
6.2	Les méthodes de Newton-Côtes . . . . .	69
6.2.1	Principe . . . . .	69
6.2.2	La méthode du rectangle . . . . .	69
6.2.3	La méthode des trapèzes . . . . .	70
6.2.4	L'intégrale de Simpson . . . . .	71
6.3	Analyse de l'erreur dans les méthodes d'intégration . . . . .	74
6.4	Formule de quadrature de Gauss . . . . .	76
6.5	Série d'exercices n°6 : Intégration Numérique . . . . .	78

# Chapitre 1

## Introduction

L'analyse numérique a commencé bien avant la conception des ordinateurs et leur utilisation quotidienne que nous connaissons aujourd'hui.

Les premières méthodes ont été développées pour essayer de trouver des moyens rapides et efficaces de s'attaquer à des problèmes soit fastidieux à résoudre à cause de leurs grande dimension (systèmes à plusieurs dizaines d'équations par exemple), soit parce qu'il n'existe pas de solutions explicites connues même pour certaines équations assez simples en apparence.

Dés que les ordinateurs sont apparus, ce domaine des mathématiques a pris son en vol et continue encore à se développer de façon très soutenu.

Les applications extraordinairement nombreuses sont entrées dans notre vie quotidienne. Nous pouvons téléphoner, communiquer par satellite, faire des recherches sur internet, regarder des films où plus rien n'est réel sur l'écran, améliorer la sécurité des voitures, des trains, des avions, connaître le temps qu'il fera une semaine à l'avance,...et ce n'est qu'une toute petite partie de ce qu'on peut faire.

Le but de ce polycopié est s'initier aux bases de l'analyse numérique et il est destiné aux étudiants de la deuxième année licence en mathématiques en espérant qu'il éveillera leurs intérêts et leurs inspirations.



## Chapitre 2

# Résolution d'équation non-linéaire

### 2.1 Introduction

Soit  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Le but de ce chapitre est de chercher les valeurs  $x$  qui vérifient

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

, Une solution de ce problème est appelée zéro de  $f$  ou racine de l'équation  $f(x) = 0$ .

### 2.2 Existence et localisation des solutions

**Théorème 2.2.1** (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$ . Si  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , il existe au moins une valeur  $c \in ]a, b[$  telle que  $f(c) = 0$ .

Si de plus,  $f$  est strictement monotone sur  $[a, b]$  alors la racine de l'équation  $f(x) = 0$  est unique.

#### 2.2.1 Localisation des solutions

**Définition 2.2.2** La localisation des solutions d'une équation est la détermination d'intervalles  $[a, b]$  ne contenant qu'une racine de  $f(x) = 0$ .

**Méthode**

La localisation des racines se fait par l'étude des variations de la fonction  $f$  (méthode graphique) et l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires. On recherche des intervalles dans les quels  $f$  soit strictement monotone et change de signe.

**Exemple 2.2.3** La fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ ,  $x \in ]0, +\infty[$  à une racine unique dans l'intervalle  $[\frac{5}{4}, \frac{5}{2}]$ . En effet; posons  $f_1(x) = \ln(x)$  et  $f_2(x) = \frac{1}{x}$ . Alors

$$f(x) = 0 \iff f_1(x) = f_2(x)$$

et d'après le graphe

$$G(f_1) \cap G(f_2) = \left\{ (\alpha, f(\alpha)); \alpha \in \left] \frac{5}{4}, \frac{5}{2} \right[ \right\}$$

### 2.3 Méthode de dichotomie

Un procédé systématique de raffinement de la localisation conduit à une première méthode numérique d'approximation des racines d'une équation, il s'agit de la méthode de dichotomie appelée aussi la méthode de bisection.

Le mot dichotomie vient du greque qui signifie couper en deux (dicho : deux; tomie : coupe), il exprime parfaitement le principe de la méthode.

#### Déscription de la méthode

Cette méthode est utilisée pour approcher les racines d'une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . S'il existe  $a, b$  ( $a < b$ ) avec  $f(a)f(b) < 0$ , on sait alors qu'il existe au moins une racine de  $f$  dans l'intervalle  $]a, b[$ . Posons :

$$a_0 = a, b_0 = b, I_0 = ]a_0, b_0[ \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Pour  $n \geq 1$ , on choisit le sous-intervalle  $I_n = ]a_n, b_n[$  de l'intervalle  $]a_{n-1}, b_{n-1}[$  de la façon suivante :

1. Posons  $x_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$
2. si  $f(x_{n-1}) = 0$ , alors  $\alpha = x_{n-1}$  et la méthode est terminée,
3. si  $f(x_{n-1}) \neq 0$ , alors
  - i) si  $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0$ , alors  $\alpha \in ]a_{n-1}, x_{n-1}[$  et on pose  $a_n = a_{n-1}$ ,  $b_n = x_{n-1}$ ;
  - ii) si  $f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$ , alors  $\alpha \in ]x_{n-1}, b_{n-1}[$  et on pose  $a_n = x_{n-1}$ ,  $b_n = b_{n-1}$ ;
4. on définit l'intervalle  $I_n = ]a_n, b_n[$ ; on augmente  $n$  de 1 et on recommence du premier point.

On obtient donc une suite de valeurs approchées de  $\alpha$  :

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}; \quad x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \dots; \quad x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (2.2)$$

### 2.3.1 Etude de convergence

**Théorème 2.3.1** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  : Nous supposons que  $f(a).f(b) < 0$  et que l'équation  $f(x) = 0$  admet une et une seule solution  $c \in ]a, b[$ . Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape  $n$  ( de sorte que  $x_i \neq c$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$  ) alors :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad (2.3)$$

**Preuve.** On a  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$  et par récurrence  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ .

D'où  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ .

En suite, on a  $x_{n+1}$  était au milieu de l'intervalle  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ,  $\forall x \in [a_n, b_n]$ .

Alors on trouve

$$|x - x_{n+1}| \leq \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+2}},$$

Et par définition  $c$  est la racine se trouve dans  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  par  $f(a_{n+1}).f(b_{n+1}) < 0$ , nous pouvons donc prendre  $x = c$ .

Ainsi

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+2}},$$

■

**Remarque 2.3.2** D'après le théorème 2.3.1 les itérations par la méthode de la dichotomie s'achèvent à la même étape quand

$$|x_m - \bar{x}| \leq \frac{|b_m - a_m|}{2} = \frac{b-a}{2^{m+1}} < \epsilon,$$

où  $\epsilon$  est une tolérance fixée et  $\bar{x}$  est la racine dans  $[a, b]$ . Donc pour avoir une erreur  $|x_m - \bar{x}| \leq \epsilon$  il suffit de prendre le plus petit  $m$  qui vérifie

$$m \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln 2} - 1 \quad (2.4)$$

#### Algorithme 2.3.3 (dichotomie)

**0 : Début ;**

**1 : Les données sont :**  $a, b, c, fa, fb, erreur, nmax$ .

**2 :**  $fa \leftarrow f(a), fb \leftarrow f(b)$ .

**3 : si**  $sign(fa) = sign(fb)$  **alors**

**4 : dire** (la fonction a le même signe aux points  $a$  et  $b$ ) ;

**5 : allez au début ;**

**6 : fin si.**

**7** :  $erreur \leftarrow b - a$   
**8** : pour  $n = 0$  à  $n_{max}$ , faire ;  
**9** :  $erreur \leftarrow \frac{erreur}{2}$   
**10** :  $c \leftarrow a + erreur$ ,  $fc \leftarrow f(c)$   
**11** : si  $|erreur| < \epsilon$  alors  
**12** : écrire (convergence)  
**13** : allez au début ;  
**14** : fin si.  
**15** : si  $sign(fa) \neq sign(fc)$  alors ;  
**16** :  $b \leftarrow c$ ,  $fb \leftarrow fc$   
**17** : sinon ;  
**18** :  $a \leftarrow c$ ,  $fa \leftarrow fc$   
**19** : fin si.  
**20** : fin faire.

**Exemple 2.3.4** Soit  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ .  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On veut approcher la solution de l'équation  $f(x) = 0$ .

On prend l'intervalle  $[1, 2]$ . Alors on a  $f(1) = -5 < 0$  et  $f(2) = 14 > 0$ .

$n$	$a_n$	$c_n$	$b_n$	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	1	1.5	2	-5	2.37	14
1	1	1.25	1.5	-5	-1.79	2.37
2	1.25	1.375	1.5	-1.79	0.16	2.37
3	1.25	1.3125	1.375	-1.79	-0.84	0.16
4	1.3125	1.34325	1.375	-0.84	-0.35	0.16

Si on prend l'estimation de l'erreur d'arrondis  $\epsilon = 10^{-2}$ , alors d'après le théorème de convergence on obtient :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln 2} - 1 = 8,96$$

d'où  $n = 9$ .

## 2.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson repose sur le théorème de Taylor.

Soit  $f \in C^1([a, b])$  tel que  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$  et on suppose que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution dans l'intervalle  $[a, b]$ . Le principe de la méthode de Newton-Raphson consiste à remplacer le problème nonlinéaire  $f(x) = 0$  par un problème affine  $g(x) = 0$ ; où  $g$  est la meilleure approximation affine de  $f$  au voisinage de  $x_0$  donné. On identifie la représentation de  $g$  à la

tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse au voisinage de  $x_0$ . En effet par la formule de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad (2.5)$$

On suppose que  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , et nous définissons  $x_1$  tel que  $g(x_1) = 0$ . Notons que  $x_1$  est bien définie lorsque  $f'(x_0) \neq 0$  donné par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nous construisons ainsi par récurrence, sous réserve que  $x_n \in [a, b]$ , la suite comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.4.1 Étude de la convergence

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle  $[a, b]$  telle que :

1.  $f(a) \times f(b) < 0$
2.  $f'(x) \neq 0, x \in [a, b]$
3.  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sont non nulles et gardent des signes constants dans  $[a, b]$ .

Alors la suite des itérés de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

converge vers l'unique zéro  $\bar{x} \in [a, b]$  de  $f$ .

**Preuve.** Les hypothèses de changement de signe de la fonction continue  $f$  et de signe constant de sa dérivée  $f'$ , également continue, sur  $[a, b]$  impliquent qu'il existe un unique zéro  $x^* \in [a, b]$ . Par conséquent, si  $f(x_0)f''(x_0) = 0$ , on a directement  $x_0 = \xi$  et la méthode est (trivialement) convergente. On suppose donc que  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Puisque  $f''$  garde un signe constant sur l'intervalle  $[a, b]$ , on doit distinguer deux cas. ■

Soit,  $\forall x \in [a, b], f''(x) > 0$  et alors  $f(x_0) > 0$ . Si de plus,  $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ , on a alors,  $\forall x \in [a, x^*[ , f(x) < 0$  et,  $\forall x \in ]x^*, b], f(x) > 0$ , d'où  $x_0 \in ]x^*, b]$ . On vérifie alors que :

$$\forall x_0 \in ]x^*, b], \quad g(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} > 0,$$

la fonction  $g$  définissant la méthode est donc strictement croissante sur  $]x^*, b]$ .

On en déduit d'une part que

$$\xi = g(\xi) \leq g(x_0) = x_1,$$

et d'autre part

$$x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

doù  $\xi \leq x_1 < x_0$ . Par récurrence, on obtient que la suite de Newton-Raphson est strictement décroissante et minorée par. Elle est donc convergente et a pour limite l'unique point fixe  $\xi$  de la fonction  $g$ . Si  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f'(x) < 0$ , un raisonnement identique conduit au fait que la  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Newton-Raphson est strictement croissante et majorée par  $\xi$ . De nouveau, cette suite est convergente et a pour limite  $\xi$ . Enfin, si  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f''(x) < 0$  et  $f(x_0) < 0$ , il suffit de reprendre la preuve ci-dessus en remplaçant  $f$  par  $-f$  pour établir la convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque 2.4.1** *Initialisation  $x_0$  dans  $[a, b]$  de la suite de Newton-Raphson vérifie :*

$$f(x_0) \times f''(x_0) > 0$$

**Définition 2.4.2** *Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $\bar{x}$ . S'il existe un nombre  $k$  et une constante  $C \neq 0$  tels que :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^k} = C \quad (2.7)$$

*on dit que la convergence est d'ordre  $k$  et  $C$  est la constante d'erreur asymptotique.*

**Exemple 2.4.3** *Soit la fonction  $f(x) = x^3 - x + 1$  et soit  $x_0 = 1$ , donner les valeurs de  $x_1$  et de  $x_2$  par la méthode de Newton. Grâce à la relation (2.6), on a  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ . Avec,  $f'(x) = 3x^2 - 1$  et  $f'(1) = 2$ . Alors on trouve  $f(1) = 1$ . Cependant, on a  $x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , de la même façon on trouve  $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$ ,  $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$  et  $x_2 = 3$ .*

**Exemple 2.4.4** *Soit  $f(x) = x^2 - \cos x$  sur  $[\frac{1}{2}, 1]$  et soit  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .*

*On a  $f'(x) = 2x + \sin x > 0$  sur  $[\frac{1}{2}, 1]$  et  $f''(x) = 2 + \cos x > 0$  sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ . En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,8250207 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,8241327556 \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,8241323123 \end{aligned}$$

On observe à chaque itération que  $|f(x_0)| \simeq 10^{-1}$ ,  $|f(x_1)| \simeq 2 \times 10^{-3}$ ,  $|f(x_2)| \simeq 10^{-6}$  et  $|f(x_3)| \simeq 3 \times 10^{-13}$ .

On voit que l'exposant de  $|f(x_i)|$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  est double à chaque itération, alors on dit que la méthode de Newton est d'ordre 2 (ou bien la convergence de la méthode de Newton est quadratique).

**0 : Début ;**  
**1 : Les données sont :**  $n, nmax, x, fx, fp, \epsilon, \delta$ .  
**2 : Définir**  $f(x)$ .  
**3 :**  $fx \leftarrow f(x)$   
**4 : pour**  $n = 1$  à  $nmax$ , **faire ;**  
**5 :**  $fp \leftarrow f'(x)$   
**6 : si**  $|fp| < \delta$  **alors**  
**7 : écrire** (dérivée petite)  
**8 : allez au début ;**  
**9 : fin si.**  
**10 :**  $d \leftarrow \frac{fx}{fp}$ ,  $x \leftarrow x - d$ ,  $fx \leftarrow f(x)$   
**11 : si**  $|d| < \epsilon$  **alors ;**  
**12 : écrire** (on a convergence.)  
**13 : allez au début ;**  
**14 : fin si.**  
**15 : fin faire.**

**Remarque 2.4.5** *i) Afin de faire tourner l'algorithme, Il faut utiliser une valeur initiale comme un point de départ.*

*ii) Les paramètres  $\delta$  et  $\epsilon$  sont utilisés pour contrôler la convergence de l'algorithme.*

**Exemple 2.4.6** *En utilisant la méthode de Newton, localiser les racines de  $x^3 + x = 2x^2 + 3$ . On va appliquer la méthode à la fonction  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$  en commençant par le point  $x_0 = 3$ . Il est bien évident que  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . Ainsi, en appliquant la méthode de Newton, on obtient le tableau suivant*

$x_n$	$f(x_n)$
3.0	9.0
2.4375	2.04
2.21303	0.256
2.17555	6.46e-3
2.17456	4.48e-6
2.17455	1.97e-12

## 2.5 Méthode de point fixe

La méthode de point fixe consiste à transformer l'équation non linéaire  $f(x) = 0$  en un problème équivalent :

$$g(x) = x \quad (2.8)$$

où la fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a la propriété suivante :

$$\bar{x} = g(\bar{x}) \quad \text{si et seulement si} \quad f(\bar{x}) = 0$$

**Définition 2.5.1** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  est tel que  $g(\bar{x}) = \bar{x}$ , on dit que  $\bar{x}$  est un point fixe de  $g$  (l'image de  $\bar{x}$  par  $g$  est lui-même).

