

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

## Mémoire de Master

**Domaine:** Mathématique et Informatique  
**Filière:** Mathématiques  
**Spécialité:** Analyse numérique appliquée aux EDP

## Thème

*Analyse théorique et numérique de structures de type Timoshenko*

Présenté par :

**M<sup>lle</sup> Boudama Kaoutar**

Soutenu publiquement le : 02/07/2025

Devant le jury composé de :

Hebhoub Fahima  
Ghennam Karima  
Far Zina

M.C.A,  
M.C.B,  
M.A.A,

Université de Skikda  
Université de Skikda  
Université de Skikda

Président  
Encadrant  
Examineur

Année universitaire : 2024/2025

# Remerciement

*Tout d'abord, je rends grâce à Dieu Tout-Puissant, qui m'a accordé l'inspiration, la force et la détermination nécessaires pour poursuivre mon parcours universitaire.*

*J'adresse ma profonde gratitude à mes chers parents pour leurs efforts et leur soutien indéfectible dans les moindres comme dans les plus grandes choses de ma vie.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadrante de mémoire, Dr Ghennam Karima, pour son encadrement précieux et ses conseils avisés tout au long de ce travail.*

*Je remercie également les membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail et pour l'honneur qu'ils me font en l'évaluant.*

*Enfin, j'exprime ma gratitude à toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont soutenu(e) et aidé(e) à mener à bien ce travail.*

---

---

# Résumé

---

Ce mémoire traite deux modèles distincts liés à la théorie des poutres de Timoshenko.

Le premier concerne un système de nanotubes de carbone à double paroi incluant les effets de la conduction thermique selon le modèle de Lord-Shulman. L'existence et l'unicité repose sur le théorème de Hille-Yosida. La stabilité du système est démontrée à l'aide d'une méthode énergétique, fondée sur la construction d'une fonction de Lyapunov. Il en résulte l'existence d'une solution unique et une stabilité exponentielle, indépendamment des coefficients du système.

Le second modèle porte sur des poutres laminées composées de trois couches avec glissement interfacial et effets de mémoire infinie. Ces effets interviennent à la fois sur le déplacement transversal et sur l'angle de rotation. L'existence et l'unicité de la solution sont établies à l'aide de la théorie des semi-groupes. Une analyse numérique est ensuite réalisée pour confirmer le caractère dissipatif du système et illustrer le comportement de sa solution dans le temps.

---

Mots clés : Système de Timoshenko ; Semi-groupes ; La Stabilité ; Fonctionnelle de Lyapunov ; Structure Viscoélastique ; Glissement Interfacial Nanotubes de carbone ; Algorithme de Newmark.

---

# Abstract

---

This work addresses two distinct models related to Timoshenko beam theory. The first model concerns a system of double-walled carbon nanotubes, incorporating thermal conduction effects described by the Lord–Shulman model. The analysis is based on the Hille–Yosida theorem, which ensures the existence and uniqueness of solutions. The stability of the system is demonstrated using an energy method, relying on the construction of a Lyapunov function. As a result, a unique solution with exponential stability is established, regardless of the system’s coefficients.

The second model focuses on laminated beams composed of three layers with interfacial slip and infinite memory effects. These effects influence both the transverse displacement and the rotation angle. The existence and uniqueness of the solution are proven using semigroup theory. A numerical analysis is then conducted to confirm the dissipative nature of the system and illustrate the time evolution of its solution.

---

**Keywords :** Timoshenko system ; Semigroups ; Stability ; Lyapunov functional ; Viscoelastic structure ; Interfacial slip ; Carbon nanotubes ; Newmark algorithm.

---

## ملخص

---

يتناول هذا العمل نموذجين مختلفين يتعلقان بنظرية عوارض تيموشينكو. يتعلق النموذج الأول بنظام من الأنابيب النانوية الكربونية مزدوجة الجدران، مع تضمين تأثيرات التوصيل الحراري الموصوفة بنموذج لوردشولمان. ويعتمد التحليل على مبرهنة هيليوسيديا التي تضمن وجود ووحداية الحل. كما يتم إثبات استقرار النظام باستخدام طريقة الطاقة بالاعتماد على بناء دالة ليابونوف، مما يؤدي إلى إثبات وجود حل وحيد يتميز بالاستقرار الأسي بغض النظر عن معاملات النظام. أما النموذج الثاني فيركز على العوارض الرقيقة المكونة من ثلاث طبقات مع انزلاق بين الطبقات وتأثيرات ذاكرة لا نهائية. تؤثر هذه التأثيرات على كل من الإزاحة العرضية وزاوية الدوران. ويتم إثبات وجود ووحداية الحل باستخدام نظرية أشباه الزمر. ثم يُجرى تحليل عددي لتأكيد الطبيعة التبددية للنظام وتوضيح التطور الزمني لحله.

---

كلمات مفتاحية: بنية لزجة مرنة انزلاق بيني، استقرار، دالة ليابونوف، نظام تيموشينكو أشباه الزمر الأنابيب النانوية الكربونية، خوارزمية نيومارك.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>11</b>
1.1 Espace de Hilbert . . . . .	11
1.2 Quelques inégalités utiles . . . . .	12
1.2.1 Inégalité de Poincaré . . . . .	12
1.2.2 Inégalité de Young . . . . .	12
1.2.3 Inégalité de Hölder . . . . .	12
1.3 Quelques théorèmes utiles . . . . .	12
1.3.1 Théorème de Fubini . . . . .	12
1.3.2 Théorème de Hille-Yosida . . . . .	13
1.3.3 Théorème de Lumer-Philips . . . . .	13
1.3.4 Théorème de Lax-Milgram . . . . .	13
<b>2 Système de nanotubes de carbone sous la thermoélasticité de Lord-Shulman</b>	<b>15</b>
2.1 Existence et unicité . . . . .	16
2.2 Stabilité exponentielle . . . . .	21
2.2.1 L'énergie du Système . . . . .	22
2.2.2 Les fonctionnelles de Lyapunov . . . . .	23
<b>3 Modélisation numérique des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies</b>	<b>28</b>
3.1 Position du problème . . . . .	28
3.2 Existence et unicité . . . . .	30

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.3 Analyse numérique . . . . .	38
<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

# Introduction

Une des théories les plus utilisées généralement dans la technologie est la théorie des poutres. Les poutres représentent l'élément structure le plus courant dans le domaine génie civil et mécanique en raison de leur omniprésence, ils sont largement étudiés d'un point de vue analytique en mécanique des matériaux.

Un modèle mathématique largement utilisé pour décrire les vibrations transversales des poutres est basé sur la théorie du faisceau TBT (ou théorie du faisceau épai) de Timoshenko dans les années 1920. Dans la théorie des poutres on a deux modèles, le premier d'Euler-Bernoulli qui néglige l'influence du cisaillement, le deuxième de Timoshenko qui prend en compte la distorsion du cisaillement.

Ce mémoire traite deux modèles distincts liés à la théorie des poutres de Timoshenko.

Le premier concerne un système de nanotubes de carbone à double paroi incluant les effets de la conduction thermique selon le modèle de Lord-Shulman [1].

Les auteurs de [21] ont proposé le modèle suivant de deux poutres de Timoshenko couplées pour modéliser les nanotubes de carbone à double paroi :

$$\begin{cases} \rho A_1 Y_{1,tt} - kGA_1(Y_{1,x} - \varphi_1)_x - P = 0, \\ \rho I_1 \varphi_{1,tt} - EI_1 \varphi_{1,xx} - kGA_1(Y_{1,x} - \varphi_1) = 0, \\ \rho A_2 Y_{2,tt} - kGA_2(Y_{2,x} - \varphi_2)_x + P = 0, \\ \rho I_2 \varphi_{2,tt} - EI_2 \varphi_{2,xx} - kGA_2(Y_{2,x} - \varphi_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Les fonctions  $Y_j$  et  $\varphi_j$ , avec  $j = 1, 2$ , représentent respectivement la déflexion totale et l'inclinaison due à la flexion du nanotube  $j$ .

Les constantes  $I_j$  et  $A_j$  désignent respectivement le moment d'inertie et l'aire de la section transversale du nanotube  $j$ .

Les constantes  $\rho$ ,  $E$ ,  $G$  et  $k$  représentent respectivement la masse volumique du matériau, le

## Introduction

---

module de Young, le module de cisaillement et le facteur de cisaillement.

La force  $P$  représente l'interaction de Van der Waals entre les deux nanotubes et elle est donnée par :

$$P = L(Y_2 - Y_1), \quad (2)$$

où  $L$  est le coefficient d'interaction de Van der Waals lié à la pression d'interaction.

Afin de simplifier l'analyse mathématique, nous effectuons les changements suivants :

$$Y_1 \rightarrow \varphi, \quad \varphi_1 \rightarrow -\psi, \quad Y_2 \rightarrow w, \quad \varphi_2 \rightarrow -z,$$

$$kGA_1 \rightarrow k_1, \quad EI_1 \rightarrow k_2, \quad kGA_2 \rightarrow k_3, \quad EI_2 \rightarrow k_4, \quad L \rightarrow k_0.$$

Sans perte de généralité, nous supposons également que :

$$\rho A_j = \rho I_j = L = 1,$$

où  $L$  représente la longueur des nanotubes.

Le second modèle porte sur des poutres laminées composées de trois couches avec glissement interfacial et effets de mémoire infinie. Ces effets interviennent à la fois sur le déplacement transversal et sur l'angle de rotation.

Ces structures connues sous le nom de poutre laminée sont constituées de deux couches identiques d'épaisseur uniforme, qui est modélisée comme des poutres de Timoshenko. Un adhésif de faible épaisseur vient coller les deux couches et crée une force de récupération qui est proportionnelle à la quantité de glissement et produit un amortissement capable de renvoyer le système à son état d'équilibre, tel qu'il est utilisé dans de nombreux domaines scientifiques[12].

Nous avons trois équations de modélisation du mouvement pour ce système et ont été dérivées de la théorie de Timoshenko. La troisième équation est couplée à la première et à la deuxième équations et elle décrivent la dynamique du glissement, comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} + k(u - \varphi_x)_x = 0 \\ \rho_2 (v - u)_{tt} - b(v - u)_{xx} - k(u - \varphi_x) = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} + 3k(u - \varphi_x) + 4\delta v + 4\gamma v_t = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Où  $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi = \varphi(x, t)$  est le déplacement transversal,  $u = u(x, t)$  représente l'angle de rotation et  $v = v(x, t)$  est proportionnel à la quantité de glissement le long de l'interface,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $k$ ,  $b$ ,  $\delta$  et  $\gamma$  sont des constantes positives.

Il a été montré que l'amortissement de frottement  $4\gamma v_t$  dans la troisième équation est suffisamment fort pour stabiliser asymptotiquement les structures, mais n'est pas capable de stabiliser significativement les structures. (instabilité exponentielle), le même résultat est également prouvé pour  $x = 0$  et  $x = 1$ , en supposant certaines conditions sur les paramètres ([18] [17] )

La stabilité est discutée dans le cas d'un amortissement viscoélastique qui agit sur l'angle de rotation effectif sans recourir au contrôle aux frontières, elle est représentée par des termes à mémoire finie sous forme de convolution sur  $[0,t]$  [12][17], Et sous certaines restrictions imposées sur les paramètres, la stabilité exponentielle a été prouvée [12]

Dans [8], certains résultats de stabilité exponentielle et polynomiale sous certaines contraintes sur les paramètres  $\gamma = 0$  et avec mémoire infinie et dans ce modèle, on va étudier le système (3) avec deux mémoires infinies.

Nous présentons trois chapitres. Le premier chapitre propose un rappel des définitions fondamentales ainsi que certaines inégalités utiles pour la suite de ce travail. Le deuxième chapitre traite le premier problème : l'étude d'un système de nanotubes de carbone soumis à la thermoélasticité de Lord-Shulman. Nous y démontrons l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la stabilité du système. Enfin, le troisième chapitre est consacré au second problème : l'analyse du comportement des poutres de Timoshenko laminées en présence de glissement interfacial et d'effets de mémoire infinie. L'existence et l'unicité de la solution y sont également établies, et la dissipation de l'énergie est prouvée à l'aide de l'algorithme de Newmark.

