

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F. S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DE COMPACTITÉ AVEC APPLICATION AU TRAITEMENT D'IMAGE

Option : ANEDP

Par :

1. AMANI KHEMIS
2. RANIA GUENOUNE

Encadré par : MESSAOUD MAOUNI

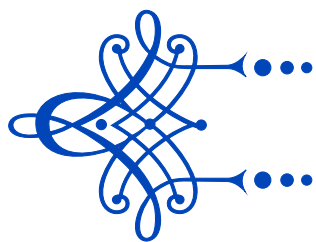
Pr. U. SKIKDA

Devant le jury :

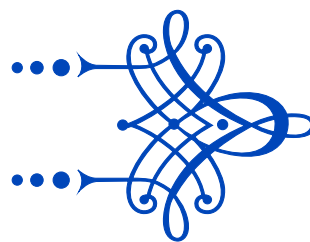
Président : HAKIM LAKHAL
Examineur : CHAFIA KAREK

MCA. U. SKIKDA
MCB. U. SKIKDA

Année : 2021/2022



Dédicace



Nous dédions ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de mes chers parents, le symbole de tendresses, pour leurs encouragements, ses prières et leurs conseils, qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que nous puissions arriver à ce que nous avons maintenant.

Que Dieu vous protège et que la réussite soit à nous portées pour que nous puissions vous combler de bonheur.

*Nous dédions ce travail à tous mes frères et mes soeurs :
Mouhamed Amine, Oussama, Hadjar, Lamia, Asma , Nouha,
Chaima, Houda, Anfel et Nihel.*

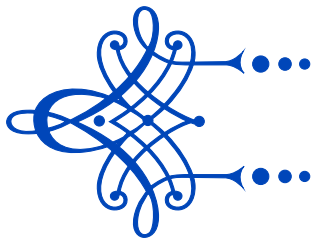
*Pour leurs encouragements constants et leur soutien moral.
Et à tout nos famille nous vous disions merci.*

A notre encadreur "Maouni Messaoud" pour toutes les choses qu'elle nous a donnée.

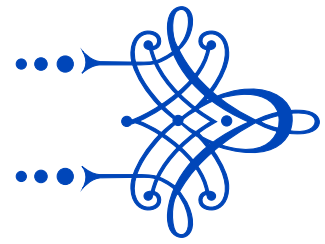
Et à nos amis ainsi que tout ceux qui nous ont aidé de près ou de loin pour pouvoir mener ce travail à terme.

*À tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer,
nous vous dis Merci!*

Amami & Rania



Remerciment



Tout d'abord et avant tout, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la force, la volonté, la santé, la patience et le courage qu'il nous à donné pour accomplir notre travail.

Nous tiendrions à exprimer nos profonde gratitude, nos sincères et chaleureux remerciements, à nos encadreur Pr Maouni Messaoud, pour leur confiance qu'il nous a accordé en acceptant d'encadrer ce travail et pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi pour ses multiples conseils tout au long de cette étude, et aussi pour ses bénéfiques conseils et explications, nous avons l'honneur de travailler sous sa direction.

Vous avez toujours réservé un bon accueil malgré vos obligations professionnelles.

Nos remerciements Madame le Docteur souilah fairouz d'avoir accepté d'évaluer nos travail, pour l'intérêt qu'elle a porté à nos mémoire.

Nous voudrions aussi présenter notre sincère reconnaissance aux membres de jury et l'ensembles des enseignants du département de mathématique.

Nous réservons une reconnaissance particulière à Les femmes de nos vie " nos mères " qui nous apporté la confiance dont nous'avons besoin pour continuer notre parcours d'études et à nos exemples dans cette vie et Les homme de nos vie "nos pères" pour ses encouragements, Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Nous sommes redevable d'une éducation dont nous sommes fier.

Nous voudrions aussi adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Amani & Rania



Résumé



Ce memoire est composé de deux parties :

- On s'intéresse dans la première partie à la solvabilité de deux problèmes :
 - Le premier lié à une classe d'EDP elliptiques linéaires et non linéaires, pour lequel on établit un résultat d'existence et d'unicité via le théorème de point fixe de Schauder basé sur la méthode de compacité.
 - Le second nous étudions quelque résultat d'existence et d'unicité de solution faible pour une classe d'équation parabolique linéaire et non linéaire par la méthode de Faedo Galerkin.
- Dans la deuxième partie, nous allons présenter notre application au traitement d'image, on utilisant plusieurs modèles parmi ces modèles : modèle isotrope (équation de la chaleur), modèle anisotrope (équation de perona et malik), et le modèle de catté et all. Cet partie nous a permis d'approfondir et d'enrichir nos connaissances théorique sur l'utilisation des EDPs dans le domaine de traitement d'image nous avons donc présenté des méthodes de restauration d'image par EDPs dans le but de réduire les effets du bruits et améliorer la qualité de l'image.

Mots clés :

Problème elliptique, Théorème de point fixe de Schauder, problème parabolique, la méthode de Faedo-Galerkin, méthode de compacité, traitement d'images, Restauration d'images.



This memory is composed of two parts :

- In the first part, we are interested in the solvency of two problems :
 - The first linked to a class of [elliptic linear and non-linear PDE](#), for which a result of existence and uniqueness is established via the [Schauder fixed point theorem](#) based with the [compactness method](#).
 - The second we study some result of existence and single weak solution for a [linear and non-linear parabolic equation](#) class by [the Faedo-Galerkin method](#).
- In the second part, we will present our application to image processing, using several models among these models : isotropic model ([heat equation](#)), anisotropic model ([perona and malik equation](#)), and [catté all](#) model. This part allowed us to deepen and enrich our theoretical knowledge on the use of EDPs in the field of image processing so we presented methods of image restoration by EDPs in order to reduce the effects of noise and improve the quality of the image.

Key words :

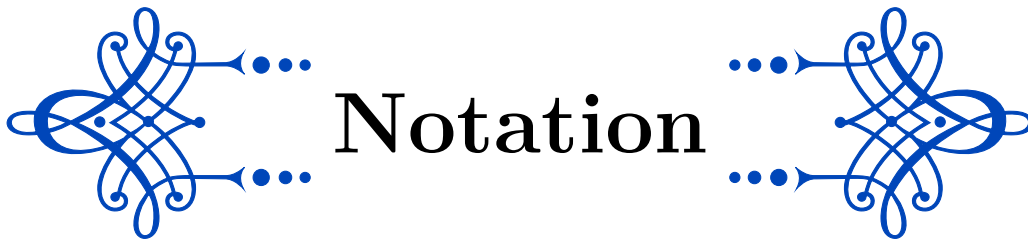
Elliptic problem, Schauder fixed-point theorem, Parabolic problem, Faedo-Galerkin method, Compactness method, Image processing, Image restoration.



خلال هذه المذكرة نقوم بدراسة نوعين من المسائل للمعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية، و القيم الحدية خطية و غير خطية، هما المسائل الناقصية و الزائدية و ذلك باستعمال نظرية شودر للقيمة الثابتة و كذا طريقة التراص. كما نختتم هذه المذكرة ببعض التطبيقات للمسائل الزائدية في تحسين نوعية الصورة.

الكلمات المفتاحية :

مسائل ناقصية، نظرية شودر للقيمة الثابتة، طريقة التراص، المسائل الزائدية، طريقة فادوغلاكين، تحسين نوعية الصورة.



Avant de procéder, à notre étude on introduit toutes les principales notations qui seront utilisées au fur et à mesure dans ce travail.

- ▷ \mathbb{N} : L'ensemble des nombres entiers.
- ▷ \mathbb{C} : L'ensemble des nombres complexe.
- ▷ \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
- ▷ Ω : Ouvert bornée de \mathbb{R}^N .
- ▷ $\partial\Omega$: Frontière topologique de Ω .
- ▷ η : Le vecteur unitaire normale sortant.
- ▷ $\frac{\partial u}{\partial \eta}$: La dérivée normale de u .
- ▷ ∇u : Le gradient de u .
- ▷ Δu : Le laplacien de u .
- ▷ $\frac{\partial}{\partial x}$: La dérivée partielle .
- ▷ D^α : La dérivée d'ordre α .
- ▷ $C^m(\Omega)$: Espace des fonctions m fois continument différentiables dans Ω .
- ▷ $D(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω .
- ▷ $L^p(\Omega)$: Espace des fonctions de puissance p - éme intégrables sur Ω pour la mesure de Lebesgue.
- ▷ $L^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.
- ▷ $W^{1,p}(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\| \cdot \|_{m,p}$.
- ▷ $W_0^{1,p}(\Omega)$: L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
- ▷ $W^{-1,p'}(\Omega)$: Espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si X est un espace de Banach :

-
- ▷ $L^p((0, T), X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable}; \int_0^T \|u(t)\|_x^p dt < \infty\}$.
 - ▷ $L^\infty((0, T), X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable}; \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_x < \infty\}$.
 - ▷ \hookrightarrow : Injection continue.
 - ▷ \hookrightarrow_c : Injection compact.
 - ▷ \rightharpoonup : La convergence faible .
 - ▷ \rightharpoonup^* : La convergence faible* .
 - ▷ \longrightarrow : La convergence fort .
 - ▷ $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Le produit scalaire .
 - ▷ \times : Produit vectoriel .
 - ▷ *EDPs* : Equation aux dérivée partielle.
 - ▷ *p.p* : Presque partout.
 - ▷ *(i.e)* : Identiquement équivalent.
 - ▷ $w(i, j)$: Image originale.
 - ▷ $u(i, j)$: Image restaurée.
 - ▷ σ : Variance.
 - ▷ G : Fonction de la restauration.
 - ▷ $G_\sigma(x)$: Fonction gaussienne.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Préliminaire	8
1.1 Quelques définitions de base	8
1.2 Espaces réflexifs, Espaces séparables	10
1.2.1 Espaces réflexifs	10
1.2.2 Espaces séparables	10
1.3 Les espaces de Sobolev	10
1.3.1 Dérivées faibles	10
1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle	12
1.4.1 Les espace L^p	12
1.4.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ et H^m	12
1.4.3 L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ et H^1	13
1.4.4 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$	13
1.4.5 L'espace de Bochner	13
1.5 Quelques théorèmes utiles	14
1.6 Théorèmes de compacité	15
1.6.1 Injection Compactes	16
1.6.2 Injections de Sobolev	16
1.7 Quelques inégalités importantes	17
1.7.1 Inégalité de Holder	17
1.7.2 Inégalité de Minkowski	17
1.7.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz	17
1.7.4 Inégalité de Young	17
1.7.5 Inégalité de Poincaré	17
1.7.6 Formule de Green	17
2 Problèmes elliptiques	18
2.1 Etude du problème elliptiques linéaire	18
2.1.1 Formulation variationnelle	18
2.1.2 L'existence et l'unicité	21
2.1.3 Résultat de régularité	22
2.2 Etude du problème elliptiques non linéaire	23
2.2.1 Formulation variationnelle	23
2.2.2 L'existence et l'unicité	23

3	Problèmes parabolique	26
3.1	Problèmes parabolique linéaires	26
3.1.1	Existence de la solution du problème	26
3.1.2	Étude l'unicité de la solution	35
3.2	Problèmes parabolique Non linéaires	36
3.2.1	Existence de la solution du problème	37
3.2.2	Étude l'unicité de la solution	45
4	Application au traitement d'images	46
4.1	Introduction :	46
4.2	Pourquoi le traitement d'image ?	46
4.3	Méthodes de résolution des EDPs	47
4.3.1	Les différences finis	47
4.4	Filtres linéaire	47
4.4.1	Équation de la chaleur	47
4.4.2	Discrétisation de l'équation de la chaleur	48
4.4.3	Les avantages	48
4.4.4	Les inconvénients	49
4.5	Filtres non-linéaire	50
4.5.1	Equation de Perona Malik	50
4.5.2	Discrétisation de l'équation de Perona- Malik :	51
4.5.3	Les avantages	52
4.5.4	Les inconvénients	52
4.6	Le modèle de Catté et al	54
4.6.1	Modèle Catté et al	55
4.6.2	Un schéma itératif qui converge vers la solution du problème Catté et al	55



Introduction



De nombreux phénomènes naturels et des problèmes modernes de physique, mécanique, biologie et la technologie peuvent être modélisés à l'aide des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. En effet, grâce à la [modélisation de ces phénomènes](#) au travers des équations aux dérivées partielles que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

[Les équations aux dérivées partielles](#) ont probablement été formulées pour la première fois pendant la naissance de la mécanique rationnelle durant le 17^{ème} siècle (Newton, Leibniz...). Le catalogue des [EDPs](#) s'est ensuite enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et notamment de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'[Euler](#), [Navier et Stokes](#), pour les équations de la mécanique des fluides et [Fourier](#) pour l'équation de la chaleur.

De ces EDPs ont non seulement une résonance dans les sciences appliquées, mais ils jouent également un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques.

La recherche des solutions pour un EDP est donnée par des méthodes analytiques et d'autres méthodes numériques pour arriver à des [solutions approximatives](#). Ces méthodes ont été développées en particulier depuis les années 1960, comme la méthode de semi-groupe, la méthode itérative monotone, la [méthode de point fixe de Schauder](#), la [méthode de Faedo Galerkin](#) et la [méthode de compacité](#) qui est l'objectif principale de notre travail (Pour plus de détail sur ces méthodes consulter [\[10\]](#) [\[11\]](#)).

Dans ce cas, revenir à la [dimension finie](#), ou en ajoutant un petit terme, l'équation qui en modifie la nature ou la [régularisation](#) de ses coefficients. Utilisant un résultat d'existence dans ce cas plus simple, ou juste connu, on obtient une solution dépendant d'un paramètre destiné à tendre vers 0 pour récupérer l'équation qui nous intéresse vraiment.

L'étude des propriétés de [convergence](#) de cette suite de solutions de problèmes simplifiés est cruciale. Il est assez facile en général d'obtenir sa convergence. Malheureusement, ces convergences faibles se comportent mal vis à vis des termes non linéaires des équations. C'est à dire qu'une suite u_n peut converger vers u sans qu'une expression de la forme $f(u_n)$ converge vers $f(u)$. On cherche donc à montrer que la suite est [relativement compacte](#) pour une topologie plus forte de manière à permettre ce passage à la limite.