La méthode de point fixe consiste à la construction d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.9)$$

**Remarque 2.5.2** Le choix de  $x_0$  a une influence sur le comportement (convergence) de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En effet, par exemple si on prend  $g(x) = x^2$ . Alors si on choisit  $x_0$  à gauche de 1, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le point fixe 0. Mais si on choisit  $x_0$  à droite de 1 la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini. Et si on choisit  $x_0$  exactement 1 on voit que la suite ne converge jamais vers 1 qui est un point fixe instable.

Le théorème suivant nous donne les conditions de convergence de la suite de la méthode de point fixe.

**Théorème 2.5.3** Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On se donne  $x_0 \in [a, b]$ . Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $g(x) \in [a, b]$  pour tout  $x \in [a, b]$  (condition de stabilité).
2. Il existe  $k \in [0, 1[$  tel que  $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$  pour tout  $x, y \in [a, b]$ . (condition de contraction stricte) (ou bien  $|g'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$ ).

Alors

- i)  $g$  est continue,
- ii)  $g$  a un et un seul point fixe  $\bar{x}$  dans  $[a, b]$ ,
- iii) la suite  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge vers  $\bar{x}$  pour tout choix de  $x_0$  dans  $[a, b]$ .

De plus, si  $x^*$  est la solution de l'équation  $g(x) = x$  alors

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{k-1} |x_1 - x_0|, \quad n \geq 1. \quad (2.10)$$

**Preuve. Continuité :** La condition de contraction stricte implique que  $g$  est continue puisque, si on prend une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]$  qui converge vers un élément  $x$  de  $[a, b]$ , alors nous avons  $|g(x) - g(y_n)| \leq k|x - y_n|$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(y_n) = g(x)$ .

**Existence :** La fonction  $h(x) = g(x) - x$  est continue dans  $[a, b]$  et, d'après la condition de stabilité, on a  $h(a) = g(a) - a \geq 0$  et  $h(b) = g(b) - b \leq 0$ . En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que  $h$  a au moins un zéro dans  $[a, b]$ ; i.e.  $g$  a au moins un point fixe dans  $[a, b]$ .

**Unicité :** L'unicité du point fixe découle de la condition de contraction stricte. En effet, on suppose qu'on a deux points fixes distincts  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , alors

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |g(\bar{x}_1) - g(\bar{x}_2)| \leq k |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$$

ce qui est impossible.

**Convergence :** On a

$$0 \leq |x_{n+1} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| \leq k |x_n - \bar{x}|, k < 1.$$

Et par récurrence on obtient :

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq k^{n+1} |x_0 - \bar{x}|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque  $0 \leq k < 1$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}| = 0.$$

■

**Exemple 2.5.4** Soit l'équation  $e^x - x - 2 = 0$ , On pose  $f(x) = e^x - x - 2$ , alors :

$$f(x) = 0 \iff e^x - 2 = x$$

ou

$$f(x) = 0 \iff \ln(x+2) = x$$

Donc on note :  $g_1(x) = e^x - 2$  et  $g_2(x) = \ln(x+2)$  D'autre part, on a  $f(1) = e - 3 < 0$  et  $f(2) = e^2 - 4 > 0$  d'où on prend  $I = [1, 2]$ .

Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe.

$$1 \leq x \leq 2 \implies e - 2 \leq e^x - 2 \leq e^2 - 2 > 2$$

d'où  $g_1([1, 2]) \not\subseteq [1, 2]$ . Alors la méthode de point fixe diverge.

Par contre la fonction  $g_2([1, 2]) \subset [1, 2]$  et  $|g_2'(x)| < k$ , où  $0 \leq k < 1$ . En effet,

$$1 < \ln 3 \leq \ln(x+2) \leq \ln 4 < 2 \quad \text{pour } x \in [1, 2].$$

et

$$g_2'(x) = \frac{1}{x+2} \text{ alors } g_2'(1) = \frac{1}{3} < 1 \text{ et } g_2'(2) = \frac{1}{4} < 1$$

D'autre part

$$g_2''(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} < 0.$$

Donc

$$|g_2'(x)| \leq \frac{1}{3} < 1.$$

D'où la méthode de point fixe converge.

On choisit  $x_0 = 1$ , on a

$$x_1 = g_2(x_0) = \ln 3$$

$$x_2 = g_2(x_1) = \ln(\ln 3 + 2) = 1,1309$$

$$x_3 = g_2(x_2) = 1,143205032$$

*On voit que la suite de la méthode de point fixe par la fonction  $g_2$  converge vers le point fixe  $\bar{x} \simeq 1,143205$  sur l'intervalle  $[1; 2]$ .*

## 2.6 Série d'exercices n° 1 : Résolution des équations non linéaires

### Exercice 1

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement décroissante telle que  $f(0) = 1$  et  $f(1) = -1$ .

1. Sachant que  $f(0,3) = 0$ , déterminer la suite des 4 premières itérations de la méthode de Dichotomie dans  $[0, 1]$  pour l'approximation de la racine de  $f$ .
2. Combien d'itérations faut-il effectuer pour avoir une précision de  $2^{-5}$  près.

### Exercice 2

On voudrait résoudre numériquement l'équation :  $f(x) = x^3 + x - 1$ .

1. Montrer que cette équation admet une solution réelle unique  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ .
2. Vérifier que cette équation est équivalente à  $x = g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
3. Etudier la convergence de la méthode de point fixe pour trouver la racine de  $f$ .
4. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  avec 2 chiffres significatifs après la virgule.

### Exercice 3

On considère l'équation non linéaire suivante :  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$ .

1. Montrer que cette équation admet une solution réelle unique  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ .
2. On voudrait résoudre cette équation par la méthode de point fixe, pour cela on considère l'équation suivante :

$$x = g_1(x) = 2e^{-x} - 1.$$

- a) Montrer que cette équation est équivalente à l'équation  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$ .
- b) Etudier la convergence de la méthode de point fixe  $x_{n+1} = g_1(x_n)$  sur  $[0, 1]$ .
3. On considère maintenant une autre équation équivalente donnée par :

$$x = g_2(x) = \ln\left(\frac{2}{x+1}\right).$$

Etudier la convergence de la méthode de point fixe  $x_{n+1} = g_2(x_n)$  sur  $[0, 1]$ .

4. On procède maintenant à une réduction de l'intervalle  $[0, 1]$ .
  - a) Vérifier que  $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  la méthode de point fixe  $x_{n+1} = g_2(x_n)$  converge.
  - b) Calculer les 10 premières itérations.

**Exercice 4**

Soit la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2x}.$$

1. Trouver de façon analytique l'unique point fixe positif de cette fonction.
2. Utiliser cette méthode pour approximer  $\sqrt{5}$  avec 3 itérations en partant de  $x_0 = 2$ .

**Exercice 5**

On voudrait calculer la racine positive de :

$$f(x) = x^4 - 2x - 4 = 0.$$

1. Montrer que cette équation admet une solution réelle unique  $\alpha$  dans  $[1, 2]$ .
2. Etudier la convergence de la méthode de Newton.
3. Calculer les 4 premières itérations par la méthode de Newton.

**Exercice 6**

Adopter la méthode de Newton pour calculer la valeur approchée de  $\sqrt[3]{17}$  à 0,001.

## Chapitre 3

# Résolution des systèmes linéaires

### 3.1 Introduction

On appelle système linéaire d'ordre  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), une expression de la forme

$$AX = b, \quad (3.1)$$

où  $A = (a_{i,j})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  désigne une matrice carrée d'ordre  $n$  de nombres réels ou complexes,  $b = (b_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  un vecteur colonne réel ou complexe et  $X = (x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est le vecteur des inconnues du système. La relation (3.1) équivaut aux équations :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.2)$$

La matrice  $A$  est dite régulière (inversible) si  $\det(A) \neq 0$ ; on a existence et unicité de la solution  $X$  si et seulement si la matrice  $A$  est inversible.

On cherche à résoudre le système linéaire (6.1).

Théoriquement, si  $A$  est inversible, la solution du système  $AX = b$  est donnée par la formule de Cramer<sup>11</sup> :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

où  $A_i$  est une matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  par le vecteur  $b$ .

Cependant l'application de cette formule est inacceptable pour la résolution pratique des systèmes, car son coût (ou nombre d'opérations) est en  $O((n+1)!)$ . Par exemple, sur un ordinateur effectuant  $10^9$  opérations par seconde il

---

<sup>11</sup>Gabriel Cramer, 1704-1752

faudrait au moins  $10^{47}$  années pour résoudre un système linéaire de seulement 50 équations.

Il faut donc développer des algorithmes alternatifs avec un coût raisonnable. Ce problème est un des plus importants de l'analyse numérique.

Dans les sections suivantes plusieurs méthodes sont analysées. Ces méthodes se divisent en deux catégories :

- **Méthodes directes** : Ce sont des méthodes qui permettent d'obtenir la solution  $X$  de (3.1), si l'ordinateur faisait des calculs exacts, en un nombre fini (en relation avec  $n$ ) d'opérations élémentaires.
- **Méthodes itératives** : Ce sont des méthodes qui consistent à construire une suite de vecteurs  $X^{(n)}$  convergeant vers la solution  $X$ .

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que  $A$  est une matrice inversible de  $M_n(R)$ , où  $M_n(R)$  est l'ensemble des matrices carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels.

## 3.2 Méthodes Directes

### 3.2.1 Méthode d'élimination de Gauss

Cette méthode est dite directe car elle conduit au vecteur solution en un nombre fini d'opérations, elle à triangulariser le système initial. Le principe de la méthode de Gauss repose sur le fait que le vecteur solution ne change pas quand on modifie un système par combinaison linéaire de ses lignes.

Pour triangulariser, on procède donc, par combinaison linéaire des lignes du système, à l'élimination, colonne par colonne des coefficients non nuls sous la diagonale de la matrice initiale.

#### Algorithme d'élimination de Gauss :

On pose  $A^{(1)} = A$  et  $b^{(1)} = b$

$$\left( A^{(1)}; b^{(1)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & : & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & : & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & : & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & : & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

**A la 1<sup>ère</sup> étape** : Si  $a_{11}^{(1)} \neq 0$  (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)} \text{ où } \alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

on obtient donc

$$\left( A^{(2)}; b^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & \vdots & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

où

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, & 1 \leq j \leq n; & b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ a_{i1}^{(2)} = 0, & 2 \leq i \leq n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \alpha_{i1} a_{1j}^{(1)}, & 2 \leq i, j \leq n; \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \alpha_{i1} b_1^{(1)}, & 2 \leq i \leq n; \end{cases}$$

Si on pose

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\alpha_{21} & \ddots & & & & \\ -\alpha_{31} & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -\alpha_{n1} & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

on aura

$$A^{(2)} = E^{(1)} . A^{(1)}$$

A la  $k^{\text{ième}}$  étape ( $1 \leq k \leq n-1$ ) : Si  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)}, & 1 \leq i \leq k; \\ L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \alpha_{ik} L_k^{(k)} \text{ où } \alpha_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, & k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\left( A^{(k+1)}; b^{(k+1)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} & \vdots & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k)} & \vdots & b_2^{(k)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{kk}^{(k)} & & & & \vdots & b_k^{(k)} \\ & & & 0 & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & \vdots & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & & \vdots & b_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{matrix}$$

où



3. La méthode de Gauss permet de calculer  $\det(A)$  par :

$$\det(A) = (-1)^j \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i)} \quad (3.3)$$

où  $j$  est le nombre de permutations.

4. Si à la  $k^{\text{ième}}$  étape  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , alors il existe  $p$ ,  $k + 1 \leq p \leq n$  tel que  $a_{pk}^{(k)} \neq 0$ , car :

$$\det(A) = a_{11}^{(1)} \times a_{22}^{(2)} \times \dots \times a_{k-1,k-1}^{(k-1)} \times \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0$$

5. Au cours de la triangularisation, si l'on trouve que l'un des pivots  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure  $L_p$ ,  $k + 1 \leq p \leq n$  dont l'élément de la  $k^{\text{ième}}$  colonne  $a_{pk}^{(k)}$  est non nul.

6. La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle "Gauss ordinaire".

### Exemple 3.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \hookrightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \hookrightarrow A^{(3)} = \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 3.2.2 Méthode de Gauss-Jordan

### Principe de la méthode

1. Transformation de la matrice  $A$  en la matrice identité :

$$(A, b) \xrightarrow{\text{transformation}} (I_n, b^{(n)}) \quad (3.4)$$

où  $I_n$  est la matrice identité dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

2. Résolution du système :

$$AX = b \iff I_n X = b^{(n)} \iff X = b^{(n)}$$

**Algorithme de Gauss-Jordan**

On pose  $A^{(1)} = A$  et  $b^{(1)} = b$

$$\left( A^{(1)}; b^{(1)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

**A la 1<sup>ère</sup> étape :** Si  $a_{11}^{(1)} \neq 0$  (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \leftarrow \frac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(2)}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

on obtient

$$\left( A^{(2)}; b^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & \vdots & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

où

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, & 1 \leq j \leq n; & b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ a_{i1}^{(2)} = 0, & 2 \leq i \leq n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(2)}, & 2 \leq i, j \leq n; \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} b_1^{(2)}, & 2 \leq i \leq n; \end{cases}$$

A la  $k^{\text{ième}}$  étape ( $1 \leq k \leq n$ ) : Si  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} L_i^{(k)}, \\ L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} L_k^{(k+1)}, & 1 \leq i \leq n. \quad i \neq k \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\left( A^{(k+1)}; b^{(k+1)} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{1n}^{(k+1)} & \vdots & b_1^{(k+1)} \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots & b_2^{(k+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & a_{k-1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k+1)} & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a_{k,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k+1)} & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & \vdots & b_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{matrix}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)}, \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n; \quad i \neq k \\ \left\{ \begin{array}{l} b_i^{(k+1)} = \frac{b_i^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)}, \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n; \quad i \neq k \end{array} \right. \quad k+1 \leq j \leq n;$$

- Remarque 3.2.2** 1. Pour résoudre un système d'ordre  $n$ , la méthode de Gauss Jordan nécessite  $O(n^3)$  opérations (moins rapide que celle de Gauss).  
2. Elle est conseillée pour inverser une matrice :

$$(A, I_n) \xrightarrow{\text{transformation}} (I_n, A^{-1})$$

### 3.2.3 Méthode de décomposition LU

#### Principe de la méthode

- Décomposition de la matrice  $A$  de façon à la mettre sous la forme  $A = LU$  où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure unitaire et  $U$  est une matrice triangulaire supérieure.
- Résolution : Le système  $AX = b$  devient

$$AX = b \iff \underbrace{LUX}_Y = b \iff \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases} \quad (3.5)$$

donc la résolution du système  $AX = b$  revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

**Théorème 3.2.3** Soit  $A$  une matrice telle que les sous matrices principales  $A_{[k]} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  de  $A$  soient inversibles pour tous  $1 \leq k \leq n$ , alors il existe une matrice  $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  triangulaire inférieure telle que  $l_{ii} = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  telle que  $A = LU$ . De plus cette décomposition est unique.

**Preuve. Existence :** Montrons que tous les pivots d'élimination de Gauss sont non nuls, c'est à dire  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . On le démontre par récurrence. Le premier pivot  $a_{11}^{(1)}$  est forcément non nul car :

$$a_{11}^{(1)} = \det(A_{[1]}) \neq 0.$$

Supposons que  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  pour  $1 \leq k \leq r-1$  et montrons que  $a_{rr}^{(r)} \neq 0$ . On a  $\det(A_{[r]}) = a_{11}^{(1)} \times a_{22}^{(2)} \times \dots \times a_{r-1,r-1}^{(r-1)} \times a_{rr}^{(r)}$ . Or d'une part, par hypothèse  $\det(A_{[r]})$  est différent de zéro et d'autre part, par hypothèse de récurrence  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  pour  $1 \leq k \leq r-1$ . Donc  $a_{rr}^{(r)}$  est aussi différent de zéro.

