

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université du 20 Août 1955 Skikda

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique



Série : D012122002D

Année : 2022

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Génie mécanique

Par :

FENIZRI Wassila

Thème

*Approches Numérique Et Semi-Analytique D'un Ecoulement
Hydromagnétique Viscoélastique Entre Deux Parois Non Parallèles.*

Soutenue le : 15/06/2022

Devant le Jury composé de :

<u>Président :</u>	<i>METATLAAbderrezak</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Skikda</i>
<u>Rapporteur :</u>	<i>KEZZAR Mohamed</i>	<i>M.C. /A</i>	<i>Université de Skikda</i>
<u>Co-Rapporteur :</u>	<i>KHOUNFAIS Kamel</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Skikda</i>
<u>Examineur :</u>	<i>BOUHEZZA aicha</i>	<i>M.C. /A</i>	<i>Université de Skikda</i>
<u>Examineur :</u>	<i>KHERIEFE Nacereddine</i>	<i>M.C. /A</i>	<i>ENSET</i>
	<i>Mohamed</i>		
<u>Examineur :</u>	<i>BENMACHICHE A.M. Hakim</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Batna</i>
<u>Examineur:</u>	<i>GUERBAI Salah</i>	<i>M.C. /A</i>	<i>Université de Biskra</i>

Remerciements

Nous tenons à remercier **ALLAH**, le tout puissant de nous avoir donné courage et volonté pour accomplir ce modeste travail.

Je voudrais remercier vivement mon encadreur de thèse Monsieur **M.KEZZAR**, maitre de conférences A à l'université de Skikda, pour Ses conseils et sa confiance qu'il m'a accordée en encadrant ce travail.

Je remercie aussi le **Professeur KHOUNFAIS Kamel** d'avoir Co-encadré ce travail de thèse.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail. Que monsieur le Président de jury **METATLA Abderrezak** professeur a l'université de Skikda. Qu'aicha **Bouhezza** maitre de conférences à l'université de Skikda. Que **KHERIEFE Nacereddine Mohamed** maitre de conférences à ENSET. Que **BENMACHICHE A.M. Hakim** Professeur Université de Batna. Que **GUERBAI Salah** maitre de conférences à Université de Biskra.

Je tiens à remercier tout particulièrement monsieur **A.DIB** professeur à l'université d'Annaba, et monsieur **R.SARI** professeur à l'université d'Annaba Pour nous aider.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DEDICACE

Je dédie ce travail à mon père, que Dieu ait pitié de lui,

*Je dédie ce travail à l'esprit de l'honorable professeur Lakhdar
KHOCHEMANE que Dieu lui fasse miséricorde*

A ma chère mère,

A mon mari et mes enfants (Omar El-Farouk-Hawa-Hour),

A mes frères et sœurs,

*A toute ma famille, et les familles cheribet et brahimie jeunes
et vieilles,*

Et à tous mes collègues et amis.

Abstract :

The idea developed in this thesis consists in re-studying the nonlinear problem of the Jeffery-Hamel flow (JHF), but by taking into account the effect of a viscoelastic fluid and the presence of an external and transverse magnetic field. . The basic partial differential equations are transformed into a third order nonlinear ordinary differential equation using similarity transformations, this equation characterizes the dynamic distribution of the studied flow. The latter was processed numerically by the Runge-Kutta-Fehlberg method (RKF-45) combined with shooting method and analytically by a MATHEMATICA computer code with modified adomian decomposition method of Duan-Rach (DRMA). Finally, the effect of various physical parameters such as the Reynolds number Re , the opening angle α , the Hartmann number Ha , the Weissenberg number W_i on the velocity distribution and the coefficient of friction C_f of the envisaged flow is presented graphically. The results obtained in particular cases are also compared with some of the solutions existing in the literature.

Keywords :

JHF, viscoelastic, external and transverse magnetic field, Runge-Kutta-Fehlberg methods, Shooting technique, DRMA.

Résumé :

L'idée développée dans cette thèse consiste à réétudier le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel (JHF), mais en prenant en compte l'effet d'un fluide viscoélastique et la présence d'un champ magnétique externe et transversal. Les équations aux dérivées partielles de base sont transformées en équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre en utilisant des transformations de similarité, cette équation caractérise la distribution dynamique de l'écoulement étudié. Cette dernière a été traitée numériquement par la méthode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF-45) associée à la méthode de Tir et analytiquement par un code de calcul MATHEMATICA basé sur la méthode de décomposition adomienne modifiée de Duan-Rach (DRMA). Finalement, L'effet de divers paramètres physiques tels que le nombre de Reynolds Re , l'angle d'ouverture α , le nombre de Hartmann Ha , le nombre de Weissenberg Wi sur la distribution des vitesses et le coefficient de frottement C_f de l'écoulement envisagé est présenté graphiquement. Les résultats obtenus dans des cas particuliers sont également comparés à certaines des solutions déjà existantes dans la littérature.

Mots Clés :

JHF, fluide viscoélastique, champ magnétique externe et transversal, méthode de Runge-Kutta-Fehlberg, méthode de Tir, DRMA.

ملخص:

تتمثل الفكرة التي تم تطويرها في هذه الأطروحة في إعادة دراسة المشكلة غير الخطية لتدفق جيفري هامل (JHF) ، ولكن مع مراعاة تأثير المائع اللزج المرن ووجود مجال مغناطيسي خارجي وعمودي. يتم الانتقال من المعادلات التفاضلية الجزئية الأساسية إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطية من الدرجة الثالثة باستخدام المتغيرات المتشابهة ، وهذه المعادلة تميز التوزيع الديناميكي لتدفق المدروس. تمت معالجة هذه الأخيرة عدديًا بواسطة طريقة (45) (RKF) (Runge-Kutta-Fehlberg) المرتبطة بطريقة Tir وتحليليًا باستخدام طريقة التحلل Adomian المعدلة لـ (DRMA) Duan-Rach. أخيرًا ، يتم عرض تأثير العوامل الفيزيائية المختلفة مثل رقم رينولدز Re وزاوية الفتح α ورقم هارتمان Ha ورقم ويسمبورج (Wi) على الخصائص الديناميكية للتدفق المدروس بما فيها توزيع السرعة ومعامل الاحتكاك. يتم أيضًا في هذه الدراسة مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع بعض الحلول الموجودة في الأدبيات.

الكلمات المفتاحية:

JHF ، سائل مطاطي لزج ، مجال مغناطيسي خارجي وعمودي ، رونج كوتا، طريقة تير
.DRMA

Glossaire : Sigles et Notations

Symbole	Signification
A_n	Le polynôme d'adomiane
B	Champs magnétique
α	Demi-angle d'ouverture de la conduite
ρ	Masse volumique
∇	Nabla (un opérateur mathématique caractérisant le gradient)
ν	Viscosité cinématique
f_B	La force de Lorentz
E	Champ électrique
V	La vitesse du fluide
σ	La conductivité électrique
μ	Viscosité dynamique
(r, θ, z)	Coordonnée cylindriques
τ	Le tenseur de contraintes
D	La partie déviatrice du tenseur du gradient de vitesse
μ_0	Le coefficient de la viscosité du fluide
$\psi_{1,0}$ et $\psi_{2,0}$	Le premier et le second coeff de la contrainte normale
α_1, α_2 et α_3	Les propriétés du liquide
∞	l'infini
η	Angle non-dimensionnel
$f(\theta)$	Vitesse dirigée vers le sommet de l'angle
f_{max}	Vitesse maximale au centre du canale
$F(\eta)$	La fonction vitesse
f_0	La vitesse
V_r, V_θ, V_z	Vecteur vitesse de composantes cylindriques
$F'(\eta)$	Dérivée première de la fonction vitesse
$f''(\eta)$	Dérivée seconde de la fonction vitesse
$F'''(\eta)$	Le troisième dérivé de la fonction vitesse
$f(0)$	La vitesse sur l'axe du canal
$f(\pm 1)$	La vitesse au niveau des parois
$f'(0)$	Dérivée première de la fonction vitesse
τ_w	Effort de cisaillement au niveau des parois
Re	Le nombre de Reynolds.
W_i	Le nombre de Weissenberger
Ha	Le nombre de Hartmann
Q	Le débit
e	Erreur
C_f	Le coefficient de frottement
L	Opérateur linéaire
N	Opérateur non linéaire
g	Une fonction connue
R	Résidu linéaire
λ	paramètre réel.

Glossaire : Sigles et Notations

Sigles

Abréviation	Signification
DTM	La Méthode de transformation différentielle
HPM	La Méthode homotopy perturbation
DRMA	La Méthode de l'approche Duan – Rach modifier
Tir	La Méthode de Tir
MHD	Magnétohydrodynamique
RK – 45	La Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg
EDO	Les équations différentielles ordinaires
EDP	Les équations aux dérivées partielles
RK4	La méthode de Runge Kutta d'ordre quatre
DRA	La méthode Duan-Rach Approach
VIM	La méthode d'itération variationnelle
HPM	La méthode d'Homotopy perturbée
HAM	La méthode d'analyse d'homotopie
HPM	La méthode d'homotopie perturbée
DTM	La méthode de transformation différentielle
OHAM	La méthode asymptotique à homotopie optimale
ADM	La méthode de décomposition d'Adomian
RVIM	La méthode de Reconstruction des variations d'itérations
RKHSM	Le production Kernel Hilbert Space Method
CM	La méthode de collocation
GDM	La méthode de décomposition généralisée
PHAM	La méthode d'analyse par homotopie des prédicteurs

Liste Des figures

<i>N°</i>	<i>Titre</i>	<i>Page</i>
Figure I.1	Géométrie de l'écoulement	22
Figure I.2	Géométrie de l'écoulement envisagé	27
Figure.II.1	Géométrie de l'écoulement étudié.	31
Figure.III.1	La méthode de Tir°	50
Figure IV.1	Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse dans un convergent pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque $\alpha = -5^\circ$ et $Wi = 0.25$.	61
Figure IV.2	Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse dans un divergent pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque $\alpha = -5^\circ$ et $Wi = 0.25$.	62
Figure IV.3	Effet de l'angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un convergent pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque $Re = 82$ et $Wi = 0.8$.	64
Figure IV.4	Effet de l'angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un divergent pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque $Re = 82$ et $Wi = 0.6$.	65
Figure IV.5	Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse dans un convergent lorsque : $Re = 30$, $Wi = 0.7$ et $\alpha = -5^\circ$	66
Figure IV.6	Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse dans un divergent lorsque : $Re = 30$, $Wi = 0.7$ et $\alpha = +5^\circ$	67
Figure IV.7	Effet du nombre de Weissenberger Wi sur le profil de vitesse dans un convergent pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque : $Re = 30$ et $\alpha = -5^\circ$	69
Figure IV.8	Effet du nombre de Weissenberger Wi sur le profil de vitesse dans un divergent pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque : $Re = 30$ et $\alpha = +5^\circ$	70

Liste Des figures

Figure IV.9	Variation du Coefficient de frottement en fonction du produit de $Re \times \alpha$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque : $Wi = 0.25$	71
Figure IV.10	Variation du Coefficient de frottement en fonction du produit de $Ha \times \alpha$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds lorsque : $Wi = 0.5$	72
Figure IV.11	Variation du Coefficient de frottement en fonction du produit de $W_i \times \alpha$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque : $Re = 35$	73
Figure IV.12.	Effet du nombre d'itérations sur l'évaluation de l'erreur dans un convergent lorsque: $Ha = 0, Re = 55, Wi = 0.5$ et $\alpha = -5^\circ$.	74
Figure IV.13.	Effet du nombre d'itérations sur l'évaluation de l'erreur dans un divergent lorsque: $Ha = 0, Re = 55, Wi = 0.5$ et $\alpha = 5^\circ$	74
Figure IV.14.	Comparaison entre mes résultats et les résultats obtenus par Shadloo [33] de profil de vitesse $f(\eta)$ lorsque : $Ha = 0, Wi = 0.1$ et $\alpha = \frac{\pi}{8}$.	77
Figure IV.15.	Comparaison mes résultats (DTMA) avec les résultats obtenus par la fonction intégrée dans MATHEMATICA (HAM-based Mathematica package BVPh 2) pour le profil de vitesse dans convergent-divergent lorsque: $Ha = 0, Re = 250, Wi = 0.5$, et $\alpha = \pm 3^\circ$.	78
Figure IV.16.	Comparaison mes résultats (DTMA) avec les résultats obtenus par la fonction intégrée dans MATHEMATICA (HAM-based Mathematica package BVPh 2) pour le profil de vitesse dans convergent-divergent lorsque: $Ha = 0.1, Re = 250, Wi = 0.5$, et $\alpha = \pm 3^\circ$.	79

Liste Des Tableaux

N°	Titre	Page
Tableau III.1	les coefficients de RK45 $o(h^4)$	20
Tableau III.2	les coefficients de RK45 $o(h^5)$	22
Tableau III.3	Comparaison entre la solution exacte et numérique par RKF4	43
Tableau III.4	Comparaison entre la solution exacte et numérique par RKF45	44
Tableau III.5	Comparaison entre la méthode RKF45 et RK4	44
Tableau III.6	Comparaison entre la solution exacte et la solution numérique	48
Tableau IV.1	La procédure de convergence des résultats analytiques pour le profil de vitesse dans un canal divergent lorsque $\alpha = +3^\circ, Ha = 1, Re = 50$ et $Wi = 0.5$	75
Tableau IV.2	La procédure de convergence des résultats analytiques pour le profil de vitesse dans un canal convergent lorsque $\alpha = -3^\circ, Ha = 1, Re = 50$ et $Wi = 0.5$	75
Tableau IV.3	Comparaison entre mes résultats avec d'autres travaux pour la distribution des vitesses dans un canal convergent lorsque: $Re = 110, Ha = Wi = 0$ et $\alpha = 3^\circ$	76
Tableau IV.4	Comparaison entre mes résultats avec d'autres travaux pour la distribution des vitesses dans un canal convergent lorsque: $Re = 110, Ha = Wi = 0$ et $\alpha = 3^\circ$	76
Tableau IV.5	Comparaison entre les techniques analytiques adoptées avec la solution exacte pour le coefficient de frottement c_f dans un canal divergent-convergent lorsque: $Ha = Wi = 0$.	79
Tableau IV.6	Comparaison entre les résultats numériques et analytiques dans un canal divergent lorsque: $Re = 1, Ha = 0, Wi = 0.1$ et $\alpha = +5^\circ$.	80
Tableau IV.7	Comparaison entre les résultats numériques et analytiques dans un canal convergent lorsque: $Re = 1, Ha = 0, Wi = 0.1$ et $\alpha = -5^\circ$.	80

Organigramme

N°	Titre	Page
Organigramme. I.1	l'organisation du travail	28

Table Des Matières

Remerciements	1
Dédicace	2
Résumé	3
Notations générales	6
Liste des figures	8
Liste des tableaux	10
Organigramme	11
Table de matière	12
Introduction Générale	15

Chapitre I : Revue bibliographique

I.1. Introduction	18
I.2. Revue bibliographique	18
I.3. Problématique	26
I.4 Méthodologie de recherche	27
I. 5 Conclusion	29

Chapitre II : Formulation mathématique

II.1. Introduction	31
II.2. Géométrie et problématique du problème physique	31
II .3.Formulation Mathématique	31
II.4 Hypothèses Simplificatrices	32
II. 5 Mise en équations du problème	32
II.6 condition aux limites	34
II.7 .Variable de similitude	35
II.8 .Formulation adimensionnelle des équations	35
II.9 .Les nombres adimensionnelle	35
II.10. Le coefficient de frottement	36
II.11. Conclusion	36

Table Des Matières

Chapitre III : Outils mathématiques

III.1. Introduction	38
III. 2. Méthode de traitement numérique	38
III. 2.1. Principes la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (RK45)	38
III. 2.2. Les exemples d'application	42
III. 2.3. Algorithme de la méthode RKF45	45
III. 2.4. Préparation des équations obtenues au traitement numérique	45
III. 2.5. Méthode de Tir	46
III. 3. Méthode de traitement analytique	50
III.2.1. Historique de l'approche Duan – Rach (DRA)	50
III.2.2. Principe de la méthode DRA (Duan-Rach Approach):	51
III.2.3. La méthode de Duan-Rach modifiée (DRMA).	53
III.2.4. Convergence de la méthode Duan-Rach modifiée:	53
III. 3.5. Implémentation de la méthode Duan-Rach modifiée:	54
III. 4 Conclusion	57

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV .1.Introduction	59
IV 2.1. Effet du nombre de Reynolds Re	59
IV 2.2. Effet de l'angle d'ouverture α	63
IV 2.3. Effet du nombre de Hartmann Ha	65
IV 2.4. Effet du nombre de Weissenberger Wi	68
IV 3. Coefficient de frottement C_f	70
IV 4. Convergence de la méthode DRMA	73
IV 5. Comparaison des résultats et validation	75
IV 6. Conclusion	81
Conclusion et Perspective	83-86
Bibliographie	88

Introduction

Générale

L'étude de l'écoulement d'un fluide incompressible et viscoélastique entre deux parois planes formant un angle entre elles, connu sous le nom de Jeffery-Hamel (écoulement dans un convergent-divergent), a reçu un grand intérêt et une grande importance en raison de ses diverses applications naturelles ou industrielles dans les domaines des mathématiques appliquées, de la physique, de la mécanique et du génie civil.

L'objectif principal de cette thèse est dédié **dans un premier temps** à la modélisation de l'écoulement d'un fluide incompressible et viscoélastique entre deux parois non parallèles en présence d'un champ magnétique externe. Dans un second temps, l'étude est consacrée à la résolution de l'équation différentielle obtenue numériquement et analytiquement à la fois.

Ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons brièvement une revue bibliographique des travaux réalisés sur la thématique envisagée.

Le **deuxième chapitre** introduit une formulation mathématique de l'écoulement magnétohydrodynamique d'un fluide viscoélastique de Jeffery-Hamel. L'équation obtenue a été traitée numériquement et analytiquement.

Nous présentons dans **le troisième chapitre** les principaux outils mathématiques utilisés pour résoudre l'équation différentielle non linéaire qui caractérise le champ dynamique de l'écoulement envisagé. Par la suite, l'équation obtenue a été résolue à la fois numériquement et analytiquement par les techniques de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF-45) associée à la méthode de Tir et la méthode de décomposition Adomienne modifiée de Duan-Rach (DRMA) respectivement.

Le dernier chapitre de ce manuscrit est consacré aux effets de la variation des grandeurs physiques telles que le nombre de Reynolds Re , l'angle d'ouverture α , le nombre de Hartmann Ha et le nombre de Weissenberg W_1 sur la distribution des vitesses

et le coefficient de frottement C_f de l'écoulement envisagé. Les résultats sont validés par la suite avec ceux de la littérature scientifique.

Enfin, ce travail de thèse se termine par une conclusion générale, synthétisant les principaux résultats, suivi de perspectives.

Chapitre I

Revue

Bibliographique

I.1. Introduction:

Durant ces dernières années, l'étude de l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux parois planes formant un angle entre elles, connu sous le nom de Jeffery-Hamel (écoulement dans un convergent-divergent), a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux théoriques et/ou numériques. Dans la section suivante, on va présenter une brève synthèse bibliographique des principaux travaux réalisés sur la thématique envisagée, suivie de la problématique ainsi que de la méthodologie de recherche adoptée.

I.2. Revue Bibliographique :

Les premiers travaux portant sur l'écoulement d'un fluide entre deux parois planes non parallèles (écoulement dans un convergent-divergent) ont été entrepris, dans les années 1915 et 1916, par **JEFFERY** [1] et **HAMEL** [2]. Cette longue période de découverte et l'importance technologique de ce type d'écoulement, ont fait que beaucoup de travaux ont été consacrés à l'écoulement dit de Jeffery-Hamel. Parmi ces travaux, l'étude menée par **ROSENHEAD** [3] a consisté à trouver une solution sous forme de fonctions jacobiniennes elliptiques. **HOLSTEIN** [4] a étudié l'effet des grandes valeurs du nombre de Reynolds ($Re \sim \infty$) sur l'écoulement de Jeffery-Hamel. **MILLSAPS et POHLHAUSEN** [5] ont proposé une solution exacte de l'équation d'énergie qui gouverne la distribution des températures dans l'écoulement de Jeffery-Hamel. La recherche menée par **AI FARKH et HAMADICHE** [6] a été consacrée à l'étude de la stabilité linéaire et temporelle de l'écoulement tridimensionnel dans un canal divergent en rotation. **MAKINDE et MHONE** [7] ont utilisé l'approximation de type Hermite-Padé pour étudier la stabilité du problème hydromagnétique de l'écoulement de Jeffery-Hamel. **CORLESS et al.** [8] furent parmi les premiers à étudier la solution analytique du problème classique d'un fluide bidimensionnel de l'écoulement de Jeffery – Hamel. En effet, ces auteurs ont exprimé la solution de ce problème sous forme de fonctions elliptiques. **SADEGHY et al.** [9] ont proposé une solution de similitude pour l'écoulement MHD d'un fluide viscoélastique à travers des canaux convergents-divergents. Ils ont utilisé la méthode de collocation de Chebyshev pour résoudre le problème MHD numériquement. L'étude faite par **GORJI-BANDPAY et al.** [10] utilise la méthode des différences finies pour étudier l'écoulement laminaire incompressible dans un canal convergent-divergent. **PETERSON et al.** [11] ont étudié numériquement

l'écoulement d'un fluide incompressible bidimensionnel dans un canal convergent-divergent par la méthode des éléments finis. **ESMAILI** et al. [12] ont étudié l'écoulement de Jeffery-Hamel par la méthode de décomposition adomienne. La comparaison des résultats de cette investigation avec certains travaux antérieurs a montré une excellente précision de la technique ADM utilisée. **GANJI** et al. [13] ont employé deux méthodes pour résoudre le problème de l'écoulement de Jeffery-Hamel, à savoir la méthode d'itération variationnelle (VIM) et la méthode d'Homotopy perturbée (HPM). Les résultats obtenus par cette étude révèlent que les méthodes adoptées sont très efficaces, simples de mise en œuvre et peuvent être appliquées à d'autres problèmes non linéaires. Le travail effectué par **JONEIDI** et al. [14] résout le problème non linéaire de l'écoulement classique de Jeffery-Hamel (champ dynamique) par une collection de méthodes analytiques telles que la méthode d'analyse d'homotopie (MAH), la méthode d'homotopie perturbée (MHP) et la méthode de transformation différentielle (MTD). Les avantages de la méthode MAH par rapport aux autres méthodes ont été clairement visualisés. Par la suite, une nouvelle modification de la méthode d'analyse d'homotopie appelée méthode asymptotique d'homotopie optimale (OHAM) a été utilisée par **ESMAEILPOUR** et **GANJI** [15] pour résoudre le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel. Une nouvelle technique spectrale hybride d'homotopie a été proposée et appliquée avec succès par **MOTSA** et al. [16] dans la résolution du problème non linéaire de l'écoulement magnétohydrodynamique de Jeffery-Hamel. Les résultats obtenus montrent que la technique d'analyse spectrale-homotopique converge au moins deux fois plus vite que la méthode standard d'analyse d'homotopie. Dans un autre travail [17], **MOTSA** a présenté la solution de l'équation non linéaire qui régit l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible entre deux parois rigides convergentes-divergentes en utilisant une méthode d'analyse d'homotopie améliorée. Les résultats obtenus par cette nouvelle technique montrent que la solution proposée converge plus rapidement que la méthode d'analyse d'homotopie et la méthode asymptotique d'homotopie optimale. La méthode standard d'analyse d'homotopie a été utilisée pour étudier le transfert de chaleur de l'écoulement d'un fluide de second grade dans un canal divergent-convergent par **HAYAT** et al. [18]. **ALAM** et al. [19] ont examiné le comportement critique de la solution de l'écoulement MHD d'un fluide visqueux incompressible entre des plaques non parallèles. La solution de ce problème a été obtenue par des approximations de type Padé-Hermite.

La solution analytique de l'écoulement magnétohydrodynamique d'un fluide viscoélastique dans les canaux convergents-divergents a été également explorée par **SHADLOO** et al. [20]. Les résultats analytiques basés sur la méthode HPM montrent un excellent accord avec ceux du traitement numérique. Les études réalisées par [21,22] sont des approches analytiques effectuées respectivement par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et la méthode de transformation différentielle (DTM) afin de résoudre le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel en présence d'un champ magnétique externe. La comparaison faite dans cette étude montre clairement l'efficacité des méthodes utilisées par rapport à la méthode numérique de Runge-Kutta. **SHEIKHOLESAMI** et al. [23] ont réétudié l'écoulement de Jeffery-Hamel en présence d'un champ magnétique externe tenant en compte la présence de nanoparticules dans un fluide de base. En effet, les équations issues de la modélisation mathématique sont résolues par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Dans l'étude menée par **IMANI** et al. [24], la méthode de Reconstruction des variations d'itérations (RVIM), qui est un couplage entre la méthode de variation des itérations standard (VIM) et la transformation de Laplace, a été proposée et appliquée avec succès dans la résolution du problème non linéaire de l'écoulement magnétohydrodynamique de Jeffery-Hamel pour les nano-fluides. Les résultats obtenus montrent la robustesse de la méthode RVIM proposée. **MORADI** et al [25] ont présenté une étude qui montre l'influence de la présence des nanoparticules dans un fluide de base (l'eau par exemple) sur le phénomène de transfert de chaleur dans l'écoulement de Jeffery-Hamel. Cette étude est effectuée en utilisant trois types de nano-fluides, à savoir le Cuivre-eau, l'Alumine-eau et l'Oxyde de Titane-eau, avec la prise en compte de l'eau comme fluide de base. Le problème abordé a été traité analytiquement par la méthode de transformation différentielle (DTM) et numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK 4). **INC** et al. [26] ont appliqué avec succès une nouvelle méthode spatiale de Hilbert du noyau de reproduction (Kernel Hilbert Space Method) dans l'analyse de l'écoulement de Jeffery-Hamel. La comparaison faite dans cette étude montre clairement l'efficacité et la précision très élevée de la méthode utilisée (RKHSM) par rapport aux méthodes HAM, DTM et HPM. **BOJDI** et al. [27] ont exploré la solution approximative du problème de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) de Jeffery-Hamel par une méthode de collocation basée sur les polynômes de Jacobi.