[Le but de méthode de compacité](#) pour la résolution des EDPs non linéaires est de comprendre quels outils sont à dispositions pour réussir à obtenir cette compacité, et comment on les appliques dans le cas des équations de la mécanique des fluides.

La première questions a se poser dans l'étude théorique est de savoir pour une EDP non linéaire avec des [conditions initiales](#) et des [conditions aux limites](#), s'il existe une solution unique.

On s'intéresse à établir l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes, stationnaire et d'évolution en utilisant la méthode de compacité.

Notre Étude comporte principalement quatre chapitres :

- Un premier est consacré à rappeler quelques concepts, outils et résultats de base d'analyse fonctionnelle, Parmi les outils de bases, on peut citer entre autres les espaces séparables, l'espace de Hilbert, l'espace de Sobolev, etc.

En particulier, en présente quelque théorème utiles et inégalités importantes, qui sera largement utilisé dans notre travail.

- S'ensuite un second, dédié à l'utilisation de la [méthode de compacité](#) pour deux problèmes elliptiques linéaire et non linéaire.

Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution faible et la [régularité](#) du :

- (a) problème elliptique linéaire avec des conditions Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où f est une fonction donnée ($f \in C(\bar{\Omega})$), et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

Dans ce cas on utilise le théorème de l'ax-Milgram et la relation entre les espaces.

- (b) problème elliptique non linéaire avec des conditions Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où $f \in L^\infty(\Omega)$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et a est une [fonction de Carathéodory](#).

Dans ce cas on utilise le théorème de [point fixe de Schauder](#) et la [relation entre les espaces](#).

- Le troisième chapitre est voué à étudier l'existence et l'unicité d'une solution faible d'un problème de Dirichlet pour une classe d'équations paraboliques linéaire et non-linéaire par la [méthode de Faedo-Galerkin](#) :

- (a) Problème [paraboliques linéaire modélisée](#) par l'équation de la chaleur (diffusion) suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

- (b) Problème paraboliques non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}) + u^3 - u = f(x, t) & \forall (x, t) \in \bar{Q} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u_{t=0} = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Pour étudier en utilisant les [techniques de Faedo-Galerkin](#), cette méthode est basée sur les étapes suivantes :

- On conclut des solutions approchées par réduction à la dimension finie.
- On établit une estimation a priori pour la solution approchée.
- En fin, on passe à la limite grâce au lemme de compacité.

Ainsi qu'un [résultat de compacité](#) pour démontrer l'existence d'une solution faible du problème considéré, et en [passant à la limite](#) pour trouver la solution. Un résultat est donné en démontrant l'[unicité](#) de la solution en basant sur les hypothèses assez faibles pour un problème similaire.

- Le quatrième chapitre, est réservé pour [l'application aux traitement d'images](#) :
 Les images sont les principales sources d'informations dans de nombreuses applications. Parmi les premiers modèles mathématiques utilisés en traitement d'image, c'est le modèle de la Chaleur qui constitue [un modèle de filtrage linéaire](#) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u.$$

Cependant, ce modèle à un défaut il ne permet pas de détecter les contours d'image, donc pour améliorer [la détection des contours](#) en modifiant l'équation de [la chaleur](#). Dans les années 90 [Perona et Malik](#) ont introduit une importante amélioration de la théorie de la détection des contours. Ils proposent de [remplacer l'équation de la chaleur par une équation non linéaire](#) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u), u(0) = u_0.$$

Où g est une fonction décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . Cependant, le modèle Perona Malik à de sérieuses difficultés pratique et théorique. En traitement d'images, pour [filtrer les images bruités](#), ce modèle ne permet pas de supprimer les bruits puisqu'il ne distingue pas entre les bords et les bruits. Théoriquement le problème est mal posé (n'admettent pas une solution faible).

Une façon de traiter le problème mal posé est [d'introduire une régularisation](#) qui rend le problème bien posé. [Catté, Lions et Morel](#), ont donc proposé une régularisation du modèle de Perona et Malik, qui leur permet alors de démontrer l'existence et l'unicité de la solution, et éviter les difficultés du modèle de Perona Malik :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u), \quad u(0) = u_0.$$

Nous terminons ce travail par une conclusion générale et des références bibliographiques.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Rappels et notations

Dans ce chapitre, nous allons présenter un certain nombre de définitions, notations et énoncer des théorèmes qui seront utilisés à un moment ou un autre dans ce travail.

1.1 Quelques définitions de base

Définition 1.1 (Espace normé) [2] : Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Définition 1.2 (Espace de Banach) [2] : L'espace de Banach est un espace vectoriel normé complet .

Définition 1.3 (Espace préhilbertien) [2] : On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Définition 1.4 (Espace de Hilbert) [2] : Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.5 (Fonction mesurable) [2] : Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ entre deux espaces mesurables est dite mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Définition 1.6 (Fonction de Carathéodory) [2] : On dit que $a : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si :

- ▶ $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}$.
- ▶ $a(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

Définition 1.7 (Base Hilbertienne) [2] : Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H . On dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H si :

- ▶ La suite est orthonormale : pour tout $n \neq m$, on a $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ et $\|e_n\| = 1$.
- ▶ La suite est totale : l'espace vectoriel engendré par les e_n est dense dans H .

Définition 1.8 (Problème Bien-posé) : Lorsqu'un problème de minimisation ou un EDP admet une solution unique qui dépend en permanence des données, on dit que le problème de minimisation ou l'EDP sont bien posés au sens de Hadamard.

Si l'une des conditions suivantes : existence, unicité ou continuité échoue, on dit que le problème de minimisation ou l'EDP sont mal posés.

Définition 1.9 (Image numérique) [8] : Une image numérique est composée d'unités élémentaires (appelées pixels) qui représentent chacun une portion de l'image. Une image est définie par :

- le nombre de pixels qui la compose en largeur et en hauteur (qui peut varier presque à l'infini).
- l'étendue des teintes de gris ou des couleurs que peut prendre chaque pixel (on parle de dynamique de l'image).

Définition 1.10 (Le pixel) [8] : Le pixel est l'abréviation de picture élément, élément d'image. C'est la primitive de bas niveau la plus pauvre en information car ses seuls attributs sont la position dans la matrice image (n de ligne, m de colonne) et la valeur numérique indiquant sa couleur, ou son niveau de gris. Il peut être représenté en mémoire sur :

- Un bit (0 ou 1) pour les images monochromes : 0 pour le noir et 1 pour le blanc.
- Un octet, soit 256 niveaux de gris pour une image à niveaux de gris : 0 noir et 255 blanc.

Définition 1.11 (Le bruit) [8] : Le bruit est une information parasite s'ajoutant de façon aléatoire à la scène, particulièrement visible dans :

- Les zones où le rapport signal/bruit est faible (ex zones peu éclairées).
- les zones uniformes.

Définition 1.12 (Les contours) [8] : Les contours sont les lieux de variations significatives de l'information niveau de gris.

Définition 1.13 (Le filtre linéaire) [8] : Filtrer une image consiste à convoluer sa fonction d'intensité $I(x; y)$ avec une fonction $h(x; y)$ appelée réponse impulsionnelle du filtre.

1.2 Espaces réflexifs, Espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \rightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'' , définie par : $J_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in E, f \in E'$.

1.2.1 Espaces réflexifs

Définition 1.14 [2] : L'espace E est dit réflexif, ssi $J(E) = E''$.

Définition 1.15 [2] : Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.

1.2.2 Espaces séparables

Définition 1.16 [2] : Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable.

Définition 1.17 [2] : Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement* convergente.

1.3 Les espaces de Sobolev

Les [espaces de Sobolev](#) sont des espaces fonctionnels dont les dérivées-au sens faible sont intégrables, ces espaces sont [complets](#) ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.3.1 Dérivées faibles

La notion de dérivée faible apparaît déjà dans un article célèbre de Jean Leray paru en 1934, sur les équations de Navier -Stokes, dans cet article, elle apparaît sous le nom de quasi-dérivée. Cette notion est fondamentale pour l'étude de l'existence de solution pour beaucoup d'équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, et on note $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à [support compact](#) sur Ω c'est-à-dire :

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega), \exists k \subset \Omega, k \text{ compact}, u = 0 \text{ sur } k^c\}.$$

De plus, l'ouvert Ω sera toujours muni de la tribu de Borel (ou tribu borélienne), notée $B(\Omega)$, et de la mesure de Lebesgue, notée λ si $N = 1$ et λ_N si $N > 1$. Les intégrales seront toujours par rapport à cette mesure de Lebesgue, sauf indication contraire.

Le lemme suivant est absolument fondamental, car il permet de confondre $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ avec l'application linéaire :

$$Tf : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \rightarrow Tf(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

On rappelle que $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ si, pour tout sous ensemble compact K de Ω , la restriction $f|_K$ de f à K est un élément de $L^1(K)$.

Convergence faible

Définition 1.18 [11] : Soit E un espace de Banach sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$ si :

$$\forall h \in E'' \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, x_n \rangle = \langle h, x \rangle .$$

On note alors $x_n \rightharpoonup x$ faible .

Notation :

Etant donnée une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de x_n vers x , On a alors :

- ▶ $x_n \rightharpoonup x \implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- ▶ $x_n \rightarrow x$ (i.e. $\|x_n - x\| \rightarrow 0$) alors $x_n \rightharpoonup x$.
- ▶ $x_n \rightharpoonup x$ et si $h_n \rightarrow h$ dans E alors $x_n(h_n) \rightarrow x(h)$.

Convergence faible*

Définition 1.19 [11] : Soit E un espace de Banach sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E'' son dual topologique. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E'' converge faiblement * vers $f \in E''$ si :

$$\forall x \in E, \langle x, f_n \rangle_{E'' \times E} \rightarrow \langle x, f \rangle_{E'' \times E} .$$

On note alors $f_n \rightharpoonup^* f$ faible *.

Notation :

Etant donnée une suite $(f_n)_n$ de E'' , on désigne par $f_n \rightharpoonup^* f$ la convergence faible* de f_n vers f . On a alors :

- ▶ $f_n \rightharpoonup^* f \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- ▶ $f_n \rightarrow f$ (i.e. $\|f_n - f\| \rightarrow 0$), alors $f_n \rightharpoonup^* f$.
- ▶ $f_n \rightharpoonup^* f$ et si $x_n \rightarrow x$ dans E alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Convergence dominée

Théorème 1.1 [2] : Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n \geq 1$ des fonctions μ -mesurables $X \rightarrow E$. Si la suite $(f_n)_n \geq 1$ vérifie :

- ▶ $f_n \rightarrow f\mu$ - presque partout sur X .
- ▶ Il existe $g \in L^p(X)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $\|f\| \leq g\mu$ - presque partout, alors $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X, E)$.
- ▶ En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_x f_n d\mu \rightarrow \int_x f d\mu .$$

Réciproque de la convergence dominée

Théorème 1.2 [2] : Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X, E)$ alors il existe $(f_n)_k \geq 1$ une suite extraite de $(f_n)_n \geq 1$ et $g \in L^p(X)$ telles que :

- ▶ $f_{n_k} \rightarrow f\mu$ - presque partout.
- ▶ Pour tout $k \geq 1$, $\|f_{n_k}\| \leq g\mu$ - presque partout .
- ▶ $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \subset X$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ et $f_{n_k} \xrightarrow{c} f$ sur $X \setminus A_\varepsilon$.

1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.4.1 Les espace L^p

Dans tout ce qui suit, (X, A, μ) est un espace mesuré et E est un espace de Banach (sur \mathbb{R}) dont nous noterons la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.20 [2] : Pour $1 \leq p < \infty$, on définit :

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions mesurable } \int_{\Omega} |u|^p d\mu < \infty\}.$$

Et on le munit de la norme (parfois notée $\|\cdot\|_p$) :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $p = \infty$, on note :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions mesurable } \sup_{\Omega} |u| < \infty\}.$$

De norme :

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{\Omega} |u|.$$

1.4.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ et H^m

Définition 1.21 [2] : Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace :

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I), \quad u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose :

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'ils existe m fonctions $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$ telles que :

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

où $D^j \varphi$ désigne la dérivée à l'ordre j de φ , lorsque $u \in W^{m,p}(I)$, on peut donc considérer les dérivées successives $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$ jusqu'à l'ordre m , on les note $Du, D^2u, \dots, D^m u$. l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.4.3 L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ et H^1

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non borné et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.22 [2] : L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par :

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}.$$

On pose : $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$.

Notation :

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_{L^p(\Omega)} + \| u' \|_{L^p(\Omega)}.$$

(où parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $(\| u \|_{L^p(\Omega)}^p + \| u' \|_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}$).

L'espace H^1 est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (\| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u' \|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1 [2] :

- ▶ L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
- ▶ L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.
- ▶ L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

1.4.4 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.23 [2] :

Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^\infty(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

- ▶ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$.
- ▶ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$.
- ▶ L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

1.4.5 L'espace de Bochner

Soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$ et $T > 0$. On définit l'espace $L^p(0, T; X)$ comme suit :

$$L^p(0, T; X) = \{ u :]0, T[\longrightarrow X \text{ fonctions mesurable } \int_0^T \| u \|_X^p dt < \infty \}.$$

Cet espace est munit de la norme :

$$\| u \|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \| u \|^p_X dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $p = \infty$, on pose :

$$\| u \|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} \| u \|_X dt.$$

Propriété 1.1 [10] :

- Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach et en particulier, $L^2(0, T; X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.
- Pour $1 < p < \infty$ et si X réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est un espace réflexif.
- Pour $1 \leq p < \infty$ et si X est séparable, alors $L^p(0, T; X)$ est aussi séparable.

1.5 Quelques théorèmes utiles

Théorème 1.3 (Densité) [11] : Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n)_n$ dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n|_\Omega \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Point Fixe de Schauder :

Définition 1.24 [11] : Soit E un espace de Banach, B une partie de E et f une application de B dans E , on dit E est compact, si f vérifie les deux propriétés suivantes :

- f continue.
- $\{f(x), x \in C\}$, est relativement compact dans E pour tout partie C bornée de B .