**Unicité :** Soit  $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ , d'où  $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = D$ . Comme  $U_1 U_2^{-1}$  est une matrice triangulaire supérieure et  $L_1^{-1} L_2$  est une matrice triangulaire inférieure et  $D$  a des 1 sur la diagonale, alors  $D = I_n$  ce qui implique que  $U_1 = U_2$  et  $L_1 = L_2$  ■

### Détermination des matrices L et U

a) **En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss ordinaire :** Au premier pas d'élimination de Gauss, on trouve :

$$A^{(2)} = E^{(1)} . A^{(1)} \quad \text{où} \quad E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\alpha_{21} & \ddots & & & 0 \\ -\alpha_{31} & & 1 & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ -\alpha_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Au deuxième pas, on trouve

$$A^{(3)} = E^{(2)} . A^{(2)} \quad \text{où} \quad E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & -\alpha_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & -\alpha_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

de la même manière au  $k^{\text{ième}}$  pas d'élimination, on obtient

$$A^{(k+1)} = E^{(k)} . A^{(k)} \quad \text{où} \quad E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & -\alpha_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & 0 & \ddots \\ & & & -\alpha_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= E^{(n-1)}.A^{(n-1)} = E^{(n-1)}.E^{(n-2)}.A^{(n-2)} \\ &= E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(1)}A \end{aligned}$$

Posons  $U = A^{(n)}$  et  $L^{-1} = E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(1)}$

alors :  $U = L^{-1}A$  d'où  $A = LU$  où

$$\begin{aligned} L &= \left( E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(1)} \right)^{-1} \\ &= \left( E^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left( E^{(2)} \right)^{-1} \dots \left( E^{(n-1)} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{21} & 1 & & & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$U = A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**b) En appliquant l'algorithme de la méthode :** En connaissant  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , on écrit l'égalité  $A = LU$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & 0 \\ \vdots & l_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

( $U$  contient  $\frac{n(n+1)}{2}$  éléments et  $L$  contient  $\frac{n(n-1)}{2}$  éléments). Par identification on obtient un système linéaire de  $n^2$  équations à  $n^2$  inconnues. En résolvant le système obtenu dans des cas particuliers ( $n = 2, 3, 4$ ), on constate que la détermination des éléments de  $L$  et  $U$  cherchés se fait suivant l'algorithme général :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} l_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ u_{1j} = a_{1j}, \quad 1 \leq j \leq n \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} \cdot u_{kj}, \quad m \leq j \leq n \\ l_{im} = \left( a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} \cdot u_{km} \right) / u_{mm}, \quad m+1 \leq i \leq n \end{array} \right. \end{array} \right. \quad 2 \leq m \leq n$$

**Utilité de la détermination LU**

1. Calcul de déterminant Grâce à la factorisation  $LU$ , on peut calculer le déterminant d'une matrice carrée avec  $o\left(\frac{2}{3}n^3\right)$  opérations, vu que

$$\det(A) = \det(L) \times \det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^n u_{kk}. \quad (3.6)$$

2. Résolution : Supposons qu'on veut résoudre le système  $AX = b$ . Décomposons  $A$  sous forme  $LU$ , alors  $AX = b$  devient  $(LU)X = b$  ou encore  $L(UX) = b$ . Posons  $Y = UX$ , on cherche alors  $Y$  tel que  $LY = b$  est un système triangulaire inférieur qu'on résout par la méthode descendante.  $Y$  étant trouvé, on cherche  $X$  tel que  $UX = Y$  est un système triangulaire supérieur qu'on résout par la méthode ascendante.
3. **Calcul de l'inverse d'une matrice** : Soit  $A$  une matrice carrée inversible d'ordre  $n$ , notons par  $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$  les colonnes de sa matrice inverse  $A^{-1}$ , i.e.  $A^{-1} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ . La relation  $A.A^{-1} = I_n$  se traduit par les  $n$  systèmes linéaires suivants :

$$Av^{(k)} = e^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq n$$

où  $e^{(k)}$  est le vecteur colonne ayant toutes les composantes nulles sauf la  $k^{\text{ième}}$  composante qui est 1,  $e^{(k)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$ . Une fois connues les matrices  $L$  et  $U$  qui décomposent la matrice  $A$ , résoudre les  $n$  systèmes (6.3) gouvernés par la même matrice  $A$ .

**Exemple 3.2.4** Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

A l'aide de la décomposition  $LU$  de  $A$  :

1. Résoudre le système donné en déterminant les matrices  $L$  et  $U$  :
  - a) En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss ordinaire.
  - b) En appliquant l'algorithme de la méthode.
2. Calculer l'inverse de  $A$ .

**3.2.4 Méthode de Cholesky**

Dans le cas d'une matrice  $A$  symétrique définie positive, il est possible de résoudre le système  $AX = b$  avec un nombre d'opérations égal presque à la moitié du nombre d'opérations utilisées dans la méthode de Gauss.

**Définition 3.2.5** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite définie positive si et ssi

$$X^t A X > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad (3.7)$$

**Exemple 3.2.6** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$X^t A X = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

**Définition 3.2.7**  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite *définie positive* si et ssi toute sous-matrice principale  $A_{[k]} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ ,  $k = \overline{1, n}$  de  $A$  est de déterminant strictement positif.

**Théorème 3.2.8** Si  $A$  est une matrice symétrique et définie positive alors, il existe (au moins) une matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que  $A = LL^t$ .

De plus, si on impose que les éléments diagonaux de  $L$  soient tous positifs, alors cette décomposition est unique.

**Preuve.** On a  $A$  définie positive assure l'existence de la décomposition  $LU$  de  $A$  où  $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une matrice triangulaire inférieure unitaire et  $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une matrice triangulaire supérieure (car toute sous-matrice principale  $A_{[k]}$ ,  $k = \overline{1, n}$  de  $A$  est de déterminant non nul).

Remarquons que  $\det(A_{[k]}) = \prod_{j=1}^k u_{jj}$ ,  $k = \overline{1, n}$  ce qui implique que  $u_{ii} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Soit  $D$  et  $D^{\frac{1}{2}}$  les matrices diagonales définies par :

$$D = (u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}), \quad D^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \dots, \sqrt{u_{nn}})$$

alors

$$\left(D^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{u_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{u_{22}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{u_{nn}}}\right)$$

D'une part, on a

$$A = LU = LI_n U = LD^{\frac{1}{2}} \left(D^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} U$$

Posons  $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = LD^{\frac{1}{2}}$ , matrice triangulaire inférieure avec  $l_{ii} = \sqrt{u_{ii}}$ .

$H = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \left(D^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} U$ , matrice triangulaire supérieure avec  $h_{ii} = \sqrt{u_{ii}}$ .

alors

$$A = RH$$

D'autre part, on a  $A$  est symétrique, alors

$$A = A^t$$

$$\Leftrightarrow RH = R^t H^t$$

$\Leftrightarrow H(R^t)^{-1} = (R)^{-1} H^t$  (multiplions les deux côtés à gauche par  $(R)^{-1}$  et à droite par  $(R^t)^{-1}$ ).

$\Rightarrow H(R^t)^{-1} = I_n$  et  $(R)^{-1} H^t = I_n$  ( $H(R^t)^{-1}$  est M.T.S. et  $(R)^{-1} H^t$  est M.T.I.)

$$\Rightarrow H = R^t. \quad \blacksquare$$

**Algorithme de Cholesky<sup>2</sup>**

Son principe est le suivant : on écrit la matrice  $A$  sous la forme  $RR^t$  où  $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $r_{ij} = 0$  si  $j > i$ , ensuite on identifie colonne après colonne on aura

**Première colonne : ( $j = 1$ )**

$$\begin{cases} a_{11} = r_{11}^2 \implies r_{11} = \sqrt{a_{11}} & (\text{si on impose que } r_{11} > 0) \\ a_{i1} = r_{i1}r_{11} \implies r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

**Deuxième colonne : ( $j = 2$ )**

$$\begin{cases} a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2 \implies r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{21}^2} & (\text{si on impose que } r_{22} > 0) \\ a_{i2} = r_{i1}r_{21} + r_{i2}r_{22} \implies r_{i2} = \frac{1}{r_{22}}(a_{i2} - r_{i1}r_{21}), & 3 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Ainsi on a construit l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n \\ \text{pour } 2 \leq j \leq n \\ r_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk}^2} \\ r_{ij} = \frac{1}{r_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik}r_{jk} \right), \quad j+1 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

**Conclusion**

On peut utiliser la décomposition  $RR^t$  d'une matrice  $A$  symétrique définie positive pour résoudre le système linéaire  $AX = b$  ou pour inverser  $A$ , de la même manière que pour la décomposition  $(LU)$ .

1. Si  $A = RR^t$  où  $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  alors,

$$\det(A) = (\det(R))^2 = \prod_{i=1}^n r_{ii}^2$$

2. La décomposition  $A = RR^t$  n'est pas unique si on n'impose pas que  $r_{ii} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
3. Pour une matrice définie positive on a :  $r_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk}^2 > 0$ , donc, si a une étape de calcul on trouve que  $r_{jj}^2 < 0$ , la matrice  $A$  n'est pas définie positive.

<sup>2</sup>André Louis Cholesky, français, 1875-1918

### 3.3 Série d'exercices n°2 : Systèmes Linéaires (Méthodes Directes)

#### Exercice 1

Résoudre le système suivant par la méthode de Gauss avec pivot et en déduire le déterminant de la matrice du système.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

#### Exercice 2

La méthode de Jordan consiste à transformer une matrice non singulière en une matrice diagonale.

Résoudre le système de l'exercice précédent par la méthode de Jordan.

#### Exercice 3

1. Donner la factorisation  $LU$  de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire le déterminant de la matrice  $A$
3. Résoudre le système  $AX = b$  par la factorisation  $LU$  où  $b = (-47, -12, 18)^T$ .

#### Exercice 4

On considère la matrice tridiagonale suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice  $A$  est définie positive.
2. En déduire que  $A$  admet une décomposition de Cholesky  $A = LL^T$ .
3. Résoudre le système  $AX = b$  par la méthode de Cholesky où  $b = (0, 0, 0, 5)^T$ .
4. En déduire le déterminant de la matrice  $A$

### 3.4 Méthodes itératives

Les méthodes directes de résolution des systèmes linéaires sont utilisées dans les cas simples où la matrice  $A$  du système  $Ax = b$  est de dimension réduite. Par conséquent, si la dimension de la matrice est grande (elle peut atteindre  $10^6$ ) il est commode de trouver les racines du système par des méthodes numériques approchées car le processus direct devient très compliqué.

#### 3.4.1 Principe des méthodes itératives

Ecrivons d'abord la matrice  $A$  sous la forme  $A = M - N$  où  $M$  est inversible, alors

$$\begin{aligned} AX = b &\iff (M - N)X = b \\ &\iff MX = NX + b \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés par  $M^{-1}$ , on aura

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b$$

Le principe de toutes les méthodes itératives est le suivant :

- choisir un vecteur  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .
- générer la suite  $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$$

- si la suite  $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X^*$ , alors  $X^*$  est la solution du système  $AX = b$ .
1. Le critère d'arrêt se fait, en général, sur l'erreur relative de deux itérés successifs  $X^{(k)}$  et  $X^{(k+1)}$ , c'est à dire

$$\text{Test} \left( \frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon \right)$$

où  $\epsilon$  choisi petit, ou sur l'erreur absolue si  $\|X^{(k+1)}\|$  est très petite.

2. La méthode itérative est dite convergente si :  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n, X^{(k)} \rightarrow X^*$  quand  $k \rightarrow +\infty$  où  $X^*$  est la solution du système  $AX = b$ .

#### 3.4.2 Matrice d'itération et les conditions de convergence

On appelle, pour  $M$  et  $N$  choisies, matrice d'itération la matrice  $B = M^{-1}N$ .

##### Condition nécessaire de convergence

Notons par  $E^{(k)} = X^{(k)} - X^*$  le vecteur erreur à l'étape  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), on a

$$X^* = BX^* + M^{-1}b$$

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + M^{-1}b$$

en soustrayant (1) de (2), on aura

$$X^{(k)} - X^* = B \left( X^{(k-1)} - X^* \right) = BE^{(k-1)}$$

Alors

$$E^{(k)} = BE^{(k-1)} = B^2E^{(k-2)} = \dots = B^kE^{(0)}, \quad \text{où } E^{(0)} = X^{(0)} - X^*,$$

ou encore

$$X^{(k)} - X^* = B^{(k)} \left( X^{(0)} - X^* \right)$$

La méthode converge si  $\forall X^{(0)}, \lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} = X^*$ , ce qui est vraie si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0 \quad (0 \text{ au sens matriciel}).$$

#### Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit  $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } B\}$  le rayon spectral de  $B$ . On a le théorème suivant :

**Théorème 3.4.1** *La suite  $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  définie par :*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$$

*converge vers  $X^*$  si et ssi  $\rho(B) < 1$ .*

#### Condition suffisante de convergence

##### Rappel

1. Soit  $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ , les normes définies par :

$$\begin{aligned} - \|X\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ - \|X\|_2 &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ - \|X\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

sont équivalentes.

2. Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ , les normes définies par :

$$\begin{aligned} - \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ - \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^t \cdot A)} \\ - \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

sont équivalentes.

**Lemme 3.4.2** ( Relation entre  $\rho(B)$  et  $\|B\|_i$  )

$$\rho(B) < \|B\|_i \quad (i = 1 \vee 2 \vee \infty).$$

**Preuve.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$ , alors  $\exists X \in (\mathbb{R}^*)^n : BX = \lambda X$  et donc  $\|BX\|_i = \|\lambda X\|_i \implies |\lambda| \|X\|_i \leq \|B\|_i \|X\|_i$ ,  $X \in (\mathbb{R}^*)^n$  ( $\|BX\|_i \leq \|B\|_i \|X\|_i$ ).

D'où,

$$|\lambda| \leq \|B\|_i \implies \rho(B) \leq \|B\|_i, \quad (i = 1 \vee 2 \vee \infty).$$

■

D'après le lemme (6.3.3), on tire que l'existence d'une norme  $\|\cdot\|_i$ , ( $i = 1 \vee 2 \vee \infty$ ) de  $B$  qui vérifie  $\|B\|_i < 1$  est une condition suffisante pour la convergence de la méthode itérative.

### 3.4.3 Principales méthodes itératives

On considère la décomposition suivante de la matrice  $A$

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

où,

$$\begin{cases} D : \text{la diagonale de } A, \\ -E : \text{la partie au dessous de la diagonale de } A, \\ -F : \text{la partie au dessus de la diagonale de } A. \end{cases}$$

**Exemple 3.4.3** Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  alors,

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $a_{ii} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$  (on peut s'y ramener si  $A$  est inversible).

1. **Méthode de Jacobi** :  $M = D$ ,  $N = E + F$ .
2. **Méthode de Gauss-Seidel** :  $M = D - E$ ,  $N = F$ .
3. **Méthode de relaxation** :  $M = (\frac{1}{\omega})D - E$ ,  $N = (\frac{1}{\omega} - 1)D + F$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^*$ .

**Remarque 3.4.4** 1. Si  $\omega = 1$ , la méthode de relaxation coïncide avec celle de Gauss-Seidel.

2. La matrice  $M$  est inversible, car elle possède toujours les  $a_{ii}$  sur la diagonale.
3. la méthode de relaxation est une variante qui généralise la méthode de Gauss-Seidel. L'introduction du paramètre  $\omega$  vise à accélérer la convergence de cette dernière.

**Présentation des algorithmes**

On va, dans ce qui suit, expliciter les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, et cela sur un système linéaire à trois équations ( $n = 3$ ).

Soit donc  $AX = b$  où  $A \in M_3(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^3$ .

$$AX = b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

les  $(a_{ii})_{i=1,2,\dots,n}$  étant supposés non nuls ; tirons  $x_1$  de (1),  $x_2$  de (2) et  $x_3$  de (3), on obtient

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} = f(x_2, x_3) \quad (4)$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22} = f(x_1, x_3) \quad (5)$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33} = f(x_1, x_2) \quad (6)$$

soit  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^t \in \mathbb{R}^3$  quelconque.