Dans le même contexte, **PETROUDI** et al. [28] ont analysé les effets de la présence des nanoparticules dans un fluide de base (Cu-Eau) sur le problème de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) de Jeffery-Hamel. Dans cette étude, la solution a été déterminée en utilisant la méthode de collocation (CM). **SARI** et al. [29] ont réussi à comparer la solution analytique du champ dynamique de l'écoulement d'un fluide dans un convergent-divergent, en appliquant la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) standard et sa modification à savoir la méthode de décomposition généralisée (GDM). Cette dernière est fortement recommandée pour résoudre des problèmes physiques et/ou mathématiques de type non linéaire. La recherche menée par **FREIDONIMEHR** et al. [30] est consacrée à l'étude de l'existence de multiples solutions du problème non-linéaire de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) de Jeffery-Hamel pour différents types de nanoparticules tels que : oxyde de cuivre (CuO), cuivre (Cu) et argent (Ag) insérées dans un fluide de base. Ce problème a été traité numériquement à l'aide d'une nouvelle technique analytique, la méthode d'analyse d'homotopie prédictives (PHAM : predictor homotopy analysis method). Les auteurs ont constaté que des solutions multiples (duales) existent pour certaines valeurs des paramètres physiques gouvernants et en particulier pour les cas de canaux convergents ($\alpha = -1$). **RAJA** et al. [31] ont réétudié l'écoulement d'un nano fluide de Jeffery-Hamel mais en utilisant une méthode d'intelligence artificielle (les réseaux de neurones artificiels ANN). Cette étude a été faite pour trois types de nanoparticules tels que le cuivre (Cu), l'alumine (Al_2O_3) et l'oxyde de titane (TiO_2). La précision et la convergence du schéma conçu sont validées par comparaison avec des résultats numériques standards en utilisant la méthode d'Adams. **KHAN** et al. [32] ont traité le problème de l'écoulement Jeffery-Hamel pour un fluide de second grade entre deux parois non parallèles sous les effets Soret et Dufour. La solution du problème est ensuite obtenue analytiquement par utilisation de la méthode d'analyse d'homotopie (HAM) et numériquement en utilisant le schéma numérique de Runge-Kutta Fehlberg. **SARI** et al. [33] ont également appliqué la méthode d'Adomian pour trouver la solution analytique de l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre qui caractérise l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un nanofluide de type (Cu – eau) de Jeffery-Hamel ; les résultats obtenus montrent un excellent accord avec ceux du traitement numérique par la méthode de Runge-Kutta associée à la méthode de Tir. Le travail effectué par **KHAN** [34] donne la solution numérique et analytique de l'écoulement de Jeffery Hamel d'un fluide non newtonien en utilisant la méthode de

Runge-Kutta d'ordre 4 et la méthode de variation des itérations respectivement. L'étude réalisée par **KEZZAR** et **SARI** [35] est une approche semi-analytique du problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un nano fluide (Al_2O_3 – eau) sous l'effet du mouvement des parois (Extensible/Rétractable). En effet, la méthode de décomposition ADM est employée avec succès pour établir la solution du problème étudié. L'effet combiné de divers paramètres tels que la fraction volumique des nanoparticules de cuivre, la dissipation visqueuse et l'effet de Joule sur la génération d'entropie de l'écoulement magnétohydrodynamique incompressible de Jeffery-Hamel a été examiné par **ALAM** et al. [36]. **MOHYUD-DIN** et al. [37] ont étudié le transfert de chaleur et de masse de l'écoulement d'un nano fluide dans les canaux convergents-divergents sous l'influence d'un champ magnétique externe ainsi que le mouvement des parois (Extensible/Rétractable). L'ensemble d'équations différentielles ordinaires non linéaires obtenu dans cette étude a été résolu numériquement à l'aide de la technique de Runge – Kutta – Fehlberg. **AHMED** et al. [38] ont pris en considération le mouvement des parois et le rayonnement thermique sur le transfert de chaleur de l'écoulement classique de Jeffery-Hamel. Le système d'équations a été traité numériquement par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 associée à la méthode de Tir et analytiquement par l'approche de décomposition d'Adomian (ADM).

L'idée développée dans le travail de **RANA** et al. [39] est de réutiliser la méthode d'analyse d'homotopie prédictrices (PHAM) pour traiter le problème de l'écoulement magnétohydrodynamique d'un nano-fluide (Al_2O_3 -eau) dans un convergent-divergent. La conductivité thermique et la viscosité du nano-fluide dans cette étude ont été calculées par la corrélation KKL (Koo-Kleinstreuer-Li). **KANT** et al. [40] ont étudié le contrôle actif de la croissance optimale des instabilités de l'écoulement de Jeffery-Hamel grâce à la technique standard de contrôle de la transpiration des parois (voir figure I.1).

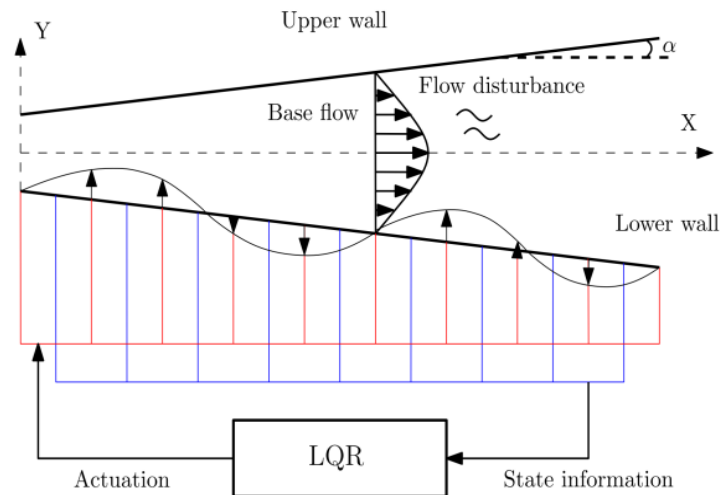


Figure I.1 : Géométrie de l'écoulement ^[39]

RANA et al. [41] ont traité de multiples solutions du transfert de chaleur de l'écoulement de Jeffery-Hamel sous l'influence d'un champ magnétique en utilisant la technique analytique d'homotopie HAM. Ils ont remarqué que des solutions doubles n'existent que pour le cas des canaux convergents et seulement pour des valeurs critiques de l'angle du canal. En outre, l'analyse de stabilité dans cette étude est également effectuée en construisant un problème de valeur propre pour prédire la solution physiquement stable.

Récemment, les nano-fluides de type hybride (d'oxyde de cuivre et de graphène) sont considérés comme des fluides monophasés et leurs performances dans l'amélioration du transport thermique de l'écoulement MHD de Jeffery-Hamel ont été abordés par **HAFEEZ** et al [42]. La résolution des équations du problème considéré a été réalisée à l'aide de la fonction intégrée dans MATLAB *bvp4c*. **SHUKLA** et al [43] ont mené une étude théorique détaillée de l'écoulement MHD d'un nano-fluide de type hybride (Al_2O_3 /Cu – eau) entre des parois non parallèles. Dans cette étude, la solution du problème a été donnée par la méthode d'analyse d'homotopie prédictrice (predictor homotopy analysis method : PHAM). Les auteurs ont également abordés la question de stabilité de l'écoulement envisagé.

D'autre part, **SAIFI** et al. [44] ont proposé une nouvelle méthode mathématique pour développer un nouveau modèle d'évaluation des distributions thermiques à travers l'écoulement de Jeffery-Hamel dans des canaux convergents-divergents. Dans cette étude, les effets des nombres de Reynolds et de Prandtl sur le transfert de chaleur et le champ

dynamique ont été explorés. Le problème abordé a été donc traité analytiquement par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et numériquement par la méthode de Runge – Kutta-Fehlberg (RK 45) associée à la méthode de Tir.

Dans l'étude menée par **BERREHAL** et al. [45] deux types de nanoparticules différentes, à savoir le cuivre, Cu, et l'argent, Ag, avec de l'eau comme fluide de base sont considérées pour explorer le transfert de chaleur d'un écoulement de nano-fluide dans un canal à parois non parallèles. Dans cette contribution, la méthode asymptotique d'homotopie optimale (OHAM) a été utilisée pour résoudre le problème afin d'assurer une convergence rapide de la solution recherchée. **AL-TURKI** et al [47] ont proposé une simulation numérique 3D du comportement énergétique d'échangeurs de chaleur. Cette étude a été faite pour deux types de configurations : une configuration non parallèle et l'autre parallèle. Les auteurs ont remarqué que les plaques non parallèles fournissent un nombre de Nusselt Nu et un facteur de performance thermique plus élevés comparés à ceux obtenus pour des plaques parallèles.

L'étude menée par **MUHAMMAD, N** et al [48] est consacrée à une analyse des performances thermiques et hydrauliques des nano-fluides à travers un micro canal à paroi non parallèle dans les dispositifs électroniques compacts. Cette analyse est réalisée par le logiciel FLUENT en utilisant un modèle de mélange à deux phases sous un flux de chaleur uniforme pour deux types de nano-fluides à base d'eau. Les résultats obtenus montrent que les taux de transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation de la concentration volumique du nano-fluide. De plus, Le nombre de Reynolds a influencé de manière significative le transfert de chaleur dans le fluide de base et les nano-fluides. L'interaction entre les jets de départ et un écoulement transversal régulier avec une couche limite turbulente à gradient de pression nulle a été étudiée expérimentalement selon un dispositif généralement utilisé dans les applications de contrôle par **STEINFURTH** et al. [49]. Le travail effectué par **MANH** et al. [46] est essentiellement porté sur l'écoulement hydrodynamique de Jeffery-Hamel de nano-fluides avec existence d'un champ magnétique. La méthode de perturbation d'homotopie (HPM) est appliquée comme l'approche la plus fiable pour résoudre le terme non linéaire de l'équation différentielle de l'écoulement objet d'étude.

Le travail réalisé par **CHENG** et al. [50] est une simulation numérique tridimensionnelle consistant à visualiser les effets de la variation des angles entre les deux canaux entrants et le canal aval ainsi que le rapport de vitesse.

BISWAL et al. [51] ont appliqué avec succès la méthode d'homotopie perturbée (HPM) pour résoudre les deux problèmes directs et inverses liés à l'écoulement de fluide entre deux plans inclinés. Une nouvelle méthode analytique (NAM) a été utilisée par **JASIM** [52] pour résoudre le problème de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) de Jeffery-Hamel. Les équations gouvernantes de ce problème sont réduites à une équation différentielle ordinaire et résolue à l'aide de transformations appropriées de similitude. Cette étude montre que la méthode adoptée ne nécessite aucune perturbation et linéarisation. **AHMED, S** et al. [53] ont réétudié le problème de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) de Jeffery-Hamel sous l'effet du mouvement des parois (Extensible/Rétractable). La solution du problème est ensuite calculée analytiquement par une nouvelle méthode d'homotopie en ondelettes de Coiflet.

ADEL et al. [54] ont analysé le problème non linéaire de l'écoulement incompressible magnétohydrodynamique de Jeffery-Hamel. L'ensemble d'équations différentielles ordinaires non linéaires obtenu dans cette étude a été résolu analytiquement à l'aide de la technique de collocation de Bernoulli. La solution approximative obtenue par cette nouvelle technique montre que cette technique est plus précise par rapport aux autres méthodes fournies dans la littérature tels que : les méthodes OHAM, DTM et RK4.

HAFEEZ et al. [55] ont présenté une analyse théorique de l'effet de nanoparticules de type hybride ($\text{MoS}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3$) insérée dans un fluide de base (l'eau par exemple) sur le phénomène de transfert de chaleur dans l'écoulement de Jeffery-Hamel MHD. De plus, les caractéristiques de transfert thermique sont explorées sous l'effet du rayonnement thermique, de la dissipation visqueuse et en considérant trois formes différentes de nanoparticules : plaquette, brique et sphérique. La solution est trouvée numériquement à l'aide du solveur MATLAB « bvp4c ». L'étude menée par **RASHID, U** et al. [56] est dédiée aux effets de la dissipation de Joule et de la présence des nanoparticules d'oxyde de zinc dans un fluide de base (eau par exemple) sur le phénomène de transfert de chaleur dans l'écoulement de Jeffery-Hamel MHD. Cette étude a été effectuée pour trois formes de nanoparticules, à savoir: sphérique, colonne et lame. Les équations gouvernantes du problème abordé sont traitées analytiquement par la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) et numériquement à l'aide de la fonction intégrée *NDsolve*. Les résultats obtenus montrent que les nanoparticules en forme de lame ont des performances plus élevées en termes de taux de transfert de chaleur par rapport aux autres formes de nanoparticules.

Dans le même contexte, les travaux réalisés par **DAS** et al. [57] sont consacrés à l'étude de l'influence de la géométrie des nanoparticules telles que les plaquettes, les cylindres et les briques pour deux types de nano-fluides $Al_2O_3 - eau$ et $TiO_2 - eau$ - sur l'écoulement de Jeffery-Hamel MHD. La solution du problème est calculée par la méthode approximative d'Hermite-Padé. Les auteurs ont constaté que les nanoparticules en forme de briques présentent des distributions de température plus élevées par rapport aux autres formes de nanoparticules.

D'autre part l'idée développée dans le travail de **KHENTOUT** et al. [58] consiste à réétudier le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel MHD, mais en tenant compte de l'effet de la présence d'un champ électrique « E » externe et l'addition des nanoparticules de type hybride (GO et MoS_2) dans un mélange de deux fluides de base (**C2H6O2** (50%) (50%)). Dans cette étude, l'effet de la géométrie des nanoparticules a été également considéré. Par ailleurs, la solution de ce problème est exprimée analytiquement par la méthode d'analyse d'homotopie (HAM). Cette dernière a été comparée à la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 associée à la méthode de Tir.

MOGHIMI et al. [59] ont étudié l'impact du champ magnétique non uniforme sur la séparation de la couche limite de l'écoulement d'un fluide incompressible newtonien dans un canal divergent. Cette étude est réalisée par le logiciel OpenFOAM en utilisant un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus montrent que les phénomènes de séparation disparaissent entièrement pour une valeur du nombre d'Hartmann Ha supérieure à 3.

Dans le travail mené par **VERMA** et al. [60], le problème de la couche limite de l'écoulement bidimensionnel d'un nano-fluide ($Cu - H_2O$ et $Ag - H_2O$) visqueux et incompressible dans un canal divergent formé de deux parois non parallèles dans un milieu poreux sous l'effet du phénomène d'injection/aspiration a été étudié. L'ensemble des équations différentielles ordinaires non linéaires obtenu a été donc résolu numériquement à l'aide du solveur MATLAB «*bvp4c*». **HAMID, M** et al. [61] ont réussi à obtenir une solution analytique de l'écoulement magnétohydrodynamique dans un convergent-divergent en appliquant l'approche de Galerkin. Dans cette étude, les auteurs ont pris en considération l'effet du mouvement des parois (stretching/shrinking). Les résultats obtenus montrent un excellent accord avec ceux du traitement numérique par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre ($RK - 4$). L'objectif du travail réalisé par **IYYAPPAN** et al. [62] est d'analyser les effets de divers paramètres physiques tels que

l'aspiration/l'injection, la dissipation visqueuse, le champ magnétique et la source/puits de chaleur sur l'écoulement d'un fluide dans un canal divergent.

I.3. Problématique

Selon la littérature, la plupart des chercheurs éprouvent un regain d'intérêt à la réétude de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour les fluides/nano-fluides classiques et avec/sans présence d'un champ magnétique externe et transversal. Par contre, le sujet de thèse abordé traite l'écoulement d'un fluide non-Newtonien de type viscoélastique passant entre deux plaques non parallèles (voir figure I.2) en présence d'un champ magnétique externe. La formulation mathématique de la problématique étudiée fournit une équation différentielle non linéaire du troisième ordre qui régit la distribution des vitesses de l'écoulement envisagé. Cette équation gouvernant le problème a été ensuite résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg associée à la méthode de Tir et analytiquement par un code de calcul MATHEMATICA basé sur une nouvelle modification de la méthode décompositionnelle d'Adomian dite de Duan-Rach (DRMA).

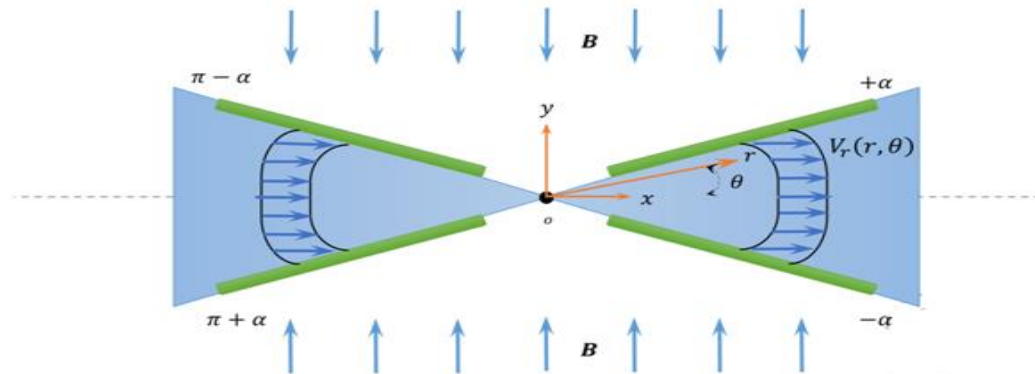


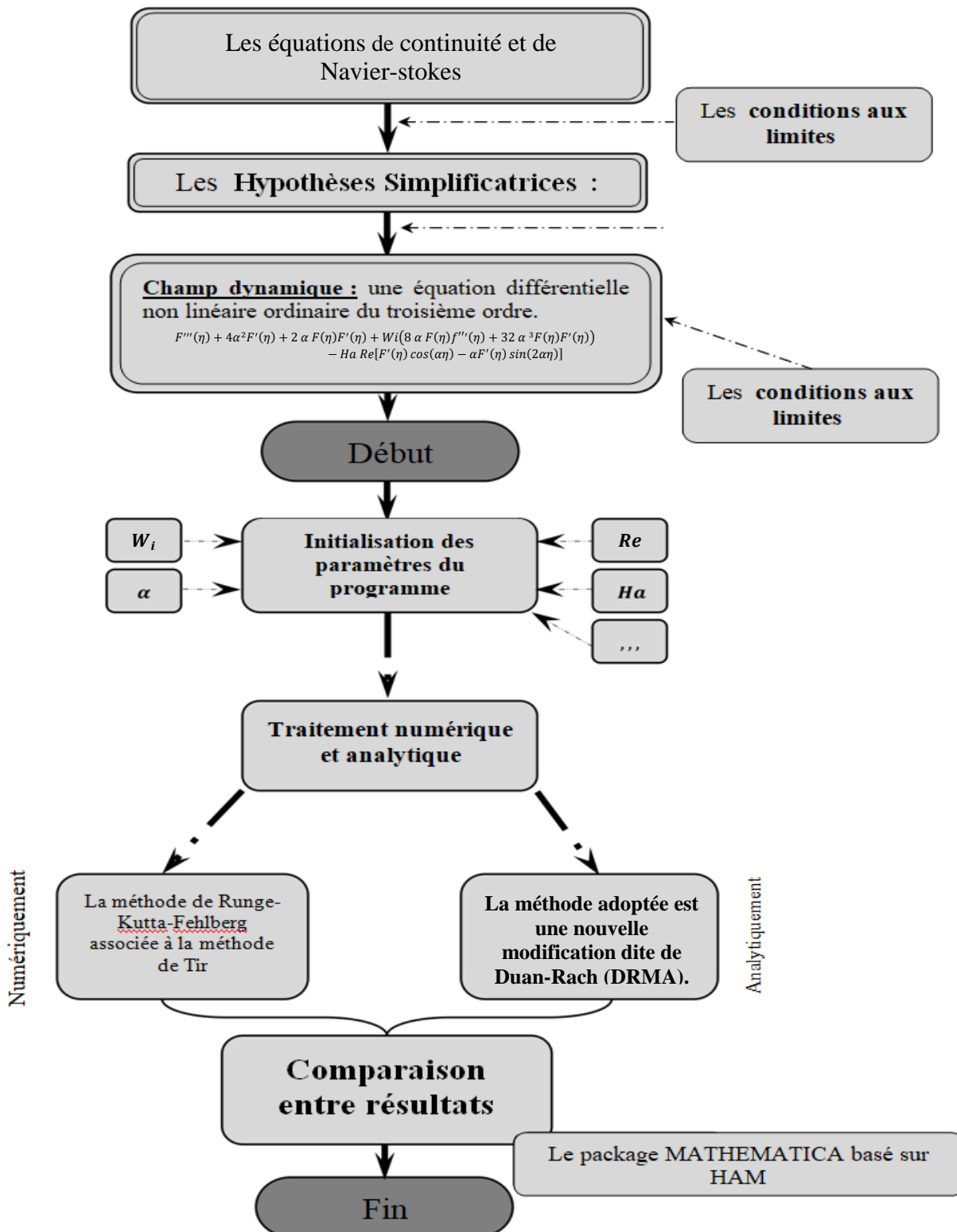
Figure. I.2 : Géométrie de l'écoulement envisagé.

Cette thèse se concentre alors sur deux contributions essentielles:

- La première contribution est les traitements analytique et numérique de l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre qui régit la distribution des vitesses de l'écoulement envisagé. Analytiquement, la méthode de décomposition ADM classique est utilisée, tandis que le problème est résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
- La deuxième contribution est l'implémentation d'une nouvelle technique de décomposition (DRMA) pour résoudre le problème étudié.

I.4. Méthodologie de recherche

L'organisation de ce travail est illustrée dans l'organigramme suivant :



Organigramme. I.1 : Organisation du travail

I. 5 Conclusion :

Dans ce chapitre, il a été présenté une brève synthèse bibliographique sur l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux parois planes non parallèles du fait de leur importance dans les applications industrielles. Dans ce qui suit, on passera à la formulation mathématique de l'écoulement MHD d'un fluide non-newtonien de type viscoélastique s'écoulant entre deux parois inclinées formant un angle entre elles.

Chapitre II :
Formulation
Mathématique

II.1. Introduction:

A travers ce chapitre, on propose un modèle mathématique qui caractérise le mouvement d'un fluide viscoélastique entre deux parois planes non parallèles (écoulement dans un convergent/divergent) sous l'effet d'un champ magnétique externe.

II.2. Configuration géométrique et problématique

La géométrie du problème étudié est représentée sur la figure II.1. Il s'agit d'un espace, entre deux plaques non parallèles (un convergent/divergent) formant un angle entre elles, parcouru par un fluide viscoélastique. Dans cette étude, l'effet d'un champ magnétique externe appliqué transversalement est pris en considération.

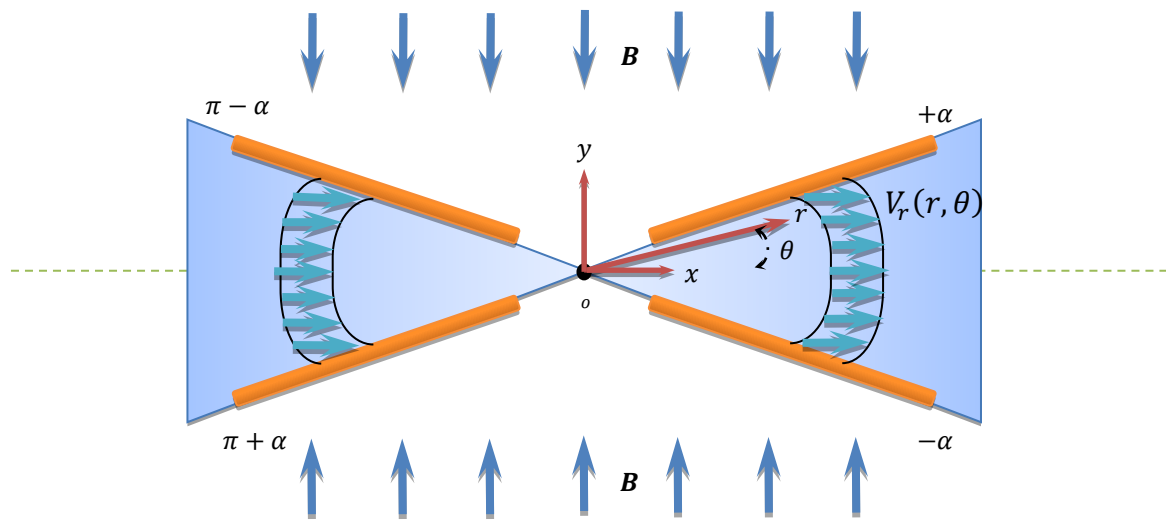


Figure II.1 : Géométrie de l'écoulement étudié.