Théorème 1.4 [11] : Soit E un espace de Banach, $R > 0$, $B_R = \{x \in E, \|x\| \leq R\}$ et f une application compact de B_R dans B_R alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $x \in B_R$ telle que : $f(x) = x$.

Lemme 1.1 (Lemme de Gronwall) [10] : Soient $f \in L^\infty(0, T)$, $g \in L^1(0, T)$ sont des fonctions non négatives, si :

$$f(t) \leq C + \int_0^t f(s)g(s)ds.$$

Alors :

$$f(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

Théorème 1.5 (d'Ascoli) : On se donne un compacte K de \mathbb{R}^n , et on se place dans l'espace de Banach $C^0(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs scalaires, espace muni de sa norme uniforme : pour $f \in C^0(K)$

$$\| f \|_\infty = \sup_{\vec{x} \in K} |f(\vec{x})|.$$

On considère un sous-ensemble $F \subset C^0(K)$ qui est borné, i.e., tel que :

$$\exists c > 0, F \subset \{f \in C^0(K) : \|f\|_\infty < c\}.$$

Théorème 1.6 (Théorème Lax Milgram) [3] : Soit Ω un ouvert borné, soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H^1$ il existe $u \in H^1$ unique tel que :

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H^1.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H^1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - (\varphi, u) = \text{Min}_{v \in H^1} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - (\varphi, v) \right\}.$$

Théorème 1.7 (Théorème de Fubini) [3] : On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Théorème 1.8 (La trace)[2] : Soit Ω un domaine borné régulier (de classe au moins C^1). L'application :

$$\gamma_0 : u \in C^1(\bar{\Omega}) \longmapsto u|_{\partial\Omega} \in \mathcal{C}_0(\partial\Omega),$$

vérifie, pour un $C > 0$ ne dépendant que de Ω , l'inégalité :

$$\| \gamma_0 u \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \| u \|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{C}_1(\bar{\Omega}).$$

Ainsi γ_0 se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega),$$

appelé opérateur de traces associé à l'espace $H^1(\Omega)$.

Lemme 1.2 [10] : Soit E un espace de Banach et F un espace de Hilbert t.q. $E \subset F$, avec injection continue, et E dense dans F : On identifie F avec F' (de sorte que $E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2_E([0, T])$ on suppose que $u_t \in L^2_{E'}([0, T])$. Alors $u \in C([0, T], F)$ et, pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$ on a :

$$\| u(t_1) \|_F^2 - \| u(t_2) \|_F^2 = 2 \int_{t_1}^{t_2} \langle u_t, u \rangle_{E', E} dt.$$

1.6 Théorèmes de compacité

Théorème 1.9 (Rellich) [2] : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.10 (Rellich-Kondrachov) [2] : On suppose Ω borné de classe C^1 . On a :

- ▶ Si $p < n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in (1, p^*)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,
- ▶ Si $p = n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in (1, \infty)$,
- ▶ Si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$,

avec injections compactes .

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p .

1.6.1 Injection Compactes

Définition 1.25 [10] : Soit B_1, B_2 deux espace de Banach. On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2 et on note :

1. $B_1 \xhookrightarrow{c} B_2$.
2. $B_1 \xhookrightarrow{c} B_2$, d'une façon continue et tout borné de B_1 est relativement compacte dans B_2 .

1.6.2 Injections de Sobolev

Le théorème suivant donne les injections de Sobolev, ces injections établissent le fait qu'une fonction dont une certaine puissance d'elle-même et de sa dérivée est intégrable (c'est-à-dire $u \in W^{1,p}(\Omega)$) est en fait dans un meilleur espace (en terme d'intégration ou de régularité). On distingue trois cas différents, selon que la puissance est inférieure strictement, égale, ou supérieure strictement à la dimension de l'espace N .

Théorème 1.11 [10] : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ qui est soit borné à frontière lipschitzienne, soit égal à \mathbb{R}^N .

- Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$, avec $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$, et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de p, N et Ω) tel que :

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^{p^*}} \leq c \|u\|_{W^{1,p}}, \text{ ce qu'on note } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

On a en particulier :

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega).$$

Pour $N = 1$, le cas $p = N$ est autorisé. On a donc aussi :

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ si } N = 1.$$

- si $p > N$, alors :

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega).$$

Où, pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant α défini par :

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) \quad \exists K \in \mathbb{R}, |u(x) - u(y)| \leq K \|x - y\|^\alpha, \quad \forall (x, y) \in \Omega^2\}.$$

- Dans le cas où Ω est borné a frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ (et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$) ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.7 Quelques inégalités importantes

1.7.1 Inégalité de Holder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$fg \in L^1(\Omega)$$

et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.7.2 Inégalité de Minkowski

Soit $1 < p < \infty$, Pour $f, g \in L^p(m)$

$$\left(\int_s |f + g|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_s |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_s |g|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.7.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert, rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H,$$

$$\left(\int_s |fg| dm \right) \leq \left(\int_s |f|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_s |g|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.7.4 Inégalité de Young

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall (f, g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g|^q dx.$$

Si $p = q = 2$ on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g|^2 dx.$$

1.7.5 Inégalité de Poincaré

On suppose que I est borné, alors il existe une constante C (dépendant de $|I|$) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}^p$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(I)$.

1.7.6 Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v \eta_i dT$$

où $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ les composantes de $\vec{\eta}$ la normale unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

CHAPITRE 2

PROBLÈMES ELLIPTIQUES

Introduction :

Dans ce chapitre nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles **de type elliptique** qui correspondent à **des modèles physiques stationnaires**, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que **les problèmes aux limites** sont **bien posés** pour ces E.D.P elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution unique et dépendant continûment des données.

2.1 Etude du problème elliptiques linéaire

Soit Ω un ouvert bornée de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$, on considère le problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où f est une fonction donnée ($f \in C(\bar{\Omega})$). Une solution classique - solution forte - du problème (2.1) est une fonction de classe $C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (2.1) .

Physiquement, la condition de Neumann est une condition de flux. Par exemple, dans l'interprétation de l'équilibre thermique, la condition correspond à un flux de chaleur imposé à travers la frontière, par opposition à la condition de Dirichlet qui impose une température donnée à la frontière.

Le cas $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ correspond à une isolation thermique parfaite : aucune chaleur ne peut entrer ou sortir de Ω .

2.1.1 Formulation variationnelle

Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (2.2) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, contrairement à la formulation classique (2.1) qui requiert que u appartienne à $C^2(\bar{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (2.2) que (2.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

Dans la formulation variationnelle (2.2), la fonction v est appelée fonction test. La formulation

variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (2.1).

En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de principe des travaux virtuels.

En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.

Lorsqu'on prend $v = u$ dans (2.1), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (2.2)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (2.2)).

Soit u une solution classique ($u \in C^2(\bar{\Omega})$) et soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, multipliant par φ et intégrant sur Ω , on trouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^1(\Omega).$$

D'après la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi dT + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^1(\Omega).$$

Mais, on a $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, ceci donne :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^1(\Omega).$$

Comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$ on a $\nabla u \in C^1(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, de plus $u \in C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, donc $u \in H^1(\Omega)$.

Comme $C^1(\bar{\Omega})$ dense $H^1(\Omega)$, alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Alors la formulation variationnelle du problème (2.1) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) & \text{tq} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, & \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

Elle est de la forme $a(u, v) = l(v)$ tq :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx.$$

Et :

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Equivalence entre le problème variationnelle et le problème classique :

Soit $u \in H^1(\Omega)$, solution de (2.2).

Comme $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Ensuite :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi dT + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

On a l'intégrale sur le bord est nulle, car φ est à support compact, donc :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) \varphi dx = 0.$$

Alors :

$$-\Delta u + u - f = 0 \quad pp.$$

Donc :

$$-\Delta u + u = f \quad pp.$$

Vérifications des conditions aux limites :

On applique une intégration par partie, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi dT.$$

Alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = -\int_{\Omega} \Delta u \varphi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi dT. \quad (2.3)$$

Comme $a(u, v) = l(v)$, ceci donne :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} u v dx. \quad (2.4)$$

D'après (2.3) et (2.4), on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta v dx + \int_{\Omega} u v dx - \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dT = 0.$$

Mais par suit :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dT = 0.$$

Et :

$$-\Delta u + u - f = 0.$$

Ce qui donne :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f)v dx = 0.$$

Alors :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dT = 0.$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

2.1.2 L'existence et l'unicité

Le problème variationnelle sous forme abstraite donc pour montrer qu'il admet une solution unique, on applique le théorème de Lax-Milgram.

❖ $a(.,.)$ est continue :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C.S) \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (\text{def de la norme}) \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

❖ $a(.,.)$ est coercive :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega} (v)^2 dx \\ &= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Alors $\exists \alpha = 1$ tq $a(v, v) \leq \alpha \|v\|_{H^1}^2$, donc $a(.,.)$ est coercive.

❖ $l(.)$ est continue :

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C.S) \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (\text{def de la norme}) \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (C = \|f\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Donc $l(.)$ est continue.

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (2.1) admet une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème variationnelle (2.2) est appelé solution faible de problème (2.1).

2.1.3 Résultat de régularité

Comme $u \in H^1(\Omega)$, alors $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$ et on a $f \in C(\bar{\Omega})$ et on a $f \in L^2(\Omega)$, d'autre part $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$ car $u \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ donc $u \in H^2(\Omega)$.

Comme $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^1(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega) \xrightarrow{c} C(\bar{\Omega})$ et Δu est continue (car $u \in C(\bar{\Omega})$ et $f \in C(\bar{\Omega})$), donc $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.2 Etude du problème elliptiques non linéaire

Soit l'hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \Omega \text{ un ouvert borné de } \mathbb{R}^N (N \geq 1) \text{ de frontière } \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega. \\ a : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonction de Carathéodory .} \\ \text{il existe } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ tq : } \alpha \leq a(., s) \leq \beta \text{ p.p et pour tout } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation :

$$-\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + u = f,$$

par un élément $v \in V$, en l'intégrant, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(a(x, u)\nabla uv) dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Grâce aux conditions aux limites et en utilisant la formule de Green, (2.5) devient :

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

La formulation faible du problème (2.5) :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \quad \text{tq} \\ \int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.2 L'existence et l'unicité

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution u du problème (2.6). On a pour $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ le problème (2.6) revient aux problème linéaire :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \quad \text{tq} \\ \int_{\Omega} a(x, \bar{u})\nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.7)$$

Donc :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a(x, \bar{u})\nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx,$$

et :

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

On applique le théorème de Lax-Milgram (l'existence et l'unicité de problème (2.7)) :

❖ $a(., .)$ est continue :

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} a(x, \bar{u}) \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx \right| \\
 &\leq \beta \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C.S) \\
 &\leq \beta \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)}, \quad ((def\ de\ la\ norme)) \\
 &\leq \beta \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)} + \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq \max(1, \beta) \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Donc $a(., .)$ est continue.

❖ $a(., .)$ est coercive :

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= \int_{\Omega} a(x, \bar{u}) (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 dx \\
 &\geq \alpha \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 dx \\
 &\geq \alpha \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\geq \min(1, \alpha) \| v \|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

D'où la coercivité .

❖ $l(v)$ est continue :

$$\begin{aligned}
 |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (C.S) \\
 &\leq \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

D'où la continuité de $l(v)$.

Donc d'après le théorème de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique.

On pose $T(\bar{u}) = u$ tq $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$.

Un point fixe de T est une solution de problème (2.7), pour démontrer l'existence d'un tel point fixe, on va appliquer le **théorème de point fixe de Schauder**.

◆ $\{T(\bar{u}), \bar{u} \in B_R\}$ est **relativement compact** dans $L^2(\Omega)$ puisque :

$$B_R = \{u \in L^2(\Omega), \| u \|_{L^2(\Omega)} \leq R\},$$

on a $\bar{u}_n \longrightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$ et

$$B_R = \{\bar{u}_n \in L^2(\Omega), \| \bar{u}_n \|_{L^2(\Omega)} \leq R\} \text{ alors :}$$

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}) \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} u_n v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

On prendre $T(\bar{u}_n) = u_n = v$ ceci donne :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} a(x, \bar{u}) \nabla T(\bar{u}_n) \nabla T(\bar{u}_n) dx + \int_{\Omega} T(\bar{u}_n) T(\bar{u}_n) dx \right| = \left| \int_{\Omega} f T(\bar{u}_n) dx \right| \\
& \left| \int_{\Omega} a(x, \bar{u}) \nabla T(\bar{u}_n)^2 dx + \int_{\Omega} T(\bar{u}_n)^2 dx \right| = \left| \int_{\Omega} f T(\bar{u}_n) dx \right| \\
& \alpha \int_{\Omega} |\nabla T(\bar{u}_n)|^2 dx + \int_{\Omega} |T(\bar{u}_n)|^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(\bar{u}_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |T(\bar{u}_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \alpha \| \nabla T(\bar{u}_n) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| T(\bar{u}_n) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \| T(\bar{u}_n) \|_{L^2(\Omega)} \\
& \min(1, \alpha) \| T(\bar{u}_n) \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \| T(\bar{u}_n) \|_{H^1(\Omega)} \\
& \| T(\bar{u}_n) \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(1, \alpha)} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Donc T est bornée dans $H^1(\Omega)$.

D'après le théorème de Rellich, $\{T(\bar{u}), \bar{u} \in B_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

◆ **T continue :**

Soit $(u_n)_n$ est une suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous suite notée aussi $(u_n)_n$ tq $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(\Omega)$ faiblement, donc $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$. D'après réciproque partielle de convergence dominée : On a $u \in L^2(\Omega)$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$, alors on peut extraire une sous suite notée aussi $(u_n)_n$ tq : $(u_n)_n \rightharpoonup u$ p.p et :

$$\| u_n \|_{H^1(\Omega)} = \| T(\bar{u}_n) \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(1, \alpha)} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \text{ p.p.}$$

D'autre part on a : $\bar{u}_n \in L^2(\Omega)$ tq : $(\bar{u}_n)_n \rightharpoonup \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$, d'après réciproque partielle de convergence dominée : on peut extraire une sous suite notée aussi $(\bar{u}_n)_n$ tq : $(\bar{u}_n)_n \rightharpoonup \bar{u}$ p.p et $\| \bar{u}_n \|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

Comme a bornée alors : $a(x, \bar{u}_n) \rightharpoonup a(x, \bar{u})$ p.p et $a(x, \bar{u}_n) \leq \beta$ pp. Donc d'après le théorème de convergence dominée on trouve : $a(x, \bar{u}_n) \rightharpoonup a(x, \bar{u})$ dans $L^2(\Omega)$.

