

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية
العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES

Option : ANEDP

Par :

1. Bourenane Ishak

Encadré par : SACI Fateh

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : NASRI Nassima
Examineur: GHENNAM Karima

MCB U. SKIKDA
MCB U. SKIKDA

Année : 2023/2024

Dédicace

Je dédie ce modeste travail A mes très chers parents, mon père et ma mère qui est décédée à la miséricorde de Dieu, A mon frère, mes sœurs et leurs enfants, A tous mes amis, A vous chers lecteurs et j'espère que ma façon de présentation vous facilitera la compréhension de ce sujet.

Remerciements

*Je remercie Dieu le tout puissant qui m'a guidé dans l'accomplissement de ce travail. Ce travail a été réalisé sous l'encadrement du docteur **Saci Fateh** à l'université de **20 août 1955-Skikda**, a qui je voudrais exprimer mon profonde gratitude pour sa disponibilité, son aide et ses conseils pour réaliser ce travail, ainsi qu'à mes membres de jury. Je remercie vivement mon famille surtout mes sœurs.*

Résumé

Dans ce mémoire, on présente quelques types d'équations intégrales avec les méthodes de résolution analytiques et numériques. De plus, on introduit une étude mathématique de certains équations intégral-différentielles à un ordre fractionnaire.

Mots clés

Équations intégrales de Volterra et de Fredholm, Singularité, Équations intégral-différentielles, Équations intégral-différentielles d'ordre fractionnaire, Polynômes orthogonaux, Polynômes de Bernstein.

Abstract

In this work, we present some types of integral equations with analytical and numerical resolution methods. In addition, a mathematical study of certain integro-differential equations in fractional order are introduced.

Key words

Volterra and Fredholm Integral equations, singularity, Integro-differential equation, Fractional integro-differential equations, orthogonal polynomials, Bernstein polynomials.

Table des matières

1	NOTIONS DE BASE	7
1.1	Notions fonctionnelles	7
1.2	Notions sur les opérateurs	9
1.3	Notions de calcul fractionnaire	10
2	LES ÉQUATIONS INTÉGRALES	13
2.1	Définition d'une équation intégrale	13
2.2	Homogénéité et linéarité	13
2.3	Classification des équations intégrales	14
2.3.1	Équation intégrale de Fredholm	14
2.3.2	Équation intégrale de Volterra	14
2.3.3	Équation intégrale de Volterra-Fredholm	15
2.3.4	Équation intégrale singulière	16
2.4	Les équations intégro-différentielles	16
2.5	Le lien entre les équations intégrales et les problèmes aux limites	17
2.5.1	Transformation d'un PVI à une équation intégrale de Volterra	17
2.5.2	Transformation d'une équation intégrale de Volterra à un PVI	18
2.5.3	Transformation d'un PL à une équation intégrale de Fredholm	19
2.5.4	Transformation d'une équation intégrale de Fredholm à un PL	21
3	SOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE	24
3.1	L'existence et l'unicité d'une solution d'une équation intégrale	24
3.1.1	Théorèmes de point fixe	24
3.1.2	Théorèmes d'existence élémentaires	24
3.1.3	Noyaux avec singularités faibles	25
3.1.4	L'existence de la solution de l'équation intégrale non linéaire	25
3.2	Méthodes de résolution analytiques d'une équation intégrale	26
3.2.1	La méthode de décomposition Adomain (MDA)	26
3.2.2	La méthode de décomposition Adomain modifiée	28
3.2.3	La méthode des approximations successives	28
3.3	Méthodes de résolution numériques d'une équation intégrale	31
3.3.1	Méthodes de projection	31
3.3.2	La méthode mixte	35
3.3.3	Une méthode numérique en utilisant les polynômes de Bernstein	37
4	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE FRACTIONNAIRE	39
4.1	Introduction	39
4.2	La méthode générale	39
4.3	Un exemple numérique	43

Table des figures

1.1	Les polynômes de Bernstein pour les degrés 1, 2, 3 et 4 de gauche à droite dans le carré unité . . .	9
3.1	Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (3.26)	28
3.2	Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (3.77)	34
3.3	Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (3.106)	38
4.1	Les polynômes de Bernstein pour le degré $n = 6$ dans l'intervalle $[0, 1]$	44
4.2	Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (4.24)	44

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les équations intégrales sont apparues dans l'histoire de mathématiques dans la thèse de N.H.Abel (1802 – 1879) qui a publié en 1829. Après Abel, I.Liouville (1809 – 1882) a introduit indépendamment une équation intégrale dans ses problèmes issus de la physique.

En 1837, Liouville a publié une discussion sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles, cette discussion a montrée qu'une solution particulière de certaines équations différentielles linéaires peut être obtenue en résolvant équation intégrale.

La véritable révolution dans ce domaine a commencée avec les deux mathématiciens V.Volterra (1860 – 1940) et I.Fredholm (1866 – 1927), Fredholm a créé une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet et aussi il a développé une méthode pour résoudre les équations intégrale de deuxième espèce, par contre Volterra a introduit la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés et aussi il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégro-différentielles.

En effet, le domaine des équations intégrales est l'un des sujets mathématiques les plus utiles dans les branches de mathématiques appliquées, et ses applications peuvent être utilisées dans de nombreux problèmes physiques. De plus, de nombreux problèmes de valeurs élémentaires et limites associées aux EDOs et EDPs peuvent être transformer en problèmes pour résoudre des équations intégrales approximatives. Alors, cette importance nous conduit à étudier certains de ces équations.

Ce travail scientifique est constitué de quatre chapitres, le premier contient quelques notions fondamentales nécessaires dans l'étude des équations intégrales telles que les espaces fonctionnelles, les opérateurs et le calcul fractionnaire. Ensuite, le deuxième chapitre introduit la définition des équations intégrales et les équations intégro-différentielles et leurs classification avant de citer le lien entre les équations intégrales et les problèmes aux limites.

Le troisième chapitre contient une partie des théorèmes et résultats d'existence et unicité d'une solution d'une équation intégrale, ainsi qu'une autre partie qui englobe les méthodes de résolution analytiques et numériques.

Finalement, dans le dernier chapitre, on discute d'une méthode numérique pour résoudre les équations intégro-différentielles d'ordres fractionnaires de type Volterra étape par étape en utilisant les polynômes de Bernstein.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE

1.1 Notions fonctionnelles

Définition 1.1.1 (Produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , un produit scalaire E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ possédant les propriétés suivantes :

Pour tout x, y, z dans E et α, β dans \mathbb{R} :

- i. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
- ii. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- iii. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
- iv. $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace pré-hilbertien.

Remarque 1.1.1 Un produit scalaire de E définit une norme sur E par la formule suivante :

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (1.1)$$

Définition 1.1.2 (Espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, on appelle norme sur un espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant pour tout x, y dans E et α dans \mathbb{K}

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité).
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.1.3 (Espace métrique complet) On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Définition 1.1.4 (Espace de Banach) tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 1.1.5 (Espace de Hilbert) tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.6 (Espace C^k) L'espace $C^k[a, b]$ est l'espace des fonctions définies sur $[a, b]$ dont les dérivées d'ordre 0 jusqu'à k existent et sont continues.

La norme d'un élément $f(x) \in C^k[a, b]$ est :

$$\|f\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a, b]} |f^{(i)}(t)|, \quad f^{(0)} = f \quad (1.2)$$

Définition 1.1.7 (Espace $L^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on désigne par $L^1(\Omega)$ des fonctions intégrable sur Ω à valeur dans \mathbb{R} , on pose :

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx \quad (1.3)$$

Définition 1.1.8 (Espace $L^p(\Omega)$) Soit $1 < p < +\infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}, \quad (1.4)$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.5)$$

Si $p = +\infty$, on obtient l'espace L^∞ tel que :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longleftarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable, } \exists c > 0, |f(x)| \leq c, \text{ p.p sur } \Omega\}, \quad (1.6)$$

la norme est notée par :

$$\|f\|_\infty = \inf \{c > 0, f(x) \leq c, \text{ p.p sur } \Omega\} \quad (1.7)$$

Remarque 1.1.2 Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \text{ p.p sur } \Omega \quad (1.8)$$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder) Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors :

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (1.9)$$

le cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$ nous donne :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.10)$$

cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwartz.

Définition 1.1.9 (Fonction analytique) Une fonction $f(z)$ est définie sur un domaine $D \in \mathbb{C}$, on dit que f est analytique sur D si elle admet des dérivées en tout point de D .

Corollaire 1.1.1 (Réduire une intégrale multiple à une intégrale simple) La formule générale qui réduit une intégrale multiple à une intégrale simple est :

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt \quad (1.11)$$

Comme une résultat on à :

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x (x-t)u(t) dt dt \dots dt}_{n+1 \text{ intégrales}} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n u(t) dt \quad (1.12)$$

(Pour la démonstration voir ([12], [4]))

Corollaire 1.1.2 (Règle de Leibniz pour la dérivation des intégrales) [12] Soient $f(x, t)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont des fonctions continues sur un domaine du plan contenant le rectangle $a \leq x \leq b$, $t_0 \leq t \leq t_1$, et soit

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt \quad (1.13)$$

Selon Leibniz la dérivée de l'intégrale (1.13) existe telle que :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x, \beta(x)) \frac{d\beta(x)}{dx} - f(x, \alpha(x)) \frac{d\alpha(x)}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (1.14)$$

Définition 1.1.10 (Formule de Taylor) Soit f une fonction de C^∞ dans un voisinage du point x_0 . La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (1.15)$$

s'appelle série de Taylor de f au voisinage de x_0 .

Définition 1.1.11 (Les polynômes de Legendre) [8] Nous utilisons dans notre travail les polynômes de Legendre qui sont définis par :

$$P_n(x) = \frac{d^n}{2^n n! dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (1.16)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} p_n(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.17)$$

Définition 1.1.12 (Les polynômes de Bernstein) La forme générale des polynômes de Bernstein de degré n sur un intervalle $[a, b]$ est définie par

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n} \quad a \leq x \leq b, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.18)$$

avec $\binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Notons que chacun des $n+1$ polynômes a les propriétés suivantes :

- i. $B_{i,n}(x) = 0$, si $(i < 0) \vee (i > n)$
- ii. $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = 1$
- iii. $B_{i,n}(a) = B_{i,n}(b) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$

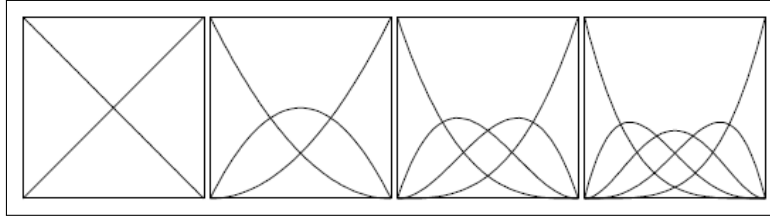


FIGURE 1.1 – Les polynômes de Bernstein pour les degrés 1, 2, 3 et 4 de gauche à droite dans le carré unité

1.2 Notions sur les opérateurs

Définition 1.2.1 (Opérateur intégrale linéaire) Soit $K : C([a, b] \times [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégrale linéaire A sur $C[a, b]$ est définie par :

$$A : \phi \in C[a, b] \rightarrow A\phi \in C[a, b]$$

$$(A\phi)(x) = \int_a^b k(x, t)\phi(t)dt,$$

où $k(x, t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale.

Définition 1.2.2 (Noyau dégénéré) Le noyau $k(x, t)$ est dite dégénéré si il s'écrit sous la forme suivante :

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(t) \quad (1.19)$$

Définition 1.2.3 (Opérateur adjoint) Soient E un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique opérateur continue de E dans E , noté A^* est appelé l'adjoint de A , tel que :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in E, \quad (1.20)$$

on a aussi :

- i. $(A^*)^* = A$
- ii. $\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$

Définition 1.2.4 (Opérateur compact) Citons deux définitions :

- i. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est compact si l'adhérence de $A(B_H)$ est compact dans H , où B_H est la boule unité fermée de H .
- ii. A est un opérateur compacte si pour toute suite bornée (x_n) dans E , la suite (Ax_n) contient une sous-suite convergente. On désigne par $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans E .

Théorème 1.2.1 Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire :

$$\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}(E) \quad (1.21)$$

Définition 1.2.5 (Opérateur de rang fini) Un opérateur A est de rang fini si son image est de dimension finie. Le rang de A est la dimension de son image.