II .3. Formulation Mathématique :

Les équations fondamentales de continuité et de Navier-stokes sont :

- L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II. 1})$$

- L'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho [(\vec{V}\nabla)\vec{V}] = -\nabla P + \nu \Delta \vec{V} + f_B \quad (\text{II. 2})$$

Ces équations peuvent être utilisées pour évaluer les caractéristiques dynamiques du problème étudié.

Une particule fluide qui se déplace avec une vitesse \mathbf{V} dans un champ électrique caractérisé par le vecteur \mathbf{E} et dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur \mathbf{B} , subit une force magnétique appelée force de Lorentz f_B donnée par [63] :

$$f_B = \sigma(E + V \times B) \times B \quad (\text{II. 3})$$

II.4. Hypothèses Simplificatrices :

Afin de simplifier l'étude, on propose les hypothèses suivantes :

1. Les deux plaques sont non parallèles faisant un angle 2α entre elles (Figure II. 1)
2. l'écoulement est stationnaire : on néglige les effets d'instantanéité du fluide dans la conduite,
3. Écoulement supposé purement radial et bidimensionnel.
4. Le fluide utilisé est non-Newtonien de type viscoélastique.
5. Le champ magnétique externe imposé est appliqué transversalement à la direction de l'écoulement.
6. Les propriétés thermo-physiques du fluide (ρ, ν, μ et σ) sont supposées constantes.
7. L'effet du champ électrique E est négligeable.

II. 5. Mise en équation du problème :

Si on considère les hypothèses simplificatrices proposées dans la section II.4, les équations de continuité et de Navier-stokes pour un écoulement MHD bidimensionnel d'un fluide visqueux en coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont données par [9,20] :

➤ L'équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) = 0 \quad (\text{II. 4})$$

➤ L'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] - \sigma V_r B^2 (\cos^2 \theta), \quad (\text{II. 5})$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] - \sigma V_r B^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (\text{II. 6})$$

D'autre part, la force de Lorentz f_B en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , est donnée par [9,63] :

$$f_B = -\sigma [(v_r \cos \theta) \cos \theta B^2 \hat{e}_r + (v_r \cos \theta) \sin \theta B^2 \hat{e}_\theta] \quad (\text{II. 7})$$

Où ;

ρ , σ et τ sont la masse volumique, la conductivité électrique et le tenseur des contraintes respectivement.

Le tenseur des contraintes (τ) lié à la modélisation du 2^{ème} ordre du fluide non newtonien peuvent être s'exprimé par [64] :

$$\tau = \alpha_1 D + \alpha_2 D^\nabla + \alpha_3 D \cdot D \quad (\text{II. 8})$$

Tenant compte de l'hypothèse mentionné plus haut, le tenseur des contraintes peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}
 \tau = & \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \end{bmatrix} \\
 & + \alpha_2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2V_r \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} & -\frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} \\ -\frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} & -2 \frac{V_r^2}{r^2} + 2 \frac{V_r}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. - \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 3 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 3 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & 4 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 \end{bmatrix} \right) \\
 & + \alpha_3 \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 & \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 2 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 2 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 + 4 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned} \tag{II.9}$$

Avec les propriétés du liquide (α_1 , α_2 et α_3) peuvent être s'exprimés par [64] :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\mu_0, \\ \alpha_2 = -\psi_{1,0} \\ \alpha_3 = 4\psi_{2,0} \end{cases} \tag{II.10}$$

Où :

μ_0 , $\psi_{1,0}$ et $\psi_{2,0}$ indiquant les coefficients de viscosité du fluide. Ainsi, \mathbf{D} est la partie déviatorique du champ de vitesse.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] \tag{II.11}$$

Et la dérivée (∇) est donnée sous la forme suivante :

$$D^\nabla = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{D} - (\nabla \mathbf{V})^T \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{V}.$$

II.6. Conditions aux limites :

Enfin, le système d'équations doit être complété par un ensemble de conditions aux limites dépendantes du problème considéré.

Les conditions aux limites pour le problème objet d'étude sont:

$$\begin{cases} \text{Si } \theta \rightarrow 0 : & \mathbf{u}_r = U, \quad \text{et } \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} = 0 \\ \text{Si } \theta \rightarrow \pm\alpha : & \mathbf{u}_r = 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

II.7. Variable de similitude :

La suite de ce travail nécessite de mettre les équations dimensionnelles de l'écoulement étudié sous forme adimensionnelle. Pour ce faire, nous considérons les variables sans dimensions suivantes :

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha} : -1 \geq \eta \geq 1 \quad (\text{II.14})$$

$$f_{max} = f(\theta)/r \quad f_{max} = r V_{max} \quad : \text{ Représente la vitesse maximale sur l'axe du canale} \quad (\text{II.15})$$

$$F(\theta) = \frac{f(\theta)}{f_{max}} \quad F(\theta) = \frac{V_r}{V_{max}} = \frac{f(\theta)}{f(0)} \quad (\text{II.16})$$

II.8. Formulation adimensionnelle des équations

Par l'intermédiaire des variables sans dimensions (Eqs. II.14 – 16) et l'élimination du terme de pression, la combinaison des équations (II.5 – 6) donnent finalement :

$$\begin{aligned} F'''(\eta) + 4\alpha^2 F'(\eta) + 2\alpha F(\eta)F'(\eta) \\ + W_i(8\alpha F(\eta)F'''(\eta) + 32\alpha^3 F(\eta)F'(\eta)) \\ - Ha Re[F'(\eta) \cos(\alpha\eta) - \alpha F'(\eta) \sin(2\alpha\eta)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Avec les conditions aux limites du problème considéré sous forme adimensionnelle sont comme suites:

$$\begin{cases} \text{Si } \eta = 0 : & F(0) = 1 \text{ et } F'(0) = 0 \\ \text{Si } \eta = \pm 1 : & F(\pm 1) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

II.9. Les nombres adimensionnels

Dans l'équation (II.17), les grandeurs adimensionnelles Re , W_i et Ha sont exprimés par :

- Le nombre de Reynolds. Re :

$$Re = \frac{\rho f_0 \alpha}{\mu_0} \quad (\text{II. 19})$$

➤ Le nombre de Weissenberg W_i :

$$W_i = \frac{\psi_{1,0} f_0}{r^2 \mu_0 \alpha} \quad (\text{II. 20})$$

➤ Le nombre de Hartmann Ha :

$$Ha = \frac{\sigma B^2 r^2 \alpha}{\rho f_0} \quad (\text{II. 21})$$

II.10. Le coefficient de frottement

Le coefficient de frottement C_f , est défini alors par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_f v_{max}^2} \quad (\text{II. 22})$$

La contrainte de cisaillement de paroi τ_w est donnée par

$$\tau_w = \mu_f \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} \quad (\text{II. 23})$$

En utilisant les paramètres sans dimensions (II.16-19), le coefficient de frottement devient:

$$C_f^* = Re C_f = F'(1) \quad (\text{II. 24})$$

II.11. Conclusion

Nous avons réussi à obtenir une équation différentielle du troisième ordre qui caractérise le mouvement magnétohydrodynamique d'un fluide viscoélastique entre deux parois non parallèles (la distribution des vitesses). La résolution de cette équation fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III :
Outils
Mathématique

III.1. Introduction :

Cette section est consacrée à la présentation des méthodes les plus utilisées pour résoudre les équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations aux dérivées partielles (EDP) avec conditions aux limites, soit analytiquement par une nouvelle modification de la méthode de Duan-Rach (DRMA), soit numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (**RK – 45**) associée à la méthode de Tir.

III. 2. Méthode de traitement numérique

Donc l'objectif principal de section est de présenter les techniques numériques les plus utilisées dans la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO). Il s'agit : de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (**RK – 45**) associée à la méthode de Tir. Cette méthode a été utilisée pour résoudre le problème envisagé.

III. 2.1. Principes de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (RK45)

Les méthodes de Runge Kutta sont des techniques à multi-pas linéaires utilisés pour résoudre des équations ordinaires du premier ordre, qui sont très populaires. La forme générale des méthodes de Runge Kutta est :

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad (\text{III.1})$$

Où :

La fonction f est appelée fonction d'incrément, qui peut être interprétée comme une pente représentative sur l'intervalle. Dans la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre (RK4), cette fonction prend la forme suivante :

$$f(t_i, y_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{III.2})$$

Les paramètres de la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre sont donnés par le système suivant :

$$\begin{cases} k_1 = hf(x, y) \\ k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x + h, y + k_3) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Par contre les six coefficients de la Méthode de Runge Kutta Fehlberg RKF45 [65] présent sous la forme d'un tableau de butcher :

c_1	a_{11}	.	.	.	a_{1s}
.	.	.			.
.	.		.		.
.	.			.	.
c_s	a_{s1}	.	.	.	a_{ss}
	b_1	.	.	.	b_1

Sont donnés dont le tableau suivant :

Tableau III.1 : les coefficients de RK45 $o(h^4)$

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
y_1	25/216	0	1408/2565	2197/1404	-1/5	0

Où

Les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 et k_6 sont exprimés par :

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= hf(x, y) \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{3}{8}h, y + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(x + \frac{12}{13}h, y + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= hf\left(x + h, y + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 + \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{aligned} \right. \quad (\text{III.4})$$

Alors la formule de Runge Kutta d'ordre quatre peut également être exprimée par :

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (\text{III.5})$$

La procédure de calcul dans la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre estime les valeurs de la solution pour n points à partir des conditions initiales, en commençant par la valeur y_1 .

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1^n + \frac{1408}{2565}k_3^n + \frac{2197}{4101}k_4^n - \frac{1}{5}k_5^n \quad (\text{III.6})$$

Donc, la valeur y_1 devient connue, nous passerons à y_2 .

$$y_2 = y_1 + \frac{25}{216}k_1^1 + \frac{1408}{2565}k_3^1 + \frac{2197}{4101}k_4^1 - \frac{1}{5}k_5^1 \quad (\text{III.7})$$

De la même manière on trouvera $y_3, y_4 \dots \dots \dots$ et y_n .

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_0 + a_0k_1^0 + a_1k_3^0 + a_2k_4^0 - a_3k_5^0 \\ y_2 = y_1 + a_0k_1^1 + a_1k_3^1 + a_2k_4^1 - a_3k_5^1 \\ y_3 = y_2 + a_0k_1^2 + a_1k_3^2 + a_2k_4^2 - a_3k_5^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n = y_{n-1} + a_0k_1^{n-1} + a_1k_3^{n-1} + a_2k_4^{n-1} - a_3k_5^{n-1} \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

Ensuite la méthode RKF45 applique une autre stratégie qui réutilise tous les k dans une combinaison linéaire dans le tableau Butcher suivant :

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
y₁	25/216	0	1408/2565	2197/1404	-1/5	0
ŷ	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55

Tableau III.2 : Les coefficients de RK45 $o(h^5)$

Il s'agit essentiellement de deux tableaux combinés en un seul. Le premier est comme ci-dessus. Le second est comme celui ci-dessus mais avec une rangée inférieure différente. La ligne du bas donne les coefficients pour une méthode Runge-Kutta correspondant à la partie «5» de RKF45. Le 4 représente le 4ème ordre, c'est-à-dire que l'erreur locale pour une taille de pas h est $O(h^4)$. Le 5 représente le 5ème ordre, c'est-à-dire l'erreur locale $O(h^5)$. RKF45 est deux méthodes différentes, mais elles partagent tellement de calculs que la seconde est presque gratuite; il ne nécessite aucune nouvelle évaluation de fonction, ne prenant qu'une combinaison linéaire de six nombres.

L'erreur dans la solution peut être estimée et contrôlée en utilisant l'ordre supérieur méthode intégrée qui permet de déterminer automatiquement une taille de pas adaptative. Donc la meilleure expression pour déterminer la solution est :

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656 k_3}{12825} + \frac{68561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55} \right), \quad (\text{III.9})$$

La taille d'étape optimale $s_{n+1} \cdot h$ peut être déterminée en multipliant la taille de pas h par le coefficient de correction

$$\begin{cases} s_{n+1} = \left(\frac{\text{tol } h}{2|z(x+h)-y(x+h)|} \right)^{1/4} \\ \approx 0.84 \left(\frac{\text{tol } h}{|z(x+h)-y(x+h)|} \right)^{1/4} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Où

Tol : est la tolérance spécifique de commande d'erreur.

Pour justifier le choix de la méthode de Runge Kutta Fehlberg RKF45 par rapport la méthode classique de Runge Kutta (par exemple Runge Kutta d'ordre quatre), Ainsi que l'applicabilité de cette méthode.

III. 2.2. Les exemples d'applications :

III. 2.2.1. Exemple

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ \frac{dy}{dx} = -2x - y \end{cases} \text{ avec un pas de } 0.1 \quad (\text{III.11})$$

Les coefficients de la Méthode de Runge Kutta Fehlberg sont :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{1}{8}h, y + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\ k_4 &= hf\left(x + \frac{12}{13}h, y + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\ k_5 &= hf\left(x + h, y + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\ k_6 &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y - \frac{8}{27}k_1 - 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right), \end{aligned} \quad (\text{III.12.1})$$

Donc :

$$\begin{cases} k_1 = 0.1, \\ k_2 = 0.0925000, \\ k_3 = 0.0889609, \\ k_4 = 0.0735157, \\ k_5 = 0.0713736, \\ k_6 = 0.0853872, \end{cases} \quad (\text{III.12.2})$$

À partir de de l'équation (III.9), la solution est déterminée par la formule suivante:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = \hat{y}_0 + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 = -0.914512266 \\ y_1 = -0.914512251 \end{cases} \quad (\text{III.12.3})$$

Avec un'erreur locale de $e = 0.000000015$

III. 2.2.2 Exemple

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0 \ 1.4] \quad (\text{III.13})$$

Les tableaux ci-dessous regroupent les résultats obtenus par les méthodes numérique telle que : RK4 et RK45, Ainsi que la solution exacte de cette équation.

Tableau III.3 : Comparaison entre la solution exacte et numérique par RKF4 [66]

i	t_i	Approximation de RK4 y_i	Solution exacte $y(t_i) = \tan(t_i)$	Erreur $ y(t_i) - y_i $
0	0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.1	0.1003346	0.1003346	0.0000001
2	0.2	0.2027099	0.2027100	0.0000002
3	0.3	0.3093360	0.3093362	0.0000002
4	0.4	0.4227930	0.4227932	0.0000002
5	0.5	0.5463023	0.5463025	0.0000000
6	0.6	0.6841368	0.6841368	0.0000002
7	0.7	0.8422886	0.8422884	0.0000005
8	0.8	1.0296391	1.0296386	0.0000006
9	0.9	1.2601588	1.2601582	0.0000013

10	1.0	1.5574064	1.5574077	0.0000131
11	1.1	1.9647566	1.9647597	0.0000798
12	1.2	2.5720518	2.5720516	0.0000798
13	1.3	3.6015634	3.6021024	0.0005390
14	1.4	5.7919748	5.7978837	0.0059089

Tableau III.4 : Comparaison entre la solution exacte et numérique par RKF45 [66]

i	t_i	Approximation de RKF45 y_i	Solution exacte $y(t_i) =$ $\tan(t_i)$	Erreur $ y(t_i) - y_i $
0	0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.2	0.2027100	0.2027100	0.0000000
2	0.4	0.4227933	0.4227931	0.0000002
3	0.6	0.6841376	0.6841368	0.0000008
4	0.8	1.0296434	1.0296386	0.0000048
5	1.0	1.5574398	1.5574077	0.0000321
6	1.1	1.9648085	1.9647597	0.0000488
7	1.2	2.5722408	2.5721516	0.0000892
8	1.3	3.6023295	3.6021024	0.0002271
9	1.35	4.4555714	4.4552218	0.0003496
10	1.4	5.7985045	5.7978837	0.0006208

D'un point de vue comparatif ces résultats montrent clairement les avantages de la technique (RK45) en termes de précision, vitesse de convergence et nombre d'approximations.

Tableau III.5 : Comparaison entre la méthode RKF45 et RK4 [66]

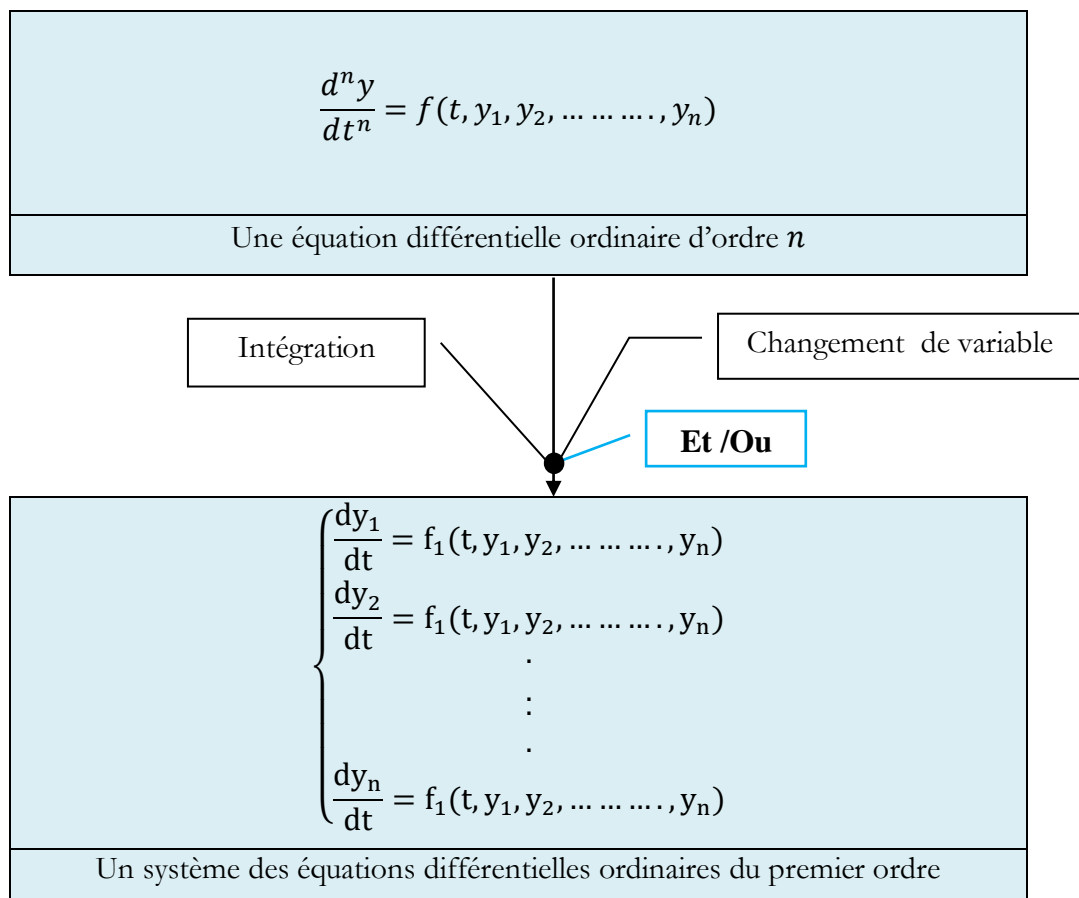
	$RK45 \rightarrow 10^{\text{approximations}}$	$RK4 \rightarrow 14^{\text{approximations}}$
Solution	$y = 5.7985045$	$y = 5.7919748$
erreur	$e = 0.0006208$	$e = 0.0059089$

III. 2.3. Algorithme de la méthode RKF45

- Etape 1 → Initialisation du pas h , de la durée T
- Etape 2 → Initialisation des conditions initiales
- Etape 3 → Définition de la fonction $f(t, y)$.
- Etape 4 → Tant que $t \leq T_t \leq T$ faire
- Etape 5 → Calcul les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 et k_6
- Etape 6 → Calcul y_{n+1}
- Etape 7 → Enregistrement des données.

III. 2.4. Préparation des équations obtenues au traitement numérique

D'une manière générale, les méthodes de Runge Kutta peut être aussi adaptée pour résoudre des équations différentielles ordinaires d'ordre n (n supérieur à 1), ces équations d'ordre n peuvent être réduites en un système d'équations du premier ordre facilement résolu par la méthode de Runge Kutta Fehlberg RKF45.



III. 2.5. Méthode de Tir

Nous considérons l'équation différentielle linéaire de second ordre avec les conditions aux limites de la forme :

$$\begin{cases} y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

On suppose les fonctions $(a_i(x))$ suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité des équations différentielles que nous rencontrons.

La différence entre les équations différentielles avec conditions initiales et celles avec conditions aux limites est que dans le premier cas, à $t = t_0$, la fonction $y(t_0)$ ainsi que sa pente $y'(t_0)$ sont connues. Par contre dans le cas des équations différentielles avec conditions aux limites, les valeurs de la fonction $y(t)$ aux deux extrémités de l'intervalle $y(a)$ et $y(b)$ ne sont pas connues.

III. 2.5.1. Théorème :

La solution de l'équation différentielles avec conditions aux limites (III.14) est donnée par :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(x) \quad (\text{III.15})$$

Où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielles avec conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) + a_0(x) & (\text{III.16}) \\ y_1(a) &= y_a \\ y_1'(b) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2''(x) &= a_2(x)y_2'(x) + a_1(x)y_2(x) & (\text{III.17}) \\ y_2(a) &= 0 \\ y_2'(a) &= 1 \end{aligned}$$

III. 2.5.2. Preuve.

On doit vérifier en premier lieu les conditions aux limites. Si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ satisfont respectivement aux équations (III.16) et (III.17) en $x = a$

$$y(a) = y_1(a) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(a) = y_a + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) 0 = y_a \quad (\text{III.18})$$

Par ailleurs :

$$y(b) = y_1(b) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(b) = y_1(b) + (y_b - y_1(b)) = y_b \quad (\text{III.19})$$

Par la suite on pose :

$$c = \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) \quad (\text{III.20})$$

La dérivée seconde de $y(X)$ peut alors s'écrire :

$$y''(x) = (y_1(x) + cy_2(x))'' = y_1''(x) + cy_2''(x) \quad (\text{III.21})$$

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont respectivement les solutions des équations (III.16) et (III.17). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} y''(x) &= (a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) + a_0(x)) + c(a_2(x)y_2'(x) \\ &\quad + a_1(x)y_2(x)) \quad (\text{III.22}) \\ &= a_2(x)(y_1'(x) + cy_2'(x)) + a_1(x)(y_1(x) + cy_2(x)) + a_0(x) \\ &= a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \end{aligned}$$

III. 2.5.3. Exemple

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) + \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y(2) = 0.693147 \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Dans ce cas : $a_2(x) = \frac{-2}{x}$, $a_1(x) = 0$, et $a_0(x) = \frac{1}{x^2}$

La solution exacte de cette équation est $y(t) = \ln(x)$. Le tableau suivant présente la solution de cette équation différentielle. Ainsi que l'évaluation de l'erreur absolue.

Tableau III.6 : Comparaison entre la solution exacte et la solution numérique.

x	$y_1(x) = u_1(x)$	$y_2(x) = v_1(x)$	$y(x)$	Erreur
1.0	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.0000×10^{-0}
1.1	0.004 402 51	0.097 907 02	0.095 309 75	0.4299×10^{-6}
1.2	0.015 656 98	0.166 663 59	0.182 320 96	0.5997×10^{-6}
1.3	0.031 597 42	0.230 765 68	0.262 363 63	0.6325×10^{-6}
1.4	0.050 760 44	0.285 710 54	0.336 471 64	0.5924×10^{-6}
1.5	0.072 134 27	0.333 329 55	0.405 464 59	0.5143×10^{-6}
1.6	0.095 006 09	0.374 996 26	0.470 003 21	0.4173×10^{-6}
1.7	0.118 865 94	0.411 761 06	0.530 627 94	0.3123×10^{-6}
1.8	0.143 344 54	0.444 440 91	0.587 786 46	0.2057×10^{-6}
1.9	0.168 171 91	0.473 680 79	0.641 853 79	0.1008×10^{-6}
2.0	0.193 149 33	0.499 996 70	0.693 147 18	0.4400×10^{-9}

Le calcul des valeurs de $y_1(x)$ et de $y_2(x)$ selon la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4. On obtient :

$$\begin{cases} y_1(b) = y_1(2.0) = 0.19314933 \\ y_2(b) = y_2(2.0) = 0.49999670 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Soit $y_1(x)$ et de $y_2(x)$ sont les solutions des systèmes S_1 et S_2 respectivement.