En effet, soit $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}_n) \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} u_n v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\int_{\Omega} a(x, \bar{u}) \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Donc T continue dans $L^2(\Omega)$.

D'après le théorème de point fixe de Schauder T admet un point fixe tq $T(\bar{u}) = u$, alors il existe une solution unique.

CHAPITRE 3

PROBLÈMES PARABOLIQUE

Introduction :

La méthode de **Faedo Galerkin** est une **méthode approximative**, très générale et très robuste. Le principe de cette méthode est basé sur l'idée de remplacer l'espace séparable infini V par autre V_m finie .

Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites linéaire et autre non linéaire. En utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin** ainsi qu'un **résultat de compacité**, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème .

3.1 Problèmes parabolique linéaires

Résolution d'un problème modèle par la méthode de Faedo Galerkin :

On va considérer ici le problème modèle qu'est l'équation de la chaleur. On se donne une fonction u_0 définie sur Ω et une fonction $f(t, x)$ (source de chaleur) définie sur $[0, T] \times \Omega$ et il s'agit de trouver une fonction $u(t, x)$ solution de :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(., 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Physiquement, la fonction $u(t, x)$, solution du problème (3.1) représente la température au temps t et en un point x d'un corps Ω initialement porté à la température u_0 , dont le bord est maintenu à une température de 0 et soumis à la source de chaleur f . On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence et d'unicité de solution faible.

3.1.1 Existence de la solution du problème

Formulation variationnelle :

En se servant de fonctions et de cadres particuliers, nous pouvons transformer le problème (3.1) en un, problème moins exigeant en régularité et plus facile à manipuler pour la suite. Le principe est le suivant :

Nous faisons jouer à la variable de temps t et la variable d'espace x des rôles différents.

On considère ainsi la fonction $u(x, t)$ comme une fonction du temps, à valeur dans un espace fonctionnel en x , et on prend comme fonctions tests, des fonctions qui dépendent seulement de la variable x .

En premier, multiplions l'équation de la chaleur (3.1) par une fonction test $v \in V = L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$ et intégrons sur Ω .

On obtient alors :

$$\int_{\Omega} u_t v dx - \int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)).$$

En intégrant par partie, selon la formule de Green, le deuxième terme de gauche, on obtient :

$$\int_{\Omega} u_t v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)).$$

Sachant que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_{\Omega} u_t v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \quad (3.2)$$

Notation :

Dans cette partie, nous déterminerons le cadre idéal à l'étude de notre problème modèle.

Les équations de la chaleur étant des E.D.P d'évolutions.

On montre facilement pour tout $t \in [0, T]$. Il serait convenable de prendre $u = u(x, t)$ comme une fonction en t à valeur dans un espace de Hilbert V :

$$u : [0, T] \longrightarrow V$$

Les conditions de Dirichlet homogènes ($u(t) = 0$ sur $\partial\Omega$) nous impose à prendre $V = H_0^1$, comme espace de $u(t)$.

En regardant la première intégrale de (3.2), on serait tenté de prendre u_t dans $L^2(\Omega)$. ce qui ne serait pas judicieux compte tenu du choix de $u(t)$ dans $V = H_0^1(\Omega)$. De plus, on a $\Delta u(t) \in H^{-1}(\Omega)$. On peut donc en déduire que, $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace le mieux approprié pour u_t .

Par conséquent, on peut interpréter la première intégrale de (3.2) comme : $\langle u_t, v \rangle$. Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

L'hypothèse raisonnable sur f est $f \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, on peut conclure que : $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$, et, $u(0)$ aurait un meilleur sens dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 3.1 (Faedo-Galerkin) :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, on identifie $L^2(\Omega)$ avec son dual et on suppose que $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors, il existe un et un seul u tel que :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)), (\text{on a identifié } L^2(\Omega) \text{ avec } (L^2(\Omega))'). \\ \int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla v ds = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds, \quad \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \\ \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \\ u(0) = u_0 \quad p.p. \end{cases} \quad (3.3)$$

Construction du problème en dimension finie :

L'idée, pour ce démontrer ce théorème, est de résoudre d'abord le problème dans des espaces de dimension finie, on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'élément finis, mais

c'est plus simple en utilisant **une base hilbertienne** formée de fonction propres du Laplacien, c'est-à-dire une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ t.q. e_n est (pour tout n) une solution faible de :

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie :

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla e_n \nabla v \, dx = \lambda_n \int_{\Omega} e_n v \, dx, \end{cases} \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$.

Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a pour tout $w \in L^2(\Omega)$, $w = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (w|e_n)_2 e_n$

au sens de la convergence $L^2(\Omega)$ (cest -à- dire que $\sum_{i=1}^n (w|e_i)_2 e_i \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$ quant $n \rightarrow \infty$).

On va montrer maintenant que la famille $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla e_n \nabla e_m \, dx = \lambda_n \int_{\Omega} e_n e_m \, dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n | e_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ si $n \neq m$ et :

$$\left\| \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{\nabla e_n \nabla e_n}{\lambda_n} \, dx = 1.$$

Puis en remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, noté $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet soit $v \in H_0^1(\Omega)$ tq $(v | e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On a donc :

$$0 = (v | e_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla e_n \nabla v \, dx = \lambda_n \int_{\Omega} e_n v \, dx.$$

Comme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et $(\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que $v = 0$ p.p. Ceci montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

La démonstration est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réalise les trois étapes suivantes :

- Recherche de solutions approchées, (construction d'une suite de solutions du problème dans un sens fini).
- On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.
- On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité.

Etape 1 : Construction de la solutions approchées :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = \text{ev}\{e_p, p = 1, \dots, n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$, avec $\alpha_i \in C([0, T], \mathbb{R})$. En suppose que les α_i sont dérivable pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc :

$$u'_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t)e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in]0, T[$, on a (compte tenu de l'injection $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$),

$$\langle u'_n(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) \int_{\Omega} e_i \varphi dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0; T]$ on a :

$$-\Delta u_n(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \Delta e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) e_i \text{ dans } D^*(\Omega) \text{ et dans } H^{-1}(\Omega),$$

c'est-à-dire, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u_n(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u_n(t) \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(t) \int_{\Omega} e_i \varphi dx.$$

Enfin, comme $f \in (]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\langle f(\cdot), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1_{\mathbb{R}}(]0, T[)$. La quantité $\langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$, est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

$$\langle u'_n(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (\alpha'_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t)) \int_{\Omega} e_i \varphi dx - \langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n , une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i , pour que :

$$\langle u'_n(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0,$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha'_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = f_i(t).$$

Résolution de l'équation :

➤ Partie homogène :

$$\lambda_i \alpha_i(t) + \alpha'_i(t) = 0.$$

on pose :

$$y = \alpha_i(t),$$

alors :

$$y' + \lambda_i y = 0$$

$$y' = -\lambda_i y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_i y$$

$$\frac{dy}{y} = -\lambda_i dt$$

$$\ln(y) = -\lambda_i t + c$$

$$y = e^{-\lambda_i t + c},$$

donc :

$$y_h = e^{-\lambda_i t} \alpha_i^{(0)}.$$

➤ Solution particulier : on pose :

$$y_p = \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t},$$

alors :

$$\begin{aligned} y_p' &= \alpha_i'(t) e^{-\lambda_i t} - \lambda_i \alpha_i(t) e^{-\lambda_i t}, \\ y_p' + \lambda_i y_p &= f_i(t), \\ \alpha_i'(t) e^{-\lambda_i t} - \lambda_i \alpha_i(t) e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \alpha_i(t) e^{-\lambda_i t} &= f_i(t), \\ \alpha_i'(t) e^{-\lambda_i t} &= f_i(t), \\ \alpha_i'(t) &= -f_i(t) e^{-\lambda_i t}, \\ \alpha_i(t) &= \int_0^t f_i(s) e^{\lambda_i(s)} ds, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha_i(t) e^{-\lambda_i t} \\ &= \int_0^t f_i(s) e^{\lambda_i(s)} e^{-\lambda_i t} ds \\ &= \int_0^t f_i(s) e^{-\lambda_i(t-s)} ds, \end{aligned}$$

alors la solution générale : $y = y_p + y_h$,

donc :

$$y = \alpha_i(t) = e^{-\lambda_i t} \alpha_i^0 + \int_0^t f_i(s) e^{-\lambda_i(t-s)} ds.$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0|e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre :

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^0 e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds. \quad (3.4)$$

Les fonction α_i ainsi définies appartiennent à $C([0, T], \mathbb{R})$ et on a donc :

$$u_n \in C([0, T], E_n) \subset C([0, T], H_0^1(\Omega)) \text{ avec } u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i.$$

Précision sur la dérivée en temps :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u_n la solution approchée qui donnée par $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i$. Les fonction α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée par transposition de u_n . On va noter cette dérivée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de D_E^* avec $E = H_0^1(\Omega)$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$ on a :

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{D_E^*, D} = - \int_0^T u_n(t) \varphi'(t) dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i$, on a donc :

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{D_E^*, D} = - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i \varphi'(t) dt = - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt \right) e_i.$$

On utilise maintenant (3.4),

$$\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt = T_i + S_i,$$

avec :

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} \varphi'(t) dt = \int_0^T \alpha_i^{(0)} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \varphi(t) dt$$

$$S_i = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi'(t) dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} S_i &= \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[0,t]}(s) e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi'(t) dt = \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[s,T]}(t) e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi'(t) dt \right) f_i(s) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi'(t) dt \right) f_i(s) ds = \int_0^T \left(\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi(t) dt \right) f_i(s) ds - \int_0^T \varphi(s) f_i(s) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} \right) f_i(s) ds \varphi(t) dt - \int_0^T \varphi(t) f_i(t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) \varphi(t) dt - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) dt$, et donc :

$$\langle (u_n)_t, \varphi \rangle_{D^*, D} = - \sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) e_i \varphi(t) dt + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t) dt \right).$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$, on a :

$$(u_n)_t = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0, T[, E_n).$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$(u_n)_t = \Delta u_n + f^n \in L^2(]0, T[, E_n) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. Comme $(u_n)_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a $\langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1(]0, T[)$ et :

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v dx dt.$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx dt &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \left(\int_\Omega e_i v dx \right) dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), \sum_{i=1}^n (v | e_i)_2 e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le s.e.v E_n .

L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$). On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un s.e.v. de $H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$),

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx dt &= \int_0^T \langle f, P_n v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt \\ &= \int_0^T \langle P_n^t f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

On a aussi $u_n \in C(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_n(0) = P_n u_0$.

Etape 2 : Estimations a priori :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \in C(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. D'après le lemme 1.2, on a donc :

$$\frac{1}{2} \| (u_n)(T) \|_2^2 - \frac{1}{2} \| (u_0) \|_2^2 = \int_0^T \langle (u_n)_t, u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (3.5), on en déduit :

$$\frac{1}{2} \| (u_n)(T) \|_2^2 - \frac{1}{2} \| u_0 \|_2^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx dt = \int_0^T \langle f, P_n u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt,$$

donc :

$$\| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \| u_0 \|_2^2 + \int_0^T \langle f, P_n u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

On en déduit, en remarquant que $P_n u_n = u_n$,

$$\begin{aligned} \| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \frac{1}{2} \| u_0 \|_2^2 + \int_0^T \langle f, u_n \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \| u_0 \|_2^2 + \| f \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \frac{1}{2} \| u_0 \|_2^2 + \frac{1}{2} \| f \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \| u_0 \|_2^2 + \| f \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}^2.$$

Ce qui donne aussi :

$$\| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \leq \| u_0 \|_2 + \| f \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}.$$

Comme $(u_n)_t = \Delta u_n + P_n^t f$ (égalité (3.5)) et que $\| P_n w \|_{H_0^1(\Omega)} \leq \| w \|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on obtient aussi une borne sur $(u_n)_t$:

$$\| (u_n)_t \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq \| u_n \|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} + \| f \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}.$$

et donc :

$$\| (u_n)_t \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq \| u_0 \|_2 + 2 \| f \|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$.

Etape 3 : Passage à la limite :

Grâce aux estimations obtenues à l'étape 2, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$u_n \rightarrow u \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)),$$

$$(u_n)_t \rightarrow w \text{ faiblement dans } L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)),$$

et les estimations sur u_n et $(u_n)_t$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et u_t :

$$\|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))},$$

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_2 + 2\|f\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))},$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = u_t$ (puis nous montrerons que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (3.3)).

Par définition de u_t , on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$,

$$\int_0^T u_t(t)\varphi(t)dt = - \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt.$$

Pour démontrer que $u_t = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$,

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = - \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt. \quad (3.6)$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité (3.6) est dans $H^{-1}(\Omega)$ alors que le terme de droite est dans $H_0^1(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $(L^2(\Omega))'$ avec $L^2(\Omega)$.