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous donnons la définitions de quelques espaces de Hilbert et quelques inégalités dans ces espaces. Aussi, nous donnons brièvement, des définitions et quelques lemmes que nous utiliserons ultérieurement.

### 1.1 Espace de Hilbert

Soit  $\Omega$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,

**Définition 1.1.** [3] On définit l'espace :

$$L^1(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } \int_{\Omega} |f| d\Omega < +\infty\}$$

**Définition 1.2.** [3] On définit l'espace de Hilbert :

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega < +\infty\}$$

**Définition 1.3.** [3]

On définit les espaces de Hilbert :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ telle que } u' \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ telle que } u' \in L^2(\Omega) \text{ et } u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } u'' \in L^2(\Omega)\}$$

## 1.2 Quelques inégalités utiles

### 1.2.1 Inégalité de Poincaré

[3] Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathfrak{R}$ , alors il existe une constante positive  $c$  (dépend de  $\Omega$ ) telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|u'\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

### 1.2.2 Inégalité de Young

[3] Soient  $p$  et  $q$  deux réels vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors :

$$\forall (f, g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)), \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g|^q dx.$$

Si  $p = q = 2$  on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g|^2 dx.$$

### 1.2.3 Inégalité de Hölder

[3] Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions respectivement dans  $L^p(\Omega)$ ,  $L^q(\Omega)$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Alors le produit  $fg$  est dans  $L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

#### Remarque 1.2.1

L'inégalité de Cauchy-Schwartz est un cas particulier de l'inégalité de Holder dans le cas  $p = q = 2$ .

## 1.3 Quelques théorèmes utiles

### 1.3.1 Théorème de Fubini

**Théorème 1.1.** [20] Soit  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$  ( $a < b, c < d$ ) un rectangle fermé du plan  $\mathfrak{R}^2$  et  $f : \Delta \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction continue, alors  $f$  est intégrable sur  $\Delta$  et on a :

$$\int \int_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

#### 1.3.2 Théorème de Hille-Yosida

**Théorème 1.2.** [3] Soit  $A$  un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  il existe une fonctionnelle  $u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap ([0, +\infty[; D(A))$  unique tel que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale)}. \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

#### 1.3.3 Théorème de Lumer-Philips

**Théorème 1.3.** [19] Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur linéaire et  $D(A)$  dense dans  $H$ . Alors,  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semigroupe de contractions si et seulement si :

1.  $A$  est dissipatif.
2. il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\text{Im}(\lambda I - A) = H$ .

#### 1.3.4 Théorème de Lax-Milgram

**Définition 1.4.** [3] Soit  $a : E \times E \rightarrow \mathfrak{R}$  une forme bilinéaire, on dit que :

- $a$  est continue sur  $E$  s'il existe une constante  $c_a$  telle que

$$\forall x, y \in E, \quad |a(x, y)| \leq c_a \|x\|_E \|y\|_E$$

- $a$  est coercive s'il existe une constante  $\alpha_a$  telle que

$$\forall x \in E \quad \alpha_a \|x\|_E^2 \leq a(x, x)$$

- $a$  est symétrique si

$$\forall y \in E \quad a(y, x) = a(x, y)$$

**Théorème 1.4.** [3] Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $f \in H'$ , il existe  $u$  unique tel que :

$$a(u, v) = (f, v) \quad v \in H.$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  minimise la fonctionnelle  $J : H \rightarrow \mathfrak{R}$  définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - (f, v)$$

pour tout  $v$  de  $H$ .

## Système de nanotubes de carbone sous la thermoélasticité de Lord-Shulman

Nous considérons le système de type double-Timoshenko, modélisant des nanotubes de carbone à double paroi dans le cadre de la thermoélasticité de Lord-Shulman, soumis à des conditions initiales et à des conditions aux limites de Dirichlet comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho_1 \varphi_{tt} - k_1(\varphi_x - \psi)_x - r(u - \varphi) + \gamma_1 \varphi_t = 0, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\
 \lambda_1 \psi_{tt} - b_1 \psi_{xx} - k_1(\varphi_x - \psi) + \delta(\theta_x + \tau \theta_{tx}) = 0, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\
 \rho_2 u_{tt} - k_2(u_x - v)_x + r(u - \varphi) + \gamma_3 u_t = 0, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\
 \lambda_2 v_{tt} - b_2 v_{xx} - k_2(u_x - v) + \gamma_4 v_t = 0, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\
 \rho_3(\theta_t + \tau \theta_{tt}) - k\theta_{xx} + \beta \psi_{xt} = 0, \quad (0, L) \times (0, \infty) \\
 \varphi(x, t) = \psi(x, t) = u(x, t) = v(x, t) = \theta_x(x, t) = 0, \quad x = 0, L, \quad t \geq 0 \\
 \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad (0, L) \\
 \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad (0, L) \\
 u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (0, L) \\
 v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (0, L) \\
 \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad (0, L).
 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

En raison des conditions aux limites imposées sur  $\theta$ , le système (2.1) peut admettre des solutions non décroissantes. De plus, ces conditions empêchent l'application directe de l'inégalité de Poincaré à  $\theta$ . Pour y remédier, nous effectuons la transformation suivante.

À partir de la dernière équation du système (2.1), en intégrant sur  $(0, L)$ , nous obtenons :

$$\tau \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \theta(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_0^L \theta(x, t) dx = 0. \quad (2.2)$$

En résolvant (2.2) avec les conditions initiales données, nous obtenons :

$$\int_0^L \theta(x, t) dx = \left(1 - e^{-\tau t}\right) \frac{1}{\tau} \int_0^L \theta_1(x) dx + \int_0^L \theta_0(x) dx.$$

Ainsi, en définissant

$$\tilde{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - \frac{1}{L} \left[ \left(1 - e^{-\tau t}\right) \frac{1}{\tau} \int_0^L \theta_1(x) dx + \int_0^L \theta_0(x) dx \right],$$

nous obtenons :

$$\int_0^L \tilde{\theta}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Cette transformation permet d'appliquer l'inégalité de Poincaré à  $\tilde{\theta}$ . De plus, une substitution directe confirme que les variables  $(\varphi, \psi, u, v, \tilde{\theta})$  satisfont le système (2.1) avec les conditions initiales modifiées pour  $\theta$  données par :

$$\theta_0(x) = \theta_0(x) - \frac{1}{L} \int_0^L \theta_0(x) dx, \quad \theta_1(x) = \theta_1(x) - \frac{1}{L} \int_0^L \theta_1(x) dx.$$

Désormais, nous travaillons donc avec  $(\varphi, \psi, u, v, \tilde{\theta})$  au lieu de  $(\varphi, \psi, u, v, \theta)$ , mais, pour plus de simplicité, nous continuerons à noter  $\theta$  au lieu de  $\tilde{\theta}$ .

## 2.1 Existence et unicité

L'objectif ici est de démontrer brièvement si le système (2.1) est bien posé. Pour cela, nous transformons le problème original (2.1) en un problème de Cauchy dans un espace de Hilbert approprié. Nous définissons donc notre espace.

Soit :

$$H = [H_0^1(0.L) \times L^2(0.L)]^4 \times [H^1(0.L) \times L_*^2(0.L)] \quad (2.3)$$

où

$$L_*^2(0.L) = \{\phi \in L^2(0.L) \mid \int_0^L \phi dx = 0\}$$

Le produits scalaires à l'espace  $H$  est donné par (2.3) est

$$\begin{aligned} (\Psi, \bar{\Psi})_H = & \int_0^L \left( \rho_1 y_1 \bar{y}_1 + \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + b_1 \psi_x \bar{\psi}_x + k_1 (\varphi_x - \psi) (\overline{\varphi_x - \psi}) \right. \\ & + \rho_2 y_2 \bar{y}_2 + \lambda_2 z_2 \bar{z}_2 + b_2 v_x \bar{v}_x + k_2 (u_x - v) (\overline{u_x - v}) \\ & \left. + r(u - \varphi) (\overline{u - \varphi}) + \frac{\rho_3 \delta}{\beta} (\theta + \tau \vartheta) (\overline{\theta + \tau \vartheta}) + \frac{k\tau\delta}{\beta} \theta_x \bar{\theta}_x \right) dx, \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.1 Existence et unicité

où

$$\begin{aligned}\Psi &= (\varphi, y_1, \psi, z_1, u, y_2, v, z_2, \theta, \vartheta)^T \in H, \\ y_1 &= \varphi_t, \quad z_1 = \psi_t, \quad y_2 = u_t, \quad z_2 = v_t, \quad \vartheta = \theta_t.\end{aligned}$$

D'après le système (2.1), nous obtenons le problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Psi(t) = \mathcal{A}\Psi(t), & t > 0, \\ \Psi(0) = \Psi_0 = (\rho_0, \rho_1, \psi_0, \psi_1, u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0, \theta_1)^T, \end{cases} \quad (2.5)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$  est défini par :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ y_1 \\ \psi \\ z_1 \\ u \\ y_2 \\ v \\ z_2 \\ \theta \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{\rho_1} (k_1(\varphi_{xx} - \psi_x) + r(u - \varphi) - \gamma_1 y_1) \\ z_1 \\ \frac{1}{\lambda_1} (b_1 \psi_{xx} + k_1(\varphi_x - \psi) - \delta \theta_x - \tau \delta \vartheta_x) \\ y_2 \\ \frac{1}{\rho_2} (k_2(u_{xx} - v_x) - r(u - \varphi) - \gamma_3 y_2) \\ z_2 \\ \frac{1}{\lambda_2} (b_2 v_{xx} + k_2(u_x - v) - \gamma_4 z_2) \\ \vartheta \\ \frac{1}{\tau \rho_3} (-\rho_3 \vartheta + k \theta_{xx} - \beta z_{1x}) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

de domaine :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi \in H \setminus (\varphi, \psi, u, v) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ (y_1, z_1, y_2, z_2) \in H_0^1(0, L), \\ \theta \in H_*^2(0, L) \cap H_*^1(0, L), \\ \vartheta \in H_*^1(0, L) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned}H_*^2(0, L) &= \{\phi \in H^2(0, L) : \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0\}, \\ H_*^1(0, L) &= H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L)\end{aligned}$$

Soit le résultats d'existence et d'unicité

**Théorème 2.1.** *Pour toute donnée initiale  $\Psi_0 \in H$ , il existe une solution faible unique*

$$\Psi(t) \in C([0, \infty), H) \quad \text{du système (2.1).}$$

De plus, si  $\Psi_0 \in D(A)$ , alors le système (2.1) admet une solution forte unique

$$\Psi(t) \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), H).$$

### Preuve

Nous allons prouver que  $A$  est dissipatif et que sa résolvante contient zéro, c'est-à-dire  $0 \in \rho(A)$ . Par conséquent, nous pourrions conclure que les hypothèses du corollaire de Lumer–Phillips sont vérifiées, et que celui-ci peut être appliqué, conformément au théorème de Hille–Yosida [3].

A dissipatif : Pour établir la dissipativité de l'opérateur  $A$ , nous utilisons le produit scalaire défini en (2.4) et le système (2.6). Il en résulte que, pour toute fonction  $\Psi \in D(\mathcal{A})$ , nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\Psi, \Psi)_H &= \int_0^L y_1 [k_1(\varphi_{xx} - \psi_x) + r(u - \varphi) - \gamma_1 y_1] dx \\ &\quad + b_1 \int_0^L z_1 \psi_{xx} dx + \int_0^L z_1 [k_1(\varphi_x - \psi) - \delta \theta_x] dx \\ &\quad - \tau \delta \int_0^L z_1 \vartheta_x dx + b_1 \int_0^L \psi_x z_{1x} dx \\ &\quad + k_1 \int_0^L (\varphi_x - \psi)(y_{1x} - z_1) dx + b_2 \int_0^L v_x z_{2x} dx \\ &\quad - \gamma_3 \int_0^L y_2^2 dx + r \int_0^L (u - \varphi)(y_2 - y_1) dx \\ &\quad + \int_0^L y_2 [k_2(u_{xx} - v_x) - r(u - \varphi)] dx \\ &\quad + \int_0^L z_2 [b_2 v_{xx} + k_2(u_x - v) - \gamma_4 z_2] dx \\ &\quad + \frac{k\tau\delta}{\beta} \int_0^L \theta_x \vartheta_x dx + k_2 \int_0^L (u_x - v)(y_{2x} - z_2) dx \\ &\quad + \delta \int_0^L z_1 (\theta_x + \tau \vartheta_x) dx - \frac{k\delta}{\beta} \int_0^L (\theta_x + \tau \vartheta_x) \theta_x dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$(A\Psi, \Psi)_H = - \int_0^L (\gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_2^2 + \gamma_4 z_1^2 + \frac{k\delta}{\beta} \theta_x^2) dx \leq 0. \tag{2.9}$$

par conséquent, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est dissipatif.