**La méthode de Jacobi revient au processus itératif suivant**

1<sup>ère</sup> étape :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = f(x_1^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2<sup>ième</sup> étape :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = f(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt. (Il est évident qu'on ne peut pas calculer le coût de la méthode).

**La méthode de Gauss-Seidel revient au processus itératif suivant :**

1<sup>ère</sup> étape :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = f(x_1^{(1)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2<sup>ième</sup> étape :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = f(x_1^{(2)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

(c'est à dire toutes les composantes calculées  $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$  sont utilisées pour calculer  $x_i$ ), et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt.

**Généralisation** Soit  $AX = b$  un système linéaire d'ordre  $n$  où  $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Les équations (4), (5) et (6) précédentes se généralisent comme suit :

$$x_i = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

#### Etapes principales de la méthode de Jacobi

1. Etant données  $A, b, X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$ ,  $\epsilon$  ( la précision ) et  $K_{\max}$  ( le nombre maximal d'itérations ).
- 2.

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

A répéter pour  $k = 0, \dots, K_{\max}$ .

Si

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations, et  $X^{(k+1)}$  est une solution approchée de  $X$  solution du système donné avec une précision relative  $\epsilon$ .

#### Etapes principales de la méthode de Gauss-Seidel

1. Etant données  $A, b, X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$ ,  $\epsilon$  et  $K_{\max}$ .
- 2.

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

A répéter pour  $k = 0, \dots, K_{\max}$ .

Si

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations, et  $X^{(k+1)}$  est une solution approchée de  $X$  solution du système donné avec une précision relative  $\epsilon$ .

**Remarque 3.4.5** 1. S'il existe  $i_0 \in [1, n]$  tel que  $a_{i_0 i_0} = 0$ , on procède à une permutation de ligne sur  $A$  (et sur  $b$ ).

2. En général, la convergence de l'une de ces méthodes n'implique pas la convergence de l'autre.

3. Plus que  $\rho(B) \ll 1$ , plus que la convergence du processus itératif

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C \end{cases}$$

vers la solution exacte du système  $AX = b$  est plus rapide.

**Exemple 3.4.6** Soient les quatre systèmes linéaires  $A_i X = b_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées à chaque système, pour tout choix de  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , en utilisant le rayon spectral des matrices d'itérations. Conclure.

**Réponse :** On trouve les résultats suivants :

1.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

avec  $\rho(J_1) = 0 < 1$ ,  $\rho(G_1) = 2 > 1$ , d'où la méthode de Jacobi converge  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , alors que celle de Gauss-Seidel ne converge pas  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ .

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

avec  $\rho(J_2) = 1,118 > 1$ ,  $\rho(G_2) = \frac{1}{2} < 1$ , d'où la méthode de Gauss-Seidel converge  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , alors que celle de Jacobi ne converge pas  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ .

3.

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix},$$

avec  $\rho(J_3) = 0,44 < 1$ ,  $\rho(G_3) = 0,018 < 1$ , d'où les deux méthodes convergent  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , mais comme  $\rho(G_3) < \rho(J_3)$  alors, la méthode qui converge plus rapidement est celle de Gauss-Seidel.

4.

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-6}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{-4}{8} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-6}{7} & \frac{-9}{7} \\ 0 & \frac{24}{35} & \frac{64}{35} \\ 0 & \frac{-69}{140} & \frac{-423}{280} \end{pmatrix},$$

avec  $\rho(J_4) = 0,64 < 1$ ,  $\rho(G_4) = 0,77 < 1$ , d'où les deux méthodes convergent  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , mais comme  $\rho(J_4) < \rho(G_4)$  alors, la méthode qui converge plus rapidement est celle de

Jacobi.

### D'autres conditions suffisantes de convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Soit le système linéaire  $AX = b$  où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  inversible,  $J$  la matrice d'itération de Jacobi définie par :

$$J = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{où} \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

On a vu qu'une condition suffisante pour que le processus itératif converge (vers la solution du système) est que  $\|J\|_N$  où  $N$  est l'une des trois normes matricielles présentées.

Prenons la norme  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right), \quad \text{alors}$$

$$\|J\|_\infty < 1 \iff \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

et pour  $i$  fixé, on a

$$(|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{in}|) < 1$$

ou encore

$$\frac{1}{a_{ii}} (|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{in}|) < 1 \implies \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

auquel cas on dit que la matrice  $A$  est à diagonale dominante stricte.

**Remarque 3.4.7** On aboutit à la même conclusion pour la méthode de Gauss-Seidel. D'où le résultat suivant :

**Théorème 3.4.8** *Pour que les processus itératifs de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , il suffit que la matrice  $A$  du système  $AX = b$  soit à diagonale dominante stricte (D.D.S).*

**Proposition 3.4.9** *Si  $A$  est symétrique définie positive, alors le processus itératif de Gauss-Seidel converge  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .*

### Méthode de relaxation

La matrice d'itération est dans ce cas  $B = M^{-1}N$  où  $M = (\frac{1}{\omega})D - E$ ,  $N = (\frac{1-\omega}{\omega})D + F$ , avec  $\omega$  un paramètre dans  $\mathbb{R}^*$ .

On remarque que si  $\omega = 1$ , cette méthode coïncide avec celle de Gauss-seidel; on l'utilise pour accélérer la convergence de Gauss-Seidel :

$$\begin{aligned}\omega > 1 & \quad \text{procédé de sur-relaxation,} \\ \omega = 1 & \quad \text{méthode de Gauss-Seidel,} \\ \omega < 1 & \quad \text{procédé de sous-relaxation.}\end{aligned}$$

En écrivant le processus itératif :

$$X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$$

alors la méthode de relaxation consiste en le schéma suivant :

lors du passage de  $X^{(k)}$  à  $X^{(k+1)}$  on ne retient pas  $X^{(k+1)}$  pour la suite, mais  $\omega X^{(k+1)} + (1 - \omega) X^{(k)}$ . Autrement dit

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} + \omega \left( \underbrace{X^{(k+1)}}_{G-S} - X^{(k)} \right),$$

et en injectant cette expression dans l'algorithme de Gauss-Seidel, on trouve l'algorithme suivant :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

### Convergence de la méthode de relaxation

**Théorème 3.4.10** *( conditions sur le paramètre  $\omega$  )*

*Cas d'une matrice  $A$  quelconque (mais inversible), une condition nécessaire pour que la méthode de relaxation converge  $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  est que  $\omega \in ]0, 2[$ .*

*Si  $A$  est à diagonale dominante stricte, alors la condition suffisante de convergence est que  $\omega \in ]0, 1[$ .*

*Si  $A$  est symétrique définie positive, alors la condition nécessaire et suffisante de convergence est que  $\omega \in ]0, 2[$ .*

### 3.5 Série d'exercices n°3 : Systèmes Linéaires (Méthodes Itératives)

#### Exercice 1

Soient la matrice  $A$  et le vecteur  $X$  suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculer  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$ ,  $\|A\|_\infty$ ,  $\|X\|_1$ ,  $\|X\|_2$  et  $\|X\|_\infty$

#### Exercice 2

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour  $A$  et  $B$ .

#### Exercice 3

Soit le système linéaire  $AX = b$  suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la solution exacte par la méthode d'élimination de Gauss.
2. Effectuer 5 itérations de la méthode de Jacobi, en initialisant  $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ .
3. Effectuer 5 itérations de la méthode de Gauss-Seidel, en initialisant  $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ .

#### Exercice 4

Soit le système linéaire  $AX = b$  suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel.

1. Calculer la matrice d'itérations de la méthode de Gauss-Seidel.
2. Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , la convergence est-elle assurée.  
Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , calculer les itérés  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$  de la méthode de Gauss-Seidel, en initialisant  $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ .

# Chapitre 4

## Interpolation et Approximation polynômiale

### 4.1 Interpolation polynômiale

#### 4.1.1 Introduction

Dans la résolution de certains problèmes numériques on rencontre la situation suivante : on veut calculer les valeurs d'une fonction  $f(x)$  pour un très grand nombre de valeurs de  $x$ , mais on ne connaît pas la fonction  $f$  "explicitement". Ceci se produit lorsque :

- la fonction  $f$  n'est connue qu'en certains points expérimentaux  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  
ou
- lorsque la fonction  $f$  est évaluée numériquement par un code de calcul dont l'exécution est coûteuse.

On veut alors "représenter" la fonction  $f$  par une fonction simple dont l'évaluation est aisée. Autrement dit, il s'agit d'approcher la fonction  $f$  par une autre fonction, plus facile à calculer. Cette fonction approchée  $\tilde{f}$  est choisie dans une classe  $\tilde{F}$  de fonctions dont le calcul n'est pas trop coûteux. Citons l'ensemble des polynômes, l'ensemble des fractions rationnelles, l'ensemble des polynômes trigonométriques, ... La question est alors de savoir en quel sens on désire approcher la fonction  $f$ ? Dans ce cours, on s'intéresse qu'aux méthodes d'interpolations à savoir la méthode d'interpolation de Lagrange et celle de Newton.

Soit une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a, b]$ . On suppose que l'on connaît seulement sa valeur en  $n + 1$  points  $x_i$  de l'intervalle  $[a, b]$  que l'on suppose ordonnés

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = b$$

Chercher une fonction  $\varphi$  d'un type choisi à l'avance qui interpole la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , il s'agit alors de déterminer une fonction  $\varphi$  telle que

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, \dots, n \quad (4.1)$$

En général on cherche  $\varphi$  dans l'ensemble des polynômes, dans l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques ou exponentielles, dans l'ensemble des fractions rationnelles, etc<sup>1</sup>...

En effet, soit  $f(x)$  une fonction connue ou non, et supposons qu'un certain nombre de valeurs sont données

$(x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$ , pour  $i = 0, \dots, n$  (appelés points d'appuis, d'interpolation ou de collocations)

Ainsi, interpoler signifie estimer les valeurs de  $f$  pour des abscisses situées entre  $a$  et  $b$ , qui est dit l'intervalle d'interpolation, par une fonction approximative, disons  $P_n(x)$ <sup>2</sup>, qui vérifie les conditions de collocations :

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i), \text{ pour } i = 0, \dots, n,$$

où,  $P_n(x)$  s'appelle le polynôme de collocation ou d'interpolation sur les  $x_i$  ou fonction de collocation lorsque  $P_n(x)$  n'est pas un polynôme. Extrapoler signifie approcher  $f(x)$  par  $P_n(x)$  pour des abscisses situées hors de l'intervalle d'interpolation, ainsi, on obtient l'erreur d'interpolation

$$E(x) = f(x) - P_n(x).$$

L'interpolation a joué un rôle très important, surtout comme outil pour obtenir des valeurs intermédiaires dans les tables trigonométriques et autres jusqu'à la venue des calculatrices et des ordinateurs qui en a grandement réduit l'emploi. Néanmoins, il reste de nombreuses applications de l'interpolation, particulièrement lorsqu'on doit évaluer à plusieurs reprises une certaine fonction dont le calcul peut être très laborieux.

Ainsi, pour déterminer  $P_n(x)$ , on dispose beaucoup de formules, mais si l'on utilise les mêmes points d'interpolations, ces formules doivent toutes fournir le même polynôme.

**Théorème 4.1.1** Soit  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  avec les  $x_i$  sont tous distincts, il existe un unique polynôme d'interpolation  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  vérifiant :

$$P_n(x_i) = y_i, \text{ pour } i = 0, \dots, n.$$

**Preuve.** Soit :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

<sup>1</sup>Dans un ensemble de fonctions simples à connaître et à déterminer.

<sup>2</sup> $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$  qui appartient à l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  de tous les polynômes de degré  $n$ .

tel que :

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n.$$

Alors on a  $(n + 1)$  équation et  $(n + 1)$  inconnus comme suit :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

C'est un système linéaire par rapport à  $(a_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La matrice de ce système s'appelle la matrice de Vandermonde, leur déterminant est :

$$\det(v) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0, j>i}^n (x_i - x_j)$$

On a :  $\det(v) \neq 0$  car les  $(x_i)$  sont tous distincts. Donc, le système (4.2) admet une et une seule solution  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , d'où le polynôme d'interpolation existe et il est unique. ■

**Remarque 4.1.2** Soit  $f$  une fonction donnée, l'interpolation par un polynôme est-elle de plus en plus précise lorsque le nombre de points  $x_i$  donnés dans  $[a, b]$  est de plus en plus grand ? En général la réponse est négative même si  $f$  est indéfiniment différentiable.

Soit les données suivantes

valeurs de $x$	valeurs de $f(x)$
3,20	0,312500
3,30	0,303030
3,35	0,298507
3,40	0,294118
3,50	0,285714
3,60	0,277778
3,65	0,273973
3,70	0,270270

Tableau de données.

Dans ce cas, d'après ces données, on peut faire une représentation graphique de ces points, ainsi la représentation graphique obtenue montre un ensemble de données tabulées sous la forme de couple  $\{(x_i, f(x_i))\}$ , pour  $i = 1, \dots, n+1$ . La fonction  $f(x)$  est connue pour un ensemble discret (fini) de points de la variable  $x$ . La valeur de la fonction peut être déterminée par n'importe quelle valeur de ces points (valeurs de  $x$ ) en regardant simplement le tableau. Cependant, il y a un problème dès que l'on cherche à déterminer la valeur de la fonction pour n'importe quelle valeur de  $x$  comprise entre les valeurs discrètes de  $x$  du tableau. La fonction en question n'est pas connue et ne peut être déterminée à partir des valeurs tabulées. Cependant, la fonction en question peut être approximée (approchée) par une certaine fonction connue, et la valeur d'approximation peut être déterminée par n'importe quelle valeur de  $x$ , ainsi le procédé s'appelle interpolation. Dans plusieurs problèmes en science et en engineering, les données considérées sont seulement connues en un ensemble discret de points ou sous la forme de fonction continue. Par exemple

$$y = f(x), \quad (4.3)$$

peut être connue seulement en un nombre discret de points  $x$

$$y_i = f(x_i) \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.4)$$

où les données discrètes peuvent être petites ou grandes, régulières ou non régulières. Dans plusieurs applications, les valeurs des données discrètes en des points spécifiques ne sont pas toutes nécessaires. La dérivée de la fonction peut être exigée. L'intégrale de la fonction peut être d'un grand intérêt, donc les procédés d'interpolation, de dérivation et d'intégration sur un ensemble discret de points sont d'un intérêt pratique. Il existe plusieurs types de fonctions d'approximations. En fait, toute fonction analytique peut être utilisée comme une fonction d'approximation. Trois des plus utilisées sont les fonctions

1. Polynomiales.
2. Trigonométriques.
3. Exponentielles.
4. ... etc.

Sachant que les fonctions d'approximations devraient posséder les propriétés (**P**) suivantes :

- (**P**<sub>1</sub>) . Facile à déterminer.
- (**P**<sub>2</sub>) . Facile à évaluer.
- (**P**<sub>3</sub>) . Facile à dériver.
- (**P**<sub>4</sub>) . Facile à intégrer.

On sait que les polynômes vérifient les quatre propriétés (**P**) et nous allons considérer uniquement des polynômes. Il est bien de savoir qu'il y a deux manières fondamentalement différentes pour représenter des données par un polynôme, il y a alors

1. La méthode exacte,  
et
2. La méthode non-exacte ;

L'approche exacte engendre un polynôme qui passe exactement par tous les points discrets, ceci peut être intéressant pour les données réduites, l'autre approche convient pour les données de grandes tailles et fait passer un polynôme d'une certaine meilleure façon à travers tous les points, pour le moment, on considère uniquement l'interpolation exacte.

La forme générale d'un polynôme de degré  $n$  est donnée par

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (4.5)$$

où  $n$  indique le degré du polynôme et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des coefficients constants. Il y a  $(n + 1)$  coefficients, alors il doit y avoir  $(n + 1)$  points discret pour obtenir une valeur numérique de ces coefficients.