Soit donc $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$. Nous allons montrer (3.6), pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on considère l'application S de $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ dans \mathbb{R} définie par :

$$S(v) = \int_\Omega \left(- \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt \right) \psi(x)dx \text{ pour } v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)).$$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ dans \mathbb{R} . Comme $u_n \rightarrow u$ faiblement $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, on a donc $S(u_n) \rightarrow S(u)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a :

$$S(v) = \left(- \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt \mid \psi \right)_2 = - \left\langle \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

On a donc, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$- \left\langle \int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow - \left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt$ (par définition de $(u_n)_t$). On a donc :

$$\left\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow - \left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

On considère maintenant l'application \bar{S} de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\bar{S}(v) = \left\langle \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ pour } v \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).$$

L'application \bar{S} est linéaire continue de $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ dans \mathbb{R} . Comme $(u_n)_t \rightarrow w$ faiblement $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a donc $\bar{S}((u_n)_t) \rightarrow \bar{S}(w)$ quand $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire :

$$\left\langle \int_0^T (u_n)_t(t) \varphi(t) dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \left\langle \int_0^T w(t) \varphi(t) dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$-\left\langle \int_0^T u(t) \varphi'(t) dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \left\langle \int_0^T w(t) \varphi(t) dt, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t) \varphi'(t) dt = \int_0^T w(t) \varphi(t) dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $u_t = w$. Nous savons donc que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, et que $(u_n)_t \rightarrow u$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Pour montrer que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (3.3), il suffit maintenant de passer à la limite dans (3.5). Soit $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, selon (3.5),

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T (u_n | v)_{H_0^1(\Omega)} dt = \int_0^T \langle f, p_n v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent à limite quand $n \rightarrow +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $(u_n)_t$. Pour le terme de droite. On remarque que $P_n v(t) \rightarrow v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t . Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi :

$$\int_0^T \langle (u)_t, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T (u | v)_{H_0^1(\Omega)} dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation (3.3). Il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p.

Corollaire 3.1 Soit $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, alors $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration : Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ (voir le lemme (1.2)).

On a $u(t) \rightarrow u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \rightarrow 0$. On a aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} e_i \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Pour en déduire que $u(0) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C([0, T], H^{-1}(\Omega))$. En effet, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C([0, T], H^{-1}(\Omega))$, il existe $w \in C([0, T], H^{-1}(\Omega))$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, t.q. $u_n(t) \rightarrow w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ (et donc aussi dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$). En particulier, on a donc $w(0) = u_0$. Mais, on sait déjà que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p. sur $]0, T[$ et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ car u et w sont continues sur $[0, T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(0) = w(0) = u_0$. Il reste montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que :

- (1) Pour tout $t \in [0, T]$, $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.
- (2) $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \rightarrow 0$, quand $s \rightarrow t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $t \in [0, T]$).

Par démontrer (2), on utilise la fait que $(u_n)_t \in L^1([0, T], H^{-1}(\Omega))$. Le lemme (1.2) nous donne que pour tout $t_1, t_2 \in [0, T], t_1 > t_2$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (dans $H^{-1}(\Omega)$),

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} (u_n)_t(s) ds,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \int_{t_2}^{t_1} \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} ds \leq \left(\int_0^T \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1 - t_2} \\ &\leq \|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \sqrt{t_1 - t_2}. \end{aligned}$$

Comme la suite $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit bien que $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \rightarrow 0$, quand $s \rightarrow t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $t \in [0, T]$). Pour démontrer (1), on utilise encore le lemme (1.2). Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a pour tout $t, s \in [0, T]$,

$$\|u_n(t)\|_2^2 = \|u_n(s)\|_2^2 + 2 \int_s^t |\langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| d\xi,$$

donc :

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_2^2 &\leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2 \int_s^t |\langle (u_n)_t(\xi), u_n(\xi) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| d\xi, \\ &\leq \|u_n(s)\|_2^2 + 2 \|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0, T]$, on en déduit :

$$T \|u_n(t)\|_2^2 \leq \|u_n\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + 2T \|(u_n)_t\|_{L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \|u_n\|_{L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, que $u(0) = u_0$ p.p. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution de (3.3) et donc la démonstration de la partie existence du théorème 2.1.

3.1.2 Étude l'unicité de la solution

On montre maintenant la partie unicité du théorème 2.1.

Lemme 3.1 *Le problème (3.3) admet une solution unique.*

Démonstration

Soit u_1, u_2 deux solution de (3.3). On pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et on prenant, pour $t \in [0, T], v = u_{1,0,t}$ comme fonction test, on obtient :

$$\int_0^t \langle u_t(s), u(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u(s) \nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a d'après le lemme (1.2),

$$\frac{1}{2} (\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2) = \int_0^t \langle u_t(s), u(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u(s) \nabla u(s) dx ds = 0. \quad (3.7)$$

Enfin, comme $u(0) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ p.p. dans Ω , pour tout $t \in [0, T]$. Ce qui montre la partie unicité du théorème 2.1.

3.2 Problèmes parabolique Non linéaires

Pour une équation parabolique non linéaire on considère le problème au limites de valeur initiale suivant :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R} et $Q = \Omega \times (0, T)$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}) + u^3 - u = f(x, t) & \forall (x, t) \in \bar{Q} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u_{t=0} = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (3.8)$$

où

- ◆ u représente le vecteur du déplacement.
- ◆ f représente la densité des forces extérieures.
- ◆ u_0 une fonction donnée.

Le but de ce chapitre est d'étudier une fonction $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$ à valeurs réelles, solution du problème (3.8) sous certaines hypothèses (H) défini par la suite. Afin de bien poser le problème, et pour avoir les outils pour le résoudre, on a besoin d'introduire quelques notions et quelques espaces fonctionnels qu'on utilisera ultérieurement.

On définit l'espace V par :

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega).$$

Où l'espace V muni de la norme $\|v\|_V = \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{L^4(\Omega)}$ est un espace de Hilbert. Rappelons que :

$$H_0^1(\Omega) = \bar{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \tau\}.$$

Où τ est la frontière de Ω , on suppose qu'elle est assez régulière.

Notation :

pour simplifier l'écriture, on pose :

$$u(x, t) = u, \quad f(x, t) = f.$$

On est maintenant en mesure de formuler de façon précise le problème (3.8) pour l'étudier, on aura besoin des hypothèses suivantes :

$$(H) : \begin{cases} f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)), & (H.1) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega), & (H.2) \\ a \in C(\bar{\Omega} \times (0, T)). & (H.3) \end{cases}$$

Définition 3.1 La solution faible du problème (3.8) est une fonction qui vérifie :

1. $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

2. u admet une dérivée forte $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.
3. $u(0) = u_0$.
4. L'identité, $(a(u, v) = l(v))$.

3.2.1 Existence de la solution du problème

Formulation variationnelle :

En multipliant l'équation

$$u_t - \operatorname{div}\left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^3 - u = f(x, t), \quad (3.9)$$

par un élément $v \in V$, en l'intégrant, on obtient :

$$\int_{\Omega} u_t v dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}\right) v dx + \int_{\Omega} (u^3 - u) v dx = \int_{\Omega} f(x, t) v dx, \quad (3.10)$$

Grâce aux conditions aux limites et en utilisant la formule de Green, (3.10) devient :

$$(u_t, v) + a(u, v) + (u^3, v) - (u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.11)$$

Où $(., .)$ désigne le produit scalaire en $L^2(\Omega)$ et :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

l'application $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive. En effet :

✓ **Bilinéarité :** bilinéaire immédiate.

✓ **Continuité :** $\forall u, v$ on a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}| dx \\ &\leq a_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| dx, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on trouve :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq a_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq a_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq a_1 \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

✓ **Coércivité :** $\exists \alpha > 0, \forall u \in V$ on a :

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_{\Omega} a(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \\ &\geq a_0 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx, \end{aligned}$$

où $a_0 = \min_{(x,t) \in Q} a(x,t)$, d'après l'inégalité de Poincaré il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que :

$$|a(u, u)| \geq \frac{\alpha_0}{\alpha_0} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

où $\alpha = \frac{\alpha_0}{\alpha_0}$.

La démonstration de l'existence de la solution du problème (3.8) est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- Recherche de solutions approchées.
- On établit sur ces solutions approchées des estimations à priori.
- On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité.

Etape 1 : Construction de la solutions approchées :

L'espace V est séparable, alors il existe une suite w_1, w_2, \dots, w_m , ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in V & \forall i \\ \forall m, w_1, w_2, \dots, w_m & \text{sont linéairement indépendants.} \\ V_m = \langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle & \text{est dense dans } V. \end{cases} \quad (3.12)$$

En particulier :

$$\forall v \in V \implies \exists (\alpha_{km})_m \in \mathbb{N}^*, \varphi_m = \sum_{k=1}^m \alpha_{km} w_k \longrightarrow \varphi, \quad \text{lorsque } m \longrightarrow +\infty. \quad (3.13)$$

L'approximation de Faedo-Galerkin consiste à chercher pour tout entier $m \geq 1$, une fonction :

$$t \longrightarrow u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(x),$$

vérifiant :

$$\begin{cases} u_m(t) \in V_m & \forall t \in [0, T] \\ (u_m(t))_t, w_k + a(u_m(t), w_k) + (u_m^3(t), w_k) - (u_m(t), w_k) = (f(t), w_k), & \forall k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.14)$$

On a :

$$\begin{aligned} (u_m(t))_t, w_k &= \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right)_t, w_k \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g_{im}}{\partial t}(t) w_i(x) \right), w_k \\ &= \sum_{i=1}^m (w_i, w_k) \frac{\partial g_{im}}{\partial t}(t), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 a(u_m(t), w_k) &= a\left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i, w_k\right) \\
 &= \int_{\Omega} a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i\right) \cdot \frac{\partial w_k}{\partial x} dx \\
 &= \sum_{i=1}^m a(w_i, w_k) g_{im}(t),
 \end{aligned}$$

on a aussi :

$$\begin{aligned}
 u_m(0) &= \sum_{i=1}^m g_{im}(0)w_i(x) \\
 &= u_{0m} \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_{im}, w_i(x).
 \end{aligned}$$

On obtient un système d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (w_i, w_k) \frac{\partial g_{im}}{\partial t}(t) + \sum_{i=1}^m a(w_i, w_k) g_{im}(t) + (u_m^3(t), w_k) - (u_m(t), w_k) = (f(t), w_k) \\ g_{im}(0) = \alpha_{im} \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.15)$$

On considère les fonctions :

$$g_m = (g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t)), f_m = ((f, w_1), \dots, (f, w_m)), C_m = (u_m^3(t), w_j) - (u_m(t), w_j)_{1 \leq j \leq m},$$

et les matrices :

$$B_m = ((w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq m}, A_m = (a(w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq m}.$$

On écrit le problème (3.15) sous forme matricielle, on trouve :

$$\begin{cases} B_m \frac{\partial g_m}{\partial t}(t) + A_m g_m + C_m = f_m \\ g_m(0) = (\alpha_{im})_{1 \leq i \leq m}. \end{cases}$$

Comme les entrées de la matrice B_m sont linéairement indépendantes alors $\det B_m \neq 0$ donc elle est inversible, alors g_m est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_m}{\partial t}(t) + B_m^{-1} A_m g_m + B_m^{-1} C_m = B_m^{-1} f_m \\ g_m(0) = (\alpha_{im})_{1 \leq i \leq m}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Grâce à la méthode des itérations usuelles de Picard utilisée pour les équations différentielles ordinaires, on peut conclure qu'il existe un t_m dépend de m tel que dans l'intervalle $[0, t_m]$ le problème (3.16) admet une solution locale unique, l'estimation à priori qui suivent montrent que $t_m = T$.

Etape 2 : Estimation à priori :

On multiplie l'équation de (3.12) par $g_{km}(t)$ et on somme sur k , on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m ((u_m(t))_t, w_k) g_{km}(t) + \sum_{k=1}^m a(u_m(t), w_k) g_{km}(t) + \sum_{k=1}^m (u_m^3(t), w_k) g_{km}(t) - \sum_{k=1}^m (u_m(t), w_k) g_{km}(t) \\ = \sum_{k=1}^m (f(t), w_k) g_{km}(t), \end{aligned}$$

comme $a(u, v) = \int_{\Omega} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$ alors on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} (u_m)_t w_k g_{km}(t) dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} a(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial w_k}{\partial x} g_{km}(t) dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} u_m^3 w_k g_{km}(t) dx \\ - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} u_m w_k g_{km}(t) dx = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} f(t) w_k g_{km}(t) dx. \end{aligned}$$

Alors :

$$| (u_m(t))_t u_m(t) + a(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u_m}{\partial x} + u_m^3(t) u_m(t) - u_m(t) u_m(t) | = | f u_m(t) |,$$

donc :

$$| (u_m(t))_t u_m(t) | + | a(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u_m}{\partial x} | + | u_m^3(t) u_m(t) | + | u_m(t) u_m(t) | = | f u_m(t) |,$$

on'a $(u_m(t))_t$ et s'écrit : $(u_m(t))_t = \frac{\partial}{\partial t} (u_m(t))$ ceci donne :

$$\geq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 + a_0 \| \frac{\partial u_m}{\partial x} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_m \|_{L^4(\Omega)}^4 + \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On trouve que :

$$\geq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 + a_0 \| \frac{\partial u_m}{\partial x} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_m \|_{L^4(\Omega)}^4 + \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (f, u_m),$$

on l'intègre de 0 à t et en applique l'inégalité de Young, on obtient :

$$\frac{1}{2} \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 + a_0 \int_0^t \| \frac{\partial u_m}{\partial x} \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \int_0^t \| u_m \|_{L^4(\Omega)}^4 d\tau$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^T \| f(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T \| u_m(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui joint à (H.1), (H.2), on déduit l'existence d'une constante C indépendante de m telle que :

$$\begin{aligned} \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 + 2a_0 \int_0^t \| \frac{\partial u_m}{\partial x} \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + 2 \int_0^t \| u_m \|_{L^4(\Omega)}^4 d\tau + 2 \int_0^t \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ \leq C + \int_0^T \| u_m(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

On déduit donc, en particulier que :

$$\| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + \int_0^T \| u_m(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau,$$

d'après le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C e^T \quad \text{constante independante de } m,$$

on obtient, donc :

$$\| u_m \|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \| u_m \|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_1. \quad (3.17)$$

Où C_1 constante indépendante de m .