$0 \in \rho(A)$  : En d'autres termes, nous devons prouver que pour :

$$F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10})^t \in H,$$

## 2.1 Existence et unicité

---

il existe un unique  $\Psi \in D(A)$  tel que explicitement :

$$-A\Psi = F. \quad (2.10)$$

les composantes du système (2.10) sont :

$$\begin{aligned} -y_1 &= f_1 \in H_0^1(0, L), \\ -z_1 &= f_3 \in H_0^1(0, L), \\ -y_2 &= f_5 \in H_0^1(0, L), \\ -z_2 &= f_7 \in H_0^1(0, L), \\ -V &= f_9 \in H_{0,*}^1(0, L), \\ -k_1(\varphi_{xx} - \psi_x) - r(u - \varphi) + \gamma_1 y_1 &= \rho_1 f_2 \in L^2(0, L), \\ -b_1 \psi_{xx} - k_1(\varphi_x - \psi) + \delta \theta_x + \tau \delta \vartheta_x &= \lambda_1 f_4 \in L^2(0, L), \\ -k_2(u_{xx} - v_x) + r(u - \varphi) + \gamma_3 y_2 &= \rho_2 f_6 \in L^2(0, L), \\ -b_2 v_{xx} - k_2(u_x - v) + \gamma_4 z_2 &= \lambda_2 f_8 \in L^2(0, L), \\ -k\theta_{xx} + \rho_3 V + \beta z_{1x} &= f_{10} \in L_*^2(0, L). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Des cinq premières équations du système (2.11), il résulte que :

$$y_1, z_1, y_2, z_2, V \in H_0^1(0, L) \text{ et } V \in H_*^1(0, L).$$

Et d'après la dernière équation du système (2.11), nous avons :

$$\theta_{xx} = \frac{-\tau \rho_3}{k} f_{10} - \frac{\rho_3}{k} f_9 - \frac{\beta}{k} f_{3x} \in L_*^2(0, L), \quad (2.12)$$

donc

$$\theta \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L).$$

Nous constatons que l'équation (2.12) satisfait

$$\theta_x = \frac{-\tau \rho_3}{k} \int_0^L f_{10}(y) dy - \frac{\rho_3}{k} \int_0^L f_9(y) dy - \frac{\beta}{k} f_3 \quad (2.13)$$

De plus, nous avons :  $\theta_x(0) = \theta_x(L) = 0$ .

Ainsi,

$$\theta \in H_*^2(0, L) \cap H_*^1(0, L).$$

En substituant les cinq premières équations du système (2.11) et l'équation (2.13) dans les cinq dernières équations du système (2.11), nous obtenons

$$\begin{cases} -k_1(\varphi_x - \psi)_x - r(u - \varphi) = \rho_1 f_2 + \gamma_1 f_1 \in L^2(0, L) \\ -b_1 \psi_{xx} - b_1(\varphi_x - \psi) = \frac{\delta\tau\rho_3}{k} \int_0^L f_{10}(y) dy + \frac{\delta\rho_3}{k} \int_0^L f_9(y) dy + \frac{\delta\beta}{k} f_3 + \tau\delta f_{9x} + \lambda_1 f_4 \in L^2(0, L) \\ -k_2(u_x - v)_x + r(u - \varphi) = \rho_2 f_6 + \gamma_3 f_5 \in L^2(0, L) \\ -b_1 v_{xx} - k_2(u_x - v) = \lambda_2 f_8 + \gamma_4 f_7 \in L^2(0, L) \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous procédons à la résolution du système (2.14) en considérant sa formulation variationnelle,

$$B((\varphi, \psi, u, v), (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{u}, \widehat{v})) = L(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{u}, \widehat{v}) \quad (2.15)$$

où

$B : [H_0^1(0, L)]^8 \rightarrow R$  est une forme bilinéaire donnée par :

$$\begin{aligned} B((\varphi, \psi, u, v), (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{u}, \widehat{v})) = \int_0^L \left[ b_1 \psi_x \widehat{\psi}_x + k_1(\varphi_x - \psi)(\widehat{\varphi}_x - \widehat{\psi}) + b_2 v_x \widehat{v}_x \right. \\ \left. + k_2(u_x - v)(\widehat{u}_x - \widehat{v}) + r(u - \varphi)(\widehat{u} - \widehat{\varphi}) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.16)$$

et  $L : [H_0^1(0, L)]^4 \rightarrow R$  est la fonctionnelle linéaire continue définie par :

$$L(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{u}, \widehat{v}) = \int_0^L \left( l_1 \widehat{\varphi} + l_2 \widehat{\psi} + l_3 \widehat{u} + l_4 \widehat{v} \right) dx,$$

où

$$\begin{aligned} l_1 &= \rho_1 f_2 + \gamma_1 f_1, \\ l_2 &= \frac{\delta\tau\rho_3}{k} \int_0^L f_{10}(y) dy + \frac{\delta\rho_3}{k} \int_0^L f_9(y) dy + \frac{\delta\beta}{k} f_3 + \tau\delta f'_9 + \lambda_1 f_4, \\ l_3 &= \rho_2 f_6 + \gamma_3 f_5, \\ l_4 &= \lambda_2 f_8 + \gamma_4 f_7. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il est évident que l'opérateur  $L$  est borné dans l'espace  $[H_0^1(0, L)]^4$ .

De manière similaire, l'opérateur  $B$  est également borné dans  $[H_0^1(0, L)]^8$ .

De plus, à partir de l'équation (2.16), il résulte que :

$$\begin{aligned} B((\varphi, \psi, u, v), (\varphi, \psi, u, v)) &= b_1 \|\psi_x\|^2 + k_1 \|\varphi_x - \psi\|^2 + b_2 \|v_x\|^2 \\ &+ k_2 \|u_x - v\|^2 + r \|u - \varphi\|^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.2 Stabilité exponentielle

La forme bilinéaire  $B$  est coercive dans l'espace  $[H_0^1(0, L)]^4$ . Par conséquent, d'après le lemme de Lax–Milgram, il en résulte qu'il existe une unique solution

$$(\varphi, \psi, u, v) \in [H_0^1(0, L)]^4$$

satisfaisant le problème (2.15).

De plus, en prenant les fonctionnelles

$$(\widehat{\varphi}, 0, 0, 0), \quad (0, \widehat{\psi}, 0, 0), \quad (0, 0, \widehat{u}, 0), \quad (0, 0, 0, \widehat{v}) \quad \text{avec} \quad \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{u}, \widehat{v} \in \mathcal{D}(0, L),$$

l'équation (2.15) se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{xx} = \psi_x - \frac{r}{k_1}(u - \varphi) - \frac{\rho_1}{k_1}f_2 - \frac{\gamma_1}{k_1}f_1 \in L^2(0, L), \\ \psi_{xx} = -\frac{k_1}{b_1}(\varphi_x - \psi) - \frac{\delta\tau\rho_3}{kb_1} \int_0^L f_{10}(y)dy - \frac{\delta\rho_3}{kb_1} \int_0^L f_9(y)dy \\ \quad - \frac{\tau\delta}{b_1}f_{9x} - \frac{\delta\beta}{kb_1}f_3 - \frac{\lambda_1}{b_1}f_4 \in L^2(0, L), \\ u_{xx} = v_x + \frac{r}{k_2}(u - \varphi) - \frac{\rho_2}{k_2}f_6 - \frac{\gamma_3}{k_2}f_5 \in L^2(0, L), \\ v_{xx} = -\frac{k_2}{b_2}(u_x - v) - \frac{\lambda_2}{b_2}f_8 - \frac{\gamma_4}{b_2}f_7 \in L^2(0, L). \end{array} \right. \quad (33)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\varphi, \psi, u, v \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L).$$

Finalement, nous avons établi que

$$\Psi = (\varphi, y_1, \psi, z_1, u, y_2, v, z_2, \theta, \vartheta)^T \in D(A) \quad \text{résout} \quad -A\Psi = F.$$

Par conséquent, nous concluons que  $0 \in \rho(A)$ .

## 2.2 Stabilité exponentielle

Cette section traite la stabilité exponentielle du système (2.1) en utilisant la méthode de l'énergie. Nous commençons par démontrer que l'énergie du système décroît au cours du temps. Ensuite, nous construisons soigneusement une fonctionnelle de Lyapunov équivalente à l'énergie du système. Enfin, nous prouvons que cette fonctionnelle de Lyapunov satisfait une inégalité appropriée, ce qui conduit à la stabilité exponentielle du système (2.1).

Les lemmes essentiels suivants sont cruciaux pour établir notre résultat de stabilité. Ces lemmes sont nécessaires pour faire apparaître les termes négatifs requis dans l'expression de l'énergie.

À partir de cette section,  $c$  désigne une constante positive générique, incluant notamment celles provenant de l'inégalité de Poincaré. Soit  $(\varphi, \psi, u, v, \theta)$  une solution du problème (2.1).

### 2.2.1 L'énergie du Système

#### Lemme 2.1

L'énergie du système (2.1) définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho_1 \varphi_t^2 + \lambda_1 \psi_t^2 + b_1 \psi_x^2 + k_1 (\varphi_x - \psi)^2 + \rho_2 u_t^2 + \lambda_2 v_t^2 + b_2 v_x^2 + k_2 (u_x - v)^2 + r(u - \varphi)^2 + \frac{\rho_3 \delta}{\beta} (\theta + \tau \theta_t)^2 + \frac{\tau k \delta}{\beta} \theta_x^2 \right] dx \quad (2.18)$$

satisfait

$$E'(t) = - \int_0^L (\gamma_1 \varphi_t^2 + \gamma_3 u_t^2 + \gamma_4 v_t^2 + \frac{k \delta \theta_x^2}{\beta}) ds \leq 0 \quad (2.19)$$

#### Preuve

Les équations (2.18) et (2.19) sont obtenues par les procédures de calcul standards consistant à multiplier les cinq premières équations du système (2.1) respectivement par  $\varphi_t$ ,  $\psi_t$ ,  $u_t$ ,  $v_t$  et  $(\theta_{xx} + \tau \theta_{txx})$ , puis à intégrer par rapport à  $x$  et enfin à sommer les résultats.

Les étapes détaillées sont les suivantes : en commençant par la première équation du système (2.1), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + k_1 (\varphi_x - \psi)^2 + r(u - \varphi)^2) dx + \int_0^L [k_1 \psi_t (\varphi_x - \psi) - r u_t (u - \varphi)] dx = -\gamma_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx \quad (2.20)$$

des deuxième, troisième, quatrième et cinquième nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\lambda_1 \psi_t^2 + b_1 \psi_x^2] dx + \int_0^L [\delta \psi_t (\theta_x + \tau \theta_{tx}) - k_1 \psi_t (\varphi_x - \psi)] dx = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho_2 u_t^2 + k_2 (u_x - v)^2 + r(u - \varphi)^2] dx + \int_0^L [k_2 v_t (u_x - v) + r u_t (u - \varphi)] dx = -\gamma_3 \int_0^L u_t^2 dx. \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\lambda_2 v_t^2 + b_2 v_x^2] dx + \int_0^L [\gamma_4 v_t - k_2 v_t (u_x - v)] dx = -\gamma_4 \int_0^L v_t^2 dx. \quad (2.23)$$

## 2.2 Stabilité exponentielle

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[ \frac{\rho_3 \delta (\theta + \tau \theta_t)^2}{\beta} + \frac{\tau k \delta \theta_x^2}{\beta} \right] dx - \delta \int_0^L \psi_t (\theta_x + \tau \theta_{tx}) dx = - \frac{k \delta \int_0^L \theta_x^2 dx}{\beta}. \quad (2.24)$$

En sommant les équations (2.20) à (2.24), nous obtenons à la fois la forme fonctionnelle de l'énergie (2.18) ainsi que sa dérivée (2.19).