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} y_1''(x) = -\frac{2}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x^2} \\ y_1(1) = 0 \quad y_1'(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.25.1})$$

$$S_2 \rightarrow \begin{cases} y_2''(x) = -\frac{2}{x}y_2'(x) \\ y_2(1) = 0 \quad y_2'(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{III.25.2})$$

Donc les solutions des systèmes S_1 et S_2 (III.25) sont données par :

$$y_1(x) = \log(x) + \frac{1}{x} - 1 \quad (\text{III.26.1})$$

$$y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \quad (\text{III.26.2})$$

Alors d'après l'équation différentielle (III.23) on trouve :

$$\begin{aligned}
 y(x) &= y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(x) \\
 &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \left(\frac{0.693147 - 0.19314933}{0.49999670} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \left(\frac{0.499999767}{0.49999670} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + 1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{2}
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

III. 2.5.4. Exemple

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \tag{III.28.1}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y(a) = Y_a \\ y(b) = Y_b \end{cases} \text{ avec } a \leq x \leq b \tag{III.28.1}$$

Étape 1:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = w \text{ avec la condition initiale: } y(a) = Y_a \\ \frac{dw}{dx} = f(x, y, w) \text{ pas de condition initiale} \end{cases} \tag{III.28.2}$$

Étape 2: Première estimation de la valeur initiale

$$w(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = w_1 \tag{III.28.3}$$

Étape 3: Deuxième estimation de la valeur initiale

$$w(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = w_2 \tag{III.28.4}$$

Étape 4: Nouvelle estimation

$$w(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = w_3 \quad (\text{III.28.5})$$

En utilisant les résultats des deux solutions précédentes

Etape 4.1: Vitrification $y_{b_1} \leq y_b \leq y_{b_2}$

Etape 4.2: Interpolation entre w_1 et w_2

Etape 5: Répéter

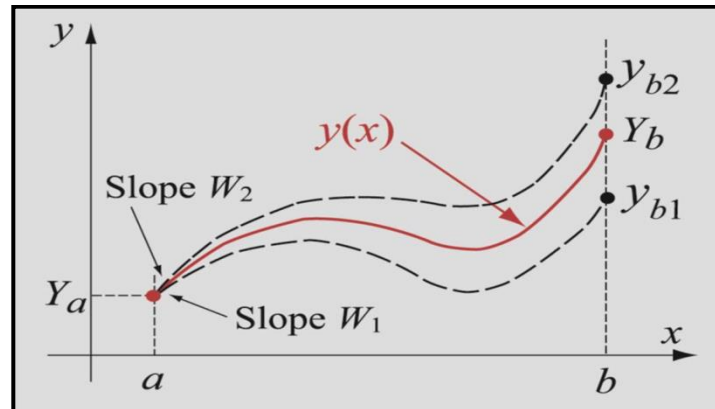


Figure.III.1 : La méthode de Tir

Interpolation des résultats par l'une des méthodes : à savoir : Interpolation, la méthode dichotomie, méthode sécante et méthode de newton.

La méthode de Tir utilisée dans le but de transformer le problème de valeur aux limites a un problème de valeur initiale. D'autre part cette méthode a été utilisée pour établir l'expression du coefficient de frottement C_f et tester la convergence du problème étudié.

III. 3. Méthode de traitement analytique :

On va présenter une brève la description d'une nouvelle modification de la méthode de Duan-Rach (DRMA) utilisée dans la résolution du problème envisagé.

III.3.1. Historique de l'approche Duan – Rach (DRA) :

Récemment, Duan et Rach [70] ont proposé une nouvelle modification de la méthode de décomposition adomienne (ADM) pour traiter les problèmes de valeurs aux limites notamment EDO et EDP. Ils sont venus avec l'idée qu'ils pouvaient utiliser toutes les conditions aux limites pour construire une suite qui converge vers la solution. Ensuite,

un schéma récursif peut être utilisé pour évaluer la solution à différentes étapes. La méthode de Duan et Rach est capable d'obtenir une solution efficace et pleinement explicite, qui est libre de tous coefficients indéterminés.

III.3.2. Principe de la méthode DRA (Duan-Rach Approach) :

On considère l'équation différentielle non linéaire du 3^{ème} ordre de la forme suivante:

$$Lu = Nu + g \quad (\text{III.28})$$

Où

$L = \frac{d^3}{dx^3}$: Représente l'opérateur linéaire facilement inversible.

N : Représente l'opérateur non-linéaire.

g : Représente la source (une fonction connue).

Avec les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann :

$$u(x_0) = \alpha_0, u'(x_1) = \alpha_1, u(x_2) = \alpha_2, x_1 \neq x_2 \quad (\text{III.29})$$

Comme il a été déjà mentionné, L est un opérateur linéaire inversible, donc l'opérateur linéaire inverse L^{-1} est donné par :

$$L^{-1}(\blacksquare) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \int_{\zeta}^x (\blacksquare) dx dx dx, \quad (\text{III.30})$$

Où ζ est une valeur décrite dans l'intervalle sélectionné $[x_0, x_2]$. Ensuite nous avons :

$$L^{-1}Lu = u(x) - u(x_0) - u'(x_1) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} \cdot u''(\zeta) \cdot [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \quad (\text{III.31})$$

Par application de l'opérateur linéaire inverse L^{-1} sur l'équation. (III.31), on obtient :

$$L^{-1}[Nu + g] = u(x) - u(x_0) - u'(x_1) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} \cdot u''(\zeta) \cdot [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \quad (\text{III.32})$$

Nous considérerons que $x = x_2$ dans l'équation. (III.32). Ensuite, nous déterminons la valeur $u''(\xi)$ par la résolution de l'équation suivante :

$$u''(\xi) = \frac{u'(x_2) - u'(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi}^x [Nu + g] dx dx \quad (III.33)$$

D'autre part, tenant compte de (III.33), l'équation (III.32) devient :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_0) - u'(x_1) \cdot (x - x_0) \\ &+ \frac{1}{2} [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \frac{u'(x_2) - u'(x_1)}{x_2 - x_1} + L^{-1}g \\ &- \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi}^x g dx dx \\ &- \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi}^x Nu dx dx + L^{-1}Nu \end{aligned} \quad (III.34)$$

Les constantes $u'(x_0)$, $u'(x_1)$ et $u'(x_2)$ sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Donc le principe de l'approche Duan – Rach (DRA) consiste à trouver une solution générale sous la forme suivante :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (III.35)$$

D'autre part, le terme non-linéaire Nu de l'équation (III.28) peut prendre la forme suivante :

$$Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (III.36)$$

Où le terme A_n représente les polynômes d'Adomian, qui peuvent être calculés par la formule suivante :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right] \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n \quad (III.37)$$

Où λ est un paramètre réel.

À partir de de l'équation (III.34), les composants de la solution sont déterminés par la formule de récurrence suivantes:

$$\begin{aligned}
 u_{m+1} = & u(x_0) - u'(x_1) \cdot (x - x_0) \\
 & + \frac{1}{2} [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \frac{u'(x_2) - u'(x_1)}{x_2 - x_1} + L^{-1} A_m \\
 & - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x A_m dx dx + L^{-1} g \\
 & - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x g dx dx
 \end{aligned} \tag{III.38}$$

Une fois les polynômes d'Adomian et la composant u_0 déterminés, la solution de l'équation (III.28) s'exprime par :

$$u_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \tag{III.39}$$

III.3.3. La méthode de Duan-Rach modifiée (DRMA) :

Premièrement, La méthode de Duan-Rach modifiée (DRMA) garde la forme générale de la méthode de décomposition adomienne classique combinée à la méthode des coefficients indéterminés (DRA). La différence de réécrire l'équation différentielle non linéaire du 3ème ordre sous la forme suivante:

$$Lu = Nu + Ru + g \tag{III.40}$$

Deuxièmement, dans la méthode de décomposition modifiée de Duan-Rach, les constantes inconnues d'intégration sont déterminées par une formule avant que le schéma de récursivité ne soit conçu, il n'y a donc pas besoin de déterminer plusieurs racines pour chaque constante, d'autre part d'éliminer toutes les racines parasites.

III.3.4. Convergence de la méthode Duan-Rach modifiée :

Dans la méthode de décomposition classique (ADM), les conditions aux limites $\langle u(0), u'(0), u''(0), \dots \dots \rangle$ sont à déterminer après avoir calculé les composantes de la solution $f_n(\eta)$, mais par contre, le principe de l'approche Duan – Rach (c.-à-d. la méthode de décomposition modifiée (DRA)) consiste à trouver les conditions aux limites

$\langle u(0), u'(0), u''(0), \dots \rangle$ avant de calculer les composantes de la solution $f_n(\eta)$, et d'augmenter par conséquent l'efficacité de la méthode en terme de précision et taux de calcul.

III. 3.5. Implémentation de la méthode Duan-Rach modifiée :

Maintenant, on passe à l'application de la méthode de Duan-Rach modifiée (DRMA) à l'équation (équation II.17) qui décrit le problème non linéaire étudié.

L'équation (II.17) qui caractérise le champ dynamique (la distribution des vitesses) de l'écoulement envisagé, dans le traitement analytique s'écrit sous la forme :

$$LF(\eta) + RF(\eta) + NF(\eta) = 0 \quad (\text{III.41})$$

Tout d'abord, nous définissons l'opérateur linéaire L , l'opérateur du résidu linéaire R , l'opérateur non linéaire N et l'opérateur linéaire inverse L^{-1} comme suites :

$$L_f = \frac{d^3 F}{d\eta^3} \quad (\text{III.42})$$

$$R_f = +4\alpha^2 F'(\eta) - Ha Re[F'(\eta) \cos(\alpha\eta) - \alpha F(\eta) \sin(2\alpha\eta)] \quad (\text{III.43})$$

$$N_f = +2 \alpha F(\eta)F'(\eta) + W_i(8 \alpha F(\eta)F'''(\eta) + 32 \alpha^3 F(\eta)F'(\eta)) \quad (\text{III.44})$$

Et

$$L_f^{-1}(\blacksquare) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\blacksquare) d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.45})$$

D'autre part, l'équation (III.41) peut s'écrire également sous la forme suivante :

$$LF(\eta) = 0 - \{RF(\eta) + NF(\eta)\} \quad (\text{III.46})$$

Ensuite, nous intégrons l'équation (III.46), on obtient

$$L^{-1}LF(\eta) = -L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta) \quad (\text{III.47})$$

Où nous calculons

$$L^{-1}LF(\eta) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \left(\frac{d^3F(\eta)}{d\eta^3} \right) d\eta d\eta d\eta = F(0) + \eta F'(0) + \frac{\eta^2}{2} F''(0) \quad (\text{III.48})$$

Lors de la substitution, nous avons

$$F(\eta) - F(0) - \eta F'(0) - \frac{\eta^2}{2} F''(0) = -L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta) \quad (\text{III.49})$$

Ensuite, nous obtenons

$$F(\eta) = F(0) + \eta F'(0) + \frac{\eta^2}{2} F''(0) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta) \quad (\text{III.50})$$

Par application des conditions (II.18), l'équation (II.17) prend la forme :

$$F(\eta) = 1 + \frac{\eta^2}{2} F''(0) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta) \quad (\text{III.51})$$

Nous évaluons la solution à $\eta = 1$ et utilisons la condition aux limites pour obtenir

$$1 + \frac{\eta^2}{2} F''(0) - L_1^{-1}RF(\eta) - L_1^{-1}NF(\eta) = 0 \quad (\text{III.52})$$

Avec

$$L_1^{-1}(\blacksquare) = \int_0^1 \int_0^\eta \int_0^\eta (\blacksquare) d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.53})$$

En résolvant l'équation (III.52), nous avons déterminé que:

$$F''(0) = -2 + 2L_1^{-1}RF(\eta) + 2L_1^{-1}NF(\eta) \quad (\text{III.54})$$

En remplaçant $F''(0)$ dans l'équation (III.51), cela donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\eta) = 1 - \eta^2 + \eta^2 L_1^{-1}RF_n(\eta) + \eta^2 L_1^{-1}NF_n(\eta) - L^{-1}RF_n(\eta) - L^{-1}NF_n(\eta) \quad (\text{III.55})$$

$$F(\eta) = 1 - \eta^2 + \eta^2 L_1^{-1} RF(\eta) + \eta^2 L_1^{-1} NF(\eta) - L^{-1} RF(\eta) - L^{-1} NF(\eta) \quad (\text{III.56})$$

Ensuite, pour simplifier la complexité du problème considéré, je recommande de remplacer les fonctions trigonométriques par leur développement de la série de Taylor.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \eta) &= 1 - \frac{\alpha^2 \eta^2}{2} + \frac{\alpha^4 \eta^4}{24} - \frac{\alpha^6 \eta^6}{720} + \frac{\alpha^8 \eta^8}{40320} + \frac{\alpha^{10} \eta^{10}}{3628800} + \frac{\alpha^{12} \eta^{12}}{479001600} \dots \quad (\text{III.57}) \\ \sin(2\alpha \eta) &= 2\alpha \eta - \frac{4\alpha^3 \eta^3}{3} + \frac{4\alpha^5 \eta^5}{15} - \frac{8\alpha^7 \eta^7}{315} + \frac{4\alpha^9 \eta^9}{2835} - \frac{8\alpha^{11} \eta^{11}}{155925} + \frac{8\alpha^{13} \eta^{13}}{6081075} \dots \end{aligned}$$

Où :

F_0 est exprimé comme suit

$$F_0 = 1 - \eta^2 \quad (\text{III.58})$$

Les termes de la solution (F_1, F_2, \dots, F_n) de l'équation (II.17) par la méthode de Duan-Rach modifiée (DRMA) se présentent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} RF_1 &= -2H_a R_{e\eta} + \eta(8 + H_a R_e(-2+3\eta^2)) \alpha^2 + \frac{1}{12} H_a R_{e\eta}^3 (16-17\eta^2) \alpha^4 \\ &+ \frac{1}{360} H_a R_{e\eta}^5 (-96+97\eta^2) \alpha^6 + \frac{1}{20160} H_a R_{e\eta}^7 \alpha^8 (512-513\eta^2) \\ &+ \frac{1}{1814400} H_a R_e^9 \eta \alpha^{10} (-2560+2561\eta^2) + \frac{1}{239500800} H_a R_e^{11} \eta (12288-12289\eta^2) \alpha^{12} \\ (\text{III.59}) \\ &+ \frac{1}{43589145600} H_a R_e^{13} \eta \alpha^{14} (-57344+57345\eta^2) + \frac{1}{10461394944000} H_a R_e^{15} \eta \alpha^{16} (262144 - \\ &262145\eta^2) \\ &+ \frac{H_a R_{e\eta}^{17} \alpha^{18}}{3201186852864000} (-1179648+1179649\eta^2) \\ &+ \frac{1}{1216451004088320000} H_a R_e^{19} \eta \alpha^{20} (5242880-5242881\eta^2), \\ NF_1 &= 4R_e \eta (1 - \eta^2) \alpha + 64w_i \eta (1-\eta^2) \alpha^3, \quad (\text{III.60}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{12} H_a R_e^4 \eta + \frac{1}{6} R_e^4 \eta \alpha - \frac{1}{30} R_e^4 \eta^6 \alpha + \frac{1}{3} \eta^4 \alpha^2 - \frac{1}{12} H_a R_e^4 \eta \alpha^2 + \frac{1}{40} H_a R_e^6 \eta \alpha^2 + \frac{8}{3} w_i \eta^4 \alpha^3, \\ &- \frac{8}{15} w_i \eta^6 \alpha^3 + \frac{1}{90} H_a R_e \eta^6 \alpha^4 - \frac{17}{4032} H_a R_e \eta^8 \alpha^4 - \frac{1}{1260} H_a R_{e\eta}^8 \alpha^6 + \frac{97}{259200} H_a R_e \eta^{10} \alpha^6 \\ &+ \frac{1}{28350} H_a R_e \eta^{10} \alpha^8 - \frac{19}{985600} H_a R_e^{12} \eta \alpha^8 - \frac{1}{935550} H_a R_e \eta^{12} \alpha^{10} \\ (\text{III.61}) \\ &+ \frac{197}{304819200} H_a R_e \eta^{14} \alpha^{10} + \frac{1}{42567525} H_a R_e \eta^{14} \alpha^{12} - \frac{12289}{804722688000} H_a R_e \eta^{16} \alpha^{12} \\ &- \frac{1}{2554051500} H_a R_e \eta^{16} \alpha^{14} + \frac{3823}{14227497123840} H_a R_e \eta^{18} \alpha^{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{195384939750} H_a R_e \eta^{18} \alpha^{16} - \frac{4033}{1100860637184000} H_a R_e \eta^{20} \alpha^{16} \\
 & + \frac{1}{18561569276250} H_a R_e \eta^{20} \alpha^{18} + \frac{1179649}{29578966520463360000} H_a R_e \eta^{22} \alpha^{18} \\
 & + \frac{1}{2143861251406875} H_a R_e \eta^{22} \alpha^{20} - \frac{249661}{703456237792788480000} H_a R_e \eta^{24} \alpha^{20} \\
 & - \eta^2 \left(\frac{2}{15} R_e \alpha + \frac{32}{15} w_i \alpha^3 \right) \\
 & - \eta^2 \left(-\frac{1}{12} H_a R_e + \frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{7}{120} H_a R_e \alpha^2 + \frac{139}{20160} H_a R_e \alpha^4 - \frac{761}{1814400} H_a R_e \alpha^6 \right. \\
 & \left. + \frac{1277}{79833600} H_a R_e \alpha^8 - \frac{1417}{3353011200} H_a R_e \alpha^{10} + \frac{86003}{10461394944000} H_a R_e \alpha^{12} \right. \\
 & \left. - \frac{14563}{118562476032000} H_a R_e \alpha^{14} + \frac{353891}{243290200817664000} H_a R_e \alpha^{16} \right. \\
 & \left. - \frac{7864301}{5620003638888038440000} H_a R_e \alpha^{18} \right. \\
 & \left. + \frac{11534329}{103408066955539906560000} H_a R_e \alpha^{20} \right).
 \end{aligned}$$

III. 4. Conclusion

Les résultats obtenus à l'aide de la résolution de l'équation différentielle ordinaire de type non linéaires de 3^{ème} ordre qui caractérise l'écoulement envisagé, seront exposées dans le chapitre suivant.

Chapitre IV :
Résultats Et
Discussion

IV 1. Introduction :

Ce chapitre est essentiellement composé de deux parties. La première consiste à la visualisation de l'effet de divers paramètres physiques tels que : le nombre de Reynolds Re , l'angle d'ouverture α , le nombre de Hartmann Ha et le nombre de Weissenberg Wi sur la distribution des vitesses et le coefficient de frottement C_f de l'écoulement d'un fluide viscoélastique entre deux parois non parallèles. Par ailleurs, la seconde partie concerne la validation des résultats analytiques obtenus par une comparaison soit avec les résultats existants en littérature, soit avec les résultats obtenus numériquement.

Les résultats obtenus révèlent que les profils de vitesse sont symétriques, ils prennent des valeurs maximales à l'axe du canal pour les deux configurations adoptées: Convergent et Divergent.

Le retour d'écoulement (point de séparation) est entièrement exclu pour l'écoulement convergent.

IV 2. Champ dynamique

IV 2.1. Effet du nombre de Reynolds Re :

Les Figures (IV.1 et IV.2) visualisent l'effet du nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse de l'écoulement d'un fluide incompressible et viscoélastique dans un canal convergent-divergent pour un écoulement classique sans présence d'un champ magnétique (Figures IV.1.a et IV.2.a) et un autre magnétohydrodynamique avec effet d'un champ magnétique externe (Figures IV.1.b et IV.2.b) lorsque $\alpha = -5^\circ$ et $Wi = 0.25$.

Pour l'écoulement convergent (débit $Q < 0$), tel que visualisé dans la Fig. IV.1.a, on constate que la fonction $f(\theta)$ est partout négative (vitesse dirigée vers le sommet de l'angle) et variant d'une manière monotone de la valeur 0 sur les parois fixes solides ($\theta = \pm\alpha$) à la valeur $-f(0)$ ($f(0) < 0$) sur l'axe du canal ($\theta = 0$). Pour l'écoulement convergent, le mouvement est d'une part symétrique par rapport à $\theta = 0$, et d'autre part, possible pour toute ouverture $\alpha < \pi$ et pour tout nombre de Reynolds. D'autre part, tel que démontré par la Figure IV.1.b, il est bien clair que la présence d'un champ magnétique externe ($Ha=1$) fait notablement croître la vitesse de l'écoulement objet

d'étude avec l'accroissement du nombre de Reynolds. Dans ces conditions, l'épaisseur de la couche limite se verra considérablement réduite et par conséquent l'écoulement devient très stable.

Par contre, comme le montre la Figure IV.2.a, pour un écoulement divergent classique (débit $Q > 0$), on constate que la fonction $f(\theta)$ étant partout positive (la vitesse est dirigée dans le sens opposé au sommet de l'angle) et variant d'une manière monotone de la valeur 0 sur les parois fixes solides ($\theta = \pm\alpha$) à la valeur $+f(0)$ ($f(0) > 0$) sur l'axe du canal ($\theta = 0$). Pour ce cas, l'écoulement divergent symétrique par rapport à $\theta = 0$ n'est possible, pour un angle α donné, que pour des nombres de Reynolds critiques correspondants à une limite déterminée qu'on appelle point de retour ou point de séparation. D'autre part, il est constaté qu'au fur et à mesure que le nombre de Reynolds Re , devient grand, la solution de l'écoulement symétrique partout divergent n'est plus légitime. Par conséquent, il apparaît une solution symétrique avec des maximas et des minimas de la vitesse.

La Figure. **IV.1.a** montre que la vitesse de fluide viscoélastique dans un canal convergent augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds. En fait, il est clairement noté que l'épaisseur de la couche limite devient plus petite avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Également, l'accroissement du nombre de Reynolds conduit à un profil de vitesse plat au centre du canal avec un gradient de vitesse élevé proche des parois. Pour un écoulement hydromagnétique dans un convergent ($Ha=1$, Figure **IV.1.b**), la vitesse croit considérablement et le profil de vitesse devient plus plat au centre du canal.

Par contre, dans le cas d'un canal divergent, comme le montre la Figure **IV.2.a**, il apparaît que la vitesse de l'écoulement classique ($Ha=0$) d'un fluide viscoélastique diminue lorsque la magnitude du nombre de Reynolds augmente. La Figure **IV.2.a** montre également que le débit du fluide est concentré au centre du canal divergent avec un gradient plus faible observé près des parois. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite augmente considérablement. La **Figure IV.2.b**, pour un canal divergent, il est clairement constaté que l'accroissement du nombre de Reynolds dans un écoulement hydromagnétique ($Ha=1$) fait croître la vitesse du fluide viscoélastique, ce qui conduit à un profil de vitesse plat au centre du canal.