Théorème 1.2.2 Tout opérateur de rang fini est compact.

Théorème 1.2.3 Soit A un élément de $\mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. l'opérateur A est compact.
 ii. l'opérateur A^* est compact.
 iii. l'opérateur A est une limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis.

Théorème 1.2.4 Soit $k \in L^2([a, b] \times [c, d])$, l'opérateur A de noyau k est compact de $L^2([a, b])$ dans $L^2([a, b])$.

1.3 Notions de calcul fractionnaire

Définition 1.3.1 (la fonction gamma) [5] Citons deux définitions :

- i. La définition complète de la fonction gamma est celle fournit par la limite d'Euler

$$\Gamma(\alpha) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N! N^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+N)} \right] \quad (1.22)$$

- ii. La définition de la transformation intégrale est

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad , \alpha \geq 0 \quad (1.23)$$

Résultat 1.3.1 Notons qu'il faut utiliser l'intégral Gaussien pour obtenir $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

On a l'intégrale I

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (1.24)$$

cet intégrale est appelé **intégrale Gaussien** et $I = \sqrt{\pi}$

Preuve On a

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad (1.25)$$

alors

$$I^2 = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx$$

La transformation en coordonnées polaires nous donne $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, donc $x^2 + y^2 = r^2$, et

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq +\infty \\ dA = r dr d\theta \end{cases} \quad (1.26)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) \end{aligned}$$

Soit $J = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr$, alors

$$J = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t e^{-r^2} r dr \right)$$

L'utilisation de changement de variable $u = -r^2$ nous donne $-\frac{1}{2} du = r dr$ alors J vaut

$$J = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} [e^u]_{u=0}^{u=-t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (-e^{-t^2} + 1) = \frac{1}{2}$$

Il est clair que $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\begin{aligned} I^2 &= 4 \frac{\pi}{2} \cdot J = \pi \\ \Rightarrow I &= \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Propriétés 1.3.1 On a les propriétés suivantes

- L'application de la méthode de l'intégrale par parties sur (1.23) nous conduit à la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (1.28)$$

- Notons que $\Gamma(1) = 1$ alors, si on utilise (1.28) on obtient pour toute α un entier positif :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1) = \dots = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots 2.1 \Gamma(1) \\ &= \alpha! \end{aligned} \quad (1.29)$$

- La formule de récurrence (1.28) sert aussi de prolongement analytique, étendant la définition de la fonction gamma aux arguments négatifs auxquels la définition (1.23) est inapplicable. Cette extension montre que $\Gamma(0)$ est infinie, tout comme $\Gamma(-1)$ est la valeur de la fonction gamma pour tous les entiers négatifs. Les rapports des fonctions gamma des entiers négatifs sont cependant finis ; donc si n et N deux entiers positifs alors :

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = (-1)^{N-n} \frac{N!}{n!} \quad (1.30)$$

- La fonction inverse $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ est à valeur unique et finie pour tout α .

- De (1.28) avec n un entier on obtient les propriétés suivantes

i. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$

iii. $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}$

iv. $\Gamma(n) \Gamma(1 - n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}$

- Deux propriétés utiles de la fonction gamma sont :

i. $\Gamma(-\alpha) = \frac{-\pi \cos(\pi\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)}$

ii. $\Gamma(2\alpha) = \frac{4^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}}$

Cette dernière étant un exemple de la formule de **multiplication de Gauss**

$$\Gamma(n\alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \right] \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\alpha + \frac{j}{n}\right) \quad (1.31)$$

Définition 1.3.2 Une fonction $u(x) \in \mathbb{R}$ où $x > 0$ est dite dans l'espace \mathbb{C}_μ où $\mu \in \mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $p > \mu$, tel que

$$u(x) = x^p v(x) \quad , \quad v(x) \in [0, \infty) \quad (1.32)$$

La fonction u est dite dans l'espace \mathbb{C}_μ^m si et seulement si $f^{(m)} \in \mathbb{C}_\mu$ où $m \in \mathbb{N}$.

Définition 1.3.3 (Dérivée fractionnaire au sens de Caputo) Une dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définie par :

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{u^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0. \quad (1.33)$$

Pour la dérivée au sens de Caputo on a :

i. Si $u(x) = x^\beta$ on obtient :

$$D^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0 & , \beta \in \mathbb{N}_0, \beta < [\alpha], \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} & , \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.34)$$

où $[\alpha]$ désigne le plus petit entier qui est supérieur ou égale à α .

ii. Soient λ_1 et λ_2 deux constantes on a :

$$\star D^\alpha(\lambda_1 u(t) + \lambda_2 w(t)) = \lambda_1 D^\alpha u(t) + \lambda_2 D^\alpha w(t)$$

$$\star D^\alpha \lambda_1 = 0$$

Chapitre 2

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

2.1 Définition d'une équation intégrale

Définition 2.1.1 Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue apparaît après un signe d'intégration . La forme générale est donnée par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)u(t)dt, \quad (2.1)$$

où u est la fonction inconnue, k et f sont des fonctions connues, λ est une constante et α et β sont les bords d'intégration.

- i. la fonction k est dite le noyau de l'équation intégrale.
- ii. α et β peuvent être des variables, des constantes ou mixtes.

2.2 Homogénéité et linéarité

Homogénéité

Si $f(x) = 0$ alors l'équation (2.1) est dite homogène, sinon elle est non homogène.

Linéarité

Si la puissance de la fonction inconnue $u(x)$ de l'intérieur de l'intégrale est "1", alors l'équation intégrale est dite linéaire, sinon, elle est donc non linéaire. L'autre cas est le moment où l'équation contient des fonctions non linéaires de $u(x)$ comme e^x , $\sinh(x)$... dans ce cas aussi l'équation est non linéaire.

Pour mieux comprendre, on considère les équations suivantes :

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.2)$$

$$u(x) = - \int_0^x xt u(t)dt \quad (2.3)$$

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \quad (2.4)$$

$$u(x) = \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \quad (2.5)$$

$$u(x) = \int_0^1 xte^{u(t)}dt \quad (2.6)$$

(2.2) est linéaire non homogène, (2.3) est linéaire homogène, (2.4) est non linéaire non homogène et les autres deux équations sont non linéaires homogènes.

2.3 Classification des équations intégrales

2.3.1 Équation intégrale de Fredholm

Définition 2.3.1 On appelle une équation de Fredholm chaque équation dont les limites d'intégration sont fixées (constantes), elle est donnée sous la forme suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (2.7)$$

- i. (2.7) est une équation intégrale de Fredholm du seconde espèce.
- ii. Une équation intégrale de Fredholm du premier espèce s'écrit sous la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0. \quad (2.8)$$

- iii. Une équation intégrale non linéaire de Fredholm du premier espèce s'écrit sous la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(u(t))dt = 0. \quad (2.9)$$

- iv. Une équation intégrale non linéaire de Fredholm du seconde espèce s'écrit sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(u(t))dt, \quad (2.10)$$

avec $F(u(t))$ une fonction non linéaire de $u(x)$.

Exemple 2.3.1 Considérons les équations intégrales de Fredholm du seconde espèce suivantes :

$$u(x) = \lambda \int_0^1 u(t)dt, \quad (2.11)$$

$$u(x) = e^x + e - 1 - \int_0^1 u(t)dt, \quad (2.12)$$

$$u(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-t}u^2(t)dt, \quad (2.13)$$

$$u(x) = 1 + x + \int_0^1 ((x-t)^4)u(t)dt, \quad (2.14)$$

Considérons les équations intégrales de Fredholm du premier espèce suivantes :

$$0 = (x^2) + 1 + \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt, \quad (2.15)$$

$$0 = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt, \quad (2.16)$$

(2.11),(2.12),(2.15) et (2.16) sont des équations intégrales linéaires de Fredholm par contre les autres deux équations sont non linéaires.

(2.11),(2.13) et (2.16) sont homogènes et les autres sont non homogènes.

2.3.2 Équation intégrale de Volterra

Définition 2.3.2 On appelle une équation intégrale de Volterra chaque équation dont au moins une limite d'intégration est une variable, elle est donnée par la forme suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \quad (2.17)$$

- i. (2.17) est une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.
- ii. Une équation intégrale de Volterra du premier espèce s'écrit sous la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = 0, \quad (2.18)$$

iii. Une équation intégrale non linéaire de Volterra du seconde espèce s'écrit sous la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(u(t))dt, \quad (2.19)$$

avec $F(u(x))$ une fonction non linéaire de $u(x)$.

- Exemple 2.3.2**
- i. L'équation (2.2) est une équation linéaire non homogène de Volterra de seconde espèce.
 - ii. L'équation (2.3) est une équation linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.
 - iii. L'équation (2.4) est une équation non linéaire non homogène de Volterra de seconde espèce.
 - iv. L'équation (2.5) est une équation non linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.
 - v. Considérons les équations de Volterra du premier espèce suivantes

$$\lambda \int_0^x tu(t)dt = 0, \quad (2.20)$$

$$2x + 1 - \int_0^x u^2(t)dt = 0, \quad (2.21)$$

L'équation (2.20) est linéaire homogène et (2.21) est linéaire non homogène.

Remarque 2.3.1 L'équation de Volterra peut se ramener à une équation de Fredholm, en effet

$$\int_a^b k(x,t)u(t)dt = \int_a^b \mu_T(x,t)k(x,t)u(t)dt, \quad (2.22)$$

avec μ_T est la fonction caractéristique de l'ensemble T définie par :

$$T = \{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]; t < x\},$$

Nous avons donc

$$\mu_T(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq x \\ 1 & \text{si } t \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu(x,t)k(x,t)u(t)dt &= \int_a^x \mu_T(x,t)k(x,t)u(t)dt + \int_x^b \mu_T(x,t)k(x,t)u(t)dt \\ &= \int_a^x k(x,t)u(t)dt \end{aligned}$$

Si on note $k_1(x,t) = \mu_T(x,t)k(x,t)$, alors

$$\int_a^b k(x,t)u(t)dt = \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt$$

2.3.3 Équation intégrale de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes :

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)u(t)dt, \quad (2.23)$$

et

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \int_\omega F(x,t,\epsilon,\tau,u(\epsilon,\tau))d\epsilon d\tau, (x,t) \in \omega \times [0,T], \quad (2.24)$$

où $f(x,t)$ et $F(x,t,\epsilon,\tau,u(\epsilon,\tau))$ sont des fonction analytiques sur $D = \omega \times [0,T]$, et ω est une partie formée de \mathbb{R} . Il est intéressant de noter que (2.23) contient des formes intégrales de Volterra et Fredholm, et (2.24) contient des mixtes des intégrales. En outre, si les fonctions inconnue $u(x)$ et $u(x,t)$ apparaissent à l'intérieure et à l'extérieure des signes intégrales, alors l'équation intégrale est de seconde espèce, si les fonctions inconnues apparaissent uniquement à l'intérieur des intégrales alors l'équation est de premier espèce.

Exemple 2.3.3

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt \quad (2.25)$$

$$u(x,t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \epsilon)d\epsilon d\tau \quad (2.26)$$

Remarque 2.3.2 Les notions de l'homogénéité est la linéarité restent les mêmes pour une équation intégrale de Volterra-Fredholm.

2.3.4 Équation intégrale singulière

Définition 2.3.3 Une équation intégrale est dite singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies ou bien le noyau devient infini au voisinage de certains points de l'intégrale.

Exemple 2.3.4

$$u(x) = 2x + 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt \quad (2.27)$$

$$f(x) = \lambda \int_a^b \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, 0 < \alpha < 1 \quad (2.28)$$

Remarque 2.3.3 Une équation intégrale singulière prend deux types :

I. **Équation intégrale singulière faible** : Si on peut écrire le noyau sous une de deux formes suivantes :

$$k(x, t) = \frac{B(x, t)}{|x - y|^{2/\alpha}}$$

ou bien

$$k(x, t) = B(x, t) \ln|x - t|,$$

où $B(x, t)$ est une fonction non nulle bornée et α est une constante tel que $0 < \alpha < 1$.

Exemple 2.3.5

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, 0 < \alpha < 1. \quad (2.29)$$

Notons que si $\alpha = \frac{1}{2}$ l'équation vaut :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \quad (2.30)$$

(2.30) est appelée équation d'Abel.