### 2.2.2 Les fonctionnelles de Lyapunov

#### Lemme 2.2

La dérivée de la fonctionnelle

$$F_1(t) = \rho_3 \int_0^L \psi_t \left( \int_0^x (\theta(y) + \tau \theta_t(y)) dy \right) dx \quad (2.25)$$

satisfait, pour tout  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

$$F_1' t \leq -\frac{\beta}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 + \varepsilon_2 \int_0^L (\varphi_x - \psi)^2 dx + c \int_0^L \theta_x^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^L (\theta + \tau \theta_t)^2 dx. \quad (2.26)$$

#### Preuve

La dérivée de F, avec la substitution appropriée en utilisant les deuxième et cinquième équations de (2.1), donne :

$$\begin{aligned} F_1'(t) = & -\beta \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\rho_3 \delta}{\lambda_1} \int_0^L (\theta + \tau \theta_t)^2 dx - \frac{\rho_3 b_1}{\lambda_1} \int_0^L \psi_x (\theta + \tau \theta_t) dx \\ & + k \int_0^L \psi_t \theta_x dx + \frac{k_1 \rho_3}{\lambda_1} \int_0^L (\varphi_x - \psi) \left( \int_0^x (\theta(y) + \tau \theta_t(y)) dy \right) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

Par les inégalités de Young, de Cauchy Schwarz et de Poincaré, les trois derniers termes de (2.27) sont bornés comme suit :

$$k \int_0^L \psi_t \theta_x dx \leq \frac{\beta}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{k^2}{2\beta} \int_0^L \theta_x^2 dx, \quad (2.28)$$

$$\frac{\rho_3 b_1}{\lambda_1} \int_0^L \psi_x (\theta + \tau \theta_t) dx \leq \varepsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\rho_3^2 b_1^2}{4\lambda_1^2 \varepsilon_1} \int_0^L (\theta + \tau \theta_t)^2 dx \quad (2.29)$$

$$\frac{k_1 \rho_3}{\lambda_1} \int_0^L (\varphi_x - \psi) \left( \int_0^x (\theta(y) + \tau \theta_t(y)) dy \right) dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L (\varphi_x - \psi)^2 dx + \frac{c k_1^2 \rho_3^2}{4\lambda_1^2 \varepsilon_2} \int_0^L (\theta + \tau \theta_t)^2 dx \quad (2.30)$$

En remplaçant les trois derniers termes de l'équation (2.27) par les estimations correspondantes données dans (2.28) à (2.30), nous obtenons (2.26).

**Lemme 2.3**

La dérivée de la fonctionnelle

$$F_2(t) = -\tau\rho_3 \int_0^L \theta(\theta + \tau\theta_t)dx \quad (2.31)$$

satisfait, pour tout  $\varepsilon_3 > 0$ ,

$$F_2'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^L (\theta + \tau\theta_t)^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^L \theta_x^2 dx. \quad (2.32)$$

**Preuve**

La dérivée de  $F_2$ , après substitution appropriée en utilisant la cinquième équation du système (2.1) puis une intégration par parties, donne

$$F_2'(t) = -\rho_3 \int_0^L (\theta + \tau\theta_t)^2 dx + \tau k \int_0^L \theta_x^2 dx + \rho_3 \int_0^L \theta(\theta + \tau\theta_t)dx - \beta\tau \int_0^L \psi_t \theta_x dx \quad (2.33)$$

Par les inégalités de Young et de Poincaré, les estimations des deux derniers termes sont :

$$\rho_3 \int_0^L \theta(\theta + \tau\theta_t)dx \leq \frac{c\rho_3}{2} \int_0^L (\theta + \tau\theta_t)^2 dx + \frac{\rho_3}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx, \quad (2.34)$$

$$- \beta\tau \int_0^L \psi_t \theta_x dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\beta^2\tau^2}{4\varepsilon_3} \int_0^L \theta_x^2 dx, \quad (2.35)$$

respectivement. Le résultat du lemme est obtenue en substituant (2.34) et (2.35) dans (2.33).

**Lemme 2.4**

La dérivée de la fonctionnelle

$$F_3(t) = \int_0^L (\rho_1\varphi_t\varphi + \lambda_1\psi_t\psi + \rho_2u_tu + \lambda_2v_tv + \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda_2}{2}u^2 + \frac{\lambda_3}{2}v^2 + \delta\tau\psi\theta_x)dx \quad (2.36)$$

Satisfait

$$F_3'(t) \leq - \int_0^L (k_1(\varphi_x - \psi)^2 + \frac{b_1}{2}\psi_x^2 + k_2(u_x - v)^2 + b_2v_x^2 + r(u - \varphi))dx + \int_0^L (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2u_t^2 + \lambda_2v_t^2 + c\psi_t^2 + c\theta_x^2)dx \quad (2.37)$$

**Preuve**

La dérivée de  $F_3$  donne

$$F_3'(t) = \int_0^L (\rho_1\varphi_{tt}\varphi + \lambda_1\psi_{tt}\psi + \rho_2u_{tt}u + \lambda_2v_{tt}v + \lambda_1\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \rho_2u_t^2 + \lambda_2v_t^2 + \lambda_1\varphi_t\varphi + \lambda_2u_tu + \lambda_3v_tv + \delta\tau\psi_t\theta_x + \delta\tau\psi\theta_{xt})dx. \quad (2.38)$$

## 2.2 Stabilité exponentielle

En remplaçant les quatre premiers termes de (2.38) par les termes correspondants du système (2.1) et en appliquant une intégration par parties, nous obtenons :

$$F_3'(t) = - \int_0^L \left( k_1(\varphi_x - \psi)^2 + b_1\psi_x^2 + k_2(u_x - v)^2 + b_2v_x^2 + r(u - \varphi)^2 \right) dx + \int_0^L \left( \rho_1\varphi_t^2 + \rho_2u_t^2 + \lambda_2v_t^2 + c\psi_t^2 + c\theta_x^2 \right) dx. \quad (2.39)$$

L'inégalité (2.37) est obtenue en appliquant les inégalités de Young et de Poincaré aux deux derniers termes de (2.39).

Après avoir établi les lemmes techniques nécessaires, nous nous concentrons à présent sur l'énoncé et la démonstration de la stabilité exponentielle.

**Théorème 2.2.** *L'énergie du système (2.1) décroît exponentiellement. En d'autres termes, il existe deux constantes positives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  telles que l'énergie  $E(t)$  du système (2.1) vérifie :*

$$E(t) \leq \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (2.40)$$

### Preuve du théorème

Étant donné les constantes positives  $N$ ,  $N_1$  et  $N_2$ , qui seront choisies convenablement par la suite, nous définissons une fonctionnelle de Lyapunov,

$$L(t) = NE(t) + N_1F_1(t) + N_2F_2(t) + F_3(t) \quad (2.41)$$

Le calcul de la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov, combiné avec les termes correspondants des équations (2.19), (2.26), (2.32) et (2.37), et en posant  $\varepsilon_1 = \frac{b_1}{4N_1}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{k_1}{2N_1}$  et  $\varepsilon_3 = \frac{1}{N_2}$ , donne :

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & - [\gamma_1 N - \rho_1] \int_0^L \varphi_t^2 dx - [\gamma_3 N - \rho_3] \int_0^L u_t^2 dx - [\gamma_4 N - \lambda_2] \int_0^L v_t^2 dx \\ & - [KN - cN_1 - cN_2(1 + N_2) - c] \int_0^L \theta_x^2 dx - \int_0^L \psi_t^2 dx - \int_0^L (\theta + \tau\theta_t)^2 dx \\ & - b_2 \int_0^L v_x^2 dx - r \int_0^L (u - \varphi)^2 dx - \frac{K_1}{2} \int_0^L (\varphi_x - \psi)^2 dx \\ & - \frac{b_1}{4} \int_0^L \psi_x^2 dx - K_2 \int_0^L (u_x - v)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

En fixant  $N_1 = \frac{2}{\beta}(c + 1)$  puis en prenant  $N_2 = \frac{2}{\rho_3}[cN_1(1 + N_1) + 1]$  nous nous retrouvons avec

$$\begin{aligned}
 L'(t) \leq & -[\gamma_1 N - \rho_1] \int_0^L \varphi_t^2 dx - [\gamma_3 N - \rho_2] \int_0^L u_t^2 dx - [\gamma_4 N - \lambda_2] \int_0^L v_t^2 dx \\
 & - [KN - cN_1 - cN_2(1 + N_2) - c] \int_0^L \theta_x^2 dx - \left[ \frac{\beta}{2} N_1 - c \right] \int_0^L \psi_t^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_3}{2} N_2 - cN_1(1 + N_1) \right] \int_0^L (\theta + \tau\theta_t)^2 dx - b_2 \int_0^L v_x^2 dx \\
 & - r \int_0^L (u - \varphi)^2 dx - \frac{K_1}{2} \int_0^L (\varphi_x - \psi)^2 dx - \frac{b_1}{4} \int_0^L \psi_x^2 dx - K_2 \int_0^L (u_x - v)^2 dx
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

D'autre part, en imposant les inégalités de Young et de Poincaré à la fonctionnelle de Lyapunov définie par (2.41) et en gardant à l'esprit que  $N_1$  et  $N_2$  ont été fixés et que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \varphi^2 dx & \leq c \int_0^L (\varphi_x - \psi)^2 dx + c \int_0^L \psi_x^2 dx \\
 \int_0^L u^2 dx & \leq c \int_0^L (u_x - v)^2 dx + c \int_0^L v_x^2 dx
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 |L(t) - NE(t)| & \leq c \int_0^L \left[ \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \varphi_x^2 + (\varphi_x - \psi)^2 + u_t^2 + v_t^2 \right. \\
 & \quad \left. + v_x^2 + (u_x - v)^2 + (\theta + \tau\theta_t)^2 + \theta_x^2 \right] dx \\
 & \leq cE(t),
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

d'où

$$(N - c)E(t) \leq L(t) \leq (N + c)E(t) \tag{2.45}$$

Nous mettons  $N - c = \mu_1$  et  $N + c = \mu_2$ , nous obtenons

$$\mu_1 E(t) \leq L(t) \leq \mu_2 E(t). \tag{2.46}$$

Donc la fonctionnel de Lyapunov est équivalente à l'énergie du système.

Nous prenons  $N$  suffisamment grand pour que :

$$\gamma_1 N - \rho_1 > 0, \quad \gamma_3 N - \rho_2 > 0, \quad \gamma_4 N - \lambda_2 > 0, \quad N - c > 0 \tag{2.47}$$

Pour  $\mu_0 > 0$ , et à partir de l'estimation (2.43), pour tout  $t \geq 0$ .

$$L'(t) \leq -\mu_0 \int_0^L [\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \varphi_x^2 + (\varphi_x - \psi)^2 + u_t^2 + v_t^2 + v_x^2 + (u_x - v)^2 + (\theta + \tau\theta_t)^2 + \theta_x^2] dx \tag{2.48}$$

## 2.2 Stabilité exponentielle

---

En utilisant la fonctionnelle d'énergie  $E(t)$  donnée par (2.18), l'estimation (2.48) fournit, pour une certaine constante  $\mu_3 > 0$ ,

$$L'(t) \leq -\mu_3 E(t). \quad (2.49)$$

En combinant (2.49) avec (2.46), on obtient

$$L'(t) \leq -\frac{\mu_3}{\mu_2} L(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.50)$$

Une simple intégration de (2.50) donne

$$L(t) \leq L(0) \exp\left(-\frac{\mu_3}{\mu_2} t\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.51)$$

En utilisant la fonctionnelle d'énergie (2.18), il est alors facile de voir que

$$E(t) \leq \sigma_1 \exp(-\sigma_2 t), \quad (2.52)$$

où  $\sigma_1 := \frac{\mu_2}{\mu_1} E(0)$  et  $\sigma_2 := \frac{\mu_3}{\mu_2}$ .

Cela conclut la démonstration de notre résultat de décroissance exponentielle.