La propriété des polynômes qui les rend intéressants comme fonctions d'approximations est donnée par le Théorème d'approximation de Weierstrass

**Théorème 4.1.3 (Weierstrass)** *Soit  $f(x)$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un polynôme  $P_n(x)$  où la valeur de  $n$  dépend de la valeur de  $\varepsilon$ , telle que*

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, toute fonction continue peut être approximée avec n'importe quelle précision par un polynôme de degré suffisamment grand. Dans la pratique, on utilise des polynômes de degré petit. Il faut donc faire attention à l'obtention de la précision recherchée, où il est bien de savoir qu'un polynôme de degré  $n$  passant exactement par  $n + 1$  points discrets est unique, on dit alors que les polynômes d'interpolation vérifient le Théorème 4.1.1 d'unicité (voir plus haut).

### 4.1.2 Interpolation directe

Considérons d'abord, une procédure générale pour faire passer un polynôme par un ensemble de points discrets. Soit l'ensemble  $\{(x_i, f(x_i))\}$  pour  $i = 0, \dots, n$ , on cherche à déterminer l'unique polynôme  $P_n(x)$  de degré  $n$  qui passe exactement par les  $n + 1$  points  $x_i$ , pour  $i = 0, \dots, n$  :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (4.6)$$

En remplaçant les points  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, n$  dans (4.6), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n \\ f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n \\ \vdots \\ f(x_n) = a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n \\ f(x_{n+1}) = a_0 + a_1x_{n+1} + \dots + a_nx_{n+1}^n \end{array} \right. \quad (4.7)$$

il y a  $n + 1$  équations contenant  $n + 1$  coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , après résolution du système (4.7), il en résulte l'unique polynôme  $P_n(x)$  de degré  $n$  qui passe exactement par les  $n + 1$  points. Cette procédure générale est valable aussi bien pour les points uniformément espacés ou non uniformément espacés.

**Exemple 4.1.4** Pour illustrer l'approche directe, on donne la fonction simple  $f(x) = \frac{1}{x}$ , et on construit le tableau des données suivant

Valeurs de $x$	Valeurs de $f(x)$	
3,35	0,298507	Tableau des données.
3,40	0,294118	
3,50	0,285714	
3,60	0,277778	

Interpolons pour  $y$  au point  $x = 3,44$  en utilisant l'interpolation linéaire, quadratique et cubique. La valeur exacte est :

$$y(3,44) = f(3,44) = \frac{1}{3,44} = 0,290698\dots$$

Illustrons maintenant en détails la procédure pour un polynôme quadratique sous la forme  $P_2(x) = a + bx + cx^2$ . Afin de centrer les données autour de 3,44, les trois premiers points sont utilisés. L'évaluation de  $P_2(x)$  en chacun de ces points donne le système de trois équations :

$$\begin{cases} 0,298507 = a + b(3,35) + c(3,35)^2 \\ 0,294118 = a + b(3,40) + c(3,40)^2 \\ 0,285714 = a + b(3,50) + c(3,50)^2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Après avoir résolu le système d'équations (4.8), on trouve les coefficients  $a, b, c$ , qui nous donnent le polynôme

$$P_2(x) = 0,876561 - 0,256080x + 0,0249333x^2. \quad (4.9)$$

Ainsi, en remplaçant  $x = 3,44$  dans l'équation (4.9), on obtient

$$\begin{aligned} P_2(3,44) &= 0,876561 - 0,256080 \times (3,44) + 0,0249333 \times (3,44)^2 \\ &= 0,290697, \end{aligned}$$

soit

$$P_2(3,44) = 0,290697. \quad (4.10)$$

Dans ce cas l'erreur  $E(3,44)$  est

$$\begin{aligned} E(3,44) &= P_2(3,44) - f(3,44) \\ &= 0,290697 - 0,290698 \\ &= -0,000001. \end{aligned}$$

Pour l'interpolation linéaire, on utilise  $x = 3,40$  et  $x = 3,50$  pour centrer les données autour de  $x = 3,44$ , alors le polynôme linéaire résultant est donné par

$$P_1(x) := 0,579854 - 0,0840400x \quad (4.11)$$

Pour le polynôme d'interpolation cubique, on doit utiliser les quatre points, et le polynôme d'interpolation est donné par :

$$P_3(x) := 1,121066 - 0,470839x + 0,0878000x^2 - 0,006133x^3, \quad (4.12)$$

par suite, en remplaçant  $x = 3,44$  dans (4.12), donne  $P_3(3,44) = 0,290698$ , on résumé, on obtient

Interpolation	$P(3,44)$	$E(x)$
Linéaire	0,290756	0,000058
Quadratique	0,290697	-0,000001
Cubique	0,290698	0,000000

Tableau des résultats.

**Conclusion :** L'avantage principal de l'approche directe est que le forme explicite de la fonction d'approximation est obtenue et que l'interpolation peut être effectuée en plusieurs valeurs de  $x$  en évaluant simplement le polynôme pour chaque valeur de  $x$ . Le travail exigé pour obtenir le polynôme n'a pas à être refait pour chaque valeur de  $x$ . Un 2<sup>ième</sup> avantage est que l'approche directe reste valable pour les données non également espacées. L'inconvénient majeur de l'approche directe est qu'à chaque fois que le degré du polynôme change, le travail réalisé doit être refait. Une méthode pour décider si un polynôme d'interpolation est suffisamment précis est d'interpoler en utilisant des polynômes de degré de plus en plus grand jusqu'à obtenir la précision acceptable et cette procédure est laborieuse.

Ainsi, l'approche directe introduite dans la section précédente bien qu'étant simple conceptuellement possède néanmoins plusieurs inconvénients. Elle nécessite un effort considérable pour la résolution du système linéaire permettant la détermination des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Pour des degré élevé (par exemple  $n > 4$ ) le système est relativement de grande taille et difficile à résoudre (on verra plus loin des méthodes pour résoudre des systèmes de grandes tailles). Une procédure directe plus simple est souhaitable. Une telle procédure est donnée par l'interpolation de Lagrange valable pour des points uniformément espacés ou non.

### 4.1.3 Interpolation de Lagrange

Dans le cas de l'interpolation de Lagrange on écrit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

où  $L_i(x)$  sont des polynômes de degré au plus égale à  $n$  telles que

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Puisque  $L_i(x_j) = 0$  pour  $j = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ , nous pouvons écrire

$$L_i(x) = \mathcal{C} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

Donc,

pour  $x = x_j$  :

$$L_i(x_j) = 0, (j = \overline{0, n}, j \neq i).$$

pour  $x = x_i$  :

$$L_i(x_i) = 1 \implies \mathcal{C} (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) = 1.$$

d'où la valeur de  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

Donc,

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

ou encore

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (4.13)$$

et le polynôme  $P_n$  est définie par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (4.14)$$

est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

**Exemple 4.1.5** *Considérons deux points,  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ , le polynôme linéaire de Lagrange passant par ces deux points est donné par*

$$P_1(x) = \frac{(x - b)}{(a - b)} f(a) + \frac{(x - a)}{(b - a)} f(b) \quad (4.15)$$

en remplaçant respectivement  $x$  par  $a$  et  $b$ , on obtient

$$\begin{aligned} P_1(a) &= \frac{(a - b)}{(a - b)} f(a) + \frac{(a - a)}{(b - a)} f(b) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_1(b) &= \frac{(b-b)}{(a-b)}f(a) + \frac{(b-a)}{(b-a)}f(b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $P_1(x)$  donné par (4.15) passe par les deux points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ . Etant donné trois  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  et  $(c, f(c))$ , le polynôme quadratique de Lagrange passant par les trois points est donné par

$$P_2(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c) \quad (4.16)$$

en remplaçant  $x$  par  $x = a$ ,  $x = b$  et  $x = c$  dans (4.16), confirme que le polynôme  $P_2(x)$  passe par les trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

**Remarque 4.1.6** *Le polynôme de Lagrange peut être utilisé pour des points uniformément espacés ou non. Il n'y a pas de système à résoudre, cependant, un volume de calcul considérable est nécessaire pour les polynômes de degré élevé. La forme du polynôme de Lagrange est différente de celle de l'approche directe donnée plus haut par la méthode directe. Cependant par le Théorème d'unicité, les deux formes représentent l'unique polynôme passant exactement par cet ensemble de points.*

### Erreur d'interpolation de Lagrange

Le but de l'interpolation étant de remplacer l'évaluation de  $f(x)$  par celle de  $P_n(x)$ , il est important de connaître l'erreur

$$E(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in [a, b]$$

**Théorème 4.1.7** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(n+1)$  fois dérivables sur  $[a, b]$ , alors :*

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi = \xi(x) \in [a, b] \text{ tel que : } E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x). \quad (4.17)$$

$$\text{avec : } L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

**Preuve.** Si  $x = x_i$  alors  $E(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0$ , et  $L(x_i) = 0$  ce qui établit (4.17).

soit  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Considérons la fonction  $\omega$  définie par :

$$\omega(t) = f(t) - P_n(t) - L(t) \cdot k(x)$$

avec la fonction  $k(x)$  est donnée tel que  $\omega(x) = 0$ , soit encore :  $k(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{L(x)}$ .

On a :  $\omega(x) = 0$  et  $\omega(x_i) = 0$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

$\omega$  s'annule en  $(n+2)$  points distincts et d'après le théorème de Rolle  
 $\omega'$  s'annule en  $(n+1)$  points distincts, et donc  
 $\omega''$  s'annule en  $n$  points distincts, ...  
 $\omega^{(n+1)}$  s'annule en 1 point ; Il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que :  $\omega^{(n+1)}(\xi) = 0$   
 $\omega^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!k(x) = 0$   
 or  $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$  car  $P_n \in \mathcal{P}_n$  (polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ ), ce qui donne

$$k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ce qui établit (4.17). ■

**Corollaire 4.1.8** *Sous les hypothèse du Théorème précédent, en majorant l'erreur d'interpolation, on a :*

$$|E(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |L(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |L(x)| \quad (4.18)$$

où  $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$  et  $L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ .

**Remarque 4.1.9** *Malheureusement, le  $\xi_x$  du Théorème précédent est en général inconnu pour un  $x$  donné ; de même on ne connaît pas, en général les bornes de  $f^{(n+1)}$ . Si, étant donnée une fonction  $f$  dont on connaît une borne supérieure de  $f^{(n+1)}$  on cherche à connaître par interpolation sa valeur en un point  $x$ , on aura intérêt à minimiser  $|L(x)|$  en choisissant des  $x_i$  répartis de part et d'autre de  $x$*

**Exemple 4.1.10** *Reprendre, l'exemple 4.1.4, mais cette fois-ci en utilisant l'interpolation de Lagrange*

Interpolation linéaire de Lagrange aux points  $x = 3, 4$  et  $x = 3, 5$ , on a

$$P_1(x) = \frac{(x-3,5)}{(3,4-3,5)} \times 0,294228 + \frac{(x-3,4)}{(3,5-3,4)} \times 0,295714,$$

alors, on obtient  $P_1(3,44) = 0,290756$ ,

Pour l'interpolation quadratique de Lagrange aux points  $x_1 = 3,35$ ,  $x_2 = 3,4$  et  $x_3 = 3,5$  donne

$$\begin{aligned}
 P_2(x) = & \frac{(x-3,4)(x-3,5)}{(3,35-3,4)(3,35-3,5)} \times 0,298507 + \frac{(x-3,35)(x-3,5)}{(3,4-3,35)(3,4-3,5)} \times 0,294118 + \\
 & + \frac{(x-3,35)(x-3,4)}{(3,5-3,35)(3,5-3,4)} \times 0,285714
 \end{aligned}$$

par suite, on a  $P_2(3,44) = 0,290697$ .

Pour l'interpolation cubique de Lagrange, on utilise tous les quatre points  $x_1 = 3,35$ ,  $x_2 = 3,4$ ,  $x_3 = 3,5$ ,  $x_4 = 3,6$ . Par suite on a

$$\begin{aligned}
P_3(x) = & \frac{(x-3,4)(x-3,5)(x-3,6)}{(3,35-3,4)(3,35-3,5)(3,35-3,6)} \times 0,298507 + \frac{(x-3,35)(x-3,5)(x-3,6)}{(3,4-3,35)(3,4-3,5)(3,4-3,6)} \times 0,294118 \\
& + \frac{(x-3,35)(x-3,4)(x-3,6)}{(3,5-3,35)(3,5-3,4)(3,5-3,6)} \times 0,285714 + \frac{(x-3,35)(x-3,4)(x-3,5)}{(3,6-3,35)(3,6-3,4)(3,6-3,5)} \times 0,277778,
\end{aligned}$$

dans ce cas, on a  $P_3(3,44) = 0,290698$ , d'où le tableau suivant

Interpolation	$P(3,44)$	$E(x)$
Linéaire	0,290756	0,000058
Quadratique	0,290697	-0,000001
Cubique	0,290698	0,000000

Tableau des résultats.

On remarque que les résultats, sont identiques à ceux de l'exemple 4.1.4.

### Conclusion :

1. La formule de Lagrange est intéressante du point de vue numérique, car elle ne dépend que des abscisses  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ . Soit à calculer plusieurs polynômes d'interpolation où les abscisses correspondant à ces polynômes restent fixés ( il n'y a que les points  $y_i, i = 0, 1, \dots, n$  qui changent ). Les polynômes  $L_i, i = 0, 1, \dots, n$  sont calculés une fois pour toute et servent ensuite pour tous les polynômes.
2. La méthode d'interpolation de Lagrange présente deux inconvénients majeurs :
  - L'erreur d'approximation peut ne pas diminuer si on augmente le nombre de points d'interpolation.
  - La méthode n'est pas récurrente : connaissant  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré au plus  $n$  en les points  $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$ , si on rajoute le point d'interpolation  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , il existe un unique polynôme  $P_{n+1}$  de degré au plus  $(n+1)$ . Il est impossible de déduire  $P_{n+1}$  à partir de  $P_n$ , car dans la méthode de Lagrange, l'introduction d'un nouveau point  $x_{n+1}$  nécessite un nouveau calcul de tous les polynômes  $L_i$  de Lagrange aux points  $(x_i), i = 0, 1, \dots, n+1$ .

Il est intéressant de mettre  $P_n$  sous une forme récurrente qui permet de compléter les valeurs déjà obtenues sans refaire tous les calculs. On arrive donc au polynôme d'interpolation de Newton.

#### 4.1.4 Interpolation de Newton

Nous allons introduit une nouvelle base de l'espace  $\mathcal{P}_n$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  qui est la base de Lagrange. Cela nous a permis de démontrer l'existence d'un polynôme d'interpolation en donnant ses composantes dans cette base. Etant donnés  $n+1$  points  $x_i$ , pour  $i = 0, \dots, n$ , la base de Newton est définie par

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\} \quad (4.19)$$

Nous allons montrer comment calculer les coefficients du polynôme  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  interpolant une fonction  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Ce polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Notons que le coefficient  $a_n$  est le coefficient de  $x_n$  dans  $P_n$ . C'est ce qu'on appelle le coefficient directeur de  $P_n$ .

Un des avantages de l'expression du polynôme  $P_n$  exprimé dans la base de Newton est le suivant, on note  $P_k$  les polynômes tronqués, c'est-à-dire :

$$P_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}), \text{ pour } k = 0, \dots, n.$$

alors  $P_k$  est le polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$  qui interpole  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_k$ , en effet on a

$$P_n(x) = P_k(x) + a_{k+1}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

dans ce cas, on a  $P_k(x_0) = P_n(x_0) = f(x_0)$ ,  $P_k(x_1) = P_n(x_1) = f(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $P_k(x_k) = P_n(x_k) = f(x_k)$ . On a donc en particulier

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

donc si on connaît le polynôme  $P_{n-1}$  et que l'on rajoute un point d'interpolation  $x_n$ , les coefficients  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sont les mêmes, il suffit de calculer le coefficient  $a_n$  et de rajouter au polynôme  $P_{n-1}$  le terme  $a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$ .