II. **Équation intégrale singulière forte** : Si on peut écrire le noyau sous la forme :

$$k(x, t) = \frac{B(x, t)}{(x-t)^2}$$

2.4 Les équations intégro-différentielles

Les équation intégro-différentielles apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques, notamment lorsque l'on convertit des problèmes aux valeurs initiales ou des problèmes aux limites aux équations intégrales. Les équations intégro-différentielles contiennent à la fois des opérateurs intégraux et différentiels. Les dérivées des fonctions inconnues peuvent apparaître dans n'importe quel ordre. Dans la classification des équations intégro-différentielles, nous suivrons la même catégorie utilisée auparavant.

I. **Équation intégro-différentielle de Fredholm** : sa forme générale est :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad (2.31)$$

II. **Équation intégro-différentielle de Volterra** sa forme générale est :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \quad (2.32)$$

III. **Équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm** : elle a deux types différentes

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt, \quad (2.33)$$

et

$$u^{(n)}(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_\omega F(x, t, \epsilon, \tau, u(\epsilon, \tau))d\epsilon d\tau, (x, t) \in \omega \times [0, T]. \quad (2.34)$$

Notons que $u_{(n)}$ indique la nième dérivée de $u(x)$ et que les autres dérivées de moindre ordre peuvent apparaître avec $u(n)$ sur le coté gauche.

Notons aussi que les conditions initiales doivent être données pour déterminer la solution particulière.

Exemple 2.4.1 *i. Équation intégrale-différentielle de Fredholm :*

$$u'(x) + 2u(x) = 1 + 3x^2 + \int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0 \quad (2.35)$$

ii. Équation intégrale-différentielle de Volterra :

$$u''(x) + 4u'(x) = 5 - \sin(x)(x^2 - 1) + 2 \int_0^x \exp(x+t)u(t)dt, \quad u(0) = u'(0) = 1 \quad (2.36)$$

iii. Équations intégrale-différentielle de Volterra-Fredholm :

$$u'(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt - \int_0^1 u(t)dt, \quad u(0) = 0 \quad (2.37)$$

$$u'(x, t) = 1 + 2x + t^3 - \int_0^t \int_0^1 2(\tau - 3\epsilon)d\tau d\epsilon, \quad u(0, t) = t - 1 \quad (2.38)$$

2.5 Le lien entre les équations intégrales et les problèmes aux limites

2.5.1 Transformation d'un PVI à une équation intégrale de Volterra

On sait que la forme générale d'un PVI (problème à valeur initiale) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x) \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{cases} \quad (2.39)$$

Nous supposons que les fonctions $a_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ sont analytiques à l'origine, et la fonction $g(x)$ est continue à l'intervalle de discussion.

Soit $u(x)$ une fonction continue sur l'intervalle de discussion, prenons la transformation suivante :

$$y^{(n)}(x) = u(x) \quad (2.40)$$

L'intégration de (2.40) par rapport à x sur $[0, x]$ nous donne :

$$y^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + \int_0^x u(t)dt \quad (2.41)$$

L'intégration de (2.41) par rapport à x le long de $[0, x]$ nous donne :

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt \\ &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \end{aligned} \quad (2.42)$$

est obtenue par l'utilisation de la formule qui réduisant l'intégrale double à une intégrale simple (voir chapitre 1).

Une autre intégration nous donne :

$$\begin{aligned} y^{(n-3)}(x) &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt dt \\ &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt, \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si on complète de la même manière on trouve finalement :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)dt \quad (2.44)$$

La substitution des expressions de $y^{(n-i)}(x)$, $0 \leq i \leq n$ dans (2.39) nous donne :

$$u(x) = f(x) - \int_0^x k(x,t)u(t), \quad (2.45)$$

qu'elle est une équation intégrale de Volterra où :

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^n \frac{a_n}{(k-1)!} (x-t)^{k-1},$$

et

$$f(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{k=1}^j \frac{c_{n-k}}{(j-k)!} x^{j-k} \right)$$

Exemple 2.5.1 Soit le PVI suivant

$$\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3 \end{cases} \quad (2.46)$$

Posons :

$$y'''(x) = u(x) \quad (2.47)$$

Intégrons (2.47) et répétons l'opération pour chaque nouvelle expression obtenue jusqu'à ce qu'on arrive à l'expression de $y(x)$.

En prenant en compte les conditions initiales du PVI.

$$y''(x) = 3 + \int_0^x u(t)dt \quad (2.48)$$

$$y'(x) = 2 + 3x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.49)$$

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \quad (2.50)$$

La substitution de (2.47),(2.48),(2.49) et (2.50) dans (2.46) conduit à l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(x) = 4 + x + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x [(1+x-t) - \frac{1}{2}(x-t)^2]u(t)dt \quad (2.51)$$

2.5.2 Transformation d'une équation intégrale de Volterra à un PVI

transformation d'une équation intégrale de Volterra à un PVI est la plus simple méthode pour résoudre cette équation. En effet la règle de Leibniz pour la dérivation des intégrales nous aide à éliminer le signe intégrale de l'équation. De plus, pour obtenir les conditions initiales il faut substituer $x = 0$ en $u(x)$ et ses dérivées. Enfin, ces étapes nous donne un PVI qu'il facile à résoudre en utilisant les méthodes de EDOs.

Exemple 2.5.2 Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.52)$$

Dérivons les deux cotés de (2.52) jusqu'à éliminer le signe intégrale (utilisons la règle de Leibniz)

$$u'(x) = 2x + \int_0^x u(t)dt \quad (2.53)$$

$$u''(x) = 2 + u(x) \quad (2.54)$$

substituons $x = 0$ dans (2.52) et (2.53) pour déterminer les conditions initiales :

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

Finalement, nous obtenons le PVI suivant :

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 2 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Notons que ce problème est une EDO d'ordre 2 non homogène.

2.5.3 Transformation d'un PL à une équation intégrale de Fredholm

La méthode de transformer un problème aux limites (PL) à une équation intégrale de Fredholm est similaire à la méthode de la section précédente avec quelques exceptions sont liées aux conditions aux limites. Notons que cette méthode est un peu compliquée, alors nous allons démontrer cette méthode par des illustrations.

i. **Type 1** : Considérons le PL suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = h(x) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases} \quad (2.56)$$

où α et β sont des constantes données. Soit la transformation suivante :

$$y''(x) = u(x) \quad (2.57)$$

L'intégration de (2.57) par rapport à x le long de $[a, x]$ nous donne :

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x u(t) dt \quad (2.58)$$

Notons que la condition initiale $y'(a)$ n'est pas donnée.

L'intégration de (2.58) par rapport à x le long de $[a, x]$ et l'utilisation de la condition au limite donnée quand $x = a$ nous donnent :

$$\begin{aligned} y(x) &= y(a) + (x-a)y'(a) + \int_a^x \int_a^x u(t) dt dt \\ &= \alpha + (x-a)y'(a) + \int_a^x \int_a^x u(t) dt dt \end{aligned} \quad (2.59)$$

Utilisons maintenant la condition au limite en $x = b$

$$y(b) = \beta = \alpha + (b-a)y'(a) + \int_a^b \int_a^b u(t) dt dt, \quad (2.60)$$

et la constante inconnue $y'(a)$ est déterminé par :

$$y'(a) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_a^b u(t) dt dt \quad (2.61)$$

Donc, on peut réécrire la solution (2.59) comme suite :

$$y(x) = \alpha(x-a) \left[\frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_a^b u(t) dt dt \right] + \int_a^x \int_a^x u(t) dt dt \quad (2.62)$$

Alors, on peut écrire l'équation (2.56) en termes de $u(x)$ comme :

$$u(x) = h(x) - p(x) \left[y'(a) + \int_a^x u(t) dt \right] - q(x) \left[\alpha + (x-a)y'(a) + \int_a^x \int_a^x u(t) dt dt \right], \quad (2.63)$$

où $u(x) = y''(x)$, et alors $y(x)$ peut être déterminé en principe dans l'équation (2.62). C'est un procédé compliqué pour déterminer la solution d'un PL par une équation intégrale de Fredholm équivalente.

Un cas spécial [13] Si $a = 0$ et $b = 1$, alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha + xy'(0) + \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \\ &= \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t) dt \end{aligned} \quad (2.64)$$

Alors, on peut déterminer $y'(0)$

$$\begin{aligned} y'(0) &= (\beta - \alpha) - \int_0^1 (1-t)u(t) dt \\ &= (\beta - \alpha) - \int_0^x (1-t)u(t) dt - \int_x^1 (1-t)u(t) dt, \end{aligned} \quad (2.65)$$

et alors on aura :

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) - p(x) \left[y'(0) + \int_0^x u(t)dt \right] - q(x) \left[\alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \right] \\ &= h(x) - (\beta - \alpha)(p(x) + xq(x)) - \alpha q(x) + \int_0^1 k(x,t)u(t), \end{aligned} \quad (2.66)$$

qu'elle est une équation intégrale de Fredholm où :

Le noyau est donné par :

$$\begin{cases} (p(x) + tq(x))(1-x) & , 0 \leq t \leq x \\ (p(x) + xq(x))(1-t) & , x \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.67)$$

et $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = h(x) - (\beta - \alpha)(p(x) + xq(x)) - \alpha q(x) \quad (2.68)$$

Exemple 2.5.3 Considérons le PL suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + 2xy(x) = 0 \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 3 \end{cases} \quad (2.69)$$

On peut simplement observer que $\alpha = 0, \beta = 3, q(x) = 2x$ et $p(x) = h(x) = 0$.
La substitution dans (2.67) et (2.68) nous donne :

$$f(x) = -6x^2, \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} 2tx(1-x) & , \quad 0 \leq t \leq x \\ 2x^2(1-t) & , \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.71)$$

Alors l'équation intégrale de Fredholm obtenue est :

$$u(x) = -6x^2 + \int_0^1 k(x,t)u(t)dt, \quad (2.72)$$

où

$$\begin{cases} 2tx(1-x) & , \quad 0 \leq t \leq x \\ 2x^2(1-t) & , \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.73)$$

ii. **Type 2** : Considérons le PL suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y(x) = h(x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = \alpha_1 & , \quad y'(1) = \beta_1 \end{cases} \quad (2.74)$$

Supposons que

$$y''(x) = u(x) \quad (2.75)$$

Intégrons (2.75) de 0 à x nous obtenons :

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt, \quad (2.76)$$

qu'elle est équivalente à :

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt, \quad (2.77)$$

où la condition initiale $y'(0)$ n'est pas donnée, elle sera dérivée ultérieurement en utilisant la condition au limite $y'(1) = \beta_1$. l'intégration de (2.77) de 0 à x nous donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt \\ &= \alpha_1 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned} \quad (2.78)$$

Pour déterminer $y'(0)$, premièrement, nous dérivons (2.78) par rapport à x pour obtenir :

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt, \quad (2.79)$$

et par la substitution de $x = 1$ dans (2.79) avec l'utilisation de $y'(1) = \beta_1$ nous obtenons

$$y'(1) = y'(0) + \int_0^1 u(t)dt, \quad (2.80)$$

alors

$$y'(0) = \beta_1 - \int_0^1 u(t)dt, \quad (2.81)$$

utilisons (2.81) dans (2.78)

$$y(x) = \alpha_1 + x \left[\beta_1 - \int_0^1 u(t)dt \right] + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad (2.82)$$

substituons (2.82) et (2.75) dans (2.74)

$$u(x) = h(x) - (\alpha_1 + \beta_1 x)q(x) + xq(x) \left[\int_0^x u(t)dt + \int_x^1 u(t)dt \right] - q(x) \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.83)$$

On peut écrire la dernière équation comme :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x tq(x)u(t)dt + \int_x^1 xq(x)u(t)dt, \quad (2.84)$$

qu'elle est une équation intégrale de Fredholm

Conclusion 2.5.1 *Pour le cas spécifique où $y(0) = y'(1) = 0$, il est clair dans ce cas que $f(x) = h(x)$, cela signifie que l'homogénéité de l'équation intégrale de Fredholm obtenue a une relation de corrélation directe avec l'homogénéité de PL équivalent.*

Exemple 2.5.4 *Considérons le PL suivant :*

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 2 \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(1) = 2 \end{cases} \quad (2.85)$$

Observons que $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 2, q(x) = 1$ et $h(x) = 2$, donc

$$f(x) = 2 - 2x, \quad (2.86)$$

et

$$k(x, t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t \leq x \\ x & , \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.87)$$

(2.86) et (2.87) forment une équation intégrale de Fredholm qu'elle est équivalente à le PL si-dessus.