# Modélisation numérique des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies

## 3.1 Position du problème

Nous considérons le système des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} + k(u - \varphi_x)_x + \int_0^\infty g_1(s) \varphi_{xx}(t-s) ds = 0 \\ \rho_2 (v - u)_{tt} - b(v - u)_{xx} - k(u - \varphi_x) + \int_0^\infty g_2(s) (v(t-s) - u(t-s))_{xx} ds = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} + 3k(u - \varphi_x) + 4\delta v + 4\gamma v_t = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = u(0, t) = u_x(1, t) = v(0, t) = v_x(1, t) = 0 \quad (3.2)$$

et les données initiales

$$\begin{cases} (\varphi(x, -t), u(x, -t), v(x, -t)) = (\varphi_0(x, t), u_0(x, t), v_0(x, t)), \\ (\varphi_t(x, 0), u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (\varphi_1(x), u_1(x), v_1(x)), \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.1 Position du problème

Nous introduisons la variable  $\psi = v - u$ , et comme dans [5], nous considérons les variables  $\eta$  et  $z$  et leur données initiales par

$$\begin{cases} \eta(x, t, s) = \varphi(x, t) - \varphi(x, t - s), & x \in (0, 1), s, t \in \mathbb{R}_+, \\ \eta_0(x, s) = \varphi_0(x, 0) - \varphi_0(x, s), & x \in (0, 1), s \in \mathbb{R}_+, \\ z(x, t, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t - s), & x \in (0, 1), s, t \in \mathbb{R}_+, \\ z_0(x, s) = v_0(x, 0) - u_0(x, 0) - [v_0(x, s) - u_0(x, s)], & x \in (0, 1), s \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Donc le système(3.1) devient

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi - v)_x + g_1^0 \varphi_{xx} - \int_0^\infty g_1(s) \eta_{xx}(t - s) ds = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - (b - g_2^0) \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi - v) - \int_0^\infty g_2(s) z_{xx} ds = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} - 3k(\varphi_x + \psi - v) + 4\delta v + 4\gamma v_t = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$g_i^0 = \int_0^\infty g_i(s) ds, \quad i = \overline{1, 2}$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi_x(1, t) = v(0, t) = v_x(1, t) = 0, \quad t \in \mathfrak{R}_+. \quad (3.5)$$

Les fonctionnels  $\eta$  et  $z$  satisfaisant

$$\begin{cases} \eta_t(x, t, s) + \eta_s(x, t, s) - \varphi_t(x, t) = 0, & x \in (0, 1), s, t > 0, \\ z_t(x, t, s) + z_s(x, t, s) - \psi_t(x, t) = 0, & x \in (0, 1), s, t > 0, \\ \eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s), z(x, 0, s) = z_0(x, s), & x \in (0, 1), s \in \mathfrak{R}_+, \\ \eta(x, t, 0) = z(x, t, 0) = z_x(1, t, s) = 0, & x \in (0, 1), s, t \in \mathfrak{R}_+. \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous considérons les hypothèses suivantes :

( $H_1$ ) On suppose que la fonction  $g_i : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ,  $i = \overline{1, 2}$  est dérivable, non croissante et intégrable sur  $\mathfrak{R}$  telle qu'il existe une constante positive  $k_0$  satisfaisant, pour tout

$$(\varphi, \psi, w) \in H_0^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)$$

$$\begin{aligned} k_0 (\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|w_x\|^2) &\leq 3k \|\varphi_x + \psi - v\|^2 + 3(b - g_2^0) \|\psi_x\|^2 \\ &\quad + b \|v_x\|^2 + 4\delta \|v\|^2 - 3g_1^0 \|\varphi_x\|^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

De plus, supposons qu'il existe deux constantes positives  $\beta_1$  et  $\beta_2$  telles que

$$-\beta_i g_i(s) \leq g_i'(s), \quad s \in \mathfrak{R}_+, \quad i = \overline{1, 2} \quad (3.8)$$

## 3.2 Existence et unicité

En utilisant la théorie des semi-groupes, nous donnons un résultats d'existence et d'unicité pour le système (3.4). Soit

$$\begin{cases} \varphi_t = \tilde{\varphi}, & \psi_t = \tilde{\psi}, & v_t = \tilde{v}, \\ U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, v, \tilde{v}, \eta, z), \\ U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, v_0 - u_0, v_1 - u_1, v_0, v_1, \eta_0, z_0). \end{cases} \quad (3.9)$$

Alors, le système peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.10)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  est défini par :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \\ \psi \\ \tilde{\psi} \\ v \\ \tilde{v} \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi - v) - \frac{g_1^0}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}(s) ds \\ \tilde{\psi} \\ \frac{1}{\rho_2} \left[ (b - g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi - v) \right] + \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g_2(s)z_{xx}(s) ds \\ \tilde{v} \\ \frac{1}{\rho_2} \left[ b v_{xx} + 3k(\varphi_x + \psi - v) - 4\delta v - 4\gamma \tilde{v} \right] \\ -\eta_s + \tilde{\varphi} \\ -z_s + \tilde{\psi} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Considérons l'espace standard  $L^2(0,1)$  muni de son produit scalaire classique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme induite  $\| \cdot \|$ . Nous considérons également les espaces de phase de Hilbert :

$$L_{g_i} = \left\{ v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \tilde{H}_i \mid \int_0^\infty g_i(s) \|v_x(s)\|^2 ds < \infty \right\}, \quad i = 1, 2,$$

équipés du produit scalaire

$$\langle w, \tilde{w} \rangle_{L_{g_i}} = \int_0^\infty g_i(s) \langle w_x(s), \tilde{w}_x(s) \rangle ds.$$

Nous posons :

$$\tilde{H}_1 = H_0^1(0,1), \quad \tilde{H}_2 = H_1^*(0,1), \quad H_1^*(0,1) = \{h \in H^1(0,1) : h(0) = 0\}.$$

### 3.2 Existence et unicité

---

L'espace d'énergie est alors donné par :

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times [H_1^*(0, 1) \times L^2(0, 1)]^2 \times L_{g_1} \times L_{g_2},$$

muni du produit scalaire suivant : pour tout

$$U_1 = (\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \tilde{\psi}_1, v_1, \tilde{v}_1, \eta_1, z_1), \quad U_2 = (\varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \psi_2, \tilde{\psi}_2, v_2, \tilde{v}_2, \eta_2, z_2) \in \mathcal{H},$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} &= 3k \langle \varphi_{1x} + \psi_1 - v_1, \varphi_{2x} + \psi_2 - v_2 \rangle + 3(b - g_2^0) \langle \psi_{1x}, \psi_{2x} \rangle - 3g_1^0 \langle \varphi_{1x}, \varphi_{2x} \rangle \\ &\quad + b \langle v_{1x}, v_{2x} \rangle + 4\delta \langle v_1, v_2 \rangle + 3\rho_1 \langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle + 3\rho_2 \langle \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \rangle + \rho_2 \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle \\ &\quad + 3 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{L_{g_1}} + 3 \langle z_1, z_2 \rangle_{L_{g_2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le domaine de  $\mathcal{A}$  est donné par :

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}U \in \mathcal{H}, \psi_x(1) = 0, v_x(1) = 0, \eta(x, 0) = 0, z(x, 0) = 0, z_x(1, s) = 0\}$$

où  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Maintenant, afin d'établir notre résultat d'existence et d'unicité, nous allons tout d'abord énoncer le théorème, puis présenter sa démonstration.

**Théorème 3.1.** *Supposons que  $(H_1)$  est vérifiée. Alors, pour tout  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , le système (3.10) admet une unique solution  $U$  vérifiant*

$$U \in C(\mathcal{R}_+; \mathcal{H})$$

*Si  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , Alors  $U$  satisfait*

$$U \in C^1(\mathcal{R}_+; D(\mathcal{A})) \cap C(\mathcal{R}_+; D(\mathcal{A}))$$

**Preuve.**

Pour obtenir le résultat ci-dessus, on va prouver que  $\mathcal{A}$  est un opérateur monotone maximal. C'est à dire  $\mathcal{A}$  est dissipatif et  $I - \mathcal{A}$  est surjectif.

◆ A dissipatif : En utilisant l'équation (3.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)_t (\varphi_x + \psi - v) dx + 3(b - g_2^0) \int_0^1 \psi_{tx} \psi_x dx - 3g_1^0 \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx \\
 &+ b \int_0^1 v_{tx} v_x dx + 4\delta \int_0^1 v_t v dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)_x \varphi_t dx - 3g_1^0 \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx \\
 &+ 3 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^\infty g_1(s) \eta_{xx} ds \right) dx + 3(b - g_2^0) \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v) \psi_t dx \\
 &+ 3 \int_0^1 \psi_t \left( \int_0^\infty g_2(s) z_{xx} ds \right) dx + b \int_0^1 v_{xx} v_t dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v) v_t dx \\
 &- 4\delta \int_0^1 v v_t dx - 4\gamma \int_0^1 v_t^2 dx + 3 \int_0^1 (-\eta_s + \varphi_t) \eta dx + 3 \int_0^1 (-z_s + \psi_t) z dx
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Grâce à la formule d'intégration par partie et les conditions au bord, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)_t (\varphi_x + \psi - v) dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)_t (\varphi_x + \psi - v) dx \\
 &- 3(b - g_2^0) \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + 3(b - g_2^0) \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + 3g_1^0 \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx \\
 &- 3g_1^0 \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx - b \int_0^1 v_{xx} v_t dx + b \int_0^1 v_{xx} v_t dx + 4\delta \int_0^1 v v_t dx - 4\delta \int_0^1 v v_t dx \\
 &- 4\gamma \int_0^1 v_t^2 dx - 3 \int_0^\infty g_1(s) \int_0^1 \eta_{tx} \eta_x dx ds + 3 \int_0^\infty g_1'(s) \|\eta_x\|^2 ds + 3 \int_0^\infty g_1(s) \int_0^1 \eta_{tx} \eta_x dx ds \\
 &+ 3 \int_0^\infty g_2(s) \int_0^1 z_{tx} z_x dx ds + 3 \int_0^\infty g_2'(s) \|z_x\|^2 ds - 3 \int_0^\infty g_2(s) \int_0^1 z_x z_{tx} dx ds
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Après simplification, nous obtenons

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -4\gamma \|v_t\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g_1'(s) \|\eta_x\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^\infty g_2'(s) \|z_x\|^2 ds \leq 0, \tag{3.15}$$

par conséquent, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est dissipatif.

◆ L'opérateur  $(I - \mathcal{A})$  est surjectif :

Soit

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_8)^T \in \mathcal{H}.$$

Nous prouvons qu'il existe  $U \in D(\mathcal{A})$  tel que

$$U - \mathcal{A}U = F. \tag{3.16}$$

### 3.2 Existence et unicité

Ceci s'écrit en termes de composants, comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi - \tilde{\varphi} = f_1 \in H_0^1(0, 1) \\ \tilde{\varphi} - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi - v)_x - \frac{g_1^0}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}ds = f_2 \in L^2(0, 1) \\ \psi - \tilde{\psi} = f_3 \in H_*^1(0, 1) \\ \tilde{\psi} - \frac{1}{\rho_2} [(b - g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi - v)] + \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds = f_4 \in L^2(0, 1) \\ v - \tilde{v} = f_5 \in H_*^1(0, 1) \\ \tilde{v} - \frac{1}{\rho_2} [bv_x + 3k(\varphi_x + \psi - v) - 4\delta v - 4\gamma\tilde{v}] = f_6 \in L^2(0, 1) \\ \eta + \eta_s - \tilde{\varphi} = f_7 \in L_{g_1} \\ z + z_s - \tilde{\psi} = f_8 \in L_{g_2}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Les première, troisième et cinquième équations de (3.17) sont équivalentes à :

$$\tilde{\varphi} = \varphi - f_1 \quad , \quad \tilde{\psi} = \psi - f_3 \quad \text{et} \quad \tilde{v} = v - f_5, \quad (3.18)$$

à partir de (3.18), nous voyons que les deux dernières équations de (3.17) se réduisent à

$$\eta_s + \eta = \varphi + f_7 - f_1 \quad \text{et} \quad z_s + z = \psi + f_8 - f_3, \quad (3.19)$$

en intégrant par rapport à  $s$  et notant que  $\eta$  et  $z$  doivent satisfaire  $\eta(0) = z(0) = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \eta(s) &= (1 - \exp(-s))(\varphi - f_1) + \int_0^s \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau \\ &\text{et} \\ z(s) &= (1 - \exp(-s))(\psi - f_3) + \int_0^s \exp(\tau - s) f_8(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.20)$$

en utilisant (3.18) et (3.20) nous trouvons que les deuxième, quatrième et sixième équations de (3.17), sont réduits à