Ensuite, on multiplie l'équation de (3.14) encore une fois par $g'_{km}(t)$ et on somme sur k , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m ((u_m(t))_t, w_k) g'_{km}(t) + \sum_{k=1}^m a(u_m(t), w_k) g'_{km}(t) + \sum_{k=1}^m (u_m^3(t), w_k) g'_{km}(t) - \sum_{k=1}^m (u_m(t), w_k) g'_{km}(t) \\ = \sum_{k=1}^m (f(t), w_k) g'_{km}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} (u_m)_t w_k g'_{km}(t) dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} a(x,t) \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial w_k}{\partial x} g'_{km}(t) dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} u_m^3 w_k g'_{km}(t) dx \\ - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} u_m w_k g'_{km}(t) dx = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} f(t), w_k g'_{km}(t) dx. \end{aligned}$$

Donc, il vient :

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} (u_m)_t^2 dx + \int_{\Omega} a(x,t) \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial (u_m)_t}{\partial x} + \int_{\Omega} u_m^3 (u_m)_t dx - \int_{\Omega} u_m (u_m)_t dx \\ &= \int_{\Omega} f (u_m)_t dx \\ &= \| (u_m)_t \|_{L^2(\Omega)}^2 + a(u_m, (u_m)_t) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m \|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (f(t), (u_m)_t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

En plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [a(u_m(t), u_m(t))] &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} a(x,t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} a'(x,t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx + 2 \int_{\Omega} a(x,t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)_t dx. \end{aligned}$$

D'où :

$$a(u_m(t), (u_m)_t(t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [a(u_m(t), u_m(t))] - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a'(x,t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.19)$$

Moyennant (3.18) , (3.19) , on trouve :

$$\begin{aligned} \| (u_m)_t \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [a(u_m(t), u_m(t))] + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m \|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ = (f(t), (u_m)_t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a'(x,t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

En intégrant sur $(0, t)$, et en utilisant l'inégalité de Young et la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, il vient :

$$\int_0^t \| (u_m)_t(\tau) \|_{L^2(\Omega)} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [a(u_m(\tau), u_m(\tau))] d\tau + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \| u_m(\tau) \|_{L^4(\Omega)}^2 d\tau - \frac{1}{2} \| u_m(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f(\tau)(u_m)_t(\tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} a'(x, t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx d\tau,$$

ceci donne :

$$\begin{aligned} & 2 \| (u_m)_t \|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \alpha \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{4} \| u_m(t) \|_{L^4(\Omega)}^4 + \| u_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_0^T \| f(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \int_0^T \| (u_m)_t(\tau) \|_{L^2(\Omega)} d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} a'(x, t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ & \quad + a(u_m(0), u_m(0)) + \frac{1}{2} \| u_m(0) \|_{L^4(\Omega)}^2 + \| u_m(0) \|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comme $a(x, t) \in C^1(\bar{\Omega} \times (0, T))$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} a'(x, t) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx d\tau & \leq a_2 \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ & \leq a_2 \int_0^T \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où $a_2 = \max_{(x, t) \in Q} a'(x, t)$, en remplaçant (3.20) dans (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned} & \| (u_m)_t \|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \alpha \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| u_m(t) \|_{L^4(\Omega)}^4 + \| u_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_0^T \| f(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + a(u_m(0), u_m(0)) + \frac{1}{2} \| u_m(0) \|_{L^4(\Omega)}^2 + \| u_m(0) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + a_2 \int_0^T \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

et donc d'après (H.1) et (H.2), on déduit l'existence d'une constante C' indépendante de m telle que :

$$\begin{aligned} & \| (u_m)_t \|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \alpha \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| u_m(t) \|_{L^4(\Omega)}^4 + \| u_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C' + a_2 \int_0^T \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

alors, en particulier :

$$\alpha \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C' + a_2 \int_0^T \| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau.$$

On utilise le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\| u_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C' e^{\frac{a_2}{\alpha} T} \quad \text{constante indépendante de } m.$$

Ainsi on obtient :

$$\| (u_m)_t \|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \| u_m(t) \|_{L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_2. \quad (3.22)$$

Où C_2 constante indépendante de m . On en déduit que $t_m = T$. D'où, lorsque $m \rightarrow +\infty$ dans (3.17), (3.22), on constate :

$$\begin{cases} u_m & \text{uniformément borné dans } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \\ u_m & \text{uniformément borné dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \\ (u_m)_t & \text{uniformément borné dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.23)$$

Etape 3 : Convergence et résultat d'existence :**Théorème 3.2 :**

Il existe une fonction $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ avec $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et une sous suite $(u_{m_k})_k \subseteq (u_m)_m$, telle que :

$$\begin{cases} u_{m_k} \rightharpoonup u & \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} & \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ (u_{m_k})^p \rightharpoonup u^p & \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \end{cases} \quad (3.24)$$

lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Démonstration : On déduit de la définition (1.15) :

qu'on peut extraire des sous suite convergentes (u_{m_k}) , $(\frac{\partial u_{m_k}}{\partial t})$ de (u_m) et $(u_m)_t$ respectivement et telles que :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} \rightharpoonup w \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.26)$$

alors d'après le théorème de Rellich-Kondrachov que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Et comme des résultats du théorème de Rellich, toute suite faiblement convergente dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ possède une sous suite qui converge fortement dans $L^2(Q)$.

Donc :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(Q). \quad (3.27)$$

D'autre part, il existe une sous suite de $(u_{m_k})_k$ reste notée $(u_{m_k})_k$ telle que :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{presque partout dans } Q, \quad (3.28)$$

cela donne :

$$(u_{m_k})^3 \rightharpoonup u^3 \quad \text{presque partout dans } Q, \quad (3.29)$$

d'autre part, (3.23) implique que $(u_{m_k})_m^p$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(Q)$ alors on applique le lemme (3.2) il vient que :

$$(u_{m_k})^3 \rightharpoonup u^3 \quad \text{dans } L^{\frac{4}{3}}(Q). \quad (3.30)$$

Il reste de démontrer que $w = \frac{\partial u}{\partial t}$, pour cela on va démontrer que :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t w(\tau) d\tau, \quad (3.31)$$

comme :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

alors, la démonstration de (3.31), est équivalente à démontrer que :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u_0 + \psi \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

cela veut dire :

$$\lim (u_{m_k} - u_0 - \psi, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

où $\psi = \int_0^t w(\tau)d\tau$.

En utilisant l'égalité :

$$u_{m_k} - u_{0m_k} = \int_0^t \frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} d\tau. \quad \forall t \in [0, T].$$

ce qui résulte de $u_{m_k} \in H^1(0, T; v_{m_k})$, que :

$$\begin{aligned} & (u_{m_k} - u_0 - \int_0^t w(\tau)d\tau, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \\ &= (u_{m_k} - u_{0m_k} - \int_0^t w(\tau)d\tau, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + (u_{0m_k} - u_0, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \\ &= \left(\int_0^t \left(\frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} - w(\tau) \right) d\tau, v \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + (u_{0m_k} - u_0, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

en vertu de (2) du lemme (3.4), il vient :

$$\begin{aligned} & (u_{m_k} - u_0 - \int_0^t w(\tau)d\tau, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \\ &= \int_0^t \left(\frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} - w(\tau), v \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} d\tau + (u_{0m_k} - u_0, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \left(\frac{\partial u_{m_k}}{\partial t} - w(\tau), v \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} d\tau = 0, \forall t \in [0, T]. \quad (3.32)$$

D'autre part d'après (3.13), on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_{0m_k} - u_0, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 0. \quad (3.33)$$

Ainsi, de (3.32) et (3.33), il vient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_{m_k} - u_0 - \psi, v)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 0, \forall v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

et c'est le résultat.

Théorème 3.3 : La fonction u du théorème (3.2) est la solution faible du problème (3.8) dans le sens de la définition (3.1).

Démonstration : A partir du théorème (3.2), on a démontré que la fonction limite u satisfait les deux premières conditions de la définition (3.1). Maintenant on va démontrer (3). D'après le théorème (3.2) on a :

$$u_{m_k} \rightharpoonup u(0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

D'autre part, d'après (3.13), (3.27), on a :

$$u_{m_k}(0) \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega),$$

alors :

$$u_{m_k}(0) \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

De l'unicité de la limite, on obtient :

$$u(0) = u_0,$$

donc il reste à démontrer l'identité :

$$(u_t, v) + a(u, v) + (u^3, v) - (u, v) = (f, v); \quad \forall v \in V \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T].$$

En intégrant (3.14) sur $(0, T)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t (u_m(t))_t, w_k d\tau + \int_0^t a(u_m(t), w_k) d\tau + \int_0^t (u_m^3(t), w_k) d\tau - \int_0^t (u_m(t), w_k) d\tau \\ = \int_0^t (f(t), w_k) d\tau, \quad \forall k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant (3.23) et que V_m dense dans V et en passant à la limite dans (3.34), on trouve :

$$\int_0^t (u_t, w_k) d\tau + \int_0^t a(u, w_k) d\tau + \int_0^t (u^3(t), w_k) d\tau - \int_0^t (u, w_k) d\tau = \int_0^t (f, w_k) d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors l'identité est vérifiée.

3.2.2 Étude l'unicité de la solution

Le problème (3.8) peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad (3.35)$$

Où $L = (\mathcal{L}, l)$, avec un domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L(Q)$, telles que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(Q)$ et u satisfait les conditions aux limites dans (3.8), l'opérateur L est considéré de E dans F , où E est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q)$ et dont la norme :

$$\|u\|_E^2 = \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}^2$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, u_0)$ dont la norme :

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_0\|_{L^2(Q)}^2,$$

est finie.

Lemme 3.2 : Si Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation

$$\|u\|_E \leq C \|\mathcal{F}\|_F, \quad (3.36)$$

alors la solution du problème (3.8) si elle existe, elle est unique.

Démonstration : Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (3.8)

$$\begin{cases} Lu_1 = \mathcal{F} \\ Lu_2 = \mathcal{F} \end{cases} \implies Lu_1 - Lu_2 = 0, \quad (3.37)$$

et comme L est linéaire, on obtient alors :

$$L(u_1 - u_2) = 0,$$

d'après (3.36) :

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq C \|0\|_F = 0,$$

car $\mathcal{F} = (f, u_0) = (0, 0) = 0$. Ce qui donne :

$$u_1 = u_2.$$

CHAPITRE 4

APPLICATION AU TRAITEMENT D'IMAGES

4.1 Introduction :

L'imagerie médicale regroupe l'ensemble des informations visuelles d'un organe du corps humain acquises à partir de différents moyens dont les principes de fonctionnement sont basés sur des [phénomènes physiques](#) tels que l'absorption des rayons X, la résonance magnétique nucléaire, la réflexion d'ondes ultra sonores ou la radioactivité auxquels ont associées parfois les techniques d'imagerie optique comme l'endoscopie. Avec les progrès de la technologie en matière de graphisme ainsi que de ceux de l'informatique, l'imagerie médicale est devenue un moyen courant et inévitable pour les médecins qui cherchent à mettre en valeur une pathologie ou à étudier le fonctionnement d'un organe.

En effet, les images medical (IRM) sont entachées de plusieurs types d'artefacts [parfois difficiles à supprimer sans altérer l'information](#) utile contenue dans ces images. Par ailleurs [Les filtres classiques](#) se sont avérés impuissants pour supprimer sélectivement tout type de bruit tout en préservant les objets significatifs dans l'image originale. En effet, si [le filtrage gaussien](#) est largement employé en traitement du signal, en traitement d'images, il comporte des inconvénients comme le brouillage des contours et leurs délocalisations. De son côté, la diffusion non linéaire est un procédé de filtrage visant à [éliminer le bruit](#) d'une image, tout en préservant les [informations importantes](#), comme les contours. Ainsi, dans ce chapitre, pour les besoins [d'amélioration des images, d'élimination du bruit](#), nous allons retracer les principaux travaux effectués dans ce domaine et, plus particulièrement, celles basées sur l'équation de diffusion décrite par les équations aux dérivées partielles.

4.2 Pourquoi le traitement d'image ?

Le but du traitement d'image est de :

- ✧ Éliminer ou réduire les bruits et parasites introduits lors de son acquisition.
- ✧ Interpréter de façon meilleur l'image et son contenu et ceci en détectant la présence de certaines formes.

Les domaines d'application du traitement d'images sont divers, entre autre, la physique, la biologie, etc..., on peut citer :

- ◆ La médecine (radiologie, échographie, scanner).
- ◆ La télécommunication (téléphone mobile, vidéo, tv).
- ◆ L'industrie (la robotique, sécurité).

4.3 Méthodes de résolution des EDPs

Il existe plusieurs méthodes numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles comme les éléments finis, volume finie, différence finis, etc.

La discrétisation d'une EDPs consiste à remplacer le problème continu par un problème approché.

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution des EDPs pour la méthode de la différence finis.

4.3.1 Les différences finis

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou, combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nuds du maillage.

- **Avantage** : Grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- **Inconvénients** : Limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

4.4 Filtres linéaire

La [diffusion linéaire](#) joue un rôle important dans certains [détecteurs de contours](#), la diffusion linéaire est parmi les méthodes les plus simples pour [lisser les images](#) en utilisant les EDP.

4.4.1 Équation de la chaleur

L'une des premières idées a été d'établir une analogie entre la [restauration d'une image](#) et un [phénomène physique](#) qui est celui de la diffusion de chaleur. De même façon que, dans un matériau, la chaleur se diffuse d'un point à un autre, de proche en proche, et tend ainsi à se répartir uniformément au fur et à mesure que le temps s'écoule. On peut imaginer diffuser de proche en proche les niveaux de gris dans une image. Ainsi, les irrégularités des niveaux de gris diminueront et l'on retrouve un niveau de gris uniforme.

Soit l'image définie par $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et soit l'équation de la Chaleur donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, y, t), & t > 0. \\ u(x, y, 0) = u_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Pour f continue et bornée, la solution est donnée par :

$$u(x, y, t) = u_0 * G_{\sqrt{2t}}(x, y),$$

avec :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right).$$

On peut remarquer que la solution de l'équation de la Chaleur représente un filtrage linéaire d'une image initial f par le filtre Gaussien à l'échelle $\sqrt{2t}$.

σ : représente l'échelle de filtrage.

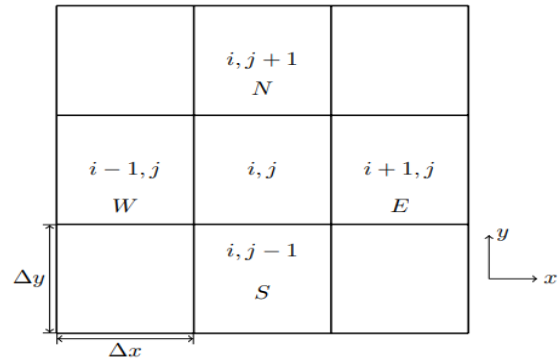
Ce filtrage ne permet pas de détecter des contours d'images on a recours au filtrage non linéaire.