### Les différences divisées

L'interpolation polynomiale de Newton est basée sur les différences divisées.

**Définition 4.1.11** Soient  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts de  $[a, b]$  et  $f$  une fonction réelle définie sur  $[a, b]$  connue uniquement en  $x_i$  donnés. On définit les différences divisées d'ordres successifs  $0, 1, 2, \dots, n$  par :

Ordre	Notation	Définition
0	$f[x_i]$	$f(x_i)$
1	$f[x_i, x_j]$	$\frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, i \neq j$
2	$f[x_i, x_j, x_k], i \neq j, i \neq k, j \neq k$	$\frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}, i \neq j, i \neq k, j \neq k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$f[x_0, x_1, \dots, x_m]$	$\frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] - f[x_1, \dots, x_m]}{x_0 - x_m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]$	$\frac{f[x_0, x_1, \dots, x_n] - f[x_1, \dots, x_{n+1}]}{x_0 - x_{n+1}}$

Différences divisées.

D'une manière générale, si  $\mathcal{X}$  est un ensemble fini de points distincts, si  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{X}$ , tel que  $a \neq b$ , alors

$$f[a, \mathcal{X}, b] = \frac{f[a, \mathcal{X}] - f[\mathcal{X}, b]}{a - b}$$

### Le polynôme d'interpolation de Newton

**Théorème 4.1.12** Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0, x_1, \dots, x_n, (n+1)$  points distincts de  $[a, b]$ , le polynôme d'interpolation de Newton de  $f$  aux points  $x_i, i = \overline{0, n}$  s'écrit sous la forme suivante :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (4.20)$$

ou encore

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \quad (4.21)$$

**Preuve.** Nous avons

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

donc

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0]$$

on a aussi

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

donc

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$

par suite, on déduit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

en réitérant le procédé, on obtient enfin :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

et

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (4.22)$$

alors

$$f(x) = P_n(x) + E(x).$$

Montrons que  $P_n$  est le polynôme d'interpolation de  $f$  en  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

1.  $\deg(P_n) \leq n$  (évident)
2.  $f(x_i) = P_n(x_i) + E(x_i)$  avec  $E(x_i) = 0$ ,  $i = \overline{0, n}$  donc :  $f(x_i) = P_n(x_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

■

**Remarque 4.1.13** 1. Le théorème 4.1.1, nous dit que le polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  qui interpole  $f$  aux points  $\{x_0, \dots, x_n\}$  est unique. Il en résulte que le polynôme de Lagrange et le polynôme de Newton sont deux formes différentes d'un même polynôme d'interpolation.

2. Rappelons l'expression des différences divisées données dans la définition 4.1.11

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

L'utilisation de cette formule permet de calculer les  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  de proche en proche à l'aide du tableau suivant (chaque colonne se déduit de la colonne précédente)

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$\dots$	$k = n$
$f[x_0]$				
$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\dots$	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

- Nous voyons que la détermination des coefficients  $a_i$  nécessite  $\frac{n(n+1)}{2}$  divisions.
  - Nous voyons aussi que nous obtenons sur la diagonale du tableau précédent les coefficients  $f[x_0]$ ,  $f[x_0, x_1]$ ,  $f[x_0, x_1, x_2]$ , ...,  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , c'est-à-dire les coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  de  $P_n$  dans la base de Newton.
3. Si on rajoute un point d'interpolation  $x_{n+1}$  supplémentaire, le polynôme d'interpolation de  $f$  aux points  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n + 1$  est donné par :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \quad (4.23)$$

**Algorithme 4.1.14**

**1 : pour**  $i = 0$  jusqu'à  $n$  **faire**  
**2 :**  $d_i = f(x_i)$   
**3 : fin pour**  
**4 : pour**  $k = 1$  jusqu'à  $n$  **faire**  
**5 :** **pour**  $i = n$  jusqu'à  $k$  par pas de  $-1$  **faire**  
**6 :**  $d_i = \frac{d_i - d_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$   
**7 : fin pour**  
**8 : fin pour**

Remarquons que les éléments  $d_i$  en fin d'algorithme correspondent bien aux coefficients  $a_i$  du polynôme d'interpolation écrit dans la base de Newton.

**Exemple 4.1.15** 1. Déterminer  $P_3$  le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction  $f$  passant par les points  $(0, 1), (1, 2), (2, 9), (3, 28)$ .

On a 4 points, donc  $\deg(P_3) \leq 3$  tel que :

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

Le calcul des différences divisées se fait comme suit :

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$				
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 2$	$f[x_0, x_1] = 1$			
$x_2 = 2$	$f[x_2] = 9$	$f[x_1, x_2] = 7$	$f[x_0, x_1, x_2] = 3$		
$x_3 = 3$	$f[x_3] = 28$	$f[x_2, x_3] = 19$	$f[x_1, x_2, x_3] = 6$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$	
$x_4 = 5$	$f[x_4] = 54$	$f[x_3, x_4] = 13$	$f[x_2, x_3, x_4] = -2$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = -2$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{-3}{5}$

on obtient :

$$P_3(x) = 1 + x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2)$$

2. En déduire  $P_4$  le polynôme d'interpolation de Newton passant par les points  $(0, 1), (1, 2), (2, 9), (3, 28)$  et  $(5, 54)$ .

$$\begin{aligned} P_4(x) &= P_3(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\ &= P_3(x) - \frac{3}{5}x(x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

**Erreur d'interpolation**

D'après (4.22), on a la formule générale de l'erreur

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$$

ce qui donne

$$E(x) = \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right) f[x, x_0, \dots, x_n] \quad (4.24)$$

Cette formule générale ne nous renseigne pas beaucoup sur l'ordre de grandeur de cette erreur. Mais si  $f$  admet  $n + 1$  dérivées continues sur l'intervalle  $[a, b]$ , nous pouvons obtenir d'autres formes plus pratiques.

**Théorème 4.1.16** *Si la fonction  $f$  est  $(n + 1)$  fois continûment différentiable sur  $[a, b]$ , et  $x_0; x_1; \dots; x_n$  des nombres distincts dans  $[a, b]$ , alors :*

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que : } E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x) \quad (4.25)$$

$$\text{où } L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

**Corollaire 4.1.17** *Sous les hypothèses du théorème 4.1.16, on a*

$$|E(x)| \leq \frac{|L(x)|}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \quad (4.26)$$

malheureusement, en général, on ne connaît pas le borne supérieur de la dérivée  $(n + 1)$  de  $f$ . La remarque reste évidemment encore valable dans le cas du polynôme d'interpolation de Newton.

## 4.2 Approximation polynômiale

### 4.2.1 Approximation au sens des moindres carrés

On a vu dans les paragraphes précédents que la méthode d'interpolation de Lagrange ou la méthode de Newton permettent d'approcher la valeur d'une fonction inconnue  $f$  en un point distinct des noeuds  $x_i$ . Il existe une autre méthode appelée méthode des moindres carrés qui permet d'approcher la fonction  $f$ .

Soient  $(n + 1)$  noeuds distincts  $(x_i; y_i), i = \overline{0, n}$  et  $m \geq 1$  un entier fixé. La méthode des moindres carrés consiste à chercher un polynôme  $P_m$  de degré  $m$  qui vérifie :

$$\sum_{i=0}^n (y_i - \tilde{P}_m(x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2 \quad (4.27)$$

ceci pour tout polynôme  $P_m$  de degré  $\leq m$ .

**Remarque 4.2.1** L'inégalité (4.27) signifie qu'on cherche un polynôme  $e P_m$  de degré  $m$  qui réalise la plus petite distance aux noeuds  $(x_i; y_i)$ . Le polynôme  $e P_m$  ne passe pas nécessairement par les noeuds  $(x_i; y_i)$ .

### Cas particulier : $m = 1$

Dans ce cas on cherche un polynôme  $\tilde{P}_1$  de degré 1 qui vérifie

$$\sum_{i=0}^n (y_i - \tilde{P}_1(x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^n (y_i - P_1(x_i))^2$$

pour tout polynôme  $P_1$  de degré 1. Ecrivons que

$$\tilde{P}_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$P_1(x) = b_0 + b_1x$$

on cherche donc 2 coefficients  $a_0$  et  $a_1$  tels que

$$\sum_{i=0}^n (y_i - (a_0 + a_1x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^n (y_i - (b_0 + b_1x_i))^2 \quad (4.28)$$

ceci pour tout  $(b_0; b_1) \in \mathbb{R}^2$ . Posons

$$\begin{aligned} \Phi(b_0; b_1) &= \sum_{i=0}^n (y_i - (b_0 + b_1x_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^n (y_i^2 + b_0^2 + b_1^2x_i^2 + 2b_0b_1x_i - 2b_0y_i - 2y_ib_1x_i), \end{aligned}$$

la formule (4.28) revient à chercher le minimum  $(a_0; a_1)$  de la fonction  $\Phi$  c'est à dire

$$\min_{(b_0; b_1)} \Phi(b_0; b_1) = \Phi(a_0; a_1)$$

Le minimum de  $\Phi$  en  $(a_0; a_1)$  vérifie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0}(a_0; a_1) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_1}(a_0; a_1) = 0$$

d'où le système linéaire

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{cases} \quad (4.29)$$

En résolvant le système (4.29) on obtient  $a_0$  et  $a_1$  et donc  $\tilde{P}_1$  qui est le polynôme des moindres carrés de degré 1 approchant les données  $(x_i; y_i), i = \overline{0, n}$ .

**Cas général : m quelconque**

Dans le cas général on est amené à résoudre le système linéaire  $(m+1)(m+1)$  suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} = \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} = \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{array} \right. \quad (4.30)$$

En résolvant le système (4.30) on trouve les coefficients  $a_0, \dots, a_m$  et donc le polynôme  $P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés des données  $(x_i; y_i), i = \overline{0, n}$ .

**Cas particulier : m = n**

Dans le cas particulier lorsque  $m = n$ , on remarque que la relation (4.27) est satisfaite lorsque  $\tilde{P}_n = L_n$  c'est à dire lorsque  $\tilde{P}_n$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant aux données  $(x_i; y_i)$ , en effet puisque

$$\tilde{P}_n(x_i) = L_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$$

la relation (4.27) devient

$$0 \leq \sum_{i=0}^n (y_i - P_n(x_i))^2$$

qui est toujours satisfaite pour tout polynôme  $P_n$  de degré  $\leq n$ .

**Théorème 4.2.2** Lorsque  $m = n$  le polynôme des moindres carrés  $\tilde{P}_n$  coïncide avec le polynôme de Lagrange correspondant aux  $n$  noeuds distincts  $(x_i; y_i), i = \overline{0, n}$ .

**Exemple 4.2.3** Considérons le tableau

$x_i$	0	2	3
$y_i$	1	4	0

et cherchons le polynôme des moindres carrés de degré 2. D'après (4.30) le système linéaire est

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a_0 + 5a_1 + 13a_2 = 5 \\ 5a_0 + 13a_1 + 35a_2 = 8 \\ 13a_0 + 35a_1 + 97a_2 = 16 \end{array} \right.$$

le déterminant du système est :  $\Delta = 36$ , donc

$$a_0 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 13 \\ 8 & 13 & 35 \\ 16 & 35 & 97 \end{vmatrix} = 1$$

d'où

$$a_1 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 5 & 8 & 35 \\ 15 & 16 & 97 \end{vmatrix} = \frac{186}{36} = 5,1667$$

$$a_2 = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 13 & 8 \\ 15 & 35 & 16 \end{vmatrix} = \frac{66}{36} = -1,8333$$

le polynôme des moindres carrés est donc :

$$\tilde{P}_2(x) = 1 + 5,1667x - 1,8333x^2$$

### 4.3 Série d'exercices n°4 : Interpolation et Approximation Polynômiale

#### Exercice 1

1. Obtenir le polynôme de degré 2 passant par les points  $(1, 2)$ ,  $(2, 6)$  et  $(3, 12)$  en utilisant la matrice de **Vandermonde** (par identification).

#### Exercice 2

Soit les points suivants de  $(x_i, f(x_i))$  :  $(0, 0)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$  et  $(5, 2)$ .

1. Construire le polynôme de la **Lagrange** passant par les 3 premiers points.
2. Construire le polynôme de la **Lagrange** passant par les 4 points.
3. Est-ce possible d'utiliser les calculs faits en 1<sup>ère</sup> question.
4. Donner l'expression analytique de l'erreur pour les polynômes d'interpolation.
5. Calculer la valeur approchée de  $f(1, 5)$  à l'aide des 2 polynômes obtenus.

#### Exercice 3

Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice précédent mais en utilisant le polynôme d'interpolation de **Newton**.

#### Exercice 4

Avec quelle précision peut-on calculer  $\sqrt{120}$  à l'aide de la formule d'interpolation de **Lagrange** pour la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  si l'on prend les points d'interpolation 110, 125 et 145.

#### Exercice 5

Considérons une fonction donnée par les points suivants  $(x_i, f(x_i))$  :  $(-1, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(1, -3)$  et  $(2, 1)$ .

1. Calculer le polynôme de degré 2 qui réalise la meilleure approximation **au sens des moindres carrés** de la fonction  $f(x)$ .
2. Calculer la valeur approchée de  $f(1, 5)$ .

#### Exercice 6

Trouver la somme des carrés des nombres naturels de 1 à  $n$  :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

par le polynôme d'interpolation de **Newton**.

# Chapitre 5

## Dérivation numérique

Nous avons vu antérieurement comment approcher une fonction  $f(x)$  connue aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dans un intervalle  $[a; b]$  tel que :  $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$  par un polynôme d'interpolation  $P_n(x)$ . Nous allons faire pratiquement le même procédé pour la dérivation par exemple si nous connaissons les positions d'un mobile à des instants répétés et nous voulons connaître sa vitesse. Donc il s'agit de construire une approximation numérique de la dérivée (première, seconde,...) de la fonction  $f$ .

Il existe deux approches pour construire de telles approximations, l'une utilise les développements en série de Taylor et l'autre utilise les formules d'interpolation.

### 5.1 Utilisation de la formule de Taylor

#### 5.1.1 Dérivée première

Considérons une fonction dérivable sur un intervalle. Pour connaître une approximation de  $f'(x)$ ; le procédé le plus simple consiste à

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5.1)$$

D'après la formule de Taylor on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in ]x, x+h[$$

d'où

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \quad \xi \in ]x, x+h[ \quad (5.2)$$

ainsi

$$f'_d(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5.3)$$

est la formule de dérivée à droite d'ordre 1 avec une erreur est en  $o(h)$ .

Par la même manière on définit la dérivée à gauche d'ordre 1 comme suit :

$$f'_g(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (5.4)$$

D'autre part, on a aussi

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in ]x, x+h[$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in ]x-h, x[$$

d'où

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!} [f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)], \quad \eta_1 \in ]x, x+h[, \quad \eta_2 \in ]x-h, x[.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{2 \times 3!} [f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)], \quad \eta_1 \in ]x, x+h[, \quad \eta_2 \in ]x-h, x[$$

On sait qu'en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\xi \in ]x-h, x+h[$  tel que

$$\frac{f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)}{2} = f^{(3)}(\xi).$$

Il s'en suit

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]x-h, x+h[. \quad (5.5)$$

D'où la formule dérivée centrée d'ordre 2 est définie par :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (5.6)$$

avec une erreur en  $o(h^2)$ .

### 5.1.2 Dérivée seconde

On a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in ]x, x+h[$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in ]x-h, x[$$

Donc

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{4!} [f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)],$$

pour  $\eta_1 \in ]x, x+h[$ ,  $\eta_2 \in ]x-h, x[$ . Ainsi

$$f'''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!} [f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)]$$

avec  $\eta_1 \in ]x, x+h[$ ,  $\eta_2 \in ]x-h, x[$ . Il s'ensuit :

$$f'''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{2 \times 3!} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in ]x-h, x+h[ \quad (5.7)$$

C'est une formule centrée d'ordre 2.