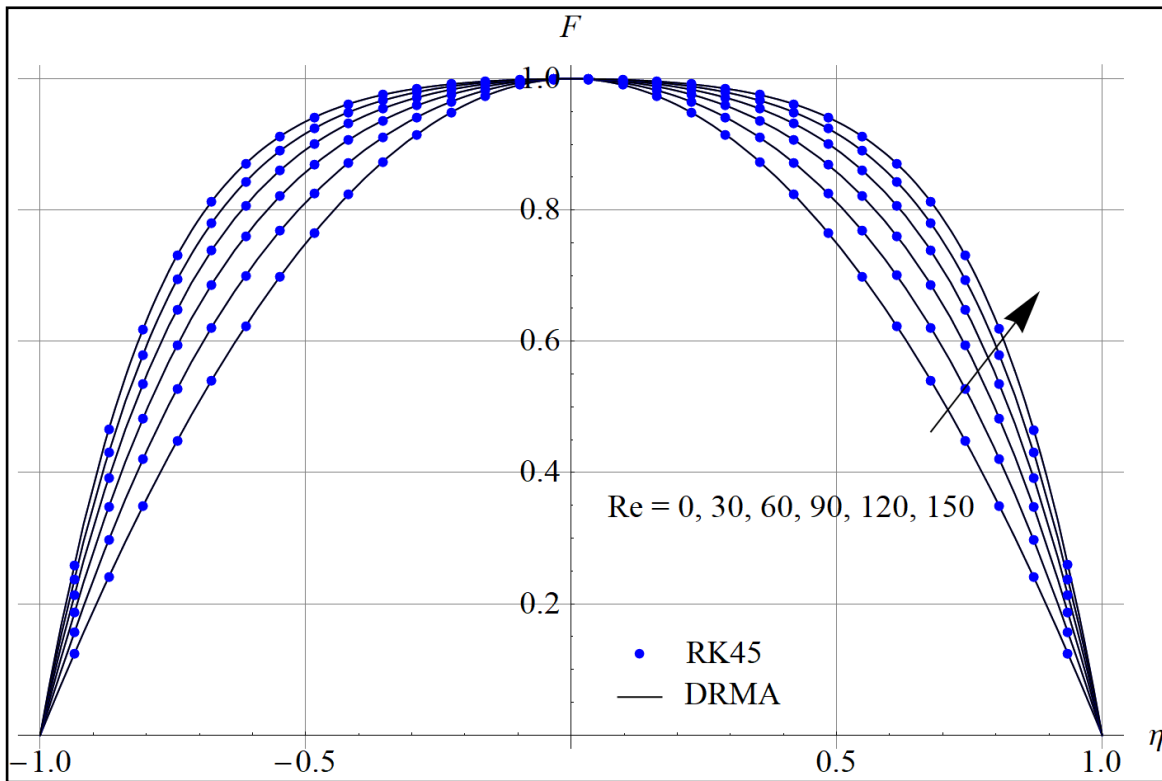


Figure IV. 1. a Sans champ magnétique externe $Ha = 0$

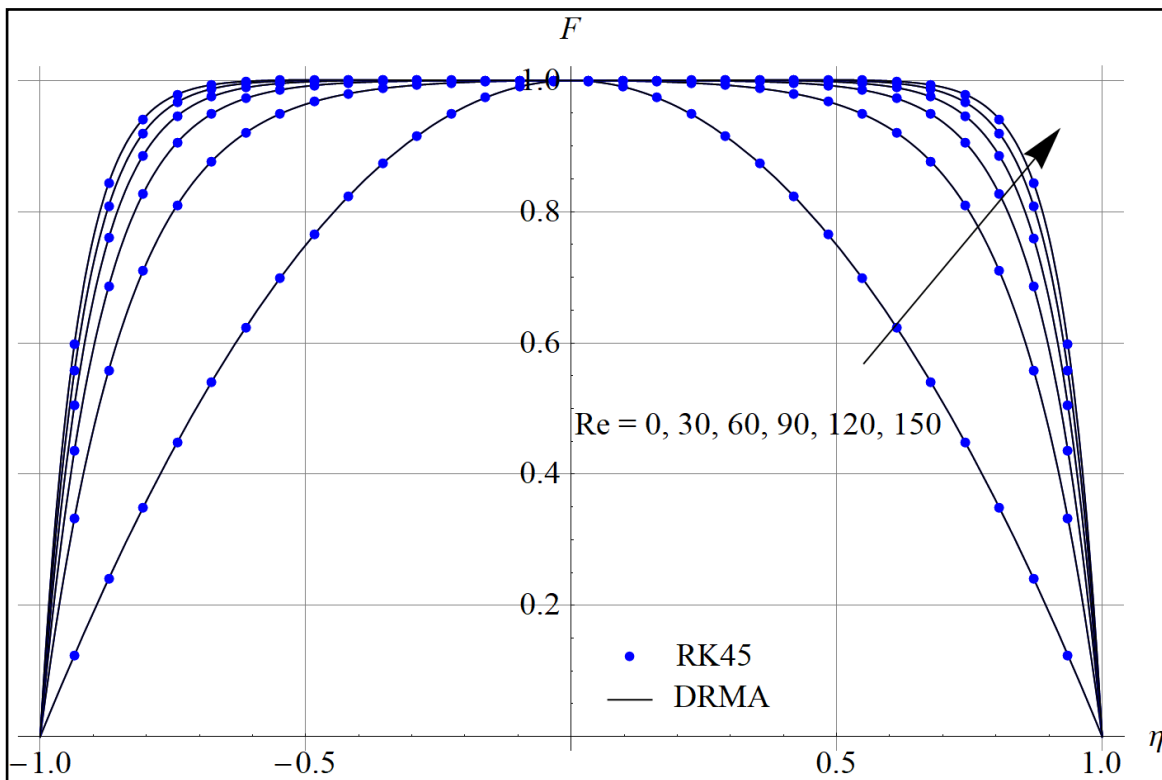


Figure IV. 1. b. Avec champ magnétique externe $Ha = 1$

Figure IV.1 : Effets du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse dans un convergent lorsque $\alpha = -5^\circ$ et $Wi = 0.25$

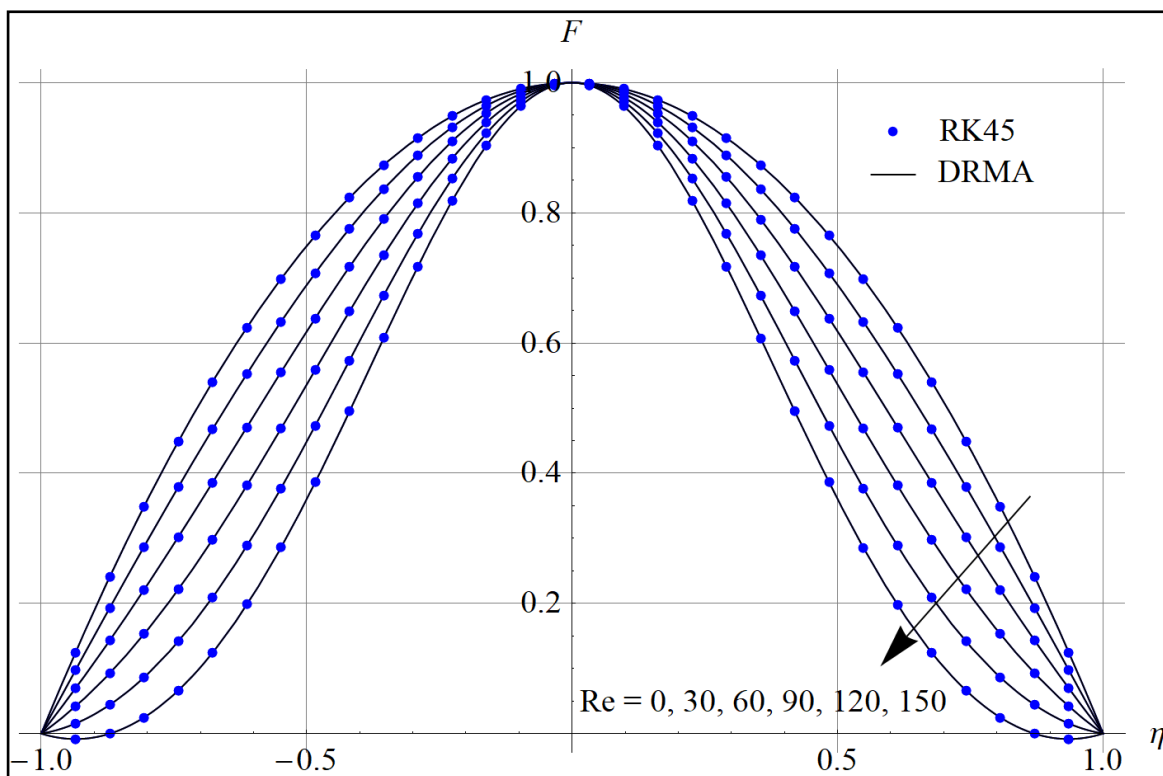


Figure IV. 2. a. Sans champ magnétique externe $Ha = 0$

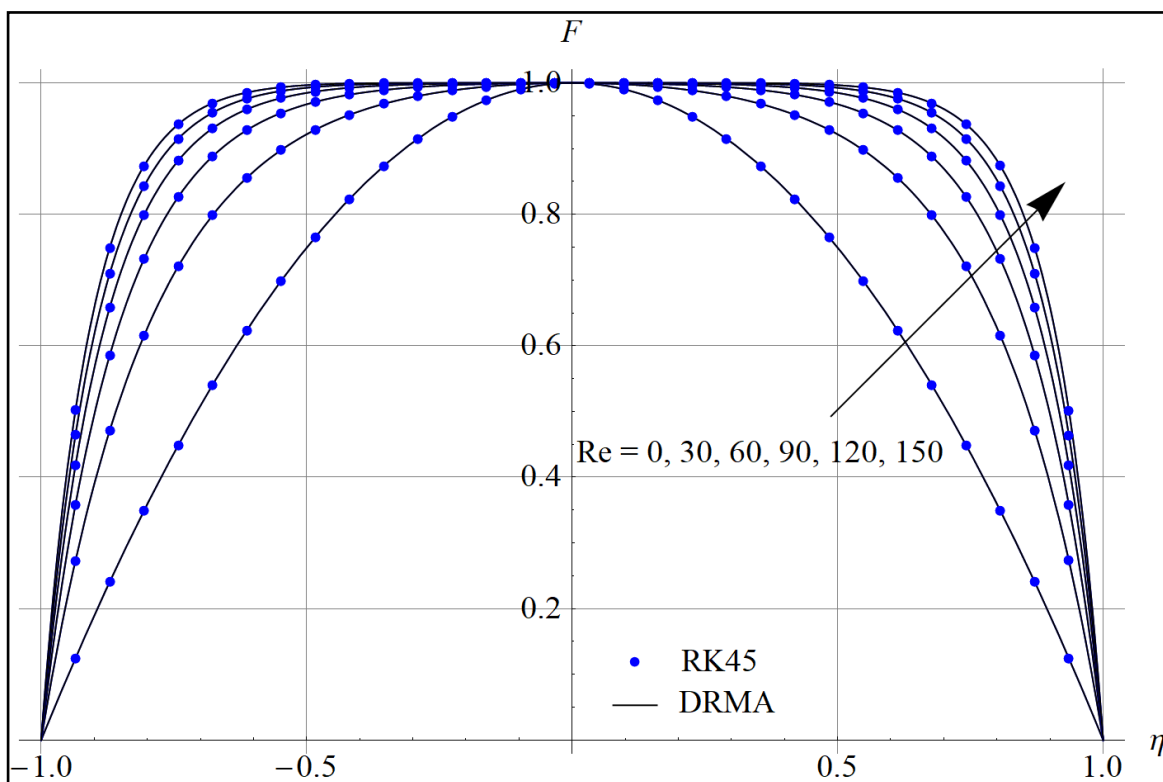
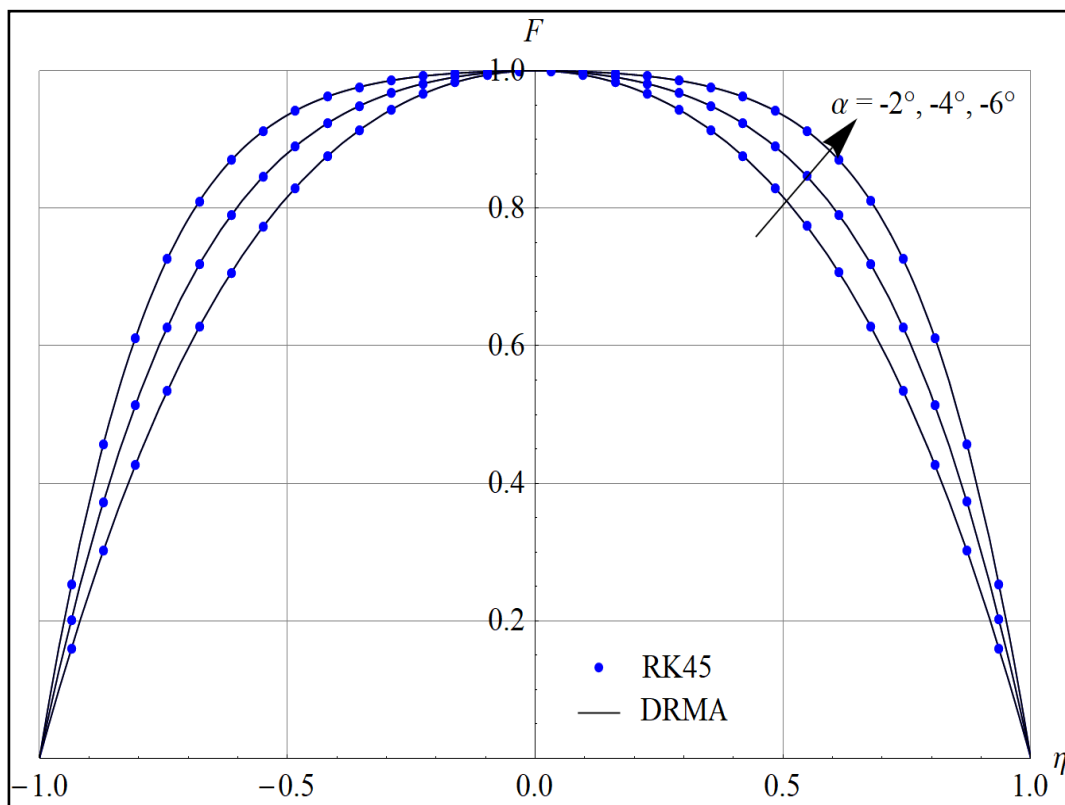


Figure IV. 2. b Avec champ magnétique externe $Ha = 1$

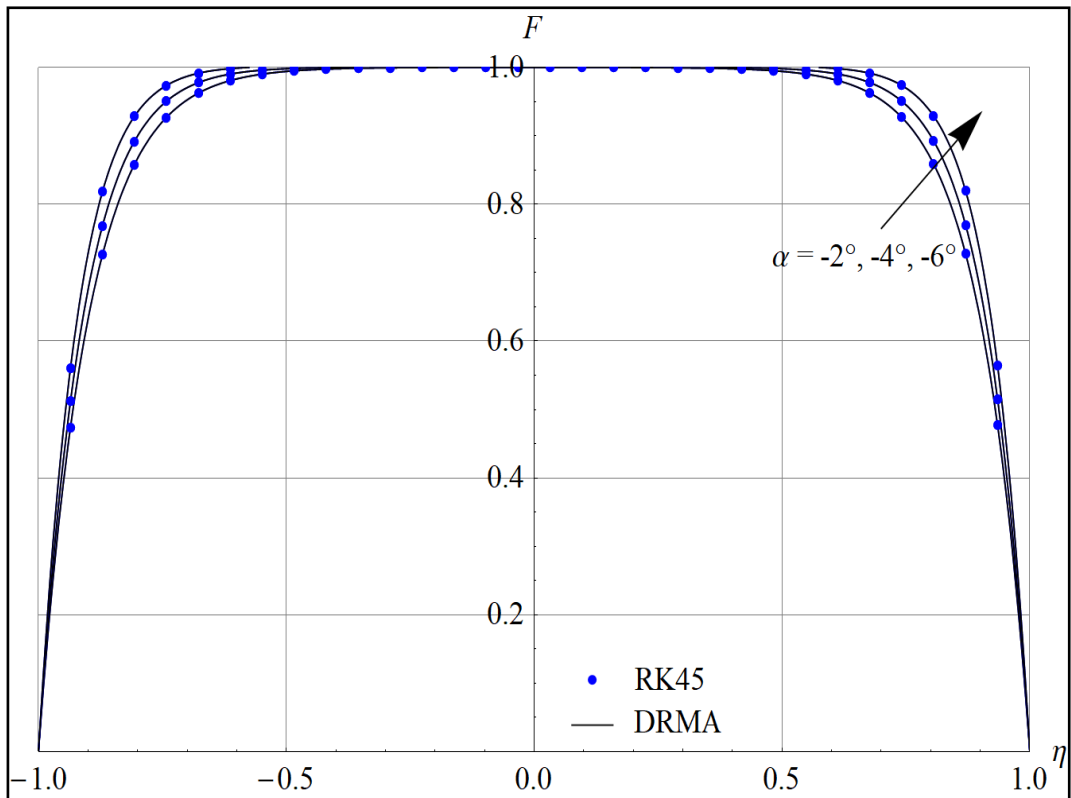
Figure IV.2 : Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse dans un canal divergent lorsque $\alpha = 5^\circ$ et $Wi = 0.25$.

IV 2.2. Effet de l'angle d'ouverture α :

Les Figures. IV.3 et IV.4 montrent l'influence de l'angle d'ouverture α sur la distribution de la vitesse d'un fluide incompressible et viscoélastique lorsque : $Re = 82$ et $Wi = 0.6$ dans un canal convergent-divergent. D'après les résultats obtenus, l'effet de l'angle α sur la distribution des vitesses est tout à fait similaire à celui du nombre de Reynolds Re . En effet, dans la Figure IV.3 (cas d'un écoulement convergent), il est clairement noté que l'épaisseur de la couche limite devient plus petite avec l'accroissement de l'angle α pour les deux écoulements considérés (classique ($Ha=0$) et hydromagnétique ($Ha=1$)). Par contre, dans le cas d'un écoulement divergent, comme le montre la Figure. IV.4, il apparait clairement que la vitesse de fluide viscoélastique diminue avec l'accroissement de l'angle α . Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite augmente considérablement.

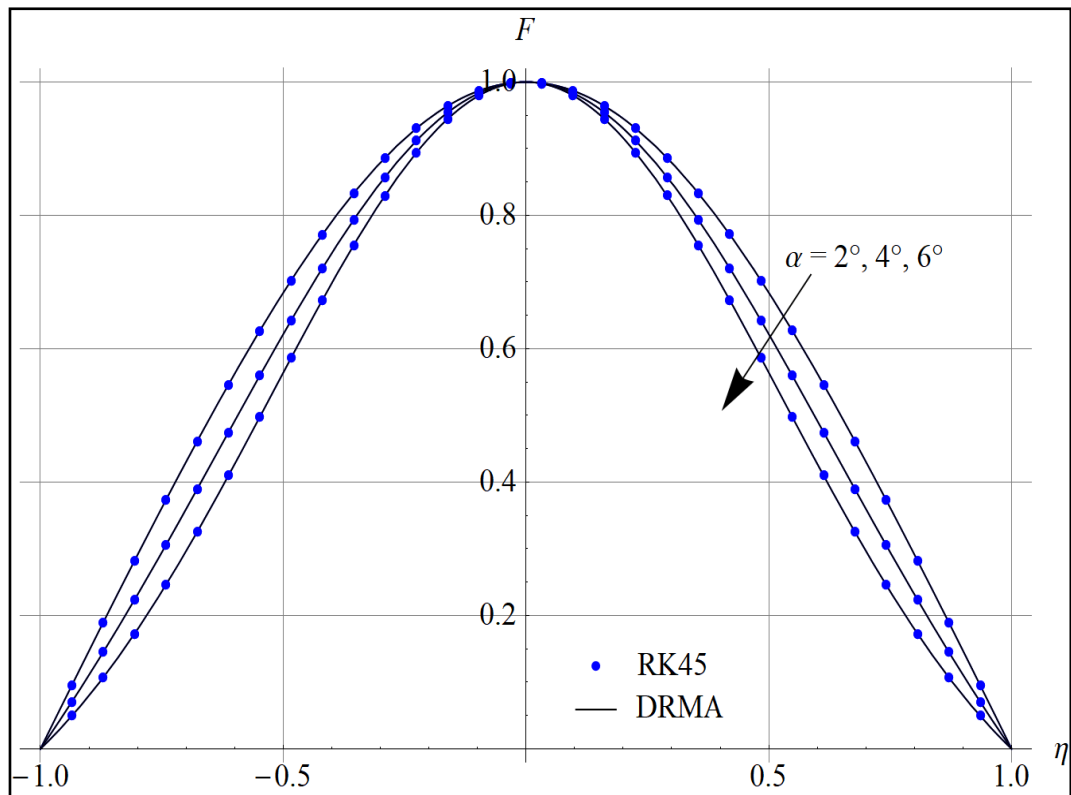


a.) Sans champ magnétique externe $Ha = 0$

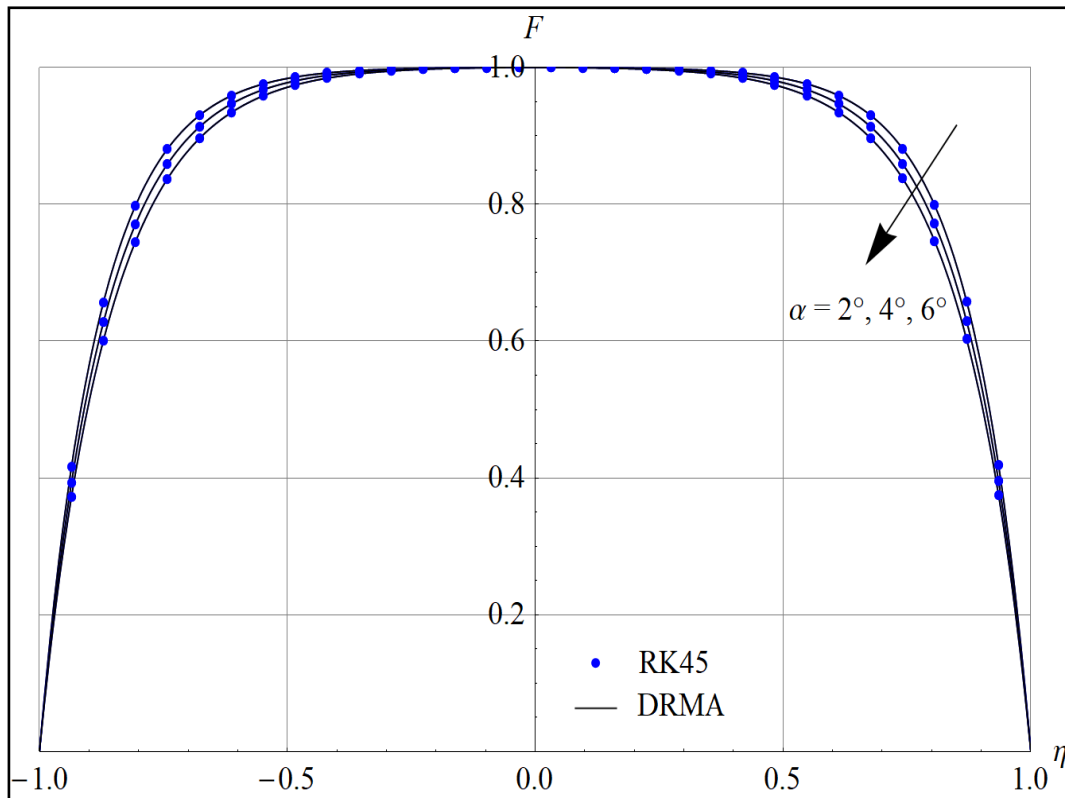


b.) Avec champ magnétique externe $Ha = 1$

Figure IV.3 : Effets de l'angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un canal convergent lorsque $Re = 82$ et $Wi = 0.6$



a.) Sans champ magnétique externe $Ha = 0$



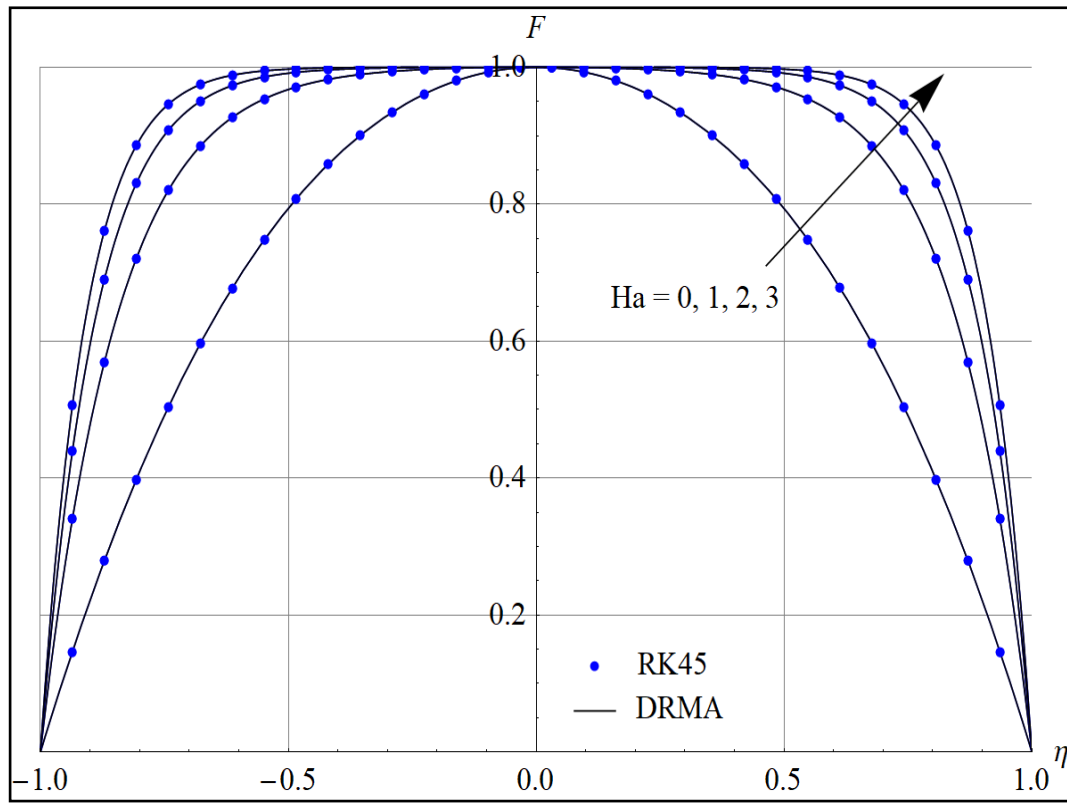
b.) Avec champ magnétique externe $Ha = 1$

Figure IV.4 : Effet de l'angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un canal divergent lorsque $Re = 82$ et $Wi = 0.6$.

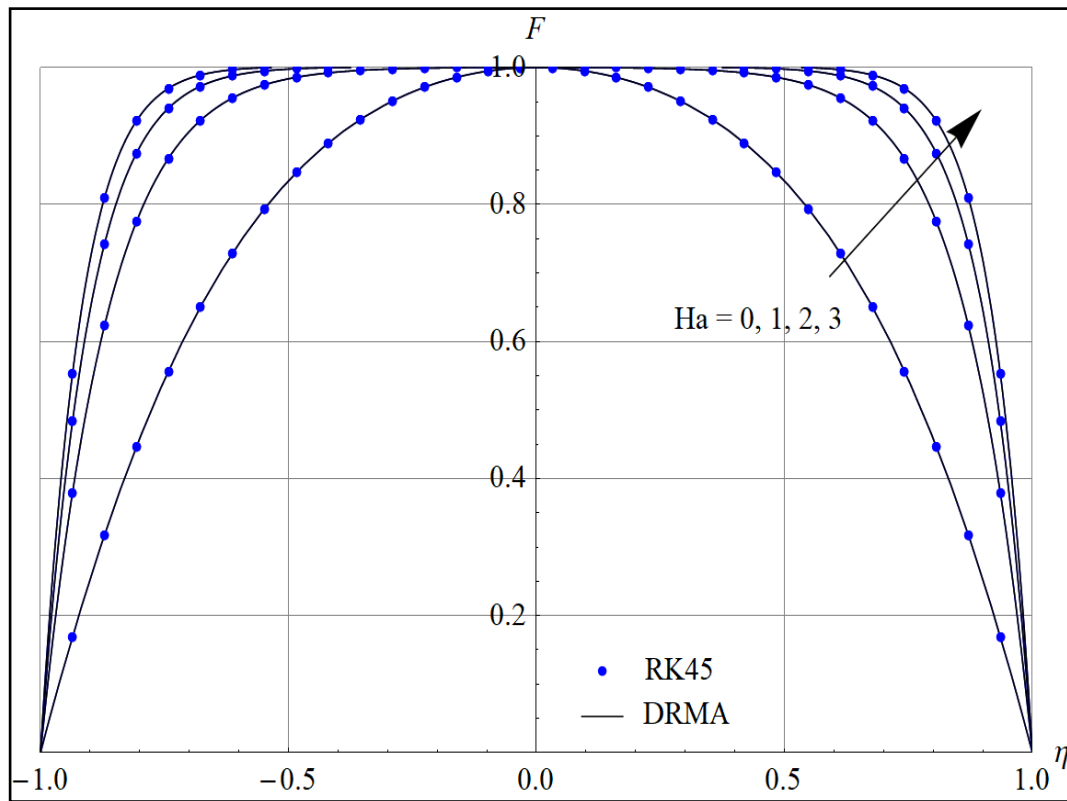
IV 2.3. Effet du nombre de Hartmann Ha :

Le comportement physique de l'écoulement d'un fluide viscoélastique sous l'effet d'un champ magnétique externe Ha lorsque $Re = 30$, $Wi = 0.7$ et $\alpha = \pm 5^\circ$, est illustré par les Figures IV.5 et IV.6.