4.4.2 Discrétisation de l'équation de la chaleur

Nous intéressons ici à la discrétisation explicite, pour cela nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace.

On note :

- δt : est le pas temporel.
- $t_n = nh, x_i = ih, y_j = jh$.
- $u(t_x, x_i, y_j) = u_{i,j}^n$.
- $\Delta x = \Delta y = h = 1$: le pas de discrétisation.
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.



On a l'évaluation de la dérivée temporelle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t}.$$

Evaluation de la dérivée seconde en espace suivant x et y :

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n}{\Delta y^2}.$$

Détermination du Laplacien :

$$\Delta u_{i,j}^n = u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n.$$

Donc :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} = u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n,$$

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n = \delta t [u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n].$$

4.4.3 Les avantages

- Très efficace pour dé-bruiter les zones homogènes.
- S'opère ainsi de manière identique dans toutes les directions.
- Réduire effectivement l'effet de bruit dans des région d'intensités homogènes.

4.4.4 Les inconvénients

- Les bords sont érodés.
- Ne possède aucune direction privilégiée.
- Une baisse du contraste visuel et un effet de flou.



FIGURE 4.1 – L'image filtrée par l'EDP de la Chaleur.

Pour la figure (4.1) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de la chaleur avec $\delta t = 1/7$, $num - iter = 30$.

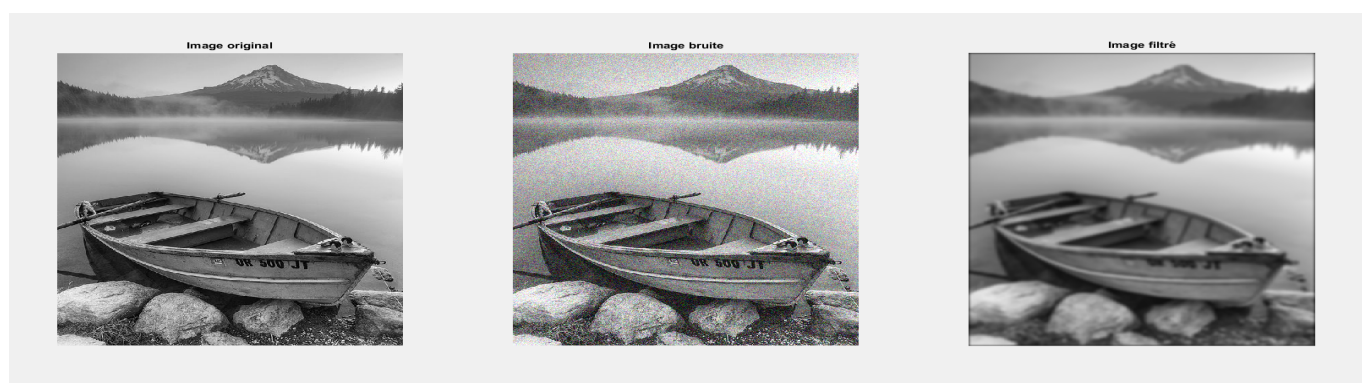


FIGURE 4.2 –

Pour la figure (4.2) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de la chaleur avec $\delta t = 1/7$, $num - iter = 30$.

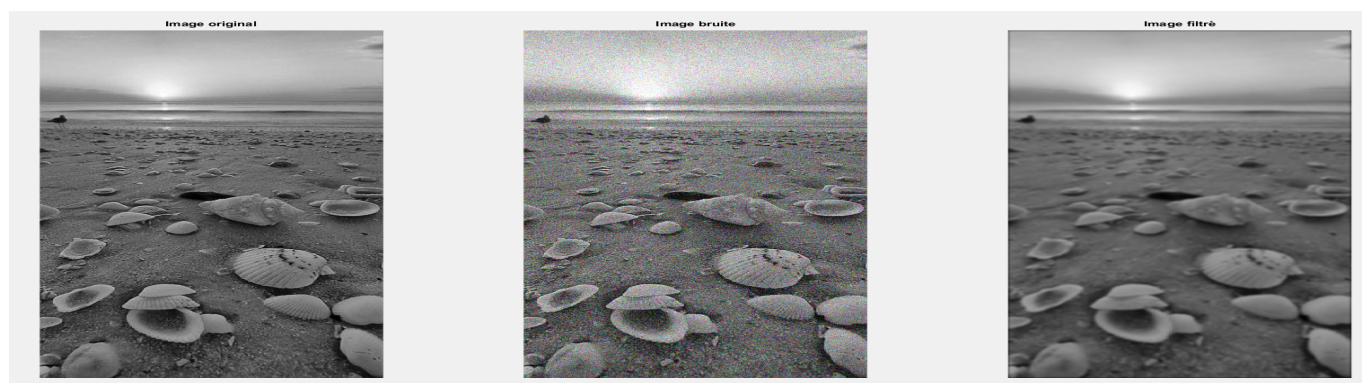


FIGURE 4.3 –

Pour la figure (4.3) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de la chaleur avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.



FIGURE 4.4 –

Pour la figure (4.4) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de la chaleur avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.

4.5 Filtres non-linéaire

La diffusion non linéaire a été introduite par Perona and Malik (Perona and Malik,1988) et ils ont également tout de suite proposé son modèle par l'EDP. En même temps ils ont établi de manière explicite le principe de maximum ayant la même importance que le principe de comparaison en morphologie mathématique en tant que [propriété des érosions, dilatations, ouvertures et fermetures](#).

4.5.1 Equation de Perona Malik

Pour résoudre les problèmes issus d'une diffusion isotrope et pour obtenir des images simplifiées en [éliminant efficacement le bruit](#) tout en [préservant les contours](#), la première idée de diffusion anisotrope a été proposée par Malik et Perona [Perona-Malik 1990]. La motivation essentielle de l'utilisation de modèles basés sur la diffusion est la construction d'un opérateur de diffusion dépendant des propriétés locales de l'image.

Perona et Malik ont proposé de modifier l'équation de diffusion pour obtenir la diffusion anisotrope en [remplaçant la diffusion linéaire par une diffusion non linéaire](#) en vue, d'abord, d'une homogénéisation maximale d'une image en réduisant le bruit puis d'une diffusion minimale au niveau des contours et de la suppression du flou introduite par la diffusion linéaire. Le coefficient de diffusion, constant de l'équation de la chaleur, est remplacé par une fonction de diffusion qui est en fonction du gradient.

Le défaut du filtre de la chaleur est qu'il ne permet pas de détection de contour. et pour améliorer les résultats obtenus par l'EDP de la chaleur, Perona et Malik ont proposé une modification dans le modèle précédent comme suite :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Où g est une fonction décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ .

L'idée est que le processus de lissage obtenu par l'équation (4.2) est [conditionnel](#) :

- Si $\nabla u(x) \rightarrow \infty$, alors la diffusion sera faible (puisque $g(s) \rightarrow 0$ pour $s \rightarrow \infty$) et donc la localisation exacte des bords sera gardée, (nous entendons par le bord un point où $|\nabla u(x, t)| \rightarrow \infty$).
- Si $\nabla u(x) \rightarrow 0$, alors la diffusion aura tendance à se lisser encore plus au voisinage de x .

On a la fonction g de type :

$$g(s) = \exp\left(\frac{-s^2}{\lambda^2}\right),$$

ou bien :

$$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2},$$

où le paramètre λ est appelé seuil de diffusion .

4.5.2 Discrétisation de l'équation de Perona- Malik :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u(x,y,t)|)\nabla u(x,y,t)), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x,y,0) = u(x,y)_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

1. Schéma explicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u_{i,j}^n|)\nabla u_{i,j}^n),$$

2. Schéma implicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u_{i,j}^n|)\nabla u_{i,j}^{n+1}).$$

Le schéma explicite aux différences finies pour approcher la solution de l'équation de Pérona-Malik peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \operatorname{div}(g(|\nabla u_{i,j}^n|)^n \nabla u_{i,j}^n). \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} g(|\nabla u_{i,j}^n|) \right]}_{\varphi_{i,j}^n} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial y} g(|\nabla u_{i,j}^n|) \right]}_{\psi_{i,j}^n}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j}^n = \frac{\varphi_{i+\frac{1}{2},j}^n - \varphi_{i-\frac{1}{2},j}^n}{h} = g_{i+\frac{1}{2},j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - g_{i-\frac{1}{2},j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n).$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi_{i,j}^n = \frac{\psi_{i,\frac{1}{2}+j}^n - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{h} = g_{i,j+\frac{1}{2}}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) - g_{i,j-\frac{1}{2}}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n).$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t (g_{i+\frac{1}{2},j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) + g_{i-\frac{1}{2},j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) + g_{i,j+\frac{1}{2}}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) + g_{i,j-\frac{1}{2}}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n)), \quad (4.4)$$

pour simplifier la formule (4.4) on note :

$$DEU = (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n),$$

$$DWU = (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n),$$

$$\begin{aligned}
DSU &= (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n), \\
DNU &= (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n), \\
u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t \left[g_{i+\frac{1}{2},j}^n DEU + g_{i-\frac{1}{2},j}^n DWU + g_{i,j+\frac{1}{2}}^n DSU + g_{i,j-\frac{1}{2}}^n DNU \right], \quad (4.5)
\end{aligned}$$

et on prend :

$$\begin{aligned}
g_{i+\frac{1}{2},j}^n &= g(|DEU|), \\
g_{i-\frac{1}{2},j}^n &= g(|DWU|), \\
g_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= g(|DSU|), \\
g_{i,j-\frac{1}{2}}^n &= g(|DNU|).
\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons écrire la formulation d'Euler, implicite, dans un format vectoriel, matriciel comme suit :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = A(u^n)(u^{n+1}).$$

D'où $u := u_{i,j}$ avec $i, j \in \{1 \dots N\}$, $N \in \mathbb{N}$. La matrice du système $A(u^n)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
A(u^n) &= [a_{i,j}], \\
[a_{i,j}] &:= \begin{cases} -\Delta t g_{i,j}^n & [j \in N(i)], \\ 1 + \sum \Delta t g_{j \approx i}^n & (j = i), \\ j \in N^-(i), \\ j \in N^+(i), \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}
\end{aligned}$$

où $g_{j \approx i}^n$ fait référence au poids de diffusion entre les pixels j et i à l'instant n . Dans la suite, on reprend le résultat du calcul sur Matlab.

4.5.3 Les avantages

- ▶ Lisser les régions homogènes et préserver les zones non homogènes (les contours).
- ▶ La diffusion anisotrope peut également rehausser les contours.

4.5.4 Les inconvénients

- ▶ Phénomène des escalier.
- ▶ N'élimine pas le bruit sur les contours.

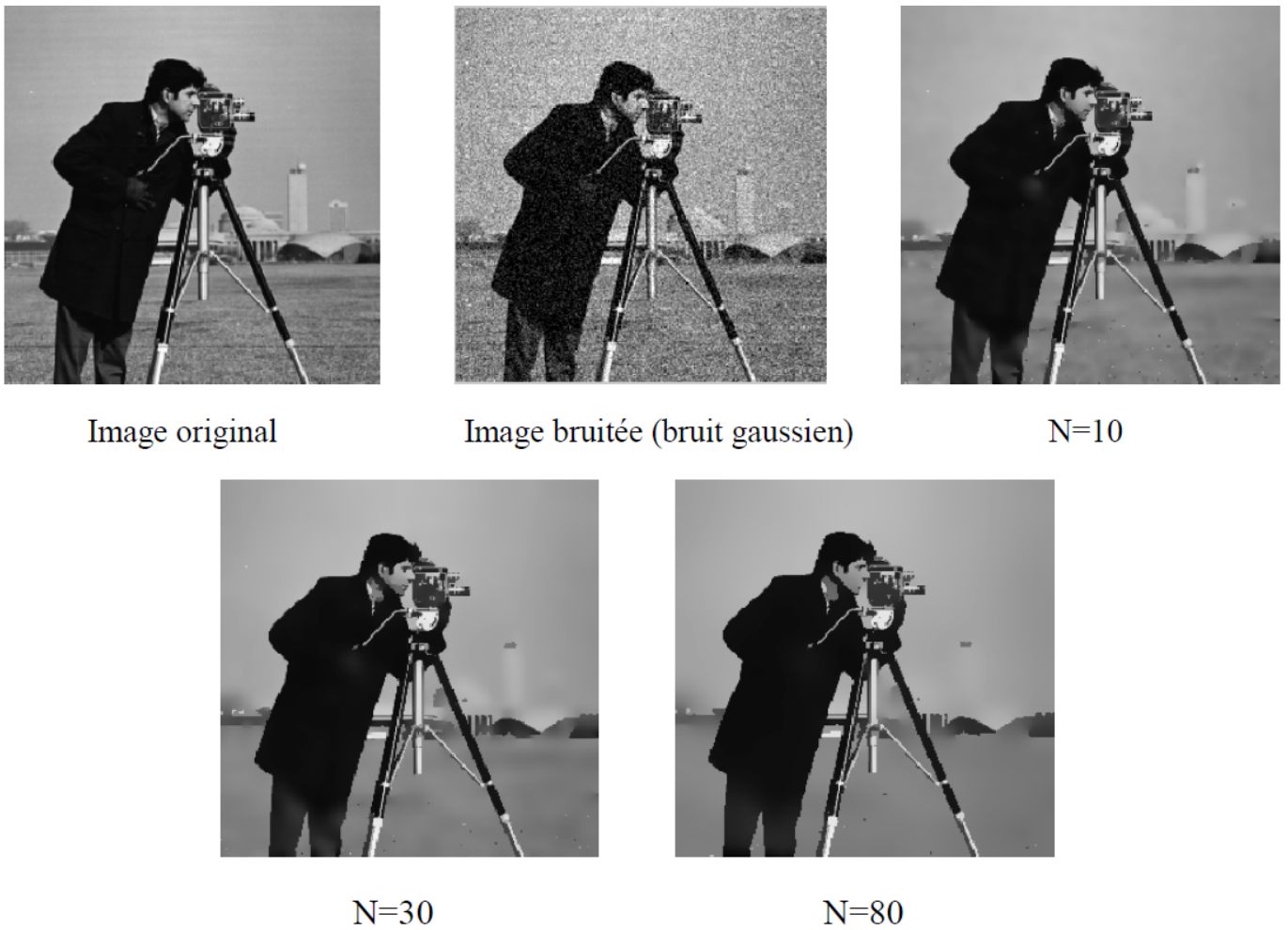


FIGURE 4.5 –

Pour la figure (4.5) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona et Malik avec $\delta t = 1/7$, $num - iter = 10, 30, 80$.