On peut établir la formule centrée d'ordre 4 :

$$f''''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{90} f^{(6)}(\xi),$$

avec  $\xi \in ]x-h, x+h[$ .

## 5.2 Utilisation des formules d'interpolation

### 5.2.1 Dérivée première

D'après le chapitre précédent, la formule d'interpolation de Newton s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i), \quad \xi \in ]x_0, x_1[$$

On pose  $L_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$ . En dérivant

$$f'(x) = f[x_0, x_1] L'_0(x) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] L'_{n-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L'_n(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!} L_n(x), \quad \xi \in ]x_0, x_1[$$

$$f'(x) = \prod_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] L'_{i-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L'_n(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!} L_n(x), \quad \xi \in ]x_0, x_1[$$

Pour  $n=1$ , on a

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} [x-x_0 + x-x_1] + \frac{f^{(3)}(\xi)}{2!} (x-x_0)(x-x_1), \quad \xi \in ]x_0, x_1[.$$

avec  $h = x_1 - x_0$ .

Si  $x = x_0$ , on obtient

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}h, \quad \xi \in ]x_0, x_1[. \quad (5.8)$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 1.

Si on utilise la formule de Newton régressive on obtient

$$f'(x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!h}, \quad \xi \in ]x_0, x_1[. \quad (5.9)$$

C'est la dérivée à gauche d'ordre 1.

Maintenant, on choisit  $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$  et en prenant  $x - x_0 = h$ , on aura la formule centrée d'ordre 2

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]x_0, x_1[. \quad (5.10)$$

Pour  $n = 2$ , si en prenant  $x = x_0$ ,  $x_1 = x + h$ ,  $x_2 = x + 2h$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]x, x + 2h[. \quad (5.11)$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 2.

Et la formule de la dérivée à gauche d'ordre 2 est

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x - h) + f(x - 2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]x - 2h, x[. \quad (5.12)$$

Si  $x = x_0$ ,  $x_1 = x - h$ ,  $x_2 = x + h$  alors on a la formule centrée d'ordre 2

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]x - h, x + h[. \quad (5.13)$$

### 5.2.2 Dérivée seconde

Par le même principe, pour la dérivée seconde, on choisit en général d'interpoler sur 3 points, ce qui donne (dans le cas de points équidistants) : on a

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^2 (x - x_i), \quad \xi \in ]x_0, x_2[$$

Alors

$$f'(x) = f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_1 - x_0) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} [(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)], \quad \xi \in ]x_0, x_2[$$

Ainsi  $f$

$$f''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2] + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3!} [(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)] - \frac{f^{(5)}(\xi)}{3!} \\ + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} [2(x - x_2) + (2x - x_1 - x_0) + (2x - x_0 - x_1)],$$

Si  $x = x_0$ ,  $x_1 = x + h$ ,  $x_2 = x + 2h$  alors la formule de la dérivée seconde d'ordre 2 est donnée par

$$f''(x) = \frac{f(x) + 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - \frac{2h^2}{3} f^{(4)}(\xi) - \frac{h}{3} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in ]x-h, x+h[ \quad (5.14)$$

**Exemple 5.2.1** Pour illustrer les trois formules à deux points (d'ordre 1) précédentes, considérons la fonction  $f(x) = 2^x$ ,  $x \in [1, 5]$  passant par les points  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ,  $(x_1, y_1) = (2, 4)$ ,  $(x_2, y_2) = (3, 8)$ ,  $(x_3, y_3) = (4, 16)$  et  $(x_4, y_4) = (5, 32)$ .

Nous voulons approcher le nombre  $f'(x_2)$  par les formules à deux points (d'ordres 1) :

1. La formule d'ordre 1 à droite :

$$f'(x_2) \simeq f'_d(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = y_3 - y_2 = 8.$$

2. La formule d'ordre 1 à gauche :

$$f'(x_2) \simeq f'_g(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = y_2 - y_1 = 4.$$

3. La formule d'ordre 1 centrée :

$$f'(x_2) \simeq f'_c(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{y_3 - y_1}{2} = 6.$$

Evaluons les erreurs d'approximation sachant que  $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$ ,  $x \in [1, 5]$  :

$$E_1 = |f'(x_2) - f'_d(x_2)| = |8 \ln 2 - 8| \simeq 2,454.$$

$$E_2 = |f'(x_2) - f'_g(x_2)| = |8 \ln 2 - 4| \simeq 1,545.$$

$$E_3 = |f'(x_2) - f'_c(x_2)| = |8 \ln 2 - 6| \simeq 0,454.$$

D'où, la meilleure formule pour approcher  $f'(3)$  est celle d'ordre 1 centrée.

## 5.3 Erreur de dérivation numérique

### 5.3.1 Dérivée premier ordre

**Théorème 5.3.1** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , Alors :

$$E_d = |f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+1]} |f''(x)|. \quad (5.15)$$

**Preuve.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , en utilisant le développement de Taylor :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + h]$$

alors

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| = \left| \frac{h}{2} f''(x) \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+1]} |f''(x)|.$$

Alors, on obtient que :

$$|f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+1]} |f''(x)|.$$

■

**Théorème 5.3.2** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , Alors :

$$E_g = |f'(x_0) - f'_g(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0-1, x_0]} |f''(x)|. \quad (5.16)$$

En appliquant la formule de Taylor d'ordre 3, on aura le théorème suivant :

**Théorème 5.3.3** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , Alors :

$$E_c = |f'(x_0) - f'_c(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|. \quad (5.17)$$

**Preuve.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , d'après le développement de Taylor on a :

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4 \times 2} f''(x_0) + \frac{h^3}{8 \times 6} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in \left[x_0, x_0 + \frac{h}{2}\right]$$

et

$$f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4 \times 2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8 \times 6} f^{(3)}(\eta), \quad \eta \in \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0\right]$$

■

Et on a aussi comme résultat le théorème suivant :

**Théorème 5.3.4** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $0 < h \leq 1$ , Alors :

$$E_c = \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + \frac{1}{2}) - f(x_0 - \frac{1}{2})}{h} \right| \leq Ch^2.$$

Donc d'après ce théorème il suffit de prendre  $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|$ .

D'où le résultat.

### 5.3.2 Dérivée second ordre

En utilisant le même principe comme pour la première dérivée, il suffit dans ce cas de passer à l'ordre 4 dans la formule de Taylor, on aura

**Théorème 5.3.5** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^4$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , Alors :

$$E_c = |f''(x_0) - f_c''(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]} |f^{(4)}(x)|. \quad (5.18)$$

**Preuve.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^4$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , on a :

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \frac{h}{2}) - f'(x_0 - \frac{h}{2})}{h}$$

et

$$\begin{aligned} f'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) &\simeq \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} \\ f'\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) &\simeq \frac{f\left(x_0 - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} \end{aligned}$$

D'où

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

D'autre part, on a aussi  $\forall f \in C^4$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\forall 0 < h \leq 1$  :

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \right| \leq Ch^2.$$

D'où il suffit de prendre  $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]} |f^{(4)}(x)|$ . Ainsi le résultat. ■

**Exemple 5.3.6** Calculons  $f'(0)$  où  $f(x) = e^x$  à l'aide des formules à trois points (d'ordre 2) à gauche et à droite de  $x = 0$ . On prend  $h = 0,05$ .

1. à gauche de  $x = 0$  :  $x_2 = 0$ ;  $x_1 = -0,05$ ,  $x_0 = -0,1$ . D'après la formule (5.12) on a :

$$f'(0) = f'(x_2) \simeq \frac{3f(x_2) - 4f(x_1) + f(x_0)}{2h} \simeq \frac{3e^0 - 4e^{-0,05} + e^{-0,1}}{0,1} = 0,9992.$$

La valeur exacte est  $f'(0) = e^0 = 1$ . L'erreur est donc  $E_2(0) = 7,9 \times 10^{-4}$ .

2. à droite de  $x = 0$  :  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,05$ ,  $x_2 = 0,1$ . D'après la formule (5.11) on a :

$$f'(0) = f'(x_0) \simeq \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} \simeq \frac{-3e^0 + 4e^{0,05} - e^{0,1}}{0,1} = 0,9991.$$

L'erreur est donc  $E_2(0) = 8,7 \times 10^{-4}$ .

3. centrée en  $x = 0$  :  $x_0 = -0,05$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0,05$ . D'après la formule (5.13) on a :

$$f'(0) = f'(x_1) \simeq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \simeq \frac{e^{0,05} - e^{-0,05}}{0,1} = 1,0005.$$

L'erreur est donc  $E_2(0) = 5 \times 10^{-4}$ . La formule centrée est donc la plus précise des trois formules.

**Remarque 5.3.7** En général les formules centrées sont plus précises que les formules de dérivation approchée à droite et à gauche puisqu'elles tiennent compte de la valeur de la fonction  $f$  à droite et à gauche de  $x_0$ .

## 5.4 Série d'exercices n°5 : Dérivation numérique

### Exercice 1

Le tableau suivant représente la distance  $x$  (en mètre) parcourue par une voiture à l'instant  $t$  (en seconde).

$t$	0	2	5	8	11	14
$x$	0	225	383	623	742	993

On veut estimer la vitesse de la voiture à l'instant  $t = 8s$ .

1. Calculer les valeurs approchées de la vitesse  $v$  à l'instant  $t = 8s$  par les formules à deux points.
2. Calculer les valeurs approchées de la vitesse  $v$  à l'instant  $t = 8s$  par les formules à trois points.
3. Calculer la valeur approchée de l'accélération  $\gamma$  à l'instant  $t = 8s$

### Exercice 2

On veut approcher  $f'(x)$  en utilisant la formule de dérivation approchée suivante :

$$f'(x) = \frac{-f(x_{i-2}) - 12f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - 3f(x_{i+2})}{12h}$$

1. Calculer le terme de l'erreur
2. Considérons la fonction  $f(x) = e^{2x} - \cos(2x)$  ,  $h = 0,1$  et  $x = 0$   
Calculer à l'aide de la formule précédente une valeur approchée de  $f'(0)$ .
3. comparer le résultat obtenu avec la valeur exacte.
4. Trouver la majoration de l'erreur.

### Exercice 3

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  et  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  trois points équidistants de  $[a, b]$  de pas  $h$ .

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Newton de  $f$  aux points  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ .
2. En dérivant ce polynôme proposer une formule de dérivation approchée pour calculer  $f(x_{i-1}), f(x_i), f(x_{i+1})$ .
3. Retrouver les formules de dérivation approchée vue en cours.



# Chapitre 6

## Intégration numérique

### 6.1 Introduction

Parfois dans la pratique, il est impossible de connaître la primitive  $F(x)$  d'une fonction intégrable  $f(x)$  sur un intervalle donné  $[a, b]$  et de pouvoir appliquer la formule de Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a) \quad (6.1)$$

Même quand telle primitive est connue, si son expression est assez compliquée il est préférable d'utiliser une des formules énoncées ci-après. De plus, que par points, on ne peut pas utiliser de primitives. C'est pourquoi les méthodes approchées et en premier lieu, les méthodes numériques de calcul des intégrales définies acquièrent une grande importance.

Dans la pratique, il existe deux situations où l'on a besoin de formules pour approcher l'intégrale d'une fonction  $f$  :

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx. \quad (6.2)$$

- On ne connaît la valeur de la fonction  $f$  qu'en certains points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , et il n'est pas possible d'avoir d'autres valeurs que celles-ci (c'est le cas quand la fonction  $f$  est tabulée).
- Il est possible de calculer  $f(x)$  pour un  $x$  quelconque, mais la primitive de  $f$  n'est pas connue, ou bien l'expression analytique de  $f$  est trop compliquée pour être explicitée ( $f(x)$  est par exemple le résultat d'un code de calcul trop complexe).

Ainsi, le problème de l'intégration numérique d'une fonction consiste à rechercher la valeur de l'intégrale définie  $I(f)$  à partir de plusieurs valeurs de la fonction  $f$  sous le signe somme  $\int$ .

Comme l'évaluation de la fonction  $f$  pour une infinité de points est impossible, l'intégration numérique consiste à remplacer l'intégrale (6.2) par une

somme discrète sur un nombre fini de points. On peut par exemple remplacer la fonction  $f$  par son polynôme de l'interpolation de Lagrange et ensuite intégrer ce polynôme. Ainsi si on considère l'interpolation de Lagrange, on a

$$f(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + \mathcal{E}_n(x) \quad (6.3)$$

ainsi, en intégrant la relation (6.3) sur l'intervalle  $[a, b]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + \int_a^b \mathcal{E}_n(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \mathcal{E}_n. \end{aligned} \quad (6.4)$$

où  $\omega_i$  et  $x_i$  sont des variables que nous allons préciser dans la suite, telle que les points  $x_i$  sont appelés les noeuds de la formule, les  $\omega_i$  sont les poids (weights, en anglais), parfois aussi dénommés coefficients de la formule d'intégration. L'application

$$f \mapsto \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i),$$

qui à  $f$  fait correspondre une valeur "approchée" de son intégrale sur l'intervalle considéré définit une formule (ou méthode) d'intégration numérique. On dit aussi formule ou méthode de quadrature.

Cependant, Pour que l'évaluation numérique soit correcte, il est nécessaire d'imposer que toute méthode vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I. \quad (6.5)$$

Au delà de la vérification du critère (6.5), la qualité d'une méthode sera évaluée par la manière dont la convergence vers le résultat exact s'effectue. Dans la suite nous allons considérer des fonctions de classe  $C^2[a, b]$  (continûment dérivable) sur l'intervalle  $[a, b]$ .

**Exemple 6.1.1** *Le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse, inextensible et sans raideur et oscillant sous l'effet de la pesanteur. Il s'agit du modèle de pendule pesant le plus simple. Il est parfois appelé pendule de gravité idéal et, par opposition, tout pendule de gravité réel est appelé pendule pesant composé. Par extension on appelle aussi parfois pendule simple un dispositif dans lequel le fil inextensible est remplacé par une tige rigide de masse nulle pouvant tourner sans frottement dans un plan vertical autour de son extrémité fix, ainsi il est déplacé initialement par un angle  $\theta_0$ . Alors la période,  $T$ , du problème général du pendule est donnée par l'intégrale suivante :*

$$T(\theta_0) = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

où  $L$  est la longueur du pendule, et  $g$  est l'accélération dû à la gravité et  $\theta$  est l'angle entre une ligne verticale et le fil du pendule. Cependant il n'y a pas une forme analytique pour l'intégrale  $T(\theta_0)$  c'est pour cela qu'un recours à l'analyse numérique est indispensable.

## 6.2 Les méthodes de Newton-Côtes

### 6.2.1 Principe

On veut calculer  $\int_a^b f(x) dx$ . On décompose l'intervalle  $[a, b]$  en  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

On a alors

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (6.6)$$

Sur chaque  $[x_i, x_{i+1}]$ , on applique une méthode d'intégration élémentaire consistant à remplacer  $f(x)$  par

$$P_i(x) = f[x_{i;0}] + f[x_{i;0}, x_{i;1}](x - x_{i;0}) + \dots + f[x_{i;0}, x_{i;1}, \dots, x_{i;l}](x - x_{i;0})(x - x_{i;1}) \dots (x - x_{i;l}). \quad (6.7)$$

soit le polynôme d'interpolation de Newton de  $f$  en des points  $x_{i;0}, \dots, x_{i;l}$  de l'intervalle  $[a, b]$  (qui peuvent être ou non dans  $[x_i, x_{i+1}]$ ).