2.5.4 Transformation d'une équation intégrale de Fredholm à un PL

Considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 k(x, t)u(t)dt, \quad (2.88)$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. Pour le noyau nous allons examiner deux types différents :

i. **Type 1** : Le noyau s'écrit sous la forme :

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x)q(x) & , \quad 0 \leq t \leq x \\ x(1-t)q(x) & , \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.89)$$

Supposons que $q(x) = \lambda$ où λ est une constante, donc l'équation (2.88) vaut :

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x t(1-x)u(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda(1-x) \int_0^x tu(t)dt + \lambda x \int_x^1 (1-t)u(t)dt \end{aligned} \quad (2.90)$$

Dérivons l'équation (2.90) par rapport à x par l'utilisation de la règle de Leibnitz.

$$u'(x) = f'(x) - \lambda \int_0^x tu(t)dt + \lambda \int_0^1 (1-t)u(t)dt \quad (2.91)$$

Dérivons une autre fois

$$u''(x) = f''(x) - \lambda xu(x) - \lambda(1-x)u(x), \quad (2.92)$$

qu'elle est équivalente à l'EDO suivante :

$$u''(x) + \lambda u(x) = f''(x) \quad (2.93)$$

La substitution de $x = 0$ et $x = 1$ dans (2.90) nous donne

$$u(0) = f(0) \quad , \quad u(1) = f(1) \quad (2.94)$$

Finalement, on aura le PL équivalent à l'équation de Fredholm (2.19) avec le noyau (2.21) :

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = f''(x) \\ u(0) = f(0) \quad , \quad u(1) = f(1) \end{cases} \quad (2.95)$$

Remarque 2.5.1 Notons que ce procédure reste valable à utiliser si $q(x)$ n'est pas constante (même remarque pour le **Type 2**).

Exemple 2.5.5 Considérons l'équation de Fredholm suivante :

$$u(x) = 2x^3 + \int_0^1 k(x,t)u(t)dt, \quad (2.96)$$

où :

$$k(x,t) = \begin{cases} 4t(1-x) & , \quad 0 \leq t \leq x \\ 4x(1-t) & , \quad x \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2.97)$$

alors, l'équation (2.96) s'écrit sous la forme :

$$u(x) = 2x^3 + 4(1-x) \int_0^x tu(t)dt + 4x \int_x^1 (1-t)u(t)dt \quad (2.98)$$

La dérivation par rapport à x nous donne :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 6x^2 + 4 \left[(1-x)xu(x) \int_0^x tu(t)dt \right] + 4 \left[-x(1-x)u(x) + \int_x^1 (1-t)u(t)dt \right] \\ &= 6x^2 - 4 \int_0^x tu(t)dt + 4 \int_x^1 (1-t)u(t)dt \end{aligned} \quad (2.99)$$

La dérivation une autre fois par rapport à x nous donne :

$$\begin{aligned} u''(x) &= 12x - 4[xu(x) + (1-x)u(x)] \\ &= 12x - 4u(x) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Alors, nous obtenons l'EDO suivante :

$$u''(x) + 4u(x) = 12x, \quad (2.101)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = f(0) = 0 \quad , \quad u(1) = f(1) = 2 \quad (2.102)$$

ii. **Type 2** : Le noyau s'écrit sous la forme :

$$k(x,t) = \begin{cases} tq(x) & , \quad 0 \leq t \leq x \\ xq(x) & , \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.103)$$

Lorsqu'on suppose que $q(x) = \lambda$ et suivre le même procédure de "**Type 1**" on obtient :

$$u''(x) + \lambda u(x) = f''(x) \quad (2.104)$$

Notons que la condition $u(1)$ ne peut être pas obtenue, en effet les conditions aux limites peuvent être obtenue en substituant $x = 0$ et $x = 1$ respectivement dans les expressions de $u(x)$ et $u'(x)$.

$$u(0) = f(0) \quad , \quad u'(1) = f'(1) \quad (2.105)$$

Exemple 2.5.6 *Considérons l'équation de Fredholm suivante :*

$$u(x) = e^{2x} + \int_0^1 k(x, t)u(t)dt, \quad (2.106)$$

où :

$$k(x, t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \leq t \leq x \\ 4x & , \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.107)$$

Alors

$$u(x) = e^{2x} + 4 \int_0^x tu(t)dt + 4x \int_x^1 u(t)dt \quad (2.108)$$

La règle de dérivation de Leibnitz nous donne :

$$u'(x) = 2e^{2x} + 4 \int_x^1 u(t)dt, \quad (2.109)$$

et

$$u''(x) = 4e^{2x} - 4u(x) \quad (2.110)$$

Les conditions aux limites associées au problème sont :

$$u(0) = f(0) = 1 \quad , \quad u'(1) = f'(1) = 2e^2 \quad (2.111)$$

Donc on aura le PL suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + 4u(x) = 4e^{2x} \\ u(0) = 1 \quad , \quad u'(1) = 2e^2 \end{cases} \quad (2.112)$$

Chapitre 3

SOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE

3.1 L'existence et l'unicité d'une solution d'une équation intégrale

3.1.1 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, nous allons développer quelques propriétés d'une classe d'opérateurs dits de contraction. Ceux-ci nous permettront de dériver certain nombre de théorèmes de base d'existence et d'unicité pour les équations intégrales d'une manière assez rapide. Fondamentalement, cette technique est de nature topologique. Ces méthodes topologiques sont plus utiles en relation avec les opérateurs non-linéaires, où les méthodes analytiques échouent souvent. Pour les équations linéaires, les méthodes analytiques conduisent souvent à des résultats solides qui ne peuvent pas être obtenus par des méthodes topologiques.

Définition 3.1.1 (Opérateur de contraction) Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur borné sur H , A n'est pas nécessairement un opérateur linéaire. A est dite opérateur de contraction s'il existe une constante positive $a < 1$ telle que :

$$\|Af_1 - Af_2\| \leq a\|f_1 - f_2\|, \quad \forall f_1, f_2 \in H \quad (3.1)$$

Théorème 3.1.1 [11] Soit A un opérateur de contraction sur H , l'équation

$$Af = f \quad (3.2)$$

a une unique solution f dans H , une telle solution est dite point fixe de A .

Théorème 3.1.2 [11] Soit A un opérateur sur H , avec la nième puissance de $A(A^n)$ est un opérateur de contraction, alors l'équation

$$Af = f$$

a une solution unique f dans H .

3.1.2 Théorèmes d'existence élémentaires

Dans cette section, nous nous intéressons aux équations de type

$$\phi - \lambda K\phi = f, \quad (3.3)$$

avec f appartient à l'espace de Hilbert H , et K est un opérateur borné avec la propriété

$$\|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq M\|\phi_1 - \phi_2\| \quad (3.4)$$

Théorème 3.1.3 [11] L'équation (3.3) a une solution unique pour toute f et $|\lambda|$ suffisamment petite, pourvu que K est un opérateur borné, qui satisfait aussi (3.4).

Théorème 3.1.4 [11] Supposons

$$\left\| \int_a^b K(x, t, \phi(t)) dt \right\| \leq M\|\phi(t)\|, \quad (3.5)$$

et

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq N(x, t)|z_1 - z_2| \quad (3.6)$$

où

$$\int_a^b \int_a^b |N(x, t)|^2 dx dt = p^2 < \infty. \quad (3.7)$$

Si $f(x) \in L^2([a, b])$, alors l'équation intégrale où l'intégrale est de a à b a une solution unique dans $L^2([a, b])$ si $\lambda p < 1$.

Théorème 3.1.5 [11] L'équation intégrale de Volterra a une solution unique pour toute λ et toute $f(x)$ dans $L^2([0, 1])$.

Théorème 3.1.6 [11] Soit $f(x) \in L^2([0, 1])$, et supposons que :

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x, t)|^2 dx dt < \infty,$$

alors

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt \quad (3.8)$$

a une solution unique dans $L^2([0, 1])$ pour toute λ .

3.1.3 Noyaux avec singularités faibles

Théorème 3.1.7 [11] considérons

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad (3.9)$$

où $k(x, t) = \frac{h(x, t)}{|x - t|^\alpha}$, et $f(x)$ et $h(x, t)$ sont continues avec $0 \leq \alpha < 1$. Sous ces conditions (3.9) a une solution unique pour toute λ .

[11]

Théorème 3.1.8

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t) u(t) dt, \quad (3.10)$$

où $k(x, t) = \frac{h(x, t)}{|x - t|^\alpha}$, et $f(x)$ et $h(x, t)$ sont continues avec $0 \leq x, y \leq 1$ et $0 \leq \alpha < 1$. Sous ces conditions (3.10) a une solution unique pour une λ suffisamment petite.

3.1.4 L'existence de la solution de l'équation intégrale non linéaire

Pour le type de Volterra

Considérons l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, u(t)) dt, \quad (3.11)$$

on dit que la solution existe si :

- i. $f(x)$ et $F(x, t, u(t))$ sont intégrables et bornées respectivement dans $a \leq x \leq b$ et $a \leq x, t \leq b$.
- ii. $f(x)$ et $F(x, t, u(t))$ satisfaisaient les conditions de Lipschitz sur (a, b) .

Pour le type de Fredholm

Considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_a^b F(x, t, u(t)) dt, \quad (3.12)$$

on dit que la solution existe si :

- i. $f(x)$ est bornées dans $a \leq x \leq b$.
- ii. $F(x, t, u(t))$ est intégrable et bornée dans $a \leq x, t \leq b$.
- iii. $F(x, t, u(t))$ satisfait les conditions de Lipschitz sur (a, b) .

3.2 Méthodes de résolution analytiques d'une équation intégrale

3.2.1 La méthode de décomposition Adomain (MDA)

- i. **MDA pour les équations intégrales linéaires** : Cette méthode a été introduite est développée par George Adomain. elle consiste à décomposer la fonction inconnue $u(x)$ en une somme de nombre infini de composants définis par la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \quad (3.13)$$

La méthode consiste à trouver les composantes u_0, u_1, \dots une par une. Maintenant, considérons l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)u(t)dt \quad (3.14)$$

Quand on utilise (3.13) l'équation vaut :

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t) \sum_{n \geq 0} u_n(t)dt \quad (3.15)$$

c'est à dire :

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + \dots] dt \quad (3.16)$$

En effet, on peut définir ces composantes par la relation de récurrence si-dessous :

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)u_n(t)dt, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Finalement, la solution $u(x)$ est la série des composantes obtenues.

Remarque 3.2.1 Si une solution exacte existe pour le problème alors la série obtenue converge rapidement vers cette solution exacte. Cependant pour certains problèmes où la solution exacte ne peut pas être obtenue, un nombre tronqué de termes est généralement utilisé à des tendances numériques, le plus nous utilisons de composantes, le plus nous obtenons un grand précision.

Exemple 3.2.1 Considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = -x + x \int_0^1 tu(t)dt \quad (3.18)$$

L'utilisation de MDA nous donne :

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = -x + x \int_0^1 t \sum_{n \geq 0} u_n(t)dt, \quad (3.19)$$

donc, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0(x) = -x \\ u_{k+1}(x) = x \int_0^1 tu_k(t)dt, \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

finalement, on aura :

$$u(x) = -x + x \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right), \quad (3.21)$$

qu'elle converge à la solution exacte $u(x) = 0$.