On peut clairement voir que la vitesse du fluide viscoélastique est directement liée au nombre de Hartmann. En effet, avec l'augmentation du nombre de Hartmann, une diminution de l'épaisseur de la couche limite est observée à la fois pour les deux canaux convergents et divergents. De ces figures, on peut conclure que le champ magnétique a un effet stabilisateur sur la structure de l'écoulement (c.à.d. force de Lorentz agit en opposée à la direction de l'écoulement) et par conséquent le phénomène de retour d'écoulement est entièrement exclu avec l'accroissement du nombre de Hartmann.



$\alpha = -3^\circ$



$\alpha = -5^\circ$

Figure IV.5 : Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse dans un canal convergent pour différentes valeurs de l'angle d'ouverture ($\alpha = -3^\circ$ et $\alpha = -5^\circ$) lorsque : $Re = 30$ et $Wi = 0.7$

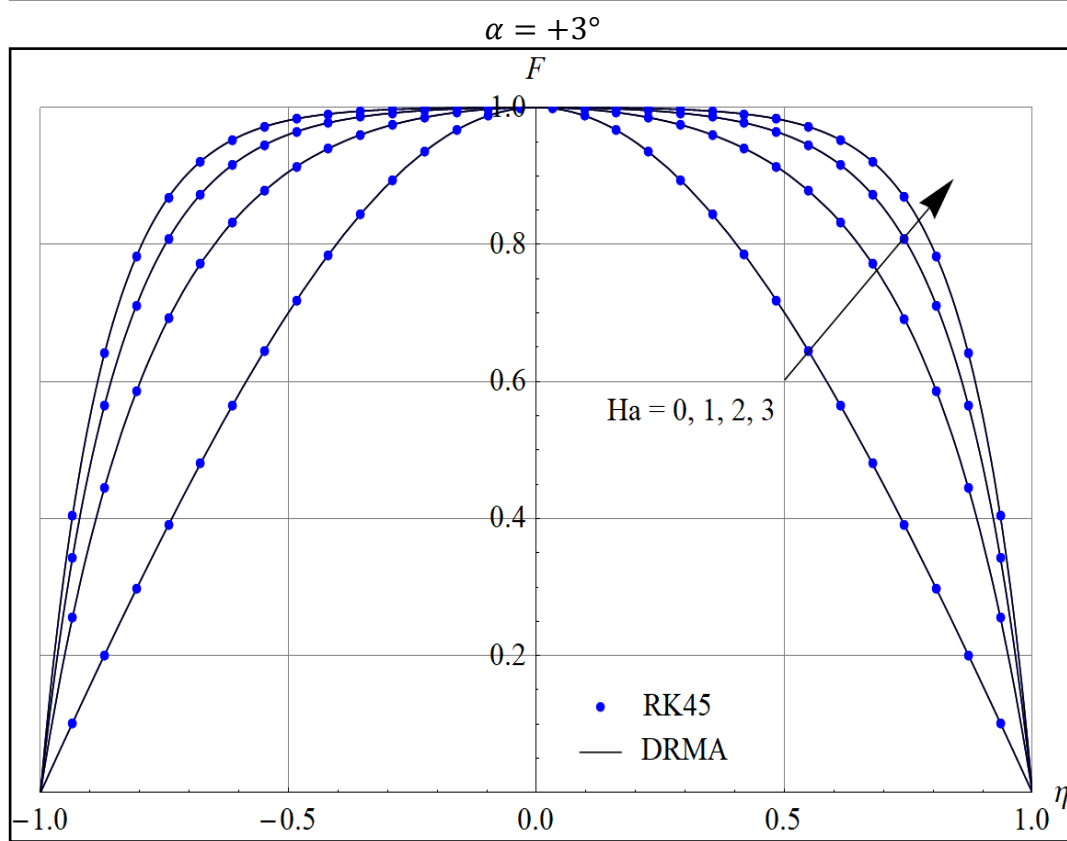
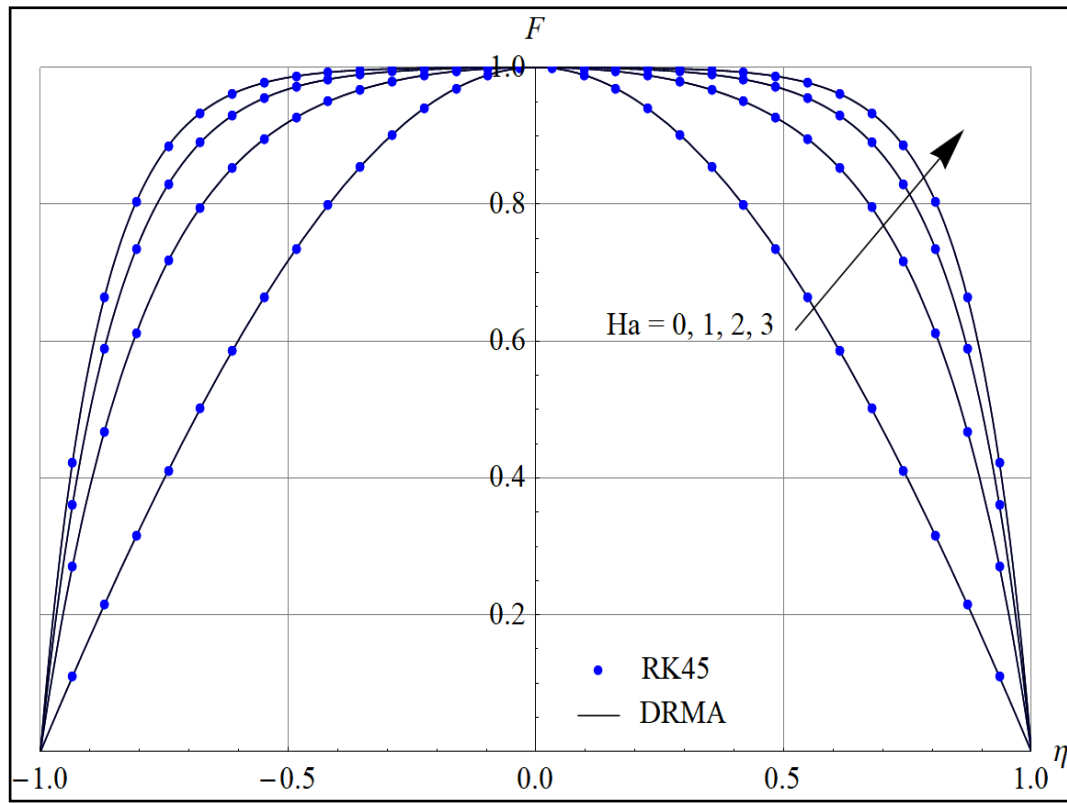
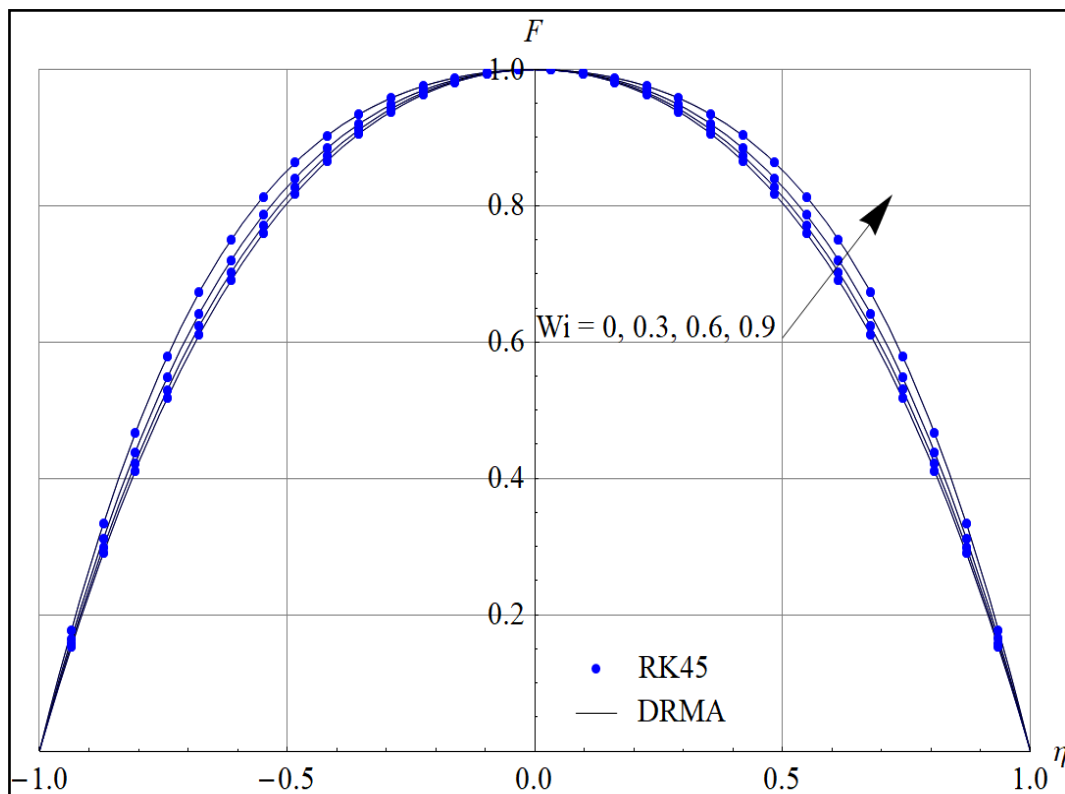


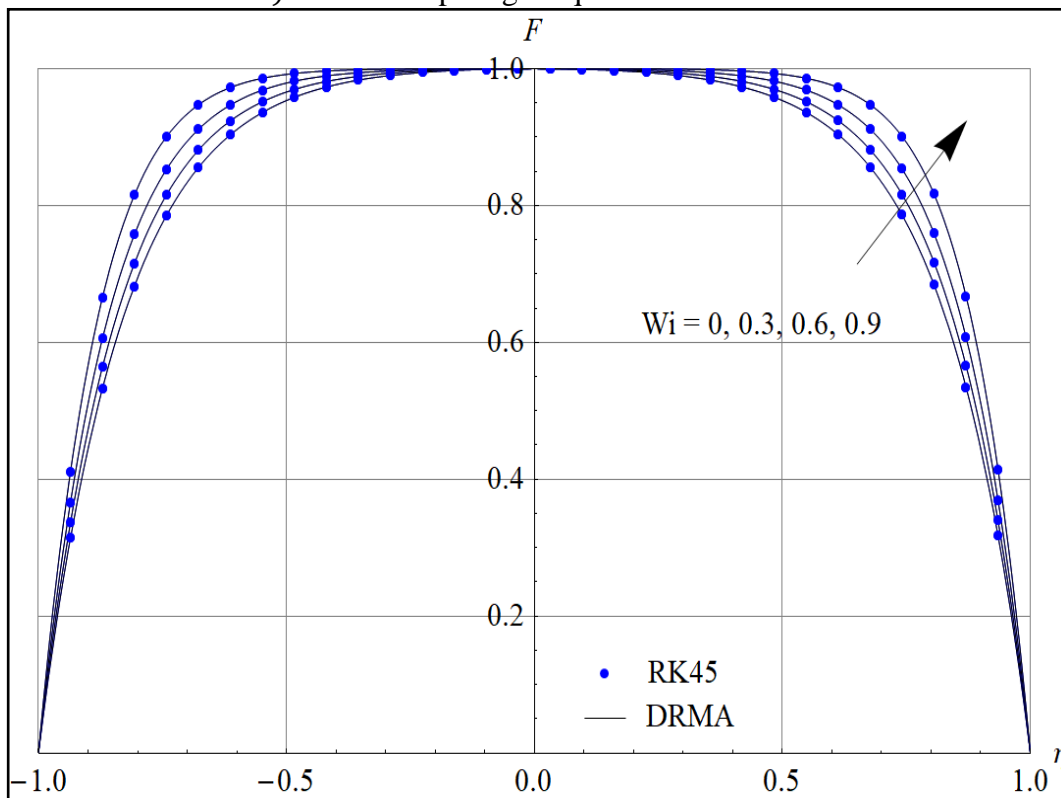
Figure IV.6 : Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse dans un canal divergent pour différentes valeurs de l'angle d'ouverture ($\alpha = +3^\circ$ et $\alpha = +5^\circ$) lorsque : $Re = 30$ et $Wi = 0.7$

IV 2.4. Effet du nombre de Weissenberg Wi :

Pour l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans un canal convergent (Figure IV.7) lorsque : $Re = 30$ et $\alpha = -5^\circ$, on voit clairement qu'il existe une relation proportionnelle entre la distribution des vitesses et le nombre de Weissenberg Wi . En effet, l'accroissement du nombre de Weissenberg fait considérablement augmenter le gradient de pression favorable. Dans cette situation, la vitesse de l'écoulement croît et par conséquent l'épaisseur de la couche limite se verra diminuée pour les deux cas d'écoulements considérés : classique (sans présence d'un champ magnétique externe, $Ha = 0$) et magnétohydrodynamique ($Ha = 1$). Pour l'écoulement d'un fluide viscoélastique classique (partout divergent (Figure IV.8-a) lorsque : $Re = 30$, $Ha = 0$ et $\alpha = +5^\circ$, il est clairement noté que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'accroissement du nombre de Weissenberg. Dans ces conditions, le nombre de Weissenberg (Wi) a un effet stabilisateur sur la structure de l'écoulement. Par ailleurs, dans le cas d'un écoulement MHD à de faibles magnitudes ($Ha=1$), la vitesse de l'écoulement apparaît comme une fonction décroissante du nombre de Weissenberg et par conséquent l'épaisseur de la couche limite se verra augmentée, favorisant ainsi le phénomène de séparation (retour de l'écoulement).

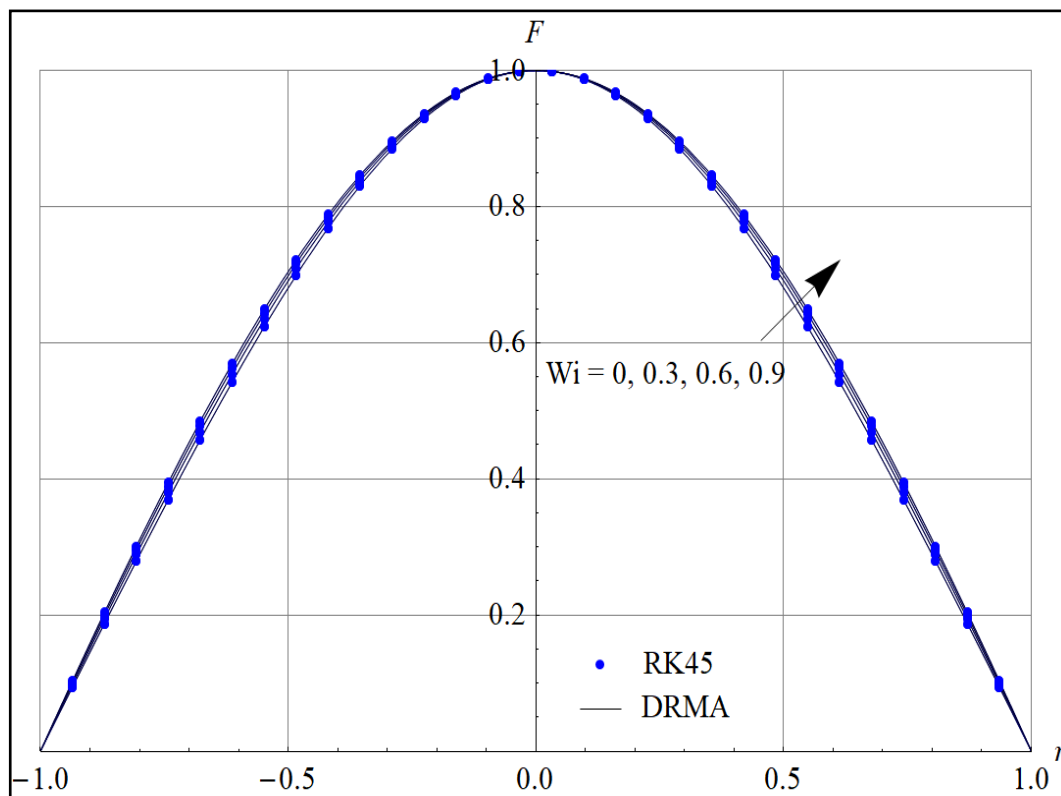


a.) Sans champ magnétique externe $Ha = 0$

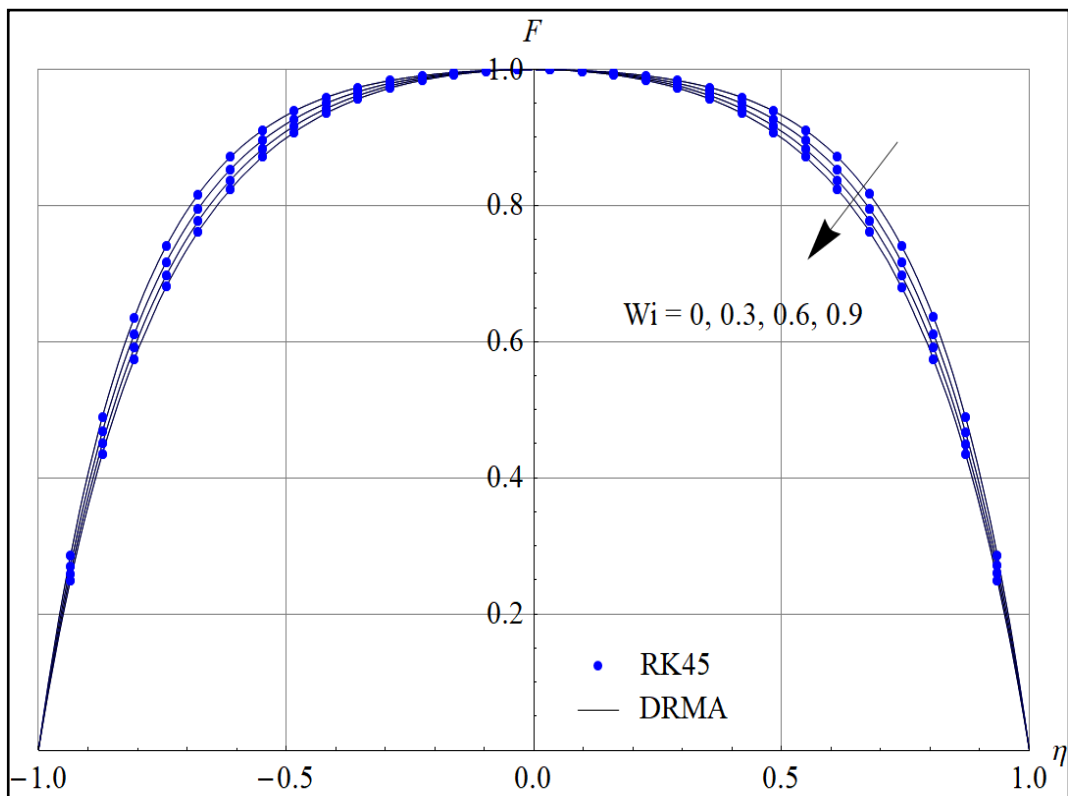


b.) Avec champ magnétique externe $Ha = 1$

Figure IV.7 : Effet du nombre de Weissenberg Wi sur le profil de vitesse dans un canal convergent lorsque : $Re = 30$ et $\alpha = -5^\circ$



a.) Sans champ magnétique externe $Ha = 0$



b.) Avec champ magnétique externe $Ha = 1$

Figure IV.8 : Effet du nombre de Weissenberg Wi sur le profil de vitesse dans un canal divergent lorsque : $Re=30$ et $\alpha= + 5^\circ$

IV 3. Coefficient de frottement C_f :

L'effet combiné du nombre de Hartmann Ha , de l'angle d'ouverture α et du nombre de Reynolds Re sur le phénomène de retour d'écoulement lorsque : $Wi = 0.25$, est visualisé sur la Figure IV.9. Cette dernière visualise que l'augmentation du produit " $Re \alpha$ " fait diminuer le coefficient de frottement " C_f ", ce qui favorise le phénomène de retour d'écoulement (séparation de l'écoulement). Par exemple, pour le cas d'un écoulement classique ($Ha=0$), la séparation est notée par des valeurs négatives du coefficient de frottement " C_f ". Par contre, pour un écoulement hydromagnétique ($Ha=0.1$), il est clairement observé que le phénomène de retour d'écoulement est retardé, ce qui se traduit par des valeurs positives du coefficient de frottement. En effet, il est à mentionner qu'un changement du signe du coefficient de frottement est un indicateur sur le retour d'écoulement.

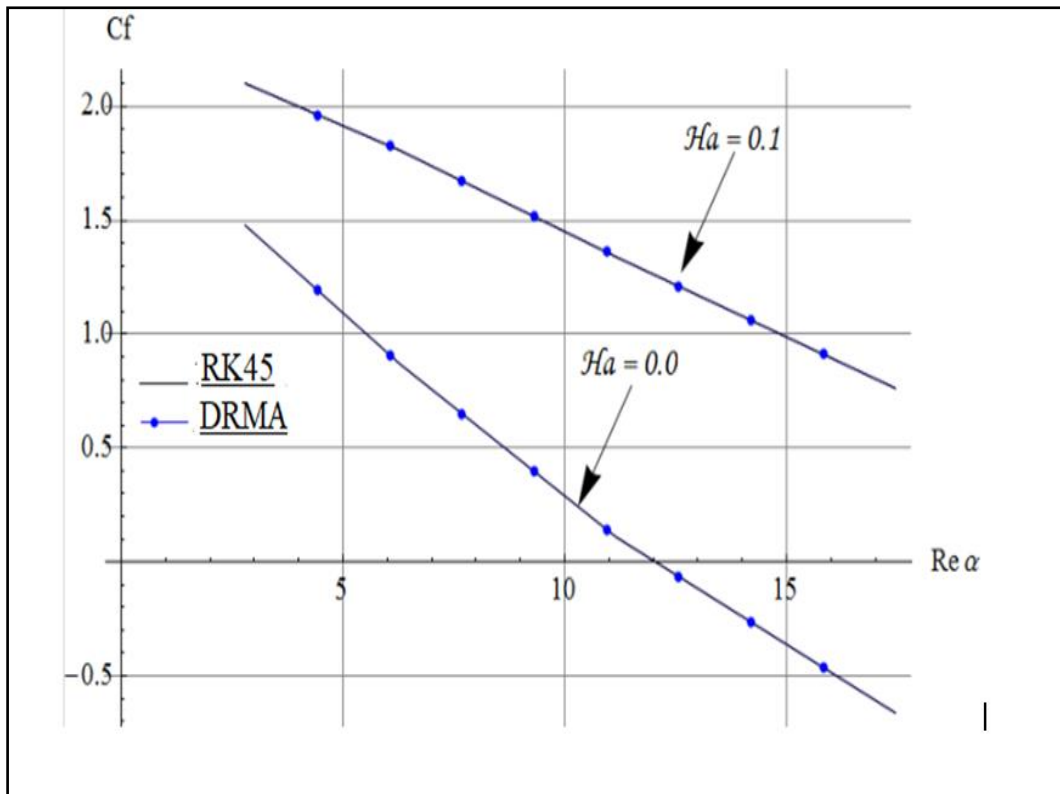


Figure IV.9 : Variation du Coefficient de frottement en fonction du produit de $Re \times \alpha$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque : $Wi = 0.25$

L'effet combiné du nombre de Hartmann Ha et de l'angle d'ouverture α (c.à.d. effet du produit $Ha \cdot \alpha$) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re sur le phénomène de retour d'écoulement lorsque $Wi = 0.5$, est visualisé sur la Figure (IV.10). Les résultats visualisés montrent clairement que le phénomène de retour d'écoulement est exclu avec l'application d'un champ magnétique externe sur l'écoulement objet d'étude. En effet, l'accroissement de l'intensité du champ magnétique a un effet stabilisateur dominant, sur l'écoulement du fluide viscoélastique, comparé à l'accroissement du nombre de Reynolds "Re" et l'angle d'ouverture " α ".