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi - v)_x + \tilde{g}_1\varphi_{xx} = \rho_1(f_1 + f_2) \\ + \int_0^\infty g_1(s)((1 - \exp(-s))f_1 + \int_0^\infty \exp(\tau - s)f_7(\tau)d\tau)_{xx}ds \\ \rho_2\psi - (b - \tilde{g}_2)\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi - v) = \rho_2(f_3 + f_4) \\ + \int_0^\infty g_2(s)((1 - \exp(-s))f_3 + \int_0^\infty \exp(\tau - s)f_8(\tau)d\tau)_{xx}ds \\ (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta)v - bv_{xx} - 3k(\varphi_x + \psi - v) = (\rho_2 + 4\gamma)f_5 + \rho_2f_6 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

où

$$\tilde{g}_i = \int_0^\infty \exp(-s)g_i(s)ds \quad , \quad i = \overline{1, 2}$$

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi - v)_x + \tilde{g}_1\varphi_{xx} = h_1 \in H_0^1(0, 1) \quad (3.22)$$

$$\rho_2\psi - (b - \tilde{g}_2)\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi - v) = h_2 \in H_*^1(0, 1) \quad (3.23)$$

$$(\rho_2 + 4\gamma + 4\delta)v - bv_{xx} - 3k(\varphi_x + \psi - v) = h_3 \in H_*^1(0, 1), \quad (3.24)$$

nous posons

$$h_1 = \rho_1(f_1 + f_2) + \int_0^\infty g_1(s)((1 - \exp(-s))f_1 + \int_0^\infty \exp(\tau - s)f_7(\tau)d\tau)_{xx}ds$$

$$h_2 = \rho_2(f_3 + f_4) + \int_0^\infty g_2(s)((1 - \exp(-s))f_3 + \int_0^\infty \exp(\tau - s)f_8(\tau)d\tau)_{xx}ds$$

$$h_3 = (\rho_2 + 4\gamma)f_5 + \rho_2f_6,$$

nous définissons l'espace  $W = H_0^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)$

En multipliant les équations (3.22), (3.23) et (3.24) par des fonctions  $\varphi_1 \in H_0^1(0, 1)$ ,  $\psi_1 \in H_*^1(0, 1)$ ,  $v_1 \in H_*^1(0, 1)$  respectivement puis intégrant par parties sur  $[0, 1]$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 3\rho_1 \int_0^1 \varphi_1\varphi dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)_x\varphi_1 dx + 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_1 dx &= 3 \int_0^1 \varphi_1 h_1 dx \\ 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx - 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_{xx}\psi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)\psi_1 dx &= 3 \int_0^1 \psi_1 h_2 dx \\ (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 v v_1 dx - b \int_0^1 v_{xx} v_1 dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v) v_1 dx &= \int_0^1 h_3 v_1 dx \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} 3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)\varphi_{1x} dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x\varphi_{1x} dx &= 3 \int_0^1 h_1\varphi_1 dx \\ 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x\psi_{1x} dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)\psi_1 dx &= 3 \int_0^1 h_2\psi_1 dx \\ (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 vv_1 dx + b \int_0^1 v_x v_{1x} dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)v_1 dx &= \int_0^1 h_3 v_1 dx \end{aligned}$$

additionnons les trois équations nous obtenons

$$\begin{aligned} 3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)(\varphi_{1x} + \psi_1 - v_1) dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x\varphi_{1x} dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx \\ + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x\psi_{1x} dx + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 vv_1 dx + b \int_0^1 v_x v_{1x} dx &= \int_0^1 (3h_1\varphi_1 + 3h_2\psi_1 + h_3v_1) dx. \end{aligned}$$

### 3.2 Existence et unicité

---

Pour  $u = (\varphi, \psi, v)$  et  $u_1 = (\varphi_1, \psi_1, v_1)$ , nous définissons sur  $W$  une forme bilinéaire  $a(.,.)$  est une forme linéaire  $l(.)$  comme suit

$$\begin{aligned} a(u, u_1) &= 3\rho_1 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v) (\varphi_{1x} + \psi_1 - v_1) dx \\ &\quad - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi \psi_1 dx \\ &\quad + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 v v_1 dx \\ &\quad + b \int_0^1 v_x v_{1x} dx. \end{aligned}$$

$$l(u_1) = \int_0^1 (3h_1\varphi_1 + 3h_2\psi_1 + h_3v_1) dx.$$

Soit la formulation variationnelle suivante :

$$a(u, u_1) = l(u_1), \quad \forall u_1 \in W. \quad (3.26)$$

Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram à l'équation (3.26) afin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution  $u = (\varphi, \psi, v) \in W$ .

1- Continuité de  $a(u, u_1)$

$$\begin{aligned} |a(u, u_1)| &= \left| 3\rho_1 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v) (\varphi_{1x} + \psi_1 - v_1) dx \right. \\ &\quad \left. - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi \psi_1 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx \right. \\ &\quad \left. + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 v v_1 dx + b \int_0^1 v_x v_{1x} dx. \right| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons

$$\begin{aligned} |a(u, u_1)| &\leq 3\rho_1 \|\varphi\|_{L_2} \|\varphi_1\|_{L_2} + 3k \|\varphi_x + \psi - v\|_{L_2} \|\varphi_{1x} + \psi_1 - v_1\|_{L_2} \\ &\quad - 3\tilde{g}_1 \|\varphi_x\|_{L_2} \|\varphi_{1x}\|_{L_2} + 3\rho_2 \|\psi\|_{L_2} \|\psi_1\|_{L_2} \\ &\quad + 3(b - \tilde{g}_2) \|\psi_x\|_{L_2} \|\psi_{1x}\|_{L_2} + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \|v\|_{L_2} \|v_1\|_{L_2} \\ &\quad + b \|v_x\|_{L_2} \|v_{1x}\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Alors, nous prouvons facilement prouver que :

$$|a((\varphi, \psi, v), (\varphi_1, \psi_1, v_1))| \leq C_1 \|(\varphi, \psi, v)\|_W \|(\varphi_1, \psi_1, v_1)\|_W.$$

Donc  $a(u, u_1)$  est continue.

2- Coercivité de  $a(u, u_1)$

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= 3\rho_1 \int_0^1 \varphi^2 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - v)^2 dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ &\quad + 3\rho_2 \int_0^1 \psi^2 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 v^2 dx + b \int_0^1 v_x^2 dx. \end{aligned}$$

$$a((\varphi, \psi, v), (\varphi, \psi, v)) \geq C_2 \|(\varphi, \psi, v)\|_W^2.$$

Où

$$C_2 = \min \{3\rho_1, 3k, 3\tilde{g}_1, 3\rho_2, 3(b - \tilde{g}_2), (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta), b\}$$

Donc  $a(u, u)$  est coercive.

3 - Continuité de  $l(u_1)$

$$|l(u_1)| = |l(\varphi_1, \psi_1, v_1)| = \left| 3 \int_0^1 h_1 \varphi_1 dx + 3 \int_0^1 h_2 \psi_1 dx + \int_0^1 h_3 v_1 dx \right|$$

$$|l(\varphi_1, \psi_1, v_1)| \leq 3\|h_1\|_{L_2} \|\varphi_1\|_{L_2} + 3\|h_2\|_{L_2} \|\psi_1\|_{L_2} + \|h_3\|_{L_2} \|v_1\|_{L_2}$$

$$|l(\varphi_1, \psi_1, v_1)| \leq \max(3\|h_1\|_{L_2}, 3\|h_2\|_{L_2}, \|h_3\|_{L_2}) (\|\varphi_1\|_{L_2} + \|\psi_1\|_{L_2} + \|v_1\|_{L_2}),$$

donc existe  $C_3 > 0$ , tel que

$$C_3 = \max(3\|h_1\|_{L_2}, 3\|h_2\|_{L_2}, \|h_3\|_{L_2})$$

$$|l(\varphi_1, \psi_1, v_1)| \leq C_3 (\|\varphi_1\|_{H_0^1} + \|\psi_1\|_{H_*^1} + \|v_1\|_{H_*^1})$$

$$|l(\varphi_1, \psi_1, v_1)| \leq C_3 \|(\varphi_1, \psi_1, v_1)\|_W$$

$$|l(u_1)| \leq C_3 \|u_1\|_W$$

Donc  $l(u_1)$  est continue.

$a(\dots)$  est bilinéaire, continue et coercive sur  $W$ , et  $l(\dots)$  est linéaire et continue sur  $W$ . Alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique  $u = (\varphi, \psi, v) \in W$ .

Nous constatons que, si l'équation (3.21) admet une solution vérifiant la régularité requise dans  $D(A)$ , alors l'équation (3.18) implique que  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{v}$  existent et satisfont également la régularité requise dans  $D(A)$ .

Maintenant nous allons démontrer que  $\eta$  et  $z$  existent et satisfait  $\eta_s, \eta \in L_{g_1}$  et  $z_s, z \in L_{g_2}$ .

### 3.2 Existence et unicité

---

D'après (3.19), nous remarquons qu'il suffit de prouver que  $\eta \in L_{g_1}$  et  $z \in L_{g_2}$ .

Nous avons

$$s \longrightarrow (1 - \exp(-s))(\varphi - f_1) \in L_{g_1}$$

et

$$s \longrightarrow (1 - \exp(-s))(\psi - f_3) \in L_{g_2}$$

car  $\varphi, f_1 \in H_0^1(0,1)$  et  $\psi, f_3 \in H_*^1(0,1)$ .

D'autre part, En utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité de Holder, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\infty g_1(s) \left| \left( \int_0^s \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau \right)_x \right|^2 ds dx \\ & \leq \int_0^\infty \exp(-2s) g_1(s) \left( \int_0^s \exp(\tau) d\tau \right) \int_0^s \exp(\tau) \|f_{7x}(\tau)\|^2 d\tau ds \\ & \leq \int_0^\infty \exp(-s) (1 - \exp(-s)) g_1(s) \int_0^s \exp(\tau) \|f_{7x}(\tau)\|^2 d\tau ds \\ & \leq \int_0^\infty \exp(-s) g_1(s) \int_0^s \exp(\tau) \|f_{7x}(\tau)\|^2 d\tau ds \\ & \leq \int_0^\infty \exp(\tau) \|f_{7x}(\tau)\|^2 \int_\tau^\infty \exp(-s) g_1(s) ds d\tau \\ & \leq \int_0^\infty \exp(\tau) g_1(\tau) \|f_{7x}(\tau)\|^2 \int_\tau^\infty \exp(-s) ds d\tau \\ & \leq \int_0^\infty g_1(\tau) \|f_{7x}(\tau)\|^2 d\tau \\ & \leq \|f_7\|_{L_{g_1}^2} < \infty \end{aligned}$$

$$s \longrightarrow \int_0^s \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau \in L_{g_1}.$$

De même nous obtenons

$$s \longrightarrow \int_0^s \exp(\tau - s) f_8(\tau) d\tau \in L_{g_2}.$$

Donc

$$\eta \in L_{g_1} \quad \text{et} \quad z \in L_{g_2}$$

Finalement,  $\exists(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, v, \tilde{v}, \eta, z)^T \in D(A)$  qui vérifie  $AU = F$  pour tout  $F \in H$

Donc l'opérateur  $I - A$  est surjectif.

$I - A$  est surjectif et  $A$  est dissipatif. Alors d'après le théorème de Hille-Yosida ([3]) nous obtenons le résultat du théorème 3.1.

### 3.3 Analyse numérique

#### Méthode des différences finies

Soit  $J$  un entier non négatif, et soit

$$h = \frac{L}{J+1}$$

le pas de discrétisation associé à une subdivision régulière de l'intervalle  $(0, L)$ , donnée par

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_J < x_{J+1} = L,$$

avec  $x_j = jh$  pour tout  $j = 0, 1, \dots, J+1$ .

Pour tout  $i = 1, 2, \dots, J$  et  $t > 0$ , nous notons :

- $\varphi_j(t)$ ,
- $\psi_j(t)$ ,
- $v_j(t)$ ,

les valeurs approchées respectives de  $\varphi(jh, t)$ ,  $\psi(jh, t)$ , et  $v(jh, t)$ , évaluées aux nœuds internes du maillage.