- ii. **MDA pour les équations intégrales non-linéaires** : La MDA suppose que la fonction linéaire inconnue $u(x)$ peut être représentée par la série de décomposition infinie

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x), \quad (3.22)$$

où les composantes $u_n(x)$, $n \geq 0$ seront calculées de manière récursive. Cependant, le terme non-linéaire $F(u(x))$, tel que $u^2, \sin u, \dots$ peut être exprimé par une série infinie de polynômes A_n donné par

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

où les polynômes A_n peuvent être évalués pour toutes les formes de non-linéarité. La formule générale (3.23) peut être facilement utilisée comme suit. En supposant que la fonction non-linéaire est $F(u(t))$. Les polynômes sont donnés par

$$\begin{cases} A_0 = F(u_0), \\ A_1 = u_1 F'(u_0), \\ A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0), \\ A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) \end{cases} \quad (3.24)$$

Deux observations importantes peuvent être faites ici. Premièrement, A_0 ne dépend que de u_0 , A_1 ne dépend que de u_0 et u_1 , etc. Deuxièmement, la substitution de (3.24) dans (3.23) après quelques opérations nous donne

$$F(u) = F(u_0) + (u - u_0)F'(u_0) + \frac{1}{2!}(u - u_0)^2 F''(u_0) + \dots \quad (3.25)$$

Exemple 3.2.2 *Considérons l'équation intégrale non-linéaire de Volterra suivante :*

$$u(x) = x + \int_0^x u^2(t) dt \quad (3.26)$$

Substituons les séries (3.22) et les polynômes (3.23) respectivement dans le coté gauche et le coté droite de (3.26) nous obtenons :

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = x + \int_0^x \sum_{n \geq 0} A_n(t) dt \quad (3.27)$$

L'utilisation de la MDA nous donne

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ u_{k+1}(x) = \int_0^x A_k(t) dt, \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

alors

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ u_1(x) = \int_0^x u_0^2(t) dt = \frac{1}{3}x^3 \\ u_2(x) = \int_0^x [2u_0(t)u_1(t)] dt = \frac{2}{15}x^5 \\ u_3(x) = \int_0^x [2u_0(t)u_2(t) + u_1^2(t)] dt = \frac{17}{315}x^7 \end{cases} \quad (3.29)$$

Donc la solution est donnée par :

$$u(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \quad (3.30)$$

qu'elle converge à la solution exacte $u(x) = \tan x$.

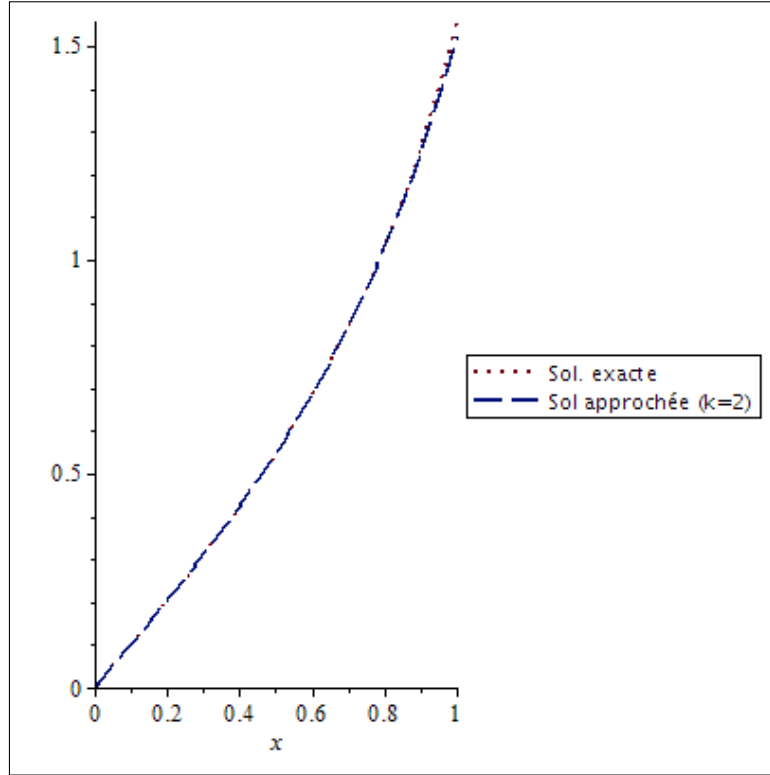


FIGURE 3.1 – Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (3.26)

3.2.2 La méthode de décomposition Adomain modifiée

Cette technique peut minimiser le taux de calcul nécessaire par rapport à la méthode précédente. Pour réaliser cet objectif, nous décomposons $f(x)$ en deux parties telles que :

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x), \quad (3.31)$$

où $f_0(x)$ contient généralement un seul terme. On généralise cette méthode comme suit :

$$\begin{cases} u_0(x) = f_0(x) \\ u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u_0(t)dt \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} u_n(t)dt \quad , n \geq 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

3.2.3 La méthode des approximations successives

Cette méthode fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes à valeur initiale où des équations intégrales. Elle résout n'importe quel problème en trouvant des approximations successives de la solution en commençant par une estimation initiale $u_0(x)$ appelée l'approximation zéro qui peut être n'importe quelle fonction à valeur réelle, cette fonction peut être utilisée dans une relation récurrente pour déterminer les autres approximations, cette méthode est applicable sur les équations intégrales linéaires et non linéaires. Il y a deux méthodes des approximations successives :

i). **La méthode de Picard** :([14], [3]) Le schéma récursif de cette méthode est donné par :

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u_{n-1}(t)dt \quad , n \geq 1, \quad (3.33)$$

la plupart de fois on prend $u_0(x)$ égale à 0, 1, ou bien x . La solution finale $u(x)$ est donc obtenue par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (3.34)$$

On peut conclure que la solution finale dépend de la choix de $u_0(x)$.

Exemple 3.2.3 Considérons l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (3.35)$$

Prenons $u_0(x) = 0$, alors le problème itératif est de forme :

$$\begin{cases} u_0(x) = 0 \\ u_{n+1}(x) = x + \int_0^x (x-t)u_n(t)dt \end{cases}, n \geq 0 \quad (3.36)$$

En effet

$$\begin{cases} u_1(x) = x + \int_0^x (x-t)u_0(t)dt = x \\ u_2(x) = x + \int_0^x (x-t)u_1(t)dt = x + \frac{1}{3!}x^3 + \\ u_3(x) = x + \int_0^x (x-t)u_2(t)dt = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\ u_4(x) = x + \int_0^x (x-t)u_3(t)dt = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 \\ u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} \end{cases} \quad (3.37)$$

Finalement, la solution est donnée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \sinh x \quad (3.38)$$

ii). **La méthode des séries de Neumann** : ([7], [15], [13], [10]) Cette méthode utilise

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) \\ u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x u_{n-1}(t)dt \end{cases}, n \geq 1 \quad (3.39)$$

L'utilisation de (3.39) nous donne :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_0(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)f(t)dt \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_1(t)dt \quad (3.41)$$

Considérons

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)(u_1(t) - f(t))dt \\ &= \lambda \int_0^x k(x,t) \left[(f(t) + \lambda \int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau) - f(t) \right] \\ &= \lambda^2 \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \lambda^2 \psi_2(x), \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec

$$\psi_2(x) = \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau \quad (3.43)$$

On observe facilement dans (3.43) que

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m \psi_m(x) \quad (3.44)$$

si $\psi_0(x) = f(x)$, et plus loin que :

$$\psi_m(x) = \int_0^x k(x,t)\psi_{m-1}(t)dt, \quad (3.45)$$

où $m = 1, 2, 3, \dots$ et alors $\psi_1(x) = \int_0^x k(x, t)f(t)dt$.

Les intégrales répétées dans l'équation peuvent être considérées comme une double intégrale sur la région triangulaire, échangeons ainsi l'ordre d'intégration, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \int_0^x f(\tau)d\tau \int_{\tau}^x k(x, t)k(t, \tau)dt \\ &= \int_0^x k_2(x, \tau)f(\tau)d\tau,\end{aligned}\quad (3.46)$$

où

$$k_2(x, \tau) = k(x, t)k(t, \tau)dt \quad (3.47)$$

De façon similaire, on trouve en générale :

$$\psi_m(x) = \int_0^x k_m(x, \tau)f(\tau)d\tau \quad , m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.48)$$

où les noyaux itératifs sont définis par :

$$k_{m+1}(x, t) = \int_t^x k(x, \tau)k_m(\tau, t)d\tau \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.49)$$

Ainsi, la solution pour $u_n(x)$ peut être écrite par :

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \psi_m(x) \quad (3.50)$$

Quand on utilise l'équation (3.48) on obtient :

$$\begin{aligned}u_n(x) &= f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_0^x k_m(x, \tau)f(\tau)d\tau \\ &= f(x) + \int_0^x \left[\sum_{m=1}^n \lambda^m k_m(x, \tau) \right] f(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (3.51)$$

Alors, la solution sera obtenue par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad (3.52)$$

Remarque 3.2.2 Le terme

$$H(x, \tau; \lambda) = \sum_{m=1}^n \lambda^m k_m(x, \tau), \quad (3.53)$$

est appelé le noyau résolvant.

Exemple 3.2.4 Considérons l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = (1+x) + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (3.54)$$

De (3.49) on aura :

$$\begin{cases} k_1(x, t) = (x-t) \\ k_2(x, t) = \int_t^x (x-\tau)(\tau-t)d\tau = \frac{(x-t)^3}{3!} \\ k_3(x, t) = \int_t^x \frac{(x-\tau)(\tau-t)^3}{3!}d\tau = \frac{(x-t)^5}{5!} \end{cases} \quad (3.55)$$

Donc, de (3.51) et (3.52) on aura :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) &= u(x) \\ &= f(x) + \int_0^x \lambda k(x, \tau)f(\tau)d\tau + \int_0^x \lambda^2 k_2(x, \tau)f(\tau)d\tau + \int_0^x \lambda^3 k_3(x, \tau)f(\tau)d\tau + \dots \\ &= 1+x + \lambda \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \lambda^2 \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \dots\end{aligned}\quad (3.56)$$

Pour $\lambda = 1$, $u(x) = e^x$.

3.3 Méthodes de résolution numériques d'une équation intégrale

3.3.1 Méthodes de projection

Pour résoudre approximativement l'équation intégrale

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_D k(x, t)u(t)dt \quad x \in D, \quad (3.57)$$

on choisit une famille de fonctions de dimensions finies dont on pense qu'elles contiennent une fonction $\tilde{u}(x)$ proche de la vraie solution $u(x)$. La solution numérique recherchée $\tilde{u}(x)$ est sélectionnée en lui faisant satisfaire (3.57) approximativement, il existe différents sens dans laquelle $\tilde{u}(x)$ peut être dit **satisfaire** (3.57) **approximativement**, et ceux-ci conduisent à différents types de méthodes, les plus populaires méthodes sont les méthodes de **collocation** et les méthodes de **Galerkin** qui sont définies ci-dessous. Lorsque ces méthodes sont formulées dans un cadre abstrait utilisant l'analyse fonctionnelle, ils font tous utilisation essentielle des opérateurs de projection. Étant donné que l'analyse des erreurs est plus facile menées dans un tel cadre d'analyse fonctionnelle, nous nous référons collectivement à toutes les méthodes telles que les méthodes de projection.

Théorie générale [9]

On écrit (3.57) sous la forme opérateur

$$(\lambda - K)u = f, \quad (3.58)$$

et l'opérateur K est supposé compact sur un espace de Banach X à X , les choix les plus populaires sont $C(D)$ et $L^2(D)$.

Pour la méthode de Galerkin et ses généralisations, les espaces de Sobolev $H^r(D)$ ont aussi utilisés, avec $H^0(D) \equiv L^2(D)$.

On pratique, on choisit une suite de sous-espaces de dimensions finies $X_n \subset X$, $n \geq 1$, avec X_n de dimensions d_n .

Soit X_n a une base ϕ_1, \dots, ϕ_d avec $d \equiv d_n$ pour la simplicité de la notation. On cherche une fonction $u_n \in X_n$ s'écrit comme :

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^d c_j \phi_j(x) \quad , x \in D, \quad (3.59)$$

ceci est substituée dans (3.57), et les coefficients (c_1, \dots, c_d) sont déterminés en forçant l'équation à être presque exacte dans un certain sens. Pour un utilisation ultérieure, on introduise

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \lambda u_n(x) - \int_D k(x, t)u_n(t)dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^d c_j \left(\lambda \phi_j(x) - \int_D k(x, t)\phi_j(t)dt \right) - f(x) \quad , x \in D, \end{aligned} \quad (3.60)$$

c'est ce qu'on appelle le **résidu** dans l'approximation de l'équation lors de l'utilisation de $u \approx u_n$, symboliquement

$$r_n = (\lambda - K)u_n - f \quad (3.61)$$

Les coefficient (c_1, \dots, c_d) sont choisit en forçant $r_n(x)$ à être approximativement zéro en quelque sorte, l'espoir et l'attente sont que la fonction résultante $u_n(x)$ sera une bonne approximation de la vraie solution $u(x)$.

Méthodes de collocation

Choisissons des nœuds distincts $x_1, \dots, x_d \in D$, et exigeons

$$r_n(x_i) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, d_n \quad (3.62)$$

Ceci conduit à déterminer (c_1, \dots, c_d) comme une solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^d c_j \left(\lambda \phi_j(x_i) - \int_D k(x_i, t)\phi_j(t)dt \right) = f(x_i) \quad , i = 1, \dots, d_n \quad (3.63)$$

Exemple 3.3.1 Voici l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 t u(t) \quad (3.64)$$

Sa solution exacte est

$$u(x) = 3x + 4x^2 \quad (3.65)$$

On va utiliser la méthode de collocation pour résoudre cette équation.