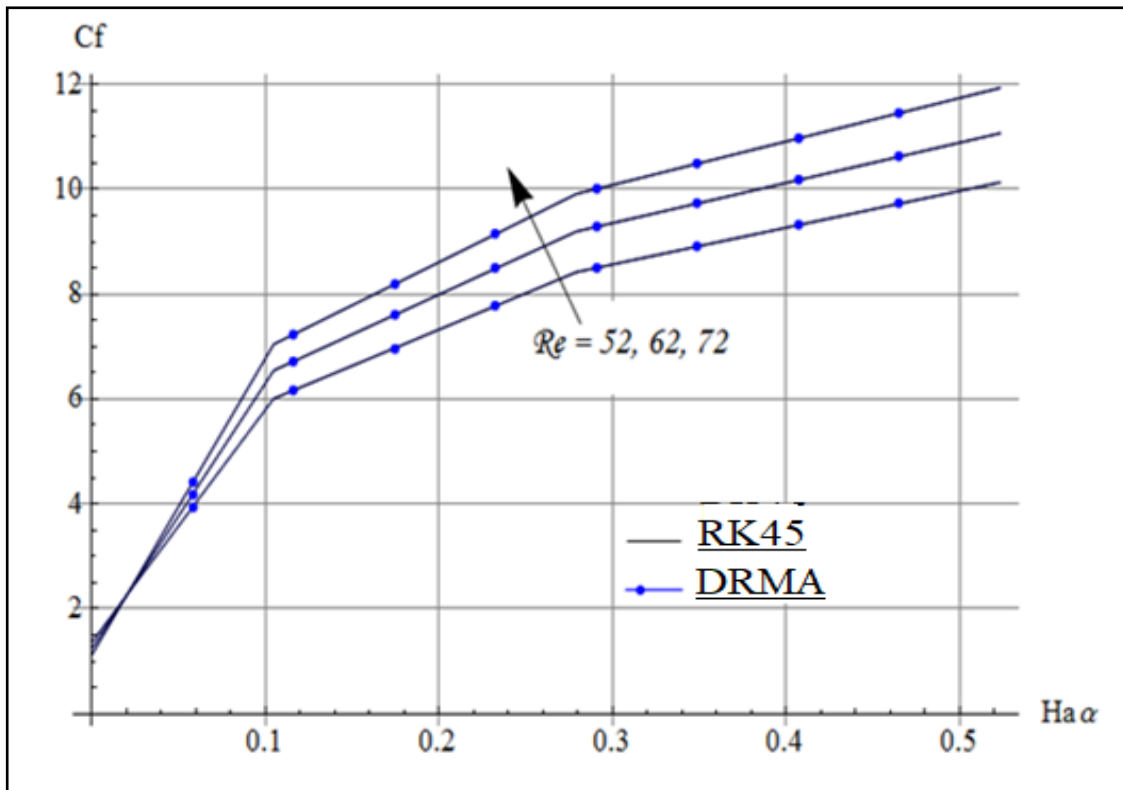


Figure IV.10 : Variation du Coefficient de frottement en fonction du produit $Ha \times \alpha$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds lorsque : $Wi = 0.5$

La Figure IV.11 montre l'effet combiné du nombre de Weissenberg Wi et de l'angle d'ouverture α (produit $Wi \cdot \alpha$) sur le phénomène de retour d'écoulement lorsque $Re = 35$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann Ha . Les résultats obtenus montrent clairement que le coefficient de frottement a un comportement similaire à celui observé dans la Figure IV.9. D'autre part, le retour d'écoulement (point de séparation) est fortement lié au produit ' $Wi \times \alpha$ '. En effet, on constate qu'il est largement favorisé pour l'écoulement divergent quand le gradient de pression adverse est élevé. Ce phénomène disparaît complètement pour l'écoulement convergent.

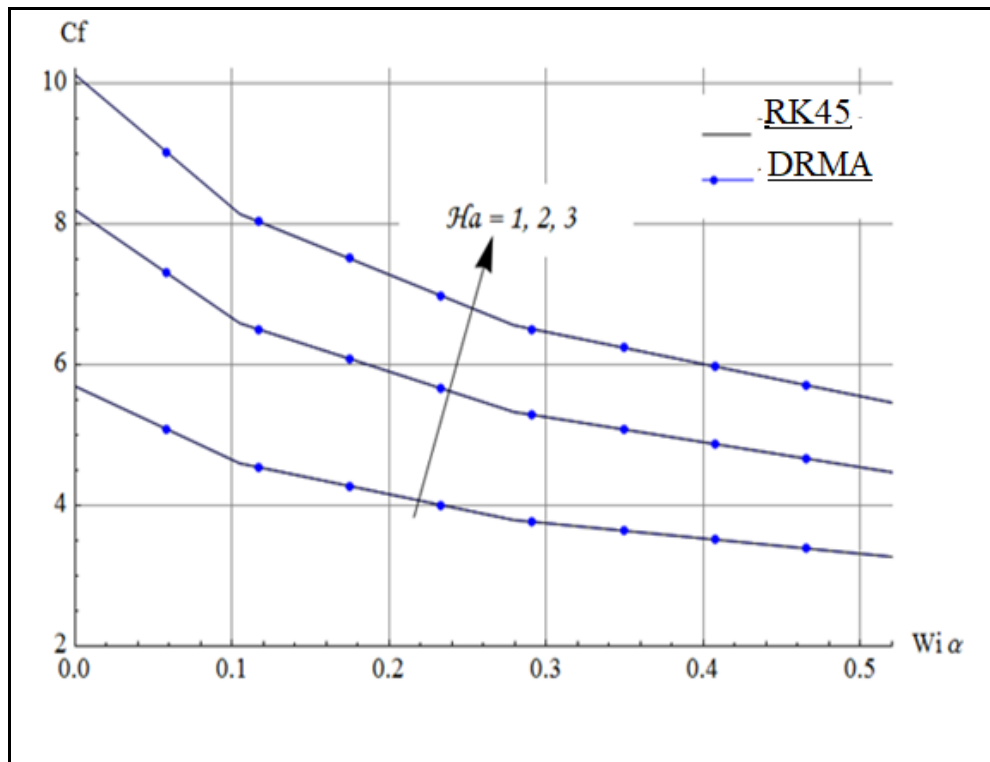


Figure IV.11 : Variation du Coefficient de frottement en fonction du produit $W_i \times \alpha$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann lorsque : $Re = 35$

IV 4. Convergence de la méthode DRMA :

D'après les résultats obtenus et visualisés dans les Figures **IV.12** et **IV.13**, on constate que la précision des résultats est directement proportionnelle aux nombres des itérations c.-à-d. le nombre de termes de la solution (N). En fait, les meilleures solutions de la vitesse sont obtenues à une approximation de 19^{ème} ordre (c.-à-d. $N = 19$) lorsque : $Ha = 0, Re = 55, Wi = 0.5$ et $\alpha = \pm 5^\circ$. Par ailleurs, les résultats de l'évaluation de la constante $F''(0)$, visualisés dans les Tableaux **IV.1** et **IV.2**, montrent que la solution analytique converge vers la solution numérique utilisée comme guide au bout de 33 itérations pour les canaux convergents-divergents.

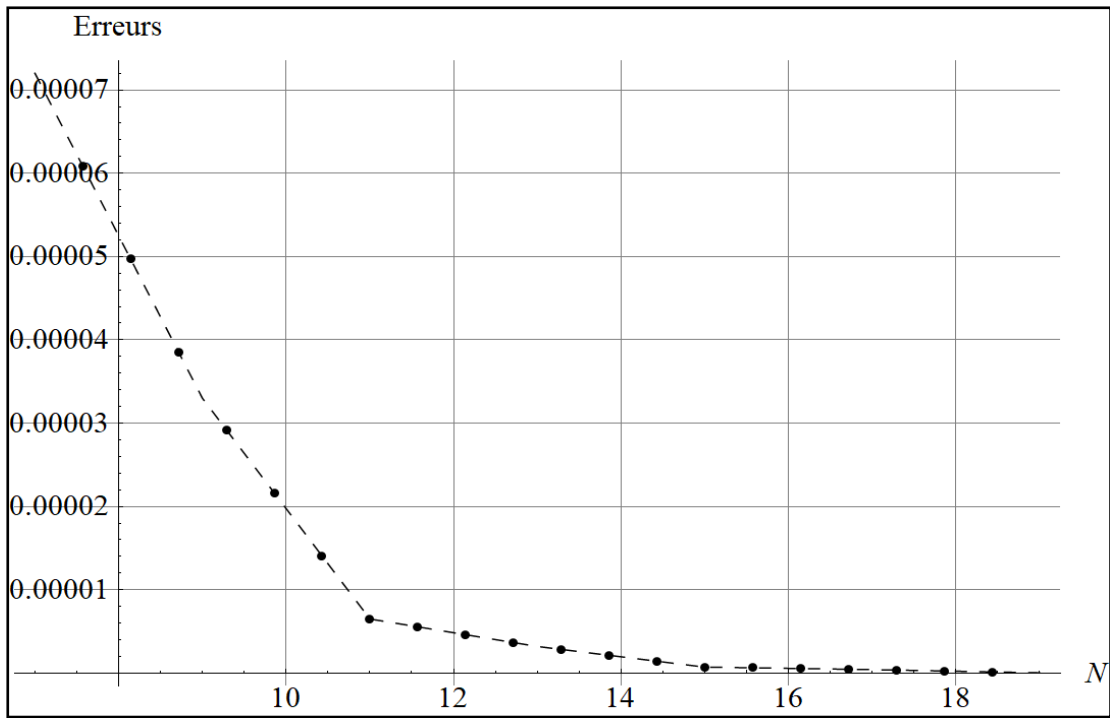


Figure IV.12 : Effet du nombre d'itérations sur l'évaluation de l'erreur dans un convergent lorsque : $Ha = 0, Re = 55, Wi = 0.5$ et $\alpha = -5^\circ$.

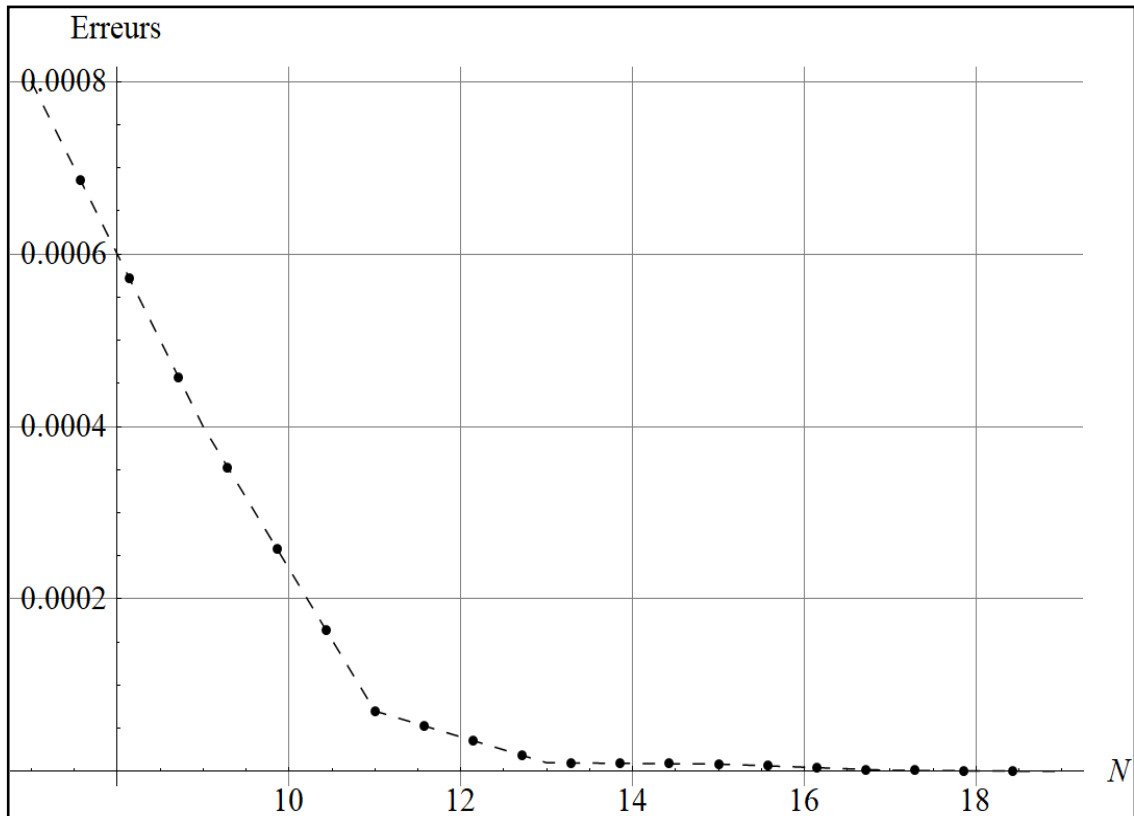


Figure IV.13 : Effet du nombre d'itérations sur l'évaluation de l'erreur dans un divergent lorsque : $Ha = 0, Re = 55, Wi = 0.5$ et $\alpha = 5^\circ$

Tableau IV.1 : La procédure de convergence des résultats analytiques pour le profil de vitesse dans un canal divergent lorsque $\alpha = +3^\circ, Ha = 1, Re = 50$ et $Wi = 0.5$

Ordre d'approximation	$F''(0)$
5 ^{ème} ordre	-0.198705643
7 ^{ème} ordre	-0.164537786
9 ^{ème} ordre	-0.156957545
17 ^{ème} ordre	-0.156694532
23 ^{ème} ordre	-0.1566588742
33 ^{ème} ordre	-0.1566580357
Numérique	-0.1566580359

Tableau IV.2 : La procédure de convergence des résultats analytiques pour le profil de vitesse dans un canal convergent lorsque $\alpha = -3^\circ, Ha = 1, Re = 50$ et $Wi = 0.5$

Ordre d'approximation	$F''(0)$
5 ^{ème} ordre	-0.03688299303
7 ^{ème} ordre	-0.03299320942
9 ^{ème} ordre	-0.02966576312
17 ^{ème} ordre	-0.02993829485
23 ^{ème} ordre	-0.029904109347
33 ^{ème} ordre	-0.02990419405
Numérique	-0.02990419407

IV 5. Comparaison des résultats et validation :

A titre de comparaison, nous avons utilisé la méthode numérique de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF-45) associée à la méthode de Tir comme guide pour confirmer la convergence des résultats obtenus par le traitement analytique via la méthode de Duan-Rach (DRMA). En effet, nous avons comparés les résultats du coefficient de frottement Cf en fonction du nombre de Hartmann Ha dans le **Tableau IV.3**.

Tableau IV.3 : Comparaison des résultats analytiques DRMA avec les résultats numériques RK45 pour la distribution des vitesses dans un canal convergent lorsque :

$$Re = 110, Ha = Wi = 0 \text{ et } \alpha = -3^\circ$$

$Re = 102$	$Wi = 0.1$	$\alpha = -3^\circ$
Ha	$C_f^{numerical}$	C_f^{DRMA}
0.0	0.9447135	0.9447137
0.1	2.5645849	2.5645846
0.3	4.8815339	4.8815337
0.5	6.5659311	6.5659313
1.0	9.6245839	9.6245838
2.0	13.8673552	13.8673551
3.0	17.0941127	17.0941125

Tableau IV.4 : Comparaison des résultats analytiques DRMA avec les résultats numériques RKF-45 pour la distribution des vitesses dans un canal divergent lorsque :

$$Re = 110, Ha = Wi = 0 \text{ et } \alpha = 3^\circ$$

η	$DTM^{[27]}$	$HPM^{[27]}$	$RKHSM^{[28]}$	$HATM^{[29]}$	$RK - 45$	$DRMA$
0	1.0000000 000	1.0000000 00	1.0000000 00	1.0000000 000	1.0000000000	1.0000000000
0.1	0.9789771 156	0.97917617 78	0.97923571 71	0.9791902 126	0.979235674	0.979235672
0.2	0.9182598 446	0.91904249 83	0.91926585	0.9190898 233	0.919265886	0.919265885
0.3	0.8243664 466	0.82609397 20	0.82653635	0.8261576 279	0.826533612	0.826533617
0.4	0.7065763 476	0.70960369 28	0.71023153 93	0.7095963 308	0.710221189	0.710221181
0.5	0.5751498 602	0.57983577 41	0.58048172 01	0.5795957 302	0.580499458	0.580499453
0.6	0.4397114 086	0.44639003 33	0.44687969 13	0.4457343 518	0.446935068	0.446935067
0.7	0.3081560	0.31708779	0.317401372	0.3158980	0.3174084274	0.31740842701

	927	38	7	834		
0.8	0.1862239	0.19753664	0.1976321	0.1958612	0.197641093	0.197641099
	095	51		214		
0.9	0.0784362	0.09124214	0.09120300	0.0895834	0.0912304210	0.0912304214
	201	54	82	689		
1	0.0000000	0.00000000	8.052549 9	4.679 9	0.00000000000	0.00000000000
	015	07	10-8	10-9		

Les résultats présentés dans la Figure (IV.14) et le Tableau (IV.4) montrent de la plus belle manière la validité des résultats obtenus dans cette thèse. En effet, nos résultats concordent parfaitement avec les résultats de la littérature.

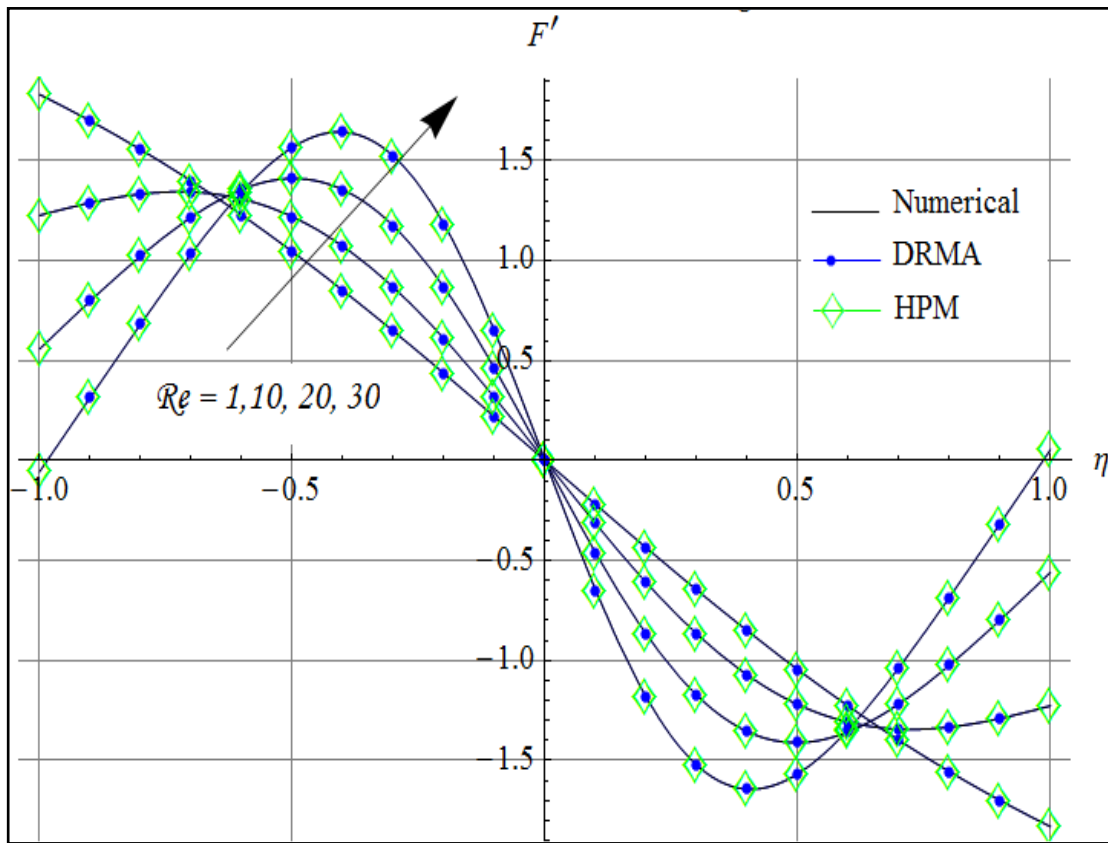


Figure IV.14. Comparaison entre les résultats DRMA et les résultats obtenus par Shadloo [20] pour la dérivée de profil des vitesses $f'(\eta)$ lorsque : $Ha = 0$, $Wi = 0.1$ et

$$\alpha = \frac{\pi}{8}.$$

Les Figures IV.15 et IV.16 montrent la variation de la distribution des vitesses pour l'écoulement étudié lorsque : $Ha = 0$, $Re = 250$, $Wi = 0.5$, et $\alpha = \pm 3^\circ$. En effet, on

constate que les résultats obtenus par la méthode DRMA sont en parfaite concordance avec les résultats numériques et ceux obtenus avec la fonction intégrée dans le logiciel **MATHEMATICA** (HAM-based Mathematica package BVPh 2). Par ailleurs, les résultats illustrés dans le Tableau (IV.5) montrent clairement que les solutions de la technique analytiques adoptée (DRMA) coïncident parfaitement avec les résultats exacts obtenus par **ABBASBANDY** [77].

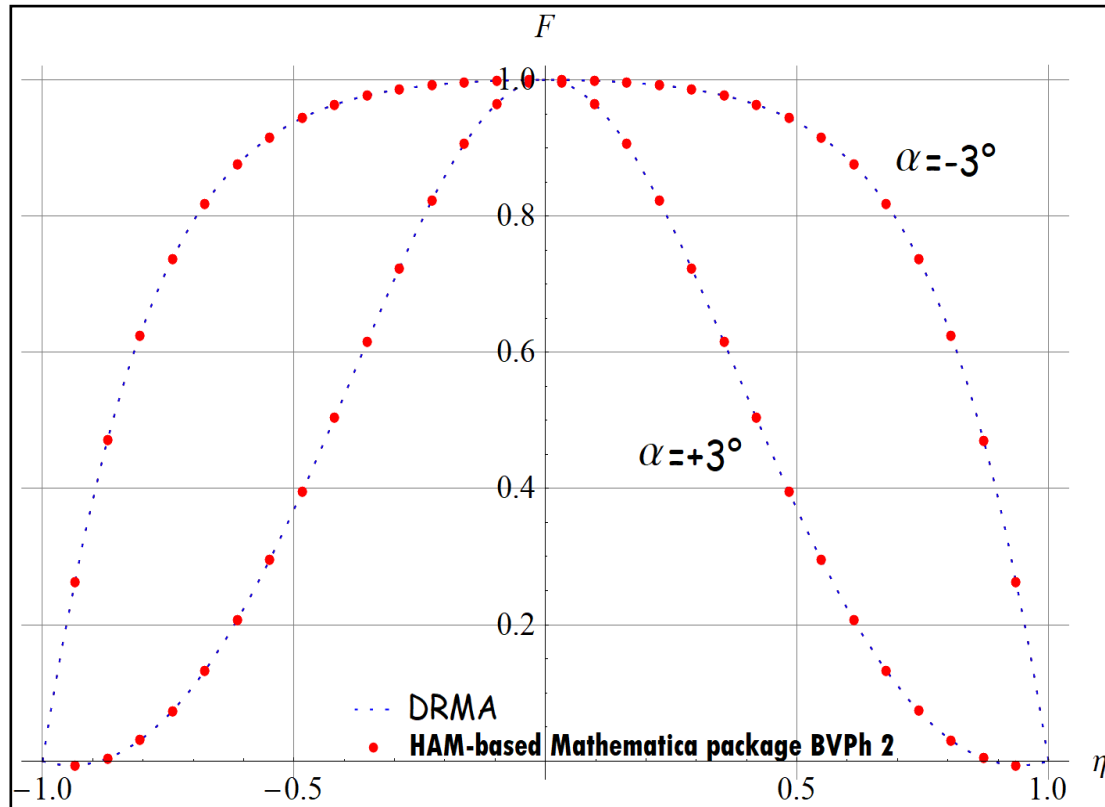


Figure IV.15 : Comparaison des résultats analytiques (DRMA) avec les résultats obtenus par la fonction intégrée dans **MATHEMATICA** (HAM-based Mathematica package BVPh 2) pour le profil de vitesse dans un canal convergent-divergent lorsque : $Ha = 0, Re = 250, Wi = 0.5$, et $\alpha = \pm 3^\circ$.