De plus, nous introduisons l'opérateur différentiel discret :

$$\delta_h^2 u_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2},$$

qui représente une approximation de la dérivée seconde spatiale de  $u$  au point  $x_j$ .

L'opérateur de différence finie est défini par :

$$\Delta_h v_j = \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2}, \quad \delta_h^- v_j = \frac{v_j - v_{j-1}}{h} \quad (3.27)$$

Le  $\theta$ -schéma est donné par :

$$\Phi_\theta v_j = \theta v_{j+1} + (1 - 2\theta)v_j + \theta v_{j-1}, \quad \text{avec } \theta = \frac{1}{4} \quad (3.28)$$

Nous supposons le schéma en différences finies suivant appliqué au système :

$$\begin{cases} 3 \left( \rho_1 \ddot{\varphi}_j - k (\Delta_h \varphi_j + \delta_h^- \psi_j - \delta_h^- v_j) + \int_0^\infty g_1(s) \Delta_h \varphi_j(t-s) ds \right) = 0, & j = 1, \bar{J} \\ 3 \left( \rho_2 \ddot{\psi}_j - (b - g_2^0) \Delta_h \psi_j + k \left( \delta_h^- \varphi_j + \Phi_{\frac{1}{4}} \psi_j - \Phi_{\frac{1}{4}} v_j \right) + \int_0^\infty g_2(s) \Delta_h \psi_j(t-s) ds \right) = 0, & j = 1, \bar{J} \\ \rho_2 \ddot{v}_j - b \Delta_h v_j - 3k \left( \delta_h^- \varphi_j + \Phi_{\frac{1}{4}} \psi_j - \Phi_{\frac{1}{4}} v_j \right) + 4\Phi_{\frac{1}{4}}(\delta v_j) + 4\gamma \dot{v}_j = 0 & j = 1, \bar{J} \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3.3 Analyse numérique

Avec les conditions aux bords suivantes :

$$\varphi_0 = \varphi_J = \psi_0 = v_0, \quad \psi_J = \psi_{J+1}, \quad v_J = v_{J+1}.$$

L'équation du système (3.29) pour la variable  $\varphi_j$  s'écrit, pour  $j = 1, \dots, J$  :

$$\begin{aligned} 3\rho_1\ddot{\varphi}_j - 3k \left( \frac{1}{h^2}(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) + \frac{1}{h}(\psi_j - \psi_{j+1} - V_j - V_{j+1}) \right) \\ + 3 \int_0^\infty g_1(s) \cdot \frac{1}{h^2}(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})(t-s) ds = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $j = 1$  :

$$\begin{aligned} 3\rho_1\ddot{\varphi}_1 - 3k \left( \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0) + \frac{1}{h}(\psi_1 - \psi_2 - V_1 - V_2) \right) \\ + 3 \int_0^\infty g_1(s) \cdot \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0)(t-s) ds = 0, \end{aligned}$$

Pour  $j = 2$  :

$$\begin{aligned} 3\rho_1\ddot{\varphi}_2 - 3k \left( \frac{1}{h^2}(\varphi_3 - 2\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{h}(\psi_2 - \psi_3 - V_2 - V_3) \right) \\ + 3 \int_0^\infty g_1(s) \cdot \frac{1}{h^2}(\varphi_3 - 2\varphi_2 + \varphi_1)(t-s) ds = 0, \end{aligned}$$

⋮

pour  $j = J$  :

$$\begin{aligned} 3\rho_1\ddot{\varphi}_J - 3k \left( \frac{1}{h^2}(\varphi_{J+1} - 2\varphi_J + \varphi_{J-1}) + \frac{1}{h}(\psi_J - \psi_{J+1} - V_J - V_{J+1}) \right) \\ + 3 \int_0^\infty g_1(s) \cdot \frac{1}{h^2}(\varphi_{J+1} - 2\varphi_J + \varphi_{J-1})(t-s) ds = 0 \end{aligned}$$

Le système (3.29) peut être réécrit sous la forme :

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_h \\ \ddot{\psi}_h \\ \ddot{V}_h \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_h \\ \dot{\psi}_h \\ \dot{V}_h \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \varphi_h \\ \psi_h \\ V_h \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \varphi_h \\ \psi_h \\ V_h \end{bmatrix} = 0, \quad (3.30)$$

avec :

$$\varphi_h = (\varphi_1, \dots, \varphi_J), \quad \psi_h = (\psi_1, \dots, \psi_J), \quad V_h = (V_1, \dots, V_J) \in \mathbb{R}^J$$

Les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité  $M, C, K \in \mathcal{M}_{3J}(\mathbb{R})$  sont données par :

$$M = \begin{bmatrix} 3\rho_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 3\rho_2 I & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 I \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\gamma I \end{bmatrix}$$

### Chapitre 3. Modélisation numérique des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies

où  $I \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R})$  désigne la matrice identité de taille  $J \times J$ , et où 0 représente la matrice nulle de  $\mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ .

On a également :

$$I = (e_1, e_2, \dots, e_J)$$

avec  $e_j$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^J$ .

La matrice de rigidité  $K \in \mathcal{M}_{3J}(\mathbb{R})$  s'écrit :

$$K = \begin{bmatrix} -3KD_0^2 & -3KD^- & 3KD^- \\ -3KD^- & -3bD^+D^- + 3K\Phi & -3K\Phi \\ 3KD^- & 3K\Phi & -bD^+D^- + (3K + 4\delta)\Phi \end{bmatrix}$$

où les opérateurs discrets sont définis comme suit :

-Le laplacien discret centré :

$$D_0^2 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- La dérivée arrière :

$$D^- = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La dérivée avant, définie par :

$$D^+ = -(D^-)^T$$

Notons que :

$$D_0^2 = D^+D^- - \frac{1}{h^2}J^{JJ} = D^-D^+ - \frac{1}{h^2}J^{11} \quad (3.31)$$

où  $J^{JJ}$  et  $J^{11}$  sont les matrices de projection sur les vecteurs  $e_J$  et  $e_1$  respectivement.

### 3.3 Analyse numérique

---

De plus, on définit la matrice :

$$Q = 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} = P^+ P^-,$$

avec :

$$P^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 1 & 0 & \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^+ = (P^-)^T.$$

Les termes de mémoire sont donnés par :

$$G \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_h \\ \psi_h \\ v_h \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(\varphi_h) \\ G_2(\psi_h) \\ 0 \end{bmatrix},$$

où :

$$G_1(\varphi_h) = \int_0^\infty g_1(s) D_0^2 \varphi_h(t-s) ds, \quad G_2(\psi_h) = \int_0^\infty g_2(s) D^+ D^- \psi_h(t-s) ds.$$

### Algorithm de Newmark

L'algorithme de Newmark [16] est basé sur un ensemble de deux relations exprimant le déplacement vers l'avant

$$[\varphi_h^{n+1}, \psi_h^{n+1}, v_h^{n+1}]$$

et la vitesse

$$[\dot{\varphi}_h^{n+1}, \dot{\psi}_h^{n+1}, \dot{v}_h^{n+1}].$$

La méthode consiste à mettre à jour les vecteurs déplacement, vitesse et accélération de l'instant courant  $t^n = n \delta t$  à l'instant  $t^{n+1} = (n+1) \delta t$  selon les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_h^{n+1} = \dot{\varphi}_h^n + (1 - \varsigma) \delta t \ddot{\varphi}_h^n + \varsigma \delta t \ddot{\varphi}_h^{n+1}, \\ \varphi_h^{n+1} = \varphi_h^n + \delta t \dot{\varphi}_h^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\varphi}_h^n + \beta \delta t^2 \ddot{\varphi}_h^{n+1}, \\ \dot{\psi}_h^{n+1} = \dot{\psi}_h^n + (1 - \varsigma) \delta t \ddot{\psi}_h^n + \varsigma \delta t \ddot{\psi}_h^{n+1}, \\ \psi_h^{n+1} = \psi_h^n + \delta t \dot{\psi}_h^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\psi}_h^n + \beta \delta t^2 \ddot{\psi}_h^{n+1}, \\ \dot{v}_h^{n+1} = \dot{v}_h^n + (1 - \varsigma) \delta t \ddot{v}_h^n + \varsigma \delta t \ddot{v}_h^{n+1}, \\ v_h^{n+1} = v_h^n + \delta t \dot{v}_h^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{v}_h^n + \beta \delta t^2 \ddot{v}_h^{n+1}. \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $\beta$  et  $\varsigma$  sont des paramètres de la méthode de Newmark.

### Approximation des termes de mémoire

Les termes mémoire  $G_1(\varphi_h)$  et  $G_2(\psi_h)$  sont approchés par :

$$\tilde{G}_1(\varphi_h^n) = \sum_{j=0}^N \delta t g_1^j D_0^2 \varphi_h^{n-j} \quad (3.33)$$

$$\tilde{G}_2(\psi_h^n) = \sum_{j=0}^N \delta t g_2^j D^+ D^- \psi_h^{n-j} \quad (3.34)$$

$$G = \begin{bmatrix} \delta t g_1^j D_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta t g_2^j D^+ D^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, N.$$

### Équations discrètes du mouvement

En remplaçant les équations du système (3.32) dans le système (3.30) nous obtenons :

$$\begin{aligned} (M + \varsigma \delta t C + \beta \delta t^2 (K + G_0)) \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_h^{n+1} \\ \ddot{\psi}_h^{n+1} \\ \ddot{V}_h^{n+1} \end{bmatrix} &= -C \left( \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_h^n \\ \dot{\psi}_h^n \\ \dot{V}_h^n \end{bmatrix} + (1 - \varsigma) \delta t \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_h^n \\ \ddot{\psi}_h^n \\ \ddot{V}_h^n \end{bmatrix} \right) \\ &- (K + G_0) \left( \begin{bmatrix} \varphi_h^n \\ \psi_h^n \\ V_h^n \end{bmatrix} + \delta t \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_h^n \\ \dot{\psi}_h^n \\ \dot{V}_h^n \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_h^n \\ \ddot{\psi}_h^n \\ \ddot{V}_h^n \end{bmatrix} \right) - \sum_{j=1}^N G_j \begin{bmatrix} \varphi_h^{n+1-j} \\ \psi_h^{n+1-j} \\ V_h^{n+1-j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.3 Analyse numérique

---

telle que :

$$\dot{\varphi}_h^{n+1} = \dot{\varphi}_h^n + (1 - \varsigma)\delta t \ddot{\varphi}_h^n + \varsigma \delta t \ddot{\varphi}_h^{n+1} \varphi_h^{n+1} = \varphi_h^n + \delta t \dot{\varphi}_h^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\varphi}_h^n + \beta \varsigma \delta t^2 \ddot{\varphi}_h^{n+1} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_h^{n+1} - \varsigma \delta t \ddot{\varphi}_h^{n+1} &= \dot{\varphi}_h^n + (1 - \varsigma) \delta t \ddot{\varphi}_h^n \\ \varphi_h^{n+1} - \beta \varsigma \delta t^2 \ddot{\varphi}_h^{n+1} &= \varphi_h^n + \delta t \dot{\varphi}_h^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\varphi}_h^n \end{aligned} \quad (3.37)$$

et :

$$M = [\varphi_h'' \psi_h'' \quad V_h'']^t + C[\varphi_h' \psi_h' \quad V_h']^t + K[\varphi_h \psi_h \quad V_h]^t + G([\varphi_h \psi_h \quad V_h]^t) = 0 \quad (3.38)$$