Choisissons $n = 3$ alors $d_n = 3$, donc la solution approchée est donnée par :

$$u_3(x) = \sum_{j=1}^3 c_j \phi_j(x) \quad (3.66)$$

Soit les fonctions linéairement indépendantes :

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 1 \\ \phi_2(x) = x \\ \phi_3(x) = x^2 \end{cases} \quad (3.67)$$

L'équation (3.64) devient :

$$r_n(x) = u_n(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 t u_n(t) dt - 3x - 3x^2 \quad (3.68)$$

Soit $x_1 = -1, x^2 = 0, x^3 = 1$ tel que $r_3(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq 3$, où :

$$r_3(x_i) = u_3(x_i) - \frac{1}{2} \int_0^1 x_i^2 t u_n(t) dt - 3x_i - 3x_i^2 \quad (3.69)$$

(3.66) et (3.67) nous donne :

$$u_3(x) = c_1 + c_2(x) + c_3x^2, \quad (3.70)$$

alors

$$\begin{aligned} u_3(x_i) &= 3x_i + 3x_i^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x_i^2 t u_3(t) dt \\ &= 3x_i + 3x_i^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x_i^2 t (c_1 + c_2(t) + c_3t^2) dt \end{aligned} \quad (3.71)$$

Donc

$$\begin{cases} u_3(x_1) = 3x_1 + 3x_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2 t u_3(t) dt \\ u_3(x_2) = 3x_2 + 3x_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x_2^2 t u_3(t) dt \\ u_3(x_3) = 3x_3 + 3x_3^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x_3^2 t u_3(t) dt \end{cases} \quad (3.72)$$

Après quelques calculs on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = 4 \end{cases} \quad (3.73)$$

Alors

$$u_3(x) = 3x + 4x^2 = u(x) \quad (3.74)$$

dans cet exemple la solution approchée est égale à la solution exacte.

Méthode de Galerkin

Soit $X = L^2(D)$ où un autre espace de Hilbert muni d'un produit scalaire. Exigeons r_n pour satisfaire

$$\langle r_n, \phi_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, d_n \quad (3.75)$$

Le coté gauche est le coefficient de Fourier de r_n associé à ϕ_i . Si ϕ_1, \dots, ϕ_d sont les membres principaux d'une famille orthonormée complet dans X

$$\Phi \equiv \phi_1, \dots, \phi_d, \dots$$

Alors (3.75) exige que les termes dominants soient nuls dans développement de Fourier de r_n par rapport à Φ . Pour trouver u_n , on applique (3.75) à (3.76), cela donne le système linéaire

$$\sum_{j=1}^d c_j [\lambda \langle \phi_j, \phi_i \rangle - \langle K \phi_j, \phi_i \rangle] = \langle f, \phi_i \rangle \quad , i = 1, \dots, d_n \quad (3.76)$$

C'est la méthode de Galerkin pour obtenir une solution approchée.

Exemple 3.3.2 Voici l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \int_0^1 tu(t)dt \quad (3.77)$$

Sa solution exacte est

$$u(x) = 3x + e^{4x} \quad (3.78)$$

On va utiliser la méthode de Galerkin pour résoudre cette équation.

Choisissons $n = 3$ alors $d_n = 3$, donc la solution approchée est donnée par :

$$u_3(x) = \sum_{j=1}^3 c_j \phi_j(x) \quad (3.79)$$

Soit ϕ_i , $1 \leq i \leq 3$ les polynômes de Legendre où :

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 1 \\ \phi_2(x) = x \\ \phi_3(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \end{cases} \quad (3.80)$$

Alors (3.79) devient :

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} \quad (3.81)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} r_3(x) &= u_3(x) - \int_0^1 tu_3(t)dt - 3x - e^{4x} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) \\ &= c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - \int_0^1 t \left(c_1 + c_2t + c_3 \frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt - 3x - e^{4x} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) \\ &= c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - \left[\frac{t^2}{2}c_1 + \frac{t^3}{3}c_2 + \frac{3t^4}{8}c_3 - \frac{t^2}{4}c_3 \right]_0^1 - 3x - e^{4x} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) \\ &= \left[\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{5c_3}{8} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) \right] + x(c_2 - 3) + x^2 \frac{3c_3}{2} - e^{4x} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$r_3(x)$ est orthogonal au ϕ_i , $1 \leq i \leq 3$ donc :

i.

$$\begin{aligned} \langle r_3, \phi_1 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\left[\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{5c_3}{8} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) \right] + x(c_2 - 3) + x^2 \frac{3c_3}{2} - e^{4x} \right) dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{6} - \frac{c_3}{8} - \frac{1}{16}(3 + e^4) = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

ii.

$$\begin{aligned} \langle r_3, \phi_2 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\left[\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{5c_3}{8} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) \right] x + x^2(c_2 - 3) + x^3 \frac{3c_3}{2} - xe^{4x} \right) dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{6} + \frac{c_3}{16} - \frac{1}{32}(17 + 3e^4) = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

iii.

$$\begin{aligned} \langle r_3, \phi_3 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\left[\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} - \frac{5c_3}{8} + \frac{1}{16}(17 + 3e^4) - e^{4x} \right] \frac{3x^2 - 1}{2} + \left(\frac{3x^3 - x}{2} \right) (c_2 - 3) + \left(\frac{3x^4 - x^2}{2} \right) \frac{3c_3}{2} \right) dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c_2}{8} + \frac{2c_3}{10} - \frac{1}{64}(5 + 7e^4) = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{6} - \frac{c_3}{8} - \frac{1}{16}(3 + e^4) = 0 \\ \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{6} + \frac{c_3}{16} - \frac{1}{32}(17 + 3e^4) = 0 \\ \frac{c_2}{8} + \frac{2c_3}{10} - \frac{1}{64}(5 + 7e^4) = 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

La résolution de ce système nous donne :

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1}{8} \left(\frac{1154}{4} - \frac{26}{4} e^4 \right) \approx 8.29 \\ c_2 = \frac{1}{8} (597 - 9e^4) \approx 13.20 \\ c_3 = -\frac{10}{8} (37 - e^4) \approx 21.99 \end{cases} \quad (3.87)$$

Alors, la solution approchée est donnée par :

$$\begin{aligned} u_3(x) &= -\frac{1}{8} \left(\frac{1154}{4} - \frac{26}{4} e^4 \right) + x \frac{1}{8} (597 - 9e^4) - \frac{3x^2 - 1}{2} \frac{10}{8} (37 - e^4) \\ &= -\frac{1}{16} (207 - 3e^4) + \frac{1}{8} (597 - 9e^4) x - \frac{3}{8} (185 - 5e^4) x^2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

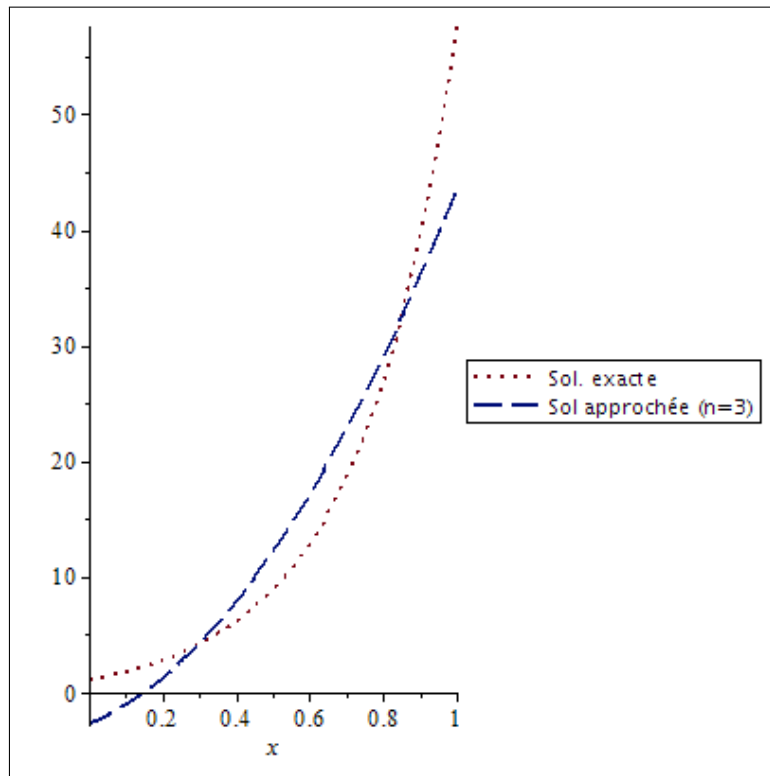


FIGURE 3.2 – Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (3.77)

3.3.2 La méthode mixte

Cette méthode est une combinaison entre les formules quadratures Newton-Cotes et la méthode des approximations successives. Pour notre méthode, on va utiliser la formule de Simpson.

Définition 3.3.1 (La formule de Simpson) Prenons une fonction $u(x)$ avec $x \in [a, b]$ telle que :

$$I = \int_a^b u(x) dx \quad (3.89)$$

On peut écrire cet intégrale comme suivant :

$$I \approx h \sum_{i=1}^m \omega_i u(x_i) \quad , \quad (3.90)$$

où :

$$\star h = \frac{b-a}{m-1}$$

★ Les nœuds x_i sont définis par la relations de récurrence

$$x_i = a + h(i-1)$$

★ Les poids ω_i sont définis par

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \text{ si } i = (1 \vee m) \\ \frac{4}{3} & , \text{ si } i \text{ pair,} \\ \frac{1}{3} & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.91)$$

La formule (3.90) est appelée la formule de Simpson.

Principe de la méthode Soit l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, u(t)) dt \quad (3.92)$$

L'utilisation de la méthode des approximation successives nous donne :

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, u_n(t)) dt \\ u_0(x) = f(x) \end{cases} \quad (3.93)$$

L'utilisation de la formule de Simpson nous donne :

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \omega_i k(x, t_i, u(t_i)) \quad (3.94)$$

En substituant(3.94) dans (3.93) on obtient

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \omega_i k(x, t_i, u_n(t_i)) \\ u_0(x) = f(x), \end{cases} \quad (3.95)$$

où les valeurs des ω_i sont dans (3.91).

Pour chaque $x_j \in [a, b], j = 1, \dots, m$, on obtient la solution sous forme d'un vecteur de dimension m

$$\begin{cases} u_{n+1}(x_j) = f(x_j) + \sum_{i=1}^m \omega_i k(x_j, t_i, u_n(t_i)) \\ u_0(x_j) = f(x_j) \end{cases} \quad (3.96)$$

Posons $k(x_j, t_i, u_n(t_i)) = k_{j,i,n}$, $u_n(x_j) = u_{n,j}$ et $f(x_j) = f_j$ on aura :

$$\begin{bmatrix} u_{n+1,1} \\ u_{n+1,2} \\ \vdots \\ u_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,1,n} & k_{1,2,n} & \dots & k_{1,m,n} \\ k_{2,1,n} & k_{2,2,n} & \dots & k_{2,m,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m,1,n} & k_{m,2,n} & \dots & k_{m,m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Remarque 3.3.1 Pour les équations intégrales de Volterra on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} u_{n+1,1} \\ u_{n+1,2} \\ \vdots \\ u_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,1,n} & 0 & \dots & 0 \\ k_{2,1,n} & k_{2,2,n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m,1,n} & k_{m,2,n} & \dots & k_{m,m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Exemple 3.3.3 [6] Considérons l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = 1 + x + \int_0^1 \frac{x^2}{(t^2 + t + 1)^2} u^2(t) dt \quad (3.99)$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = x^2 + x + 1$.

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0.0	1.0	1.0	0.0e0
0.1	1.11	1.11	0.0e0
0.2	1.24	1.24	0.0e0
0.3	1.39	1.39	2.2204e - 16
0.4	1.56	1.56	2.2204e - 16
0.5	1.75	1.75	0.0e0
0.6	1.96	1.96	2.2204e - 16
0.7	2.19	2.19	0.0e0
0.8	2.44	2.44	0.0e0
0.9	2.71	2.71	0.0e0
1.0	3.0	3.0	0.0e0

TABLE 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée en utilisant la méthode mixte pour **Exemple 3.3.3**

3.3.3 Une méthode numérique en utilisant les polynômes de Bernstein

Cette méthode est applicable sur les équation intégrales de Fredholm. Alors, considérons :

$$h(x)u(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x) \quad , a \leq x \leq b, \quad (3.100)$$

Utilisons la technique du méthode de Galerkin pour obtenir une solution approximée $\tilde{u}(x)$. Prenons

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x), \quad (3.101)$$

où les $B_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Bernstein des degrés i et les a_i sont les paramètres inconnus à trouver.