### 6.2.2 La méthode du rectangle

On prend  $l = 0$  : on approche la fonction  $f$  par la constante  $f(x_{i;0})$  où  $x_{i;0} \in [x_i, x_{i+1}]$ . D'où la formule d'intégration numérique élémentaire :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i;0}) dx \simeq h_i f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad (6.8)$$

et la formule d'intégration composée :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i;0}) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i). \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad (6.9)$$

Les choix courants pour  $\xi_i$  sont :

- Si  $\xi_i = x_i$  alors,

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i). \quad (\text{rect gauche})$$

– Si  $\xi_i = x_{i+1}$  alors,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_{i+1}). \quad (\text{rect droite})$$

– Si  $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  alors,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right). \quad (\text{rect milieu})$$

### 6.2.3 La méthode des trapèzes

On prend  $l = 1$  sachant que  $l$  représente le nombre de subdivision de l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , alors on remplace  $f$  par le polynôme d'interpolation de Newton aux points  $x_i; x_{i+1}$ . On obtient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i)] dx \simeq \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i)).$$

et

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i)).$$

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} f(x_i) + \frac{1}{2}(h_1 f(x_0) + h_n f(x_n)). \quad (6.10)$$

et dans le cas d'une subdivision régulière ( $h_i = h = x_{i+1} - x_i, \forall i = 1, \dots, n$ ) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq h \left[ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_n)) \right] \\ &\simeq h \left[ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) \right] \end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \quad (6.11)$$

C'est la formule des trapèze composite sur l'intervalle  $[a, b]$ .

**Algorithme 6.2.1** *Pour la mise en oeuvre de la méthode d'intégration des Trapèzes, on peut utiliser l'algorithme suivant*

**1** : Les données sont :  $a, b, n$ .

**2** :  $h \leftarrow \frac{(b-a)}{n}$ .

- 3** :  $sum \leftarrow \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$   
**4** : **pour**  $i = 1$  **à**  $n - 1$  **faire** ;  
**5** :  $x \leftarrow a + ih$ ,  $sum \leftarrow sum + f(x)$ .  
**5** : **fin faire**  
**6** :  $sum \leftarrow (sum) \times h$ .

**Exemple 6.2.2** On calcule l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^3 \ln(x) dx.$$

Donner une valeur approchée de l'intégrale  $I$  en utilisant la méthode des trapèzes avec 4 sous-intervalles. Cela revient à prendre  $h = \frac{1}{2}$  et  $x_0 = a = 1$ ,  $x_4 = b = 3$ ,  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = \frac{5}{2}$ .

D'après la méthode des trapèzes, on a

$$I \simeq \frac{h}{2} \left[ f(1) + f(3) + 2 \left( f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) \right) \right] \simeq 1,821$$

**Exemple 6.2.3** En utilisant la méthode d'intégration des Trapèzes avec six points équidistants, calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{\sin x}{x} \right) dx
 \end{aligned}$$

Les valeurs de la fonction aux points de la subdivisions sont arrangés dans le tableau

$x_i$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.00000	0.99335	0.97355	0.94107	0.89670	0.84147

où il faut noter qu'on a donné la valeur 1 à la fonction  $\frac{\sin x}{x}$  au point  $x = 0$ . Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
 I_T(f, 6) &= \frac{0.2}{2} \left[ f(x_0) + f(x_5) + 2 \sum_{i=1}^4 f(x_i) \right] \\
 &= 0.1 (1.84147) + 0.2 (3.80467) \\
 &= 0.94508.
 \end{aligned}$$

## 6.2.4 L'intégrale de Simpson

On prend cette fois  $l = 2$ , telle que  $l$  représente le nombre de subdivision de l'intervalle  $[x_i; x_{i+1}]$  donc on interpole la fonction  $f$  aux points  $x_i, x_{i+\frac{1}{2}}$  =

$\frac{x_i+x_{i+1}}{2}; x_{i+1}$  en utilisant le polynôme de Newton. Soit  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &\simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f\left[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_i\right](x - x_i)(x - x_{i+1}) \right] dx \\ &= h_i f(x_i) + \frac{1}{2} h_i^2 f[x_i, x_{i+1}] + f\left[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_i\right] \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \end{aligned}$$

On écrit  $x - x_{i+1} = x - x_i + x_i - x_{i+1}$  on aura

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx = \frac{1}{3} h_i^3 - \frac{1}{2} h_i^3 = -\frac{h_i^3}{6}$$

et

$$h_i^2 f[x_i, x_{i+1}] = h_i (f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

$$\begin{aligned} h_i^3 f\left[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_i\right] &= h_i^2 \left( \frac{f(x_{i+1}) - f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)}{\frac{h_i}{2}} - \frac{f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - f(x_i)}{\frac{h_i}{2}} \right) \\ &= 2h_i \left( f(x_{i+1}) - 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_i) \right) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h_i}{6} \left( f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

D'où

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{6} \left( f(x_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

La formule composée dans le cas de pas constants devient

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_i) \right] \quad (6.12)$$

C'est la formule de Simpson composite sur l'intervalle  $[a, b]$  avec  $h = \frac{b-a}{n}$ .

**Algorithme 6.2.4** Pour la mise en oeuvre de la méthode d'intégration de Simpson, on peut utiliser l'algorithme suivant

- 1** : Les données sont :  $a, b, n$ .  
**2** :  $h \leftarrow \frac{(b-a)}{2n}$ ,  $sump \leftarrow 0$ ,  $sumi \leftarrow 0$ .  
**3** : pour  $i = 1$  à  $n - 1$  faire ;

4 :  $sum_i \leftarrow sum_i + f(a + 2ih)$

5 : fin faire.

6 : pour  $i = 1$  à  $n$  faire ;

7 :  $sum_p \leftarrow sum_p + f(a + h(2i - 1))$

8 : fin faire.

9 :  $sum = \frac{h}{3} [f(a) + f(b) + 2sum_p + 4sum_i]$ .

**Exemple 6.2.5** On veut calculer l'intégrale  $I = \int_0^6 x^3 dx$ .

Pour  $n = 2$  on a  $h = 3$ , d'où

$$I \simeq \frac{h}{3} (f(0) + f(6) + 4f(3)) = 324$$

Pour  $n = 4$  on a  $h = \frac{3}{2}$ , d'où

$$I \simeq \frac{h}{3} \left( f(0) + f(6) + 4 \left( f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{9}{2}\right) \right) + 2f(3) \right) = 324$$

D'autre part, la valeur exacte de cette intégrale est :

$$I = \int_0^6 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = 324$$

On remarque que la méthode de Simpson est exacte pour le polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

**Exemple 6.2.6** En utilisant la méthode d'intégration de Simpson avec six points équidistants, calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 (7 + 14x^6) dx$$

Les valeurs de la fonction aux points de la subdivisions sont arrangés dans le tableau

$x_i$	0.0	0.1667	0.3333	0.5	0.6667	0.8333	1
$f(x_i)$	7	7.0003	7.019204	7.21875	8.229081	11.688572	21

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{1}{18} \left[ f(0) + 2 \left[ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right] + 4 \left[ f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right) \right] + f(1) \right] \\ &= \frac{1}{18} [7 + 2[7.019204 + 8.229081] + 4[7.000300 + 7.21875 + 11.688572] + 21] \\ &= 9.007059. \end{aligned}$$

### 6.3 Analyse de l'erreur dans les méthodes d'intégration

**Théorème 6.3.1** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}([a; b])$  telle que  $f^{(n+1)}$  existe sur  $]a; b[$ . Si les valeurs de  $f$  aux points  $x_0; x_1; \dots; x_n$  sont connues, et  $\int_a^b P_i(x) dx$  est l'approximation d'ordre  $n$  de  $\int_a^b f(x) dx$  où  $P_i(x)$  est le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction  $f$  alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_i(x) dx \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (6.13)$$

où  $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ .

Appliquons ce théorème aux méthodes usuelles. On obtient.

#### Erreur de méthode des rectangles

La méthode est d'ordre 0 et exacte seulement pour les constantes.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) \right| \leq \frac{h_i^2}{2} M_1.$$

Dans le cas d'un pas constant, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) \right| \leq \frac{M_1}{2} (b-a) h. \quad (6.14)$$

#### Erreur de la méthode des trapèzes

Pour  $n = 1$  on trouve

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) dx \right| = \frac{M_2}{12} (b-a)^3. \quad (6.15)$$

Pour la formule composée de la méthode des trapèzes, on en déduit que l'erreur est majorée par :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left( f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \right| \leq \frac{M_2}{12n^2} (b-a)^3.$$

$$E_T(f) \leq \frac{M_2}{12} h^2 (b-a). \quad (6.16)$$

**Erreur de la méthode de Simpson**

Cette fois  $n = 2$  alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left( f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \right| \leq \frac{M_4}{24} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \right|$$

$$\leq \frac{M_4}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

La formule composée correspondante avec pas constant  $h$  donnera une erreur majorée par :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left( f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) \right) \right| \leq \frac{M_4}{2880n^4} (b-a)^5.$$

$$E(f) \leq \frac{M_4}{2880} h^4 (b-a). \quad (6.18)$$

Par ailleurs, la méthode de Simpson (bien que reposant sur une interpolation à trois points) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

**Exemple 6.3.2** Calculons l'intégrale  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ . Utilisons les méthodes élémentaires précédentes à l'aide des valeurs de  $f(x) = e^{-x^2}$  aux points  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = \frac{1}{2}$  et  $x_2 = 1$ . Alors on a

$$f(0) = 1; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,7880 \quad \text{et} \quad f(1) = 0,36788.$$

– **Méthode des rectangles**

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1$$

calculons l'erreur

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0, 1].$$

alors  $f'$  est décroissante d'où  $M_1 = |f'(1)| = 0,735788$  et

$$E_{\text{rectangle}}(f) \leq \frac{M_1}{2} (b-a) h = \frac{M_1}{2} = 0,367894.$$

– **Méthode des trapèzes pour  $n = 1$**

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{h}{2} (f(0) + f(1)) = 0,68394.$$

Avec une erreur :

$$E_{Trapeze}(f) \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3 = \frac{M_2}{12} = 0,0613132.$$

– **Méthode de Simpson Pour n = 2**

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{h}{6} \left( f(0) + f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = 0,74718.$$

Avec une erreur :

$$E_{Simpson}(f) \leq \frac{M_4}{2880} (b-a)^5 = \frac{M_4}{2880} = 0,000254764.$$

La valeur exacte est  $I_{exacte} = 0,74682$ . On remarque que  $E = |I_{exacte} - I_S| = 0,00036 \simeq 4 \times 10^{-4}$ , donc la méthode de Simpson donne une approximation à  $4 \times 10^{-4}$  avec seulement trois valeurs de  $f$  parce que les dérivées d'ordre supérieur ne varient pas trop sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

## 6.4 Formule de quadrature de Gauss

**Définition 6.4.1** On appelle polynômes de Legendre les expressions de la forme

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x^2 - 1)^n \right], \quad n \geq 0$$

Voici les propriétés fondamentales de ces polynômes :

1.  $P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n$  pour tout  $n \geq 0$ .
2.  $\deg P_n = n$  pour tout  $n \geq 0$ .
3.  $\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0, \quad k \leq n \iff \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$ , pour tout  $m \neq n$ .

On dit dans ce cas que ces polynômes sont orthogonaux par rapport à la fonction poids  $\omega(x) = 1$  (i.e.  $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) \omega(x) dx = k_n \delta_{mn}$ ).

4. Le polynôme de Legendre  $P_n(x)$  possède  $n$  racines distinctes et réelles comprise entre  $[-1, 1]$ .

On cite ci-dessous les 5 premiers polynômes de Legendre

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Considérons d'abord que la fonction  $y = f(t)$  est définie sur  $[-1, 1]$ . Le problème est de trouver une formule de quadrature (i.e. trouver les  $A_i$  et les  $t_i$ ) de la forme

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \simeq \sum_{i=1}^n A_i f(t_i).$$

qui soit exacte pour tout polynômes dont le degré est le plus grand possible.

En on déduit alors que pour résoudre ce problème il suffit de déterminer les  $t_i$  et les  $A_i$  à partir du système d'équations suivants :

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \int_{-1}^1 t^k dt = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & k \text{ pair} \\ 0, & k \text{ impair} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

où les  $t_i$  sont les zéros du polynôme de Legendre de degré  $n$ .

D'où

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i = 2 \\ \sum_{i=1}^n t_i A_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 A_i = \frac{2}{3} \\ \sum_{i=1}^n t_i^3 A_i = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

La formule obtenue ainsi est appelé formule de quadrature de Gauss à  $n$  coordonnées. Pour  $f$  définie sur un intervalle quelconque  $[a, b]$ , on considère le changement de variable suivant :

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \text{ pour tout } t \in [-1, 1]$$

qui transforme l'intervalle  $[-1, 1]$  à  $[a, b]$ . Donc on peut écrire que :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt$$

par conséquent la formule de quadrature de Gauss sur  $[a, b]$  est donnée par :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

où  $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{b+a}{2}$  pour tout  $i = \overline{1, n}$ .

## 6.5 Série d'exercices n°6 : Intégration Numérique

### Exercice 1

Calculer par la formule des rectangles à gauche et à droite la valeur approchée de l'intégrale :  $I = \int_1^2 \sqrt{x} dx$  en décomposant l'intervalle d'intégration en 10 parties puis évaluer l'erreur commise.

### Exercice 2

Calculer par la méthode des trapèzes puis celle de Simpson la valeur approchée de l'intégrale :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$  en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties puis comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte.

### Exercice 3

Soit l'intégrale  $I = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$

1. Calculer la valeur approchée de  $I$  par la méthode des trapèzes à  $3 \cdot 10^{-4}$  près.
2. Calculer la valeur approchée de  $I$  par la méthode de Simpson à  $10^{-6}$  près.
3. Comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte.

### Exercice 4

On lance une fusée verticalement du sol et on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération  $\gamma$  :

$t$ (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\gamma$ (en $m/s^2$ )	30	31,63	33,44	35,47	37,75	40,33	43,29	46,70	50,67

Calculer la vitesse  $V$  de la fusée à l'instant  $t = 80s$ , par la méthode des trapèzes puis par Simpson.

### Exercice 5

En utilisant la méthode de quadrature de Gauss à 2 ordonnées ( $n = 2$ ), calculer la valeur approchée de  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$ .

### Exercice 6

En utilisant la méthode de quadrature de Gauss à 3 ordonnées ( $n = 3$ ), calculer la valeur approchée de  $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx$  puis comparer le résultat obtenu avec la valeur exacte.

# Bibliographie

- [1] K. Arbenz, A. Wohlhauser : Analyse Numérique. Suisse, 1980.
- [2] J. Baranger, Introduction à l'analyse numérique, Ed. Hermann 1977.
- [3] R.L. Burden, J.D. Faires, Numerical Analysis, Brooks/Cole 2010.
- [4] J.P. Calvi, Analyse numérique, UPS Université de Toulouse 2011.
- [5] E. Canon : Analyse numérique, Cours et exercices corrigés - Licence 2 et 3 Mathématiques, Dunod, 2012.
- [6] S. C. Chapra, R.P. Canale, Numerical Methods for engineers, McGraw-Hill,2010.
- [7] F. Curtis,P.O. Gerald Wheatdey, Applied Numerical Analysis, Addison Wesley Pub.Compagny. 2003.
- [8] P. Deuffhard, A. Hohmann : Numerical Analysis in Modern Scientific Computing, An Introduction, Springer-Verlag, 2003, 2<sup>ème</sup> édition.
- [9] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales Polytechnique, 2008
- [10] R. Herbin, polycopié : Cours d'Analyse numérique, , Université Aix Marseille, 2014.
- [11] F. Jedrzejewski, Introduction aux Méthodes Numériques, Deuxième édition. Springer-Verlag France, Paris 2005.
- [12] N. Khaldi, Polycopié : Notes de Cours et exercices corrigés d'Analyse numérique I, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf.
- [13] M. Kouche, Analyse numérique cours application et TP avec Matlab, Editions Al-Djazair 2015.
- [14] M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, Office des publications universitaires OPU4274,2016.
- [15] P. Lascaux,R. Theodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art d'ingénieur, Tomes 1et 2, Masson, Paris.1986.
- [16] G. Legendre, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique, Dauphine université de Paris 2018.
- .
- .