Nous introduisons les variables :

$$\begin{aligned} \eta^{n,j} &= \varphi^n - \varphi^{n-j}, \\ Z^{n,j} &= \psi^n - \psi^{n-j}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

qui vérifient :

$$\eta^{n,j} - \eta^{n,j-1} = \varphi^{n+1-j} - \varphi^{n-j} \quad (3.40)$$

$$Z^{n,j} - Z^{n,j-1} = \psi^{n+1-j} - \psi^{n-j} \quad (3.41)$$

ainsi , à partir de (3.36), nous obtenons

$$\delta t \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}} = \eta^{n,j} - \eta^{n,j-1} + \delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2}\varsigma\right) (\ddot{\varphi}^{n+1} - \ddot{\varphi}^n), \quad (3.42)$$

$$\delta t \dot{\psi}^{n+\frac{1}{2}} = Z^{n,j} - Z^{n,j-1} + \delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2}\varsigma\right) (\ddot{\psi}^{n+1} - \ddot{\psi}^n),$$

et

$$\begin{aligned} \psi^{n+1} &= \psi^n + \delta t \dot{\psi}^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\psi} + \beta \delta t^2 \ddot{\psi}^{n+1} \\ \psi^{n+1-j} - \psi^{n-j} &= \delta t \dot{\psi}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\psi}^n + \beta \delta t^2 \ddot{\psi}^{n+1} \\ Z^{n,j} - Z^{n,j-1} &= \delta t \dot{\psi}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta t^2 \ddot{\psi}^n + \beta \delta t^2 \ddot{\psi}^{n+1} \\ \delta t \dot{\psi}^{n+\frac{1}{2}} &= Z^{n+1,j} - Z^{n,j-1} + \delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2}\varsigma\right) (\varphi^{n+1} - \varphi^n) \end{aligned} \quad (3.43)$$

ou

$$V^{n+\frac{1}{2}} = \frac{V^n + V^{n+1}}{2} \quad (3.44)$$

pour tout  $V^n$  , avec  $n \in Z$ . Nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 3.1.** Soit  $\beta = \frac{1}{2\zeta}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \chi_j D_0^2 \varphi^{n+1-j} \cdot \dot{\varphi}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\delta t} \left[ - \left( \sum_{j=1}^N \chi_j \right) (\|D^+ \varphi\|^2 + (\varphi_{1,h})^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \chi_j (\|D^+ \dot{\eta}_{\cdot,j}\|^2 + (\dot{\eta}_{\cdot,j,1})^2) \right]_n^{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N (\chi_{j+1} - \chi_j) (\|D^+ \eta_{n,j}\|^2 + (\eta_{n,j,1})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2\delta t} \chi_{N+1} (\|D^+ \eta_{n,N}\|^2 + (\eta_{n,N,1})^2) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \chi_j D^+ D^- \psi^{n+1-j} \cdot \dot{\psi}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\delta t} \left[ - \left( \sum_{j=1}^N \chi_j \right) \|D^- \psi\|^2 + \sum_{j=1}^N \chi_j \|D^- \dot{z}_{\cdot,j}\|^2 \right]_n^{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N (\chi_{j+1} - \chi_j) \|D^- z_{n,j}\|^2 + \frac{1}{2\delta t} \chi_{N+1} \|D^- z_{n,N}\|^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pour tout  $(X_j)_{j \in N}$

### Preuve 3.1

Soit :

$$I(\psi^n) = \sum_{j=1}^N X^j D^+ D^- \psi^{n-j} \cdot \psi^{n+\frac{1}{2}} I(\psi^{n+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=1}^N X^j D^+ D^- \psi^{n+\frac{1}{2}-j} \cdot \psi^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

alors, en utilisant (3.39), (3.40) et (3.42), avec  $\beta = \frac{1}{2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I(\psi^{n+\frac{1}{2}}) &= - \sum_{j=1}^N X^j D^-(\psi^{n+\frac{1}{2}} - Z^{j,n+\frac{1}{2}}) D^-\left(\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\delta t}\right) \\ &= - \frac{1}{2\delta t} \left( \sum_{j=1}^N X^j \right) (\|D^- \psi^{n+1}\|^2 - \|D^- \psi^n\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{\delta t} \sum_{j=1}^N X^j \langle D^- Z^{n+\frac{1}{2}}, D^-(Z^{n+1,j} - Z^{n,j}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N X^j \langle D^- Z^{j,n+\frac{1}{2}}, Z^{n,j} - Z^{n,j-1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.3 Analyse numérique

Tel que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N X^j \langle D^- Z^{j,n+\frac{1}{2}}, Z^{n,j} - Z^{n,j-1} \rangle &= \frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N X^j \langle D^-(Z^{n,j} + Z^{n,j-1}), D^-(Z^{n,j} - Z^{n,j-1}) \rangle \\
&+ \frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N X^j \langle D^-(Z^{n,j} + Z^{n,j-1}), D^-(Z^{n,j} - Z^{n,j-1}) \rangle \\
&= -\frac{1}{2\delta t} \sum_{j=1}^N (X^{j+1} - X^j) \|D^- Z^{n,j}\|^2 + \frac{1}{2\delta t} X^{N+1} \|D^- Z^{n,N}\|^2 \\
&+ I(\psi^n) - I(\psi^{n+\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ainsi, en observant que le cote gauche de (3.46) est donné par  $I(\psi^{n+1}) = 2I(\psi^{n+\frac{1}{2}}) - I(\psi^n)$ , et en remplaçant cette dernière expression dans (3.48), nous obtenons (3.46). En répétant les mêmes calculs pour le couple  $(\varphi, \zeta)$ , et en considérant (3.31), nous obtenons (3.48).

Les accélérations  $[\varphi_h^{n+1}, \psi_h^{n+1}, V_h^{n+1}]^T$  sont calculée à partir de (3.35) et les vitesses  $[\varphi_h^{\prime n+1}, \psi_h^{\prime n+1}, V_h^{\prime n+1}]^T$  sont obtenues respectivement à partir des deuxième et quatrième équations du système (3.32).

Enfin, le déplacement  $[\varphi_h^{n+1}, \psi_h^{n+1}, V_h^{n+1}]^T$  est calculer à partir des troisième et cinquième équations du système (3.32), par de simples opérations matricielles.

Ainsi, l'énergie entièrement discrète du système (3.32) et (3.35) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_h^n &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_h^{n+1} \\ \dot{\psi}_h^{n+1} \\ \dot{V}_h^{n+1} \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} \varphi_h^n \\ \psi_h^n \\ V_h^n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_h^n \\ \psi_h^n \\ V_h^n \end{bmatrix}^T K \begin{bmatrix} \varphi_h^n \\ \psi_h^n \\ V_h^n \end{bmatrix} + G([\varphi_h^n, \psi_h^n, V_h^n], [\varphi_h^n, \psi_h^n, V_h^n]) \\
&= \frac{3}{2} \rho_1 \|\dot{\varphi}_h^n\|^2 + \frac{3}{2} \rho_2 \|\dot{\psi}_h^n\|^2 + \frac{3}{2} b \|D^- \dot{\varphi}_h^n\|^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \|\dot{V}_h^n\|^2 + \frac{3}{2} b \|D^- V_h^n\|^2 \\
&+ \frac{3}{2} K \|P^- V_h^n - P^- \psi_h^n - D^+ \varphi_h^n\|^2 + \frac{3k}{2h^2} (\varphi_1)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} g_1^0 - \sum_{j=1}^N g_1^{j-\frac{1}{2}} \right) (\|D^+ \varphi_h^n\|^2 + (\frac{\varphi_{h,1}^n}{h^2})^2) + \sum_{j=1}^N g_1^{j-\frac{1}{2}} (\|D^+ \eta_{h,1}^{n,j}\|^2 + (\frac{\eta_{h,1}^{n,j}}{h^2})^2) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} g_2^0 - \sum_{j=1}^N g_2^{j-\frac{1}{2}} \right) \|D^- \psi_h^n\|^2 + \sum_{j=1}^N g_2^{j+\frac{1}{2}} \|D^- Z_h^{n,j}\|^2 \right].
\end{aligned}$$

où  $g(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire dérivée du terme de mémoire et décrite dans la ligne suivante,

$$\text{et } g_{1,2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (g_{1,2}^{j-\frac{1}{2}} + g_{1,2}^j)$$

### Chapitre 3. Modélisation numérique des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies

---

Il s'agit d'une approximation de l'énergie pour le cas continu . L'incrément de cette énergie peut être exprimé en termes de valeurs moyennes et d'incrément du déplacement et de la vitesse.

Ensuite , nous choisissons  $\varsigma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{\varsigma}{2}$  réduisant l'expression ci-dessus à :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\delta}^{n+1} - \varepsilon_{\delta}^n &= -4 \delta t \gamma \|v_h'^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (g_1^{j+1} - g_1^{j-1}) \left( \|D^+ \eta^{n,j}\|^2 + \left(\frac{\eta_1^{n,j}}{h^2}\right)^2 \right) \\
 &- \frac{1}{4} g_1^0 \left( \|D^+ \eta^{n+1,1}\|^2 + \left(\frac{\eta_1^{n+1,1}}{h^2}\right)^2 \right) \\
 &- \frac{1}{2} g_1^{N+\frac{1}{2}} \left( \|D^+ \eta^{n,N}\|^2 + \left(\frac{\eta_1^{n,N}}{h^2}\right)^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (g_2^{j+1} - g_2^{j-1}) \|D^- Z^{n,j}\|^2 \\
 &- \frac{1}{4} g_2^0 \|D^- Z^{n+1,1}\|^2 - \frac{1}{2} g_2^{N+\frac{1}{2}} \|D^- Z^{n,N}\|^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Avec cela, l'énergie entièrement discrète obtenue par la méthode B-Newmark diminue et nous montrons que son comportement asymptotique est le reffet du cas continu [9].

# Bibliographie

- [1] Tijani A. Apalara and Hassan A. Almutairi *well-posedness and stability of doublewall carbon nanotubes Timoshenko system under Lord-Shulman thermoelasticity* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2025.
- [2] C. F. Beards and I. M. A. Iman, *The damping of plate vibration by interfacial slip between layers*, Int. J. Math. Tools Des. Res., 18 (1978), 131–137.
- [3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.
- [4] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, F. A. F. Nascimento, I. Lasiecka and J. H. Rodrigues, *Uniform decay rates for the energy of Timoshenko system with arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping*, Z. Angew. Math. Phys., 65 (2014), 1189–1206.
- [5] C. M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal., 37 (1970), 297–308.
- [6] A. Guesmia, *On the well-posedness and stability for carbon nanotubes as coupled two Timoshenko beams with frictional dampings*, Journal of Applied Analysis and Computation, 14 (2024), 2572-2621
- [7] A. Guesmia, S. Messaoudi and A. Soufyane, *On the stabilization for a linear Timoshenko system with infinite history and applications to the coupled Timoshenko-heat systems*, Electron. J. Differential Equations, 2012 (2012), 1–45.
- [8] A. Guesmia, *Well-posedness and stability results for laminated Timoshenko beams with interfacial slip and infinite memory*, IMA J. Math. Control Inform., doi:10.1093/imamci/dnz002.

- 
- [9] S. Krenk, Energy conservation in Newmark based time integration algorithms, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 (2006), 6110-6124.
- [10] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, New York, 1999.
- [11] A. Lo and N.-E. Tatar, *Stabilization of laminated beams with interfacial slip*, *Electron. J. Differential Equations*, 2015 (2015), 1–14.
- [12] A. Lo, N.-E. Tatar, J. Muñoz Rivera and M. S. Alves, *Exponential stabilization of a structure with interfacial slip*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 36 (2016), 6285–6306.
- [13] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2016, pp. 85–91.
- [14] C. A. Raposo, *Exponential stability for a structure with interfacial slip and frictional damping*, *Appl. Math. Lett.*, 53 (2016), 85–91.
- [15] C. A. Raposo, O. V. Villagrán, J. E. Muñoz Rivera and M. S. Alves, *Hybrid laminated Timoshenko beam*, *J. Math. Phys.*, 85 (2017), Article ID 11.
- [16] N. M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE*, 85 (1959), 67-94.
- [17] N.-E. Tatar, *Stabilization of a laminated beam with interfacial slip by boundary controls*, *Boundary Value Problems*, 2015 (2015), Article ID 11.
- [18] J. M. Wang, G. Q. Xu and S. P. Yung, *Exponential stabilization of laminated beams with structural damping and boundary feedback controls*, *SIAM J. Control Optim.*, 44 (2005), 1575–1597.
- [19] R. Ferdjani and F. Abdel, *Sur la stabilité exponentielle des  $C_0$ -semi-groupes. Application à un système de type Timoshenko*, Mémoire de fin d'études, 2014–2015.
- [20] J. Yameogo, *Résumé des séances du 24 et du 31 mars 2010*, Note interne.
- [21] J. Yoon, C. Q. Ru and A. Mioduchowski, *Timoshenko-beam effects on transverse wave propagation in carbon nanotubes*, *Compos. Part B : Eng.*, 35 (2004), 87–93.