La substitution de (3.101) dans (3.100) nous donne :

$$h(x) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b \left(k(x,t) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(t) \right) dt = f(x)$$

On peut réécrire cette équation comme

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(h(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) B_{i,n}(t) dt \right) = f(x) \quad (3.102)$$

La multiplication de (3.101) par $B_{j,n}(x)$ puis l'intégration par rapport à x le long de $[a, b]$ nous donnent les équations de Galerkin

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\int_a^b \left(h(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) B_{i,n}(t) dt \right) B_{j,n}(x) dx \right) = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx \quad , j = 0, 1, \dots, n \quad (3.103)$$

Puisque dans chaque équation, il y a trois intégrales. L'intégrale interne du coté gauche est une fonction de x et t qui est intégrée par rapport à t le long de $[a, b]$. Par conséquent, l'intégrale interne devient une fonction de x uniquement et l'intégration par rapport à x donne une constante. Ainsi pour chaque j ($j = 0, \dots, n$) on a une équation linéaire à $n + 1$ inconnue a_i ($i = 0, \dots, n$). Enfin, (3.104) représente le système de $n + 1$ équations linéaires à $n + 1$ inconnues, sont données par

$$\sum_{i=0}^n a_i C_{i,j} = F_j \quad j = 0, 1, \dots, n \quad , \quad (3.104)$$

où

$$C_{i,j} = \int_a^b \left(h(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) B_{i,n}(t) dt \right) B_{j,n}(x) dx \quad , (i, j) = 0, 1, \dots, n, \text{ et}$$

$$F_j = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx \quad , j = 0, 1, \dots, n$$

Les paramètres inconnues a_i sont déterminées par la résolution du système des équations obtenu, et la substitutions de ces paramètres dans (3.101) nous donne la solution approchée \tilde{u}

Remarque 3.3.2 L'erreur de cette formulation est défini par

$$R = \left| \frac{u(x) - \tilde{u}(x)}{u(x)} \right| \quad (3.105)$$

Exemple 3.3.4 [2] Considérons l'équation inégale suivante

$$u(x) = e^x + \int_0^1 2e^x e^t u(t) dt \quad , 0 \leq x \leq 1 \quad (3.106)$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = \frac{e^x}{2 - e^2}$.

$$C_{i,j} = \int_0^1 B_{i,n}(x) B_{j,n}(x) dx - \int_0^1 \left(\int_0^1 2e^x e^t B_{i,n}(t) dt \right) B_{j,n}(x) dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.107)$$

$$F_j = \int_0^1 B_{j,n}(x) e^x dx \quad , j = 0, 1, \dots, n \quad (3.108)$$

Pour $n = 4$, la solution approchée est donnée par

$$u(\tilde{x}) = -0.185571 - 0.185273x - 0.0947442x^2 - 0.0259153x^3 - 0.0128933x^4 \quad (3.109)$$

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0.0	-0.1855612526	-0.1853868426	0.000940
0.1	-0.2050768999	-0.2051159200	0.000190
0.2	-0.2266450257	-0.2267185494	0.000324
0.3	-0.2504814912	-0.2505049431	0.000094
0.4	-0.2768248595	-0.2767853131	0.000143
0.5	-0.3059387842	-0.3058698717	0.000225
0.6	-0.3381146470	-0.3380688310	0.000136
0.7	-0.3736744748	-0.3736924032	0.000048
0.8	-0.4129741624	-0.4130508005	0.000186
0.9	-0.4564070342	-0.4564542350	0.000103
1.0	-0.5044077810	-0.5042129189	0.000386

TABLE 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée en utilisant la méthode basée sur les polynômes de Bernstein pour **Exemple 3.3.4**

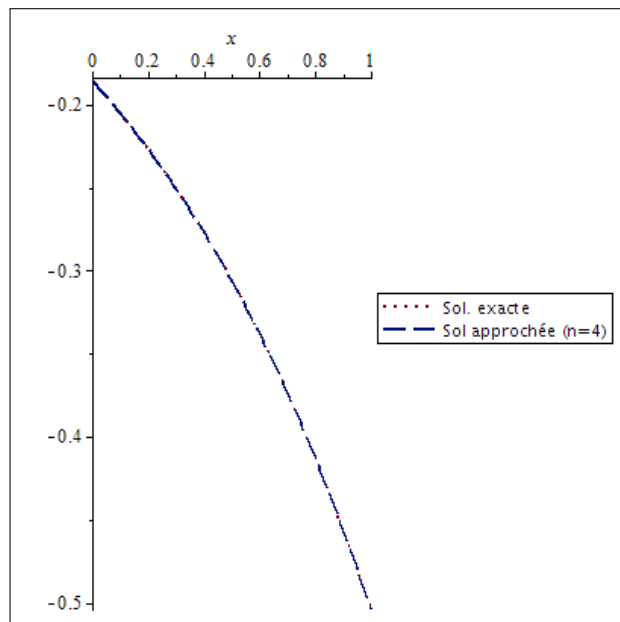


FIGURE 3.3 – Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (3.106)

Chapitre 4

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

4.1 Introduction

De nombreux problèmes peuvent être modélisés par des équations intégro-différentielles fractionnaires issues des diverses applications scientifiques et d'ingénierie. De plus, la plupart des problèmes ne peuvent pas être résolus analytiquement, ce qui nous nécessite d'utiliser des méthodes numériques afin de trouver la plus bonne solution approchée pour notre problème.

Dans ce chapitre, on va essayer d'obtenir la solution de l'équation intégro-différentielle d'ordre fractionnaire de Type Volterra avec un noyaux régulier et faiblement singulier en utilisant in développement tronqué de polynômes de Bernstein de la fonction inconnue. Les polynômes de Bernstein ont été utilisés dans la littérature pour résoudre approximativement plusieurs équations différentielles linéaires et non linéaires, ordinaires et partielles et aussi pour résoudre diverses équations intégrales.

Considérons l'équation intégro-différentielle d'ordre fractionnaire de type de Volterra suivante

$$D^\alpha u(x) = F\left(x, u(x), \int_0^x k(t, u(t))dt\right) \quad , 0 < x < 1 \quad , \alpha > 0, \quad (4.1)$$

avec les conditions au bord suivantes

$$\begin{cases} u(0) = \gamma_0 \\ u'(0) = \gamma_1 \\ u(1) = \beta_0 \\ u'(1) = \beta_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec des noyaux réguliers ou singuliers, où D^α désigne la α^{ime} dérivée fractionnaire de $u(x)$ au sens de Caputo, F une fonction continue et $\gamma_0, \gamma_1, \beta_0, \beta_1$ sont des constantes réelles.

Nous avons introduit un développement tronqué de $u(x)$ en termes de polynômes de Bernstein, puis une formule approchée pour la dérivée au sens de Caputo dans la base polynomiale de Bernstein est dérivée. Ensuite, la EIDF donnée est réduite à un système d'équations algébrique après avoir utilisé des points de collocation appropriées en utilisant la formule quadrature de Gauss. Les coefficients de l'expansion tronquée sont obtenus en résolvant ce système et la forme série approchée de $u(x)$ pour différentes valeurs de est calculée[1].

4.2 La méthode générale

Dans cette section, on va introduire un algorithme numérique pour résoudre une équation intégro-différentielle d'ordre fractionnaire de type de Volterra en utilisant les polynômes de Bernstein comme des fonctions de base.

Sur l'intervalle $[0, 1]$, la formule générale des polynômes de Bernstein vaut

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad , i = 0, 1, \dots, n \quad (4.3)$$

Si l'ensemble $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ dans l'espace de Hilbert $L^2[0, 1]$ est une base complète, on peut écrire n'importe q'un polynôme $u_m(x)$ de degré m comme une combinaison linéaire des $\{B_{i,m}(x)\}_{i=0}^m$

$$u_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(x). \quad (4.4)$$

Définissons une autre formule des polynômes de Bernstein

$$B_{i,n}(x) = \sum_{p=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p} (-1)^p x^{i+p} \quad (4.5)$$

Appliquons la différentiation au sens de Caputo en (4.4), on obtient

$$D^\alpha(u_m(x)) = \sum_{j=0}^m c_j D^\alpha(B_{j,m}(x)) \quad (4.6)$$

L'utilisation de (1.34) et (4.5) nous donne

$$\begin{aligned} D^\alpha(B_{j,m}(x)) &= \sum_{p=0}^{m-j} \binom{m}{j} \binom{m-j}{p} (-1)^p D^\alpha(x^{j+p}) \\ &= \sum_{p=0}^{m-j} \binom{m}{j} \binom{m-j}{p} (-1)^p \frac{\Gamma(j+p+1)}{\Gamma(j+p+1-\alpha)} \quad \text{pour } (j+p) \geq [\alpha] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si $B_{j,m}(x)$ est un polynôme de degré m , on aura

$$D^\alpha(B_{j,m}(x)) = 0 \text{ pour toute } m = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1, \quad \alpha > 0. \quad (4.8)$$

La combinaison de (4.6),(4.7) et (4.8) nous donne

$$D^\alpha(u_m(x)) = \sum_{j=0}^m \sum_{p=[\alpha]-j \geq 0}^{m-j} Q_{j,m,p}^{(\alpha)} c_j x^{j+p-\alpha}, \quad (4.9)$$

où

$$Q_{j,m,p}^{(\alpha)} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{p} (-1)^p \frac{\Gamma(j+p+1)}{\Gamma(j+p+1-\alpha)} \quad (4.10)$$

Prenons, un exemple simple, soit $u(x) = 1 + 2x^2$, alors (4.4) vaut

$$u(x) = u_2(x) = c_0 B_{0,2}(x) + c_1 B_{1,2}(x) + c_2 B_{2,2}(x) \quad (4.11)$$

L'utilisation de (4.3) nous donne

$$\begin{aligned} \star c_0 B_{0,2}(x) &= \binom{2}{0} x^0 (1-x)^2 = (1-x)^2 \\ \star c_1 B_{1,2}(x) &= \binom{2}{0} x^1 (1-x)^2 = 2x(1-x) \\ \star c_2 B_{2,2}(x) &= \binom{2}{0} x^2 (1-x)^0 = x^2 \end{aligned}$$

Cela nous aide à écrire

$$\begin{aligned} u_2(x) &= c_0(1-x)^2 + 2c_1x(1-x) + c_2x^2 \\ &= c_0 + x(-2c_0 + 2c_1) + x^2(c_0 - 2c_1 + c_2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Assortissons (4.12) avec $1 + 2x^2$, on trouve

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ -2c_0 + 2c_1 = 0 \\ c_0 - 2c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Alors

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases} \quad (4.14)$$

Utilisons maintenant (4.9), on aura pour $\alpha = 0.5$

$$\begin{aligned} D^{0.5}(u_2(x)) &= \sum_{j=0}^2 \sum_{p=1-j \geq 0}^{2-j} Q_{j,2,p}^{(0.5)} c_j x^{j+p-0.5} \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^2 Q_{0,2,p}^{(0.5)} x^{p-0.5}}_{I_1} + \underbrace{\sum_{p=0}^1 Q_{1,2,p}^{(0.5)} x^{p+0.5}}_{I_2} + \underbrace{Q_{2,2,0}^{(0.5)} 3x^{1.5}}_{I_3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Après quelques calculs on aura

$$\begin{aligned} \star I_1 &= -\frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{0.5} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{1.5} \\ \star I_2 &= \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{0.5} - \frac{16}{\sqrt{\pi}} x^{1.5} \\ \star I_3 &= \frac{16}{\sqrt{\pi}} x^{1.5} \end{aligned}$$

Alors

$$D^{0.5}(u_2(x)) = \frac{16}{\sqrt{\pi}} x^{1.5} \quad (4.16)$$

D'autre part, si on utilise (1.34) pour $1 + 2x^2$ on obtient

$$D^{0.5}(1 + 2x^2) = 2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} x^{1.5} = \frac{16}{\sqrt{\pi}} x^{1.5} \quad (4.17)$$

On observe qu'on aura le même résultat.