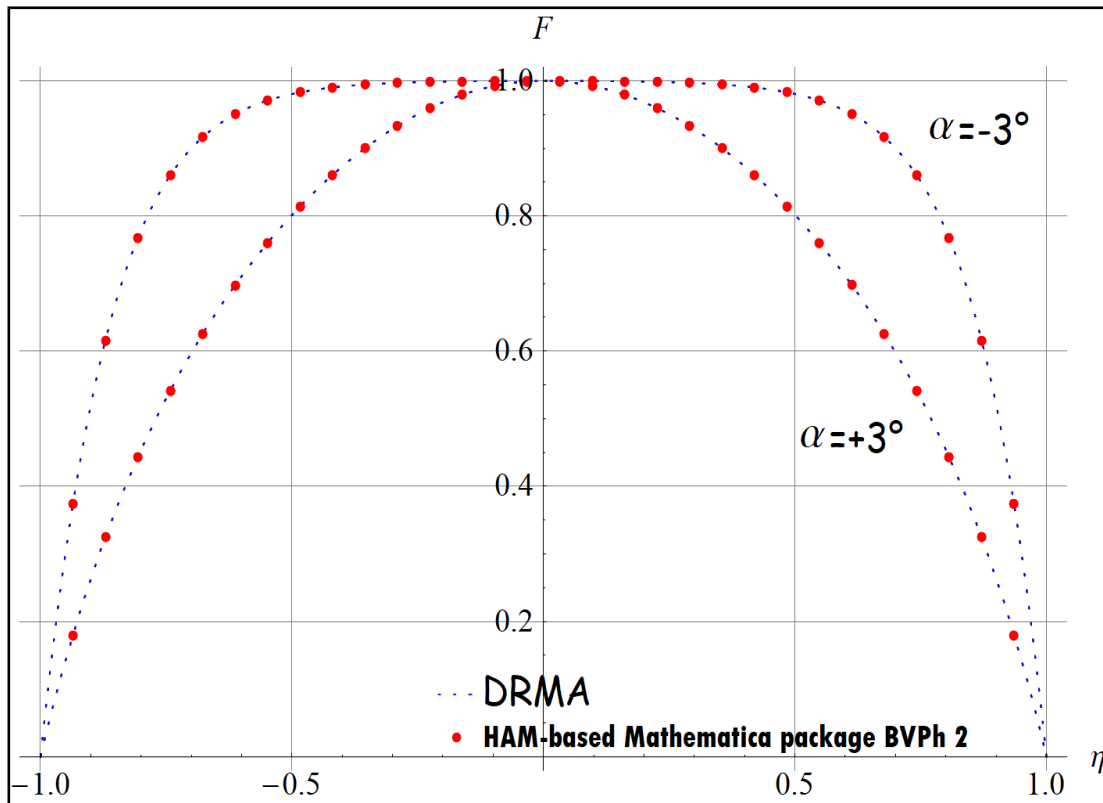


Figure IV.16 : Comparaison des résultats analytiques (DRMA) avec les résultats obtenus par la fonction intégrée dans **MATHEMATICA** (**HAM-based Mathematica package BVPh 2**) pour le profil de vitesse dans un canal convergent-divergent lorsque : $Ha = 1, Re = 250, Wi = 0.5$, et $\alpha = \pm 3^\circ$.

Tableau IV.5 : Comparaison entre la technique analytique DRMA avec la solution exacte pour le coefficient de frottement C_f dans un canal divergent-convergent lorsque :

$$Ha = 0 \text{ et } Wi = 0.$$

Re	$\alpha = -5^\circ$		$\alpha = +5^\circ$	
	$\mathcal{F}''_{\text{Exacte}}[77]$	$\mathcal{F}''_{\text{DRMA}}$ (63 ^{ème} ordre d'approximation)	$\mathcal{F}''_{\text{Exacte}}[77]$	$\mathcal{F}''_{\text{DRMA}}$ (63 ^{ème} ordre d'approximation)
10	-1.784546840578866	-1.784546840572308	-2.251948602981818	-2.251948602984319
20	-1.588153536993253	-1.588153536990872	-2.527192232687426	-2.527192232685490
30	-1.413692023436293	-1.413692023433451	-2.832629302137010	-2.832629302134361
40	-1.258993935085547	-1.258993935081205	-3.169712187544089	-3.169712187549832
50	-1.121989043572515	-1.121989043574502	-3.539415645558434	-3.539415645554318
60	-1.000742927541422	-1.000742927544519	-3.942140271189139	-3.942140271183426
70	-0.893474274815973	-0.893474274819042	-4.377652476579882	-4.377652476577862
80	-0.798567273772039	-0.798567273776832	-4.845071824815794	-4.845071824812176
90	-0.714567787224302	-0.714567787226752	-5.342911258048444	-5.342911258045438
100	-0.640177852876257	-0.640177852873219	-5.869165116815401	-5.869165116818943

En utilisant la solution de la méthode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF-45) associée à la méthode de Tir comme guide, les valeurs tolérables de l'erreur absolue sont calculées par la formule suivante :

$$\text{Erreur} = |F(\eta)_{\text{RKF-45}} - F(\eta)_{\text{DRMA}}| \quad (\text{IV. 1})$$

Les Tableaux d'erreurs (IV.6 et IV.7) montrent clairement que les solutions DRMA et numérique coïncident parfaitement (La solution analytique est obtenue au 23^{ème} ordre d'approximation).

Tableau IV.6 : Comparaison entre les résultats numériques et analytiques dans un canal divergent lorsque: $Re = 1, Ha = 0, Wi = 0.1$ et $\alpha = +5^\circ$.

$H_a = 0, R_e = 1, W_i = 0.1$ et $\alpha = 5^\circ$			
η	$F^{\text{RKF-45}}(\eta)$	$F^{\text{DRMA}}(\eta)$	$ F^{\text{Numerical}} - F^{\text{DRMA}} $
0.00	1.0	1.0	0.0
0.20	0.96243468953199	0.96243469871125	9.179×10^{-9}
0.40	0.84859939646895	0.84859940893374	1.246×10^{-8}
0.60	0.65497006754810	0.65497007943270	0.188×10^{-8}
0.80	0.37530168951656	0.37530170509693	1.558×10^{-8}
1.00	0.0	0.0	0.0

Tableau IV.7 : Comparaison entre les résultats numériques et analytiques dans un canal convergent lorsque: $Re = 1, Ha = 0, Wi = 0.1$ et $\alpha = -5^\circ$.

$H_a = 0, R_e = 1, W_i = 0.1$ et $\alpha = -5^\circ$			
η	$F^{\text{RKF-45}}(\eta)$	$F^{\text{DRMA}}(\eta)$	$ F^{\text{Numerical}} - F^{\text{DRMA}} $
0.00	1.0	1.0	0.0
0.20	0.9635793553089504	0.9635793633760749	8.067×10^{-9}
0.40	0.8525176481960482	0.8525176563105906	8.114×10^{-9}
0.60	0.6614248414704379	0.6614248436232772	2.152×10^{-9}
0.80	0.3813665624550303	0.3813665573282205	5.126×10^{-9}
1.00	0.0	0.0	0.0

IV 6. Conclusion :

Une fois la distribution des vitesses de l'écoulement d'un fluide viscoélastique a été établie, donc on peut passer à la détermination du champ des températures de l'écoulement envisagé. La distribution des températures pour l'écoulement du fluide viscoélastique considéré fera l'objet d'une contribution postérieure.

Conclusion

Générale

Le sujet de thèse proposé met l'accent sur l'écoulement d'un fluide viscoélastique entre deux parois planes non parallèles (écoulement dit de Jeffery-Hamel : JHF) sous l'effet d'un champ magnétique externe.

Cette contribution a permis, dans une première étape, de modéliser mathématiquement le problème dynamique de l'écoulement objet d'étude. En effet, les équations aux dérivées partielles de base sont transformées en une équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre par utilisation des transformations de similitude appropriées. Cette équation caractérise la distribution des vitesses de l'écoulement hydromagnétique dans un convergent/divergent.

Dans une seconde étape, l'équation différentielle ordinaire obtenue a été traitée numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF-45) associée à la méthode de Tir et analytiquement par un code de calcul MATHEMATICA basé essentiellement sur une nouvelle modification de la méthode décompositionnelle d'Adomian. Il s'agit d'une puissante approche dite de Duan-Rach (DRMA).

Les principales conclusions que l'on peut tirer de cette investigation sont :

- Les profils de vitesse sont partout symétriques et la vitesse prend une valeur maximale à l'axe du canal.
- Dans le canal convergent, l'accroissement du nombre de Reynolds conduit à un profil de vitesse plat au centre du canal.
- La vitesse du fluide dans le canal convergent est augmentée par l'accroissement du nombre de Reynolds, ainsi que l'angle d'ouverture α . Par contre, un comportement tout à fait inverse peut se produire dans le canal divergent.
- L'effet de la variation du nombre de Hartmann fait disparaître le phénomène de retour d'écoulement dans les deux canaux convergent et divergent.
- L'épaisseur de la couche limite se réduit avec l'accroissement du nombre de Weissenberg.

- Les résultats obtenus par le traitement analytique montrent une excellente cohérence avec les méthodes numériques, justifiant ainsi l'efficacité et la fiabilité de la méthode DRMA.
- D'un point de vue comparatif, les résultats du traitement semi-analytique sont également comparés à certaines solutions existantes dans la littérature, ainsi qu'aux résultats numériques. Ces résultats montrent les avantages de la technique (DRMA) en termes de précision et vitesse de convergence.
- La méthode DRMA fait notablement réduire les difficultés rencontrées dans le traitement, par la méthode ADM classique, des équations différentielles ordinaires. En effet, elle donne une précision élevée du fait qu'elle donne une forme récursive simple facilement résolvable.

Perspectives

Les perspectives de recherches à envisager dans cette thèse seront essentiellement basées sur les travaux déjà effectués ou en cours. Par ailleurs les résultats obtenus dans le cadre de ce travail de thèse nécessitent des améliorations. Pour ce faire, on propose d'étudier:

- La présence d'une source de radiation thermique.
- L'addition des nanoparticules de type hybride dans un mélange de deux fluides de base.
- Introduire les bio-fluides comme un fluide de base.
- Introduire l'effet de la rotation.
- Introduire mouvement des parois (Stretchable/Shrinkable).

D'autre part, il sera également intéressant d'étudier le même problème mais avec la prise en compte du phénomène de transfert de chaleur dans un écoulement de nano-fluides.

Références

Bibliographies

Références

Bibliographies

- [1] Jeffery, G. B. (1915). The two dimensional steady motion of a viscous fluid, *Phil. Mag.*, 29, 455-465.
- [2] Hamel, G. (1916). Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, 25, 34-60.
- [3] Rosenhead, L. (1940). The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls, *Proc. R. Soc. London, A* 175, 436-467.
- [4] H.Holstein, (1943) Ähnliche laminare reibungsschichten an durchlässigen wandenq UM3050.
- [5] Millsaps, K. and Pohlhausen, K. (1953). Thermal distributions in Jeffery-Hamel flows between non-parallel plane walls, *J. Aero. Sci.*, 20, 187-196.
- [6] Al Farkh, m.; and Hamadiche, m. (1998). Three-dimensional linear temporal stability of rotating channel flow, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics- Physics-Chemistry-Astronomy*, 326(1), 13-20.
- [7] Makinde, o. d.; and Mhone, p. y. (2007). Temporal stability of small disturbances in MHD Jeffery–Hamel flows, *Computers and Mathematics with Applications*, 53(1), 128-136.
- [8] Corless, R. M., & Assefa, D. (2007, July). Jeffery-Hamel flow with Maple: a case study of integration of elliptic functions in a CAS. In *Proceedings of the 2007 international symposium on Symbolic and algebraic computation* (pp. 108-115).
- [9] Sadeghy, K., Khabazi, N., & Taghavi, S. M. (2007). Magnetohydrodynamic (MHD) flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels. *International Journal of Engineering Science*, 45(11), 923-938.
- [10] Gorji-Bandpay, M., Famouri, M., & Gholipour-Baboli, F. (2007). Numerical Investigation of Flow through Convergent or Divergent Channel with Finite Difference Method. *GMSARN International Conference on Sustainable Development: Challenges and Opportunities for GMS*.

- [11] Peterson, J. W., & Stogner, R. H. (2016). A C^1 -continuous finite element formulation for solving the Jeffery-Hamel boundary value problem. arXiv preprint arXiv:1612.06312.
- [12] Esmaili, Q., Ramiar, A., Alizadeh, E., & Ganji, D. D. (2008). An approximation of the analytical solution of the Jeffery–Hamel flow by decomposition method. *Physics Letters A*, 372(19), 3434-3439.
- [13] Ganji, Z. Z., Ganji, D. D. & Esmailpour, M. (2009). Study on nonlinear Jeffery–Hamel flow by He’s semi-analytical methods and comparison with numerical results. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(11-12), 2107-2116.
- [14] Joneidi, A. A., Domairry, G., & Babaelahi, M. (2010). Three analytical methods applied to Jeffery–Hamel flow. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(11), 3423-3434.
- [15] Esmailpour, M., & Ganji, D. D. (2010). Solution of the Jeffery–Hamel flow problem by optimal homotopy asymptotic method. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(11), 3405-3411.
- [16] Motsa, S. S., Sibanda, P., Awad, F. G., & Shateyi, S. (2010). A new spectral-homotopy analysis method for the MHD Jeffery–Hamel problem. *Computers & Fluids*, 39(7), 1219-1225.
- [17] Motsa, S. S., Sibanda, P., Marewo, G. T., & Shateyi, S. (2010). A note on improved homotopy analysis method for solving the Jeffery-Hamel flow. *Mathematical problems in Engineering*, 2010.
- [18] Hayat, T., Nawaz, M., & Sajid, M. (2010). Effect of heat transfer on the flow of a second-grade fluid in divergent/convergent channel. *International journal for numerical methods in fluids*, 64(7), 761-776.
- [19] Alam, M. S., & Khan, M. A. H. (2010). Critical behaviour of the MHD flow in convergent-divergent channels. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, 7(2), 83-93.
- [20] Shadloo, M. S., & Kimiaefar, A. (2011). Application of homotopy perturbation method to find an analytical solution for magnetohydrodynamic flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225(2), 347-353.
- [21] Ganji, D. D., Sheikholeslami, M., & Ashorynejad, H. R. (2011). Analytical approximate solution of nonlinear differential equation governing Jeffery-Hamel flow with high magnetic field by Adomian decomposition method. *ISRN Mathematical Analysis*, 2011.

- [22] Hosseini, R., Poozesh, S., & Dinarvand, S. (2012). MHD flow of an incompressible viscous fluid through convergent or divergent channels in presence of a high magnetic field. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- [23] Sheikholeslami, M., Ganji, D. D., Ashorynejad, H. R., & Rokni, H. B. (2012). Analytical investigation of Jeffery-Hamel flow with high magnetic field and nanoparticle by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 33(1), 25-36.
- [24] Imani, A. A., Rostamian, Y., Ganji, D. D., & Rokni, H. B. (2012). Analytical investigation of jeffery-hamel flow with high magnetic field and nano-particle by rvim.
- [25] Moradi, A., Alsaedi, A., & Hayat, T. (2013). Investigation of nanoparticles effect on the Jeffery–Hamel flow. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 38(10), 2845-2853.
- [26] Inc, M., Akgül, A., & Kılıçman, A. (2013, January). A new application of the reproducing kernel Hilbert space method to solve MHD Jeffery-Hamel flows problem in nonparallel walls. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013).
- [27] Bojdi, Z. K., Ahmadi-Asl, S., & Aminataei, A. (2013). The Jacobi Spectral Method for Nonlinear Magneto-Hydrodynamic Jeffery-Hamel Problem. *Contemporary Mathematics*, 1(4), 168-182.
- [28] Petroudi, I. R., Ganji, D. D., Nejad, M. K., Rahimi, J., Rahimi, E., & Rahimifar, A. (2014). Transverse magnetic field on Jeffery–Hamel problem with Cu–water nanofluid between two non parallel plane walls by using collocation method. *Case Studies in Thermal Engineering*, 4, 193-201.
- [29] Sari, M. R., Kezzar, M., & Adjabi, R. (2014). A comparison of Adomian and generalized Adomian methods in solving the nonlinear problem of flow in convergent-divergent channels. *Applied Mathematical Sciences*, 8(7), 321-336.
- [30] Freidoonimehr, N., & Rashidi, M. M. (2015). Dual solutions for MHD Jeffery-Hamel nano-fluid flow in non-parallel walls using predictor homotopy analysis method. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 8(4), 911-919.
- [31] Raja, M. A. Z., Khan, M. A. R., Mahmood, T., Farooq, U., & Chaudhary, N. I. (2016). Design of bio-inspired computing technique for nanofluidics based on nonlinear Jeffery–Hamel flow equations. *Canadian Journal of Physics*, 94(5), 474-489.
- [32] Khan, U., Ahmed, N., & Mohyud-Din, S. T. (2016). Thermo-diffusion and diffusion-thermo effects on flow of second grade fluid between two inclined plane walls. *Journal of Molecular Liquids*, 224, 1074-1082.

- [33] M. R. Sari, M. Kezzar and R. Adjabi, Heat transfer of copper-water nanofluid flow through converging-diverging channel, *J. of Cent. South Univ.*, Vol. 23, pp. 484-496, 2016.
- [34] Khan, U., Ahmed, N., Sikandar, W., & Mohyud-Din, S. T. (2016). Jeffery hamel flow of a non-newtonian fluid. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2(1), 21-28.
- [35] Kezzar, M., & Sari, M. R. (2017). Series solution of nanofluid flow and heat transfer between stretchable/shrinkable inclined walls. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 3(3), 2231-2255.
- [36] Alam, M., Khan, M., Hakim, A., & Makinde, O. D. (2017). Magneto-nanofluid dynamics in convergent-divergent channel and its inherent irreversibility. In *Defect and Diffusion Forum* (Vol. 377, pp. 95-110). Trans Tech Publications Ltd.
- [37] Mohyud-Din, S. T., Khan, U., Ahmed, N., & Bin-Mohsin, B. (2017). Heat and mass transfer analysis for MHD flow of nanofluid inconvergent/divergent channels with stretchable walls using Buongiorno's model. *Neural Computing and Applications*, 28(12), 4079-4092.
- [38] Ahmed, N., Abbasi, A., Khan, U., & Mohyud-Din, S. T. (2018). Thermal radiation effects on flow of Jeffery fluid in converging and diverging stretchable channels. *Neural Computing and Applications*, 30(8), 2371-2379.
- [39] Rana, P., Shukla, N., Gupta, Y., & Pop, I. (2019). Analytical prediction of multiple solutions for MHD Jeffery–Hamel flow and heat transfer utilizing KKL nanofluid model. *Physics Letters A*, 383(2-3), 176-185.
- [40] Kant, R., & Vinod, N. (2019). Control of optimal growth of instabilities in Jeffery-Hamel flow. *AIP Advances*, 9(3), 035307.
- [41] Rana, P., Shukla, N., Gupta, Y., & Pop, I. (2019). Homotopy analysis method for predicting multiple solutions in the channel flow with stability analysis. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 66, 183-193.
- [42] Hafeez, M., & Khan, M. (2020). Jeffery–Hamel flow of hybrid nanofluids in convergent and divergent channels with heat transfer characteristics. *Applied Nanoscience*, 1-10.
- [43] Shukla, N., Rana, P., & Pop, I. (2020). Second law thermodynamic analysis of thermo-magnetic Jeffery–Hamel dissipative radiative hybrid nanofluid slip flow: existence of multiple solutions. *The European Physical Journal Plus*, 135(10), 1-24.

- [44] Saifi, H., Sari, M. R., Kezzar, M., Ghazvini, M., Sharifpur, M., & Sadeghzadeh, M. (2020). Heat transfer through converging-diverging channels using Adomian decomposition method. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 14(1), 1373-1384.
- [45] Berrehal, H., & Sowmya, G. (2021). Heat transfer analysis of nanofluid flow in a channel with non-parallel walls. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 35(1), 171-177.
- [46] Manh, T. D., Bahramkhoo, M., Gerdroodbary, M. B., Nam, N. D., & Tlili, I. (2021). Investigation of nanomaterial flow through non-parallel plates. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 143(5), 3867-3875.
- [47] Al-Turki, Y. A., Moria, H., Shawabkeh, A., Pourhedayat, S., Hashemian, M., & Dizaji, H. S. (2021). Thermal, frictional and exergetic analysis of non-parallel configurations for plate heat exchangers. *Chemical Engineering and Processing-Process Intensification*, 161, 108319.
- [48] Muhammad, N. M., Sidik, N. A. C., Saat, A., Japar, W. A. M., Yusop, S. N., & Asako, Y. (2021, May). Numerical investigation of Two-phase Turbulent forced convection heat transfer and flow of nanofluids in a non-parallel wall minichannel heat sink. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1874, No. 1, p. 012056). IOP Publishing.
- [49] Steinfurth, B., & Weiss, J. (2021). Velocity ratio effect on flow structures of non-parallel planar starting jets in cross-flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 915.
- [50] Cheng, Z., & Constantinescu, G. (2021). Shallow mixing layers between non-parallel streams in a flat-bed wide channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 916.
- [51] Biswal, U., Chakraverty, S., & Ojha, B. K. (2021). Application of homotopy perturbation method in inverse analysis of Jeffery–Hamel flow problem. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 86, 107-112.
- [52] Jasim, A. M.. (2021). New Analytical Study for Nanofluid between Two Non-Parallel Plane Walls (Jeffery-Hamel Flow), *J. Appl. Comput. Mech.*, 7(1), 2021, 213–224. <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.34958.2520>
- [53] Ahmed, S., Xu, H., Wang, A. Y., & Chen, Q. B. (2021). Highly Accurate Coiflet wavelet-Homotopy Solution of Jeffery-Hamel Problem at Extreme Parameters.
- [54] Adel, W., Biçer, K. E., & Sezer, M. (2021). A Novel Numerical Approach for Simulating the Nonlinear MHD Jeffery–Hamel Flow Problem. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 7(3), 1-15.
- [55] Hafeez, M., Sajjad, R., & Hashim. (2021). Heat transfer attributes of $(\text{MoS}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3)$ hybrid nanomaterial flow through converging/diverging channels with shape factor effect. *Advances in Mechanical Engineering*, 13(5), 16878140211021289.

- [56] Rashid, U., Iqbal, A., Liang, H., Khan, W., & Ashraf, M. W. (2021). Dynamics of water conveying zinc oxide through divergent-convergent channels with the effect of nanoparticles shape when Joule dissipation are significant. *Plos one*, 16(1).
- [57] Das, A. C., & Alam, M. S. (2021). Effect of Various Shaped Al₂O₃ and TiO₂ Nanoparticles on Water-Based MHD Nanofluid Flow Through Convergent-Divergent Channels. *Science & Technology Asia*, 1-15.
- [58] Khentout, A., Kezzar, M., Sari, M. R., Ismail, T., Tich Tich, M. S., Boutelba, S., & Eid, M. R. (2021). The electrical magnetohydrodynamic (MHD) and shape factor impacts in a mixture fluid suspended by hybrid nanoparticles between non-parallel plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 09544089211057971.
- [59] Moghimi, S. M., Khaki Jamie, M., Taheri, M. H., & Abbasi, M. (2021). Evaluation of separation point in a divergent channel in the presence of non-uniform magnetic field. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 09544089211015480.
- [60] Verma, A. K., Gautam, A. K., Bhattacharyya, K., & Sharma, R. P. (2021). Existence of boundary layer nanofluid flow through a divergent channel in porous medium with mass suction/injection. *Sādhanā*, 46(2), 1-10.
- [61] Hamid, M., Usman, M., Haq, R. U., & Tian, Z. (2021). A Galerkin approach to analyze MHD flow of nanofluid along converging/diverging channels. *Archive of Applied Mechanics*, 91(5), 1907-1924.
- [62] Iyyappan, G., & Singh, A. K. (2021). MHD flows on irregular boundary over a diverging channel with viscous dissipation effect. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- [63] Sutton, G. W. and Sherman, A. (1965) *Engineering magnetohydrodynamics*, (McGraw-Hill, New York).
- [64] Larson, R. G. (1988) *Constitutive equations for polymer melts and solutions*, (Butterworth Publishing Co., Boston)
- [65] Rosloniec, S. (2008). *Fundamental numerical methods for electrical engineering (Vol. 18)*. Springer Science & Business Media.
- [66] J. H. Mathews et K. D. Fink, *Numérique Methods using MATLAB, 3ème édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ07458, 1999*.
- [67] M. Kezzar, *Résolution analytique et numérique du problème non-linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel, Thèse du doctorat, Université 20 août 1955, Skikda, 2015*.

- [68] N.PISKONOV, (1970) Calcul Différentiel et Intégral, tome 2, 11^{ème} édition, Mir Moscou.
- [69] Cho, Hyoung Kyu. Introduction To Numerical Analysis. Department of Nuclear Engineering. Seoul National University.
- [70] Bougoffa, L., Mziou, S., & Rach, R. C. (2016). Exact and approximate analytic solutions of the Jeffery-Hamel flow problem by the Duan-Rach modified Adomian decomposition method. *Mathematical Modelling and Analysis*, 21(2), 174-187.
- [71] Dib, A., Haiahem, A., & Bou-Said, B. (2014). An analytical solution of the MHD Jeffery–Hamel flow by the modified Adomian decomposition method. *Computers & Fluids*, 102, 111-115.
- [72] Duan, J. S., Rach, R., Wazwaz, A. M., Chaolu, T., & Wang, Z. (2013). A new modified Adomian decomposition method and its multistage form for solving nonlinear boundary value problems with Robin boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 37(20-21), 8687-8708.
- [73] Kezzar, M., Tabet, I., & Eid, M. R. (2020). A new analytical solution of longitudinal fin with variable heat generation and thermal conductivity using DRA. *The European Physical Journal Plus*, 135(1), 120.
- [74] Kezzar, M., Boumaiza, N., Tabet, I., & Nafir, N. (2019). Combined effects of ferromagnetic particles and magnetic field on mixed convection in the Falkner-Skan system using DRA. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- [75] Gahgah, M., Sari, M. R., Kezzar, M., & Eid, M. R. (2020). Duan–Rach modified Adomian decomposition method (DRMA) for viscoelastic fluid flow between nonparallel plane walls. *The European Physical Journal Plus*, 135(2), 1-17.
- [76] Duan, J. S., Chaolu, T., & Rach, R. (2012). Solutions of the initial value problem for nonlinear fractional ordinary differential equations by the Rach–Adomian–Meyers modified decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 218(17), 8370-8392.
- [77] ABBASBANDY,S. E. SHIVANIAN, (2012) Exact analytical solution of the MHD Jeffery-Hamel flow problem, *Mecanica* 47:1379–1389.