Ensuite, nous dérivons une formule de discrétisation de (4.1) en utilisant une méthode de collocation simple, et comme nous avons déjà approximé $u(x)$, l'utilisation de (4.4) et (4.9) dans (4.1) nous donne

$$D^\alpha u_m(x) = F(x, u_m(x), \int_0^x k(t, u_m(t)) dt) \quad , 0 < x < 1, \alpha > 0 \quad (4.18)$$

i.e

$$\sum_{j=0}^m \sum_{p=[\alpha]-j \geq 0}^{m-j} Q_{j,m,p}^{(\alpha)} c_j x^{j+p-\alpha} = F \left(x, \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(x), \int_0^x k \left(t, \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(t) \right) dt \right) \quad (4.19)$$

Maintenant, on va faire la collocation sur (4.19) aux points $x_i, i = 0, 1, \dots, m - [\alpha]$ pour obtenir

$$\sum_{j=0}^m \sum_{p=[\alpha]-j \geq 0}^{m-j} Q_{j,m,p}^{(\alpha)} c_j x_i^{j+p-\alpha} = F \left(x_i, \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(x_i), \int_0^{x_i} k \left(t, \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(t) \right) dt \right) \quad (4.20)$$

Pour utiliser la formule de quadrature Gaussienne pour (4.20), on doit premièrement transformer le t -intervalle $[0, x_i]$ au s -intervalle $[-1, 1]$ comme suit

$$\left(s = \frac{2}{x_i} t - 1 \right) \Rightarrow \left(t = \frac{x_i}{2} (s + 1) \right)$$

Alors, pour $i = 0, 1, m - [\alpha]$, (4.20) vaut

$$\sum_{j=0}^m \sum_{p=[\alpha]-j \geq 0}^{m-j} Q_{j,m,p}^{(\alpha)} c_j x_i^{j+p-\alpha} = F \left(x_i, \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(x_i), \frac{x_i}{2} \int_0^{x_i} k \left(\frac{x_i}{2} (s + 1), \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m} \left(\frac{x_i}{2} (s + 1) \right) \right) ds \right) \quad (4.21)$$

L'utilisation du formule quadrature de Gauss nous donne

$$\sum_{j=0}^m \sum_{p=[\alpha]-j \geq 0}^{m-j} Q_{j,m,p}^{(\alpha)} c_j x_i^{j+p-\alpha} = F \left(x_i, \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(x_i), \frac{x_i}{2} \sum_{q=0}^m \omega_q k \left(\frac{x_i}{2} (s_q + 1), \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m} \left(\frac{x_i}{2} (s_q + 1) \right) \right) \right), \quad (4.22)$$

où les s_q sont les $m + 1$ racines de polynôme de Legendre P_{m+1} et ω_q sont les poids correspondants. Nous avons utilisé la règle de quadrature de Gauss car elle est construite pour donner un résultat exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$ ou moins par un choix approprié de points x_i et ω_i pour $i = 0, 1, \dots, m$.

Remplaçons maintenant (4.9) dans les conditions initiales et les conditions aux limites (4.2). Ensuite nous obtenons d'autres $[\alpha]$ équations données par

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m c_j B_{j,0} = \gamma_0 & , \quad \sum_{j=0}^m Q_{j,m,2-j}^{(2)} c_j = \gamma_1 \\ \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m} = \beta_0 & , \quad \sum_{j=0}^m \sum_{p=2-j \geq 0}^{m-j} Q_{j,m,p}^2 c_j = \beta_1 \end{cases} \quad (4.23)$$

Ainsi, l'équation (4.22) associée aux $[\alpha]$ équations de (4.23) donne $m + 1$ équations qui peuvent être résolues pour les $m + 1$ inconnues c_j pour $j = 0, 1, \dots, m$ en utilisant une méthode numérique appropriée. Enfin, la fonction $u(x)$ approchée par (4.4) peut être obtenue.

4.3 Un exemple numérique

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} D^{0.75}u(x) = -\frac{1}{5}x^2e^xu(x) + 6\frac{x^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + e^x \int_0^x tu(t)dt \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

La solution exacte de ce problème est $u(x) = x^3$, on va le résoudre numériquement en utilisant la méthode si-dessus.

Choisissons $m = 6$, alors

$$u(x) \approx u_6(x) = \sum_{j=0}^6 c_j B_{j,6}(x) \quad (4.25)$$

On va alors calculer les sept premiers polynômes de Bernstein de degré 6

- ★ $B_{0,6}(x) = (1-x)^6$
- ★ $B_{1,6}(x) = 6x(1-x)^5$
- ★ $B_{2,6}(x) = 15x^2(1-x)^4$
- ★ $B_{3,6}(x) = 20x^3(1-x)^3$
- ★ $B_{4,6}(x) = 15x^4(1-x)^2$
- ★ $B_{5,6}(x) = 6x^5(1-x)$
- ★ $B_{6,6}(x) = x^6$

Donc, on aura

$$u_6(x) = c_0(1-x)^6 + 6c_1x(1-x)^5 + 15c_2x^2(1-x)^4 + 20c_3x^3(1-x)^3 + 15c_4x^4(1-x)^2 + 6c_5x^5(1-x) + c_6x^6 \quad (4.26)$$

L'utilisation de (4.22) nous donne

$$\sum_{j=0}^6 \sum_{p=1-j \geq 0}^{6-j} c_j Q_{j,6,p}^{(0.75)} x_i^{j+p-0.75} = -\frac{1}{5}x_i^2 e^{x_i} \sum_{j=0}^6 c_j B_{j,6}(x_i) + 6\frac{x_i^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \frac{x_i}{2} e^{x_i} \sum_{q=0}^6 \omega_q \frac{x_i}{2}(s_q+1) \sum_{j=0}^6 c_j B_{j,m}\left(\frac{x_i}{2}(s_q+1)\right), \quad (4.27)$$

où les s_q , ($q = 0, \dots, 6$) sont les racines du polynôme de Legendre $P_7(x)$ et les ω_q , ($q = 0, \dots, 6$) sont les poids correspondants.

$$\begin{aligned} P_7(x) &= \frac{d^7}{2^7 7! dx^7} [(x^2 - 1)^7] \\ &= \frac{1}{16} (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x), \end{aligned} \quad (4.28)$$

et les poids sont égaux à 1.

Et aussi la condition initiale $u(0) = 0$ nous donne

$$c_0 = 0 \quad (4.29)$$

La résolution des équations (4.27) avec (4.29) nous donne

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 5.83273 \times 10^{-15} \\ c_2 = -1.20243 \times 10^{-14} \\ c_3 = 0.05 \\ c_4 = 0.2 \\ c_5 = 0.5 \\ c_6 = 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

Si on met ces valeurs dans (4.25) on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= 3.5 \times 10^{-14}x - 3.55 \times 10^{-13}x^2 + x^3 - 3.91 \times 10^{-12}x^4 + 5.02 \times 10^{-12}x^5 - 4.05 \times 10^{-12}x^6 \\ &\approx x^3 \end{aligned}$$

Qu'elle est une bonne approximation.

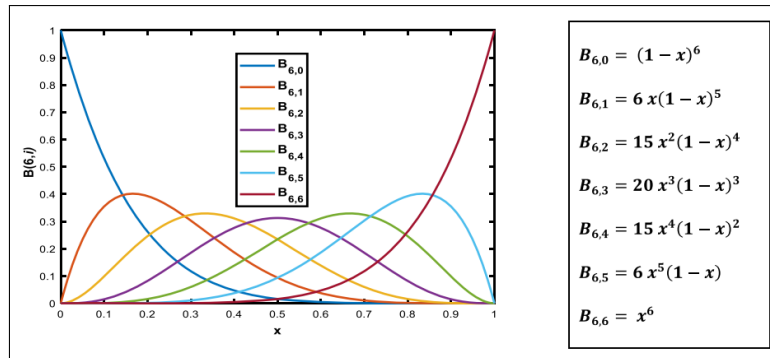


FIGURE 4.1 – Les polynômes de Bernstein pour le degré $n = 6$ dans l'intervalle $[0, 1]$

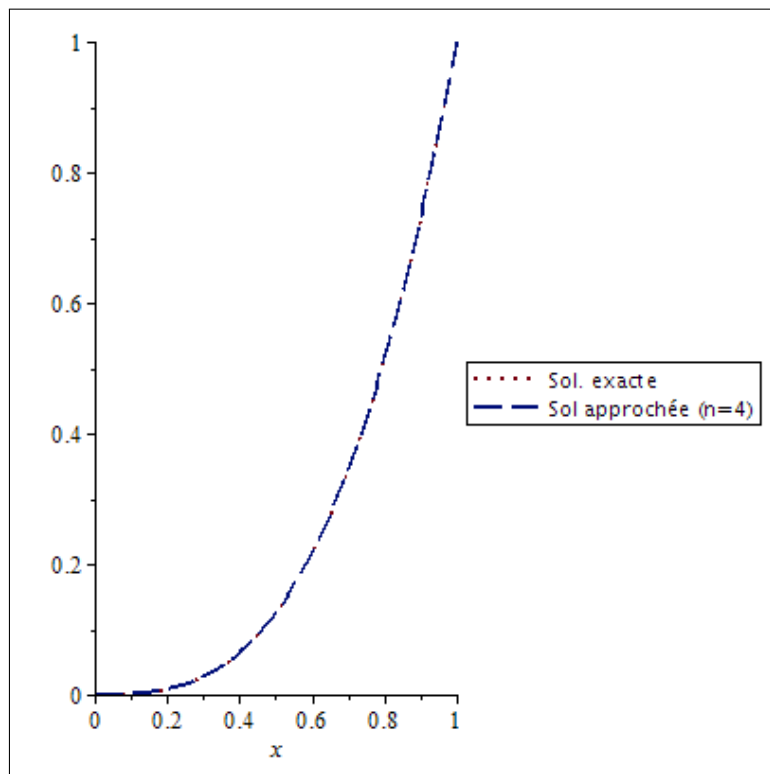


FIGURE 4.2 – Illustration de la solution exacte et la solution numérique de l'équation (4.24)

CONCLUSION

Dans ce travail, on a introduit les notions mathématiques essentielles afin de résoudre les équations intégrales, les dernières sont présentées avec ses différents types dans le cas ordinaire. En outre, le travail se termine par une application numérique assez intéressante dans le calcul fractionnaire, où le problème étudié contient une équation intégrale-différentielle dont l'ordre de la dérivée est fractionnaire.

Bibliographie

- [1] B.N.Mandal A.Chatterjee, U.Basu. Numerical solution of volterra type fractional order integro-differential equations in bernstein polynomaial basis. 11, 2017.
- [2] M.S. Islam A.Shirin. Numerical solution of fredholm integral equations using bernstein polynomaials. *Scientific Research*, 2013.
- [3] A.Wazwaz. Linear and nonlinear integral equations methods and applications. *Springer Heidelberg*, 639, 2011.
- [4] A.Wazwaz. A first course in integral equations. *World Scientific Publishing Company*, 2015.
- [5] Oldham B.Keith and J.Spanier. Fractional calculus.theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. *ACADEMIC PRESS,INC.(LONDON) LTD*, 111 :16–24, 1974.
- [6] I.Teharbit B.Sehili. Résolution des équations intégrales non linéaires. *Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER*, pages 32–36.
- [7] D.Keffer. Advanced analytical technics for the solution of single and multi-dimensional integral equation. *University of Tennessee*, August,1999.
- [8] D.S.Mohamed and R.Taher. Comparaison of chybyshev and legendre polynomials methods for solving two dimensional volterra-fredholm integral equations. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, pages 302–307, 2017.
- [9] Kendall E.Atkinson. The numerical solution of integral equation of the second kind. *CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS*, 2009.
- [10] F.Smithies. Integral equations. *Cambridge University Press*, 1958.
- [11] H.Hochstadt. Integral equations. *Library of Cataloging in Publication data*, 1973.
- [12] J.Singh. Integral equations and calculus of variations. *Maharshi Dayanand University,ROHTAK*, pages 2–3, 2021.
- [13] M.Rahman. Integral equations and their applications. *WIT*, 2007.
- [14] P.Collins. Differential and integral equations. *Oxford university Press Inc*, 2006.
- [15] R.Kress. Linear integral equations. *second edition,Springer-Verlag*, 82, 1999.