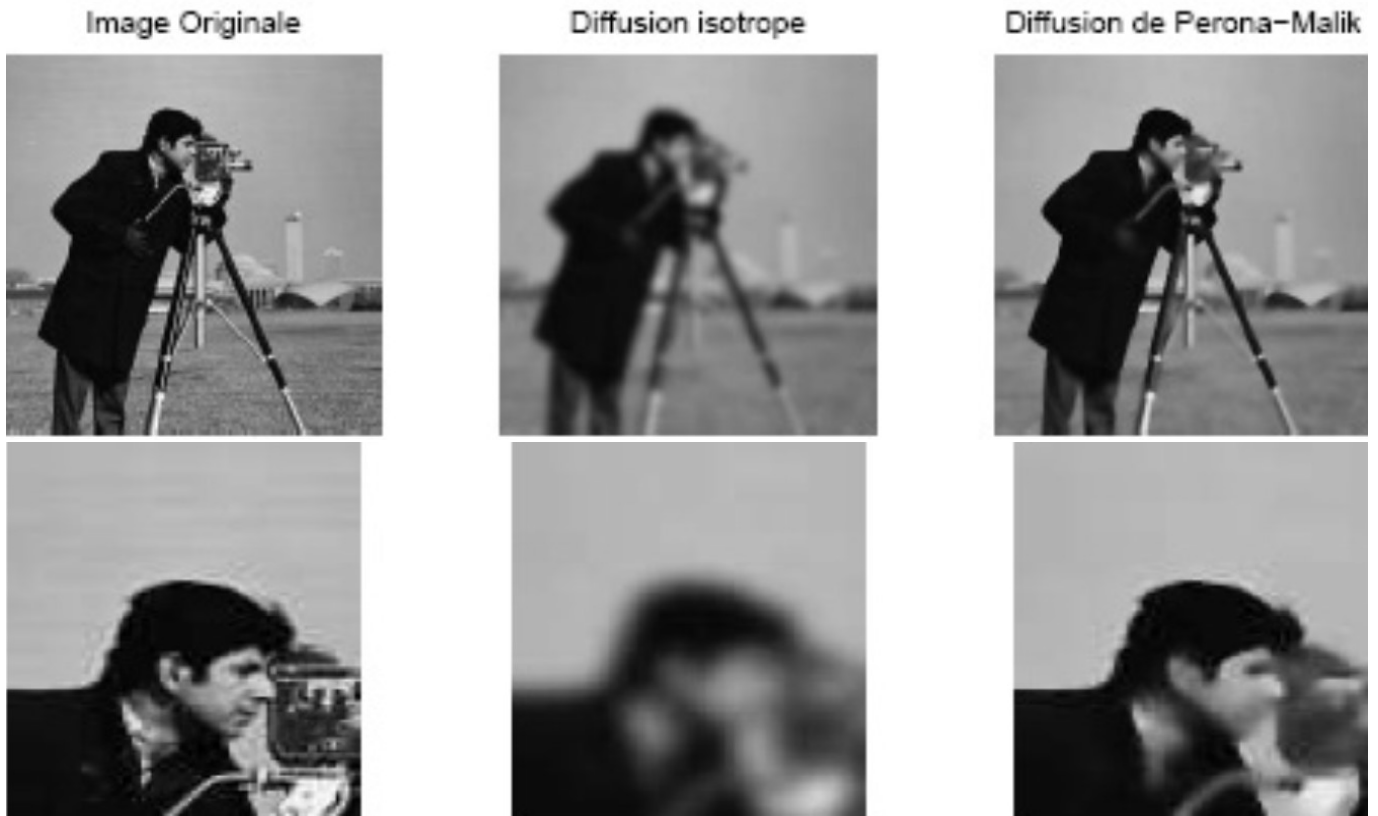


FIGURE 4.6 –

Pour la figure (4.6) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona et Malik avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.

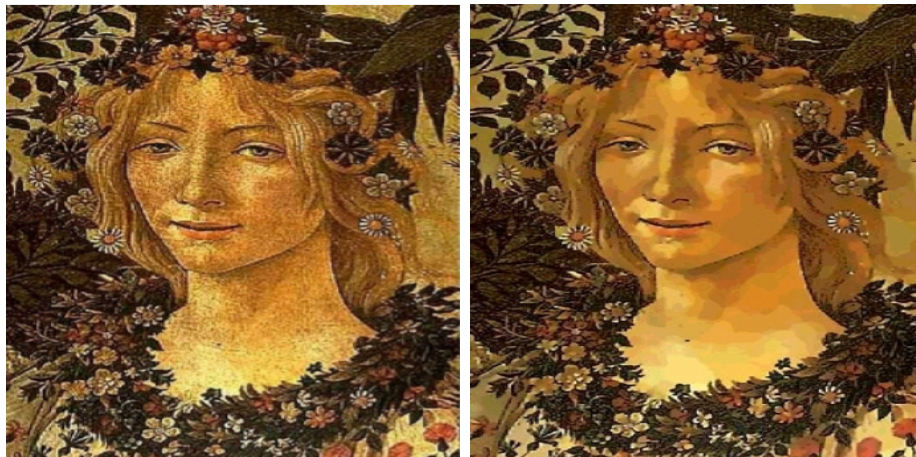


FIGURE 4.7 –

Pour la figure (4.7) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona et Malik avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.

4.6 Le modèle de Catté et al

Comme nous l'avons vu précédemment le modèle de Perona Malik est mal posé. Une façon de traiter un problème mal posé est d'introduire une régularisation qui rend le problème bien posé. Puis, en réduisant la régularisation et en observant le comportement de la solution du

problème régularisé, on peut obtenir des informations précieuses pour le premier. Cette méthode a été représenté par Catté et al.

L'idée est de substituer dans le coefficient $g(|\nabla u|)$ le gradient de l'image par une version lisse $\nabla G_\sigma * u$, où $G_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-\frac{|x|^2}{4\sigma})$. On voit que $G(x;t) = G_t(x)$ la solution fondamentale de l'équation de la Chaleur et le terme $(\nabla G_\sigma * u)$ est le gradient de la solution à temp σ de l'équation de la chaleur avec $u(x;t)$ en tant que référence initiale.

4.6.1 Modèle Catté et al

Catt, Lions et Morel ont proposé le modèle régularisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)|\nabla u), \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Où g vérifiée les conditions de perona et malik tell que $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$.

4.6.2 Un schéma itératif qui converge vers la solution du problème Catté et al

Théorème 4.1 Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. La suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par E_n ,

$$E_n : \begin{cases} \frac{du^{n+1}}{dt}(t) - \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u^n(t)|)|\nabla u^{n+1}(t)) = 0 & \text{sur }]0, T[, \\ \frac{du^{n+1}}{dn}(t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^{n+1}(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

converge dans $C([0; T]; L^2(\Omega))$ vers la solution de (4.6) .

Démonstration : On note par $\alpha^n = g(|\nabla G_\sigma * u^n(t)|)$, le problème (4.7) a une solution unique u^n . Il est clair que

$$\alpha^n \geq g(\|\nabla G_\sigma * u^0(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega.$$

Maintenant, nous prouvons que la suite un converge vers u dans $C([0; T]; L^2(\Omega))$ la solution de (4.6).

D'après l'estimation on a :

$$\frac{d}{dt} (\|u^{n+1}(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq \frac{4C^2}{v} |(u^n - u)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De plus, on a :

$$\|u^1(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \int_0^t \alpha(s) ds,$$

telle que :

$$\alpha(s) = \frac{4C}{v} |\nabla u(s)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On déduit :

$$\frac{d}{dt} (\|u^2(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C_0 \alpha(t) \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Et ainsi :

$$\|u^2(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \frac{1}{2} \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^2.$$

Enfin, nous obtenons par itération :

$$\|u^{n+1}(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^{n+1}. \quad (4.8)$$

De (4.8) nous concluons $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u la solution de (4.6) dans $C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Discrétisation :

On note $\alpha_{i,j}^n$ l'approximation de $g(|\nabla G_\sigma * u|)(ih, jh, n\Delta t)$, ensuite nous discrétisons :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(g(|\nabla G_\sigma * u|))(x, y, t) \quad \text{par} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha_{i,j}^n)(ih, jh, n\Delta t),$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} g(|\nabla G_\sigma * u|) \right),$$

par :

$$\frac{1}{2h^2} [(\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i-1,j}^{n+1} - (2\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n)u_{i,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n)u_{i+1,j}^{n+1}].$$

De même pour $\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} g(|\nabla G_\sigma * u|) \right)$ par

$$\frac{1}{2h^2} [(\alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i,j-1}^{n+1} - (2\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j+1}^{n+1}].$$

Les avantages du modèle de Catté et al :

- Si les données initiales sont très bruitées (introduisant de grandes oscillations dans le gradient de u), et on a le gradient de u est grand dans les bords, alors le modèle de Perona et Malik ne peuvent pas distinguer les vrais bords et faux bords créés par le bruit.

En fait le modèle rend le filtre insensible au bruit à l'instant t , puisque $(|\nabla G_\sigma * u)(x; t)$ est le gradient de la solution de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale $u(0; x)$.

- Comme nous le prouvons ensuite, l'équation (4.6) est maintenant bien posée.

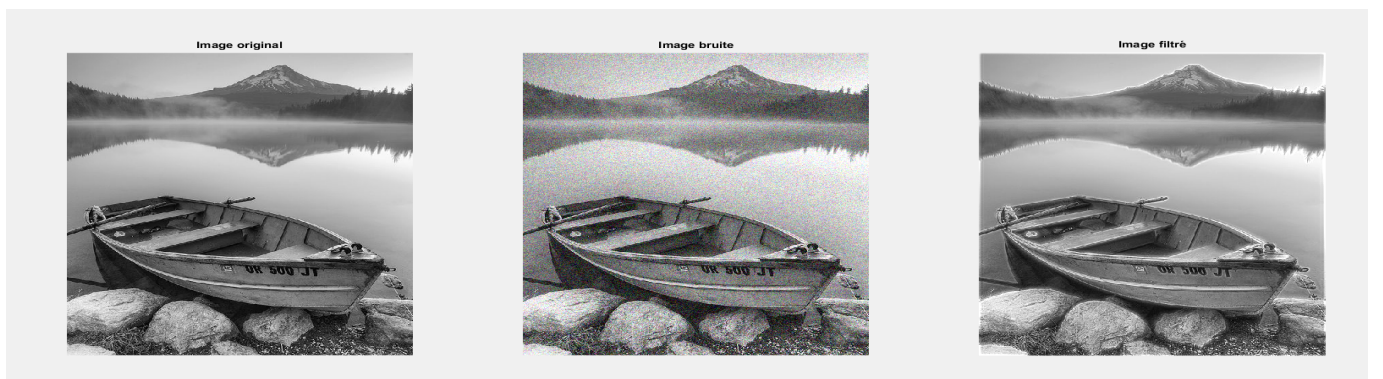


FIGURE 4.8 – L'image originale filtrée par le filtre Catté et al

Pour la figure (4.8) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de catta et al avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.



FIGURE 4.9 –

Pour la figure (4.9) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de catta et al avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.



FIGURE 4.10 –

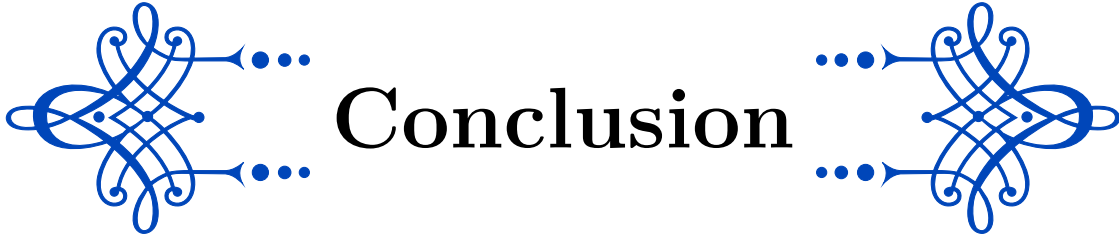
Pour la figure (4.10) L'image originale bruitée filtrée par le filtre de catta et al avec $\delta t = 1/7, num - iter = 30$.

Conclusion comparative :

Nous avons étudié le modèle du Catté et al qui régularise le modèle connu de Perona Malik qui est mal posé et souffre numériquement d'instabilité au niveau des contours.

On a donc détaillé une analyse du modèle de Perona Malik et sa défaut en donnant les modifications pour introduire le modèle de Catté et al.

Dans la deuxième partie de notre chapitre nous avons établi une résolution numérique du modèle de Catté et al avec une illustration d'exemples, en établissant à la fin une comparaison numérique entre les modèles.



Ce mémoire est consacré à la résolution de quelques problèmes d'évolutions non-linéaires avec des conditions aux limites différentes par la méthode de compacité.

La méthode dite de compacité est utilisée de façon aussi directe que possible :

1. On construit des solutions approchées par réductions à la dimension finie, par exemple par la méthode de Galerkin dans le cas stationnaire, ou de Faedo- Galerkin dans le cas d'évolution, on obtient alors l'existence des solutions approchées par utilisation :
 - (a) Dans le cas stationnaire, d'un théorème du point fixe.
 - (b) Dans le cas d'évolution, d'un théorème d'existence de solution d'un système d'équations différentielles ordinaires.
2. On passe ensuite à la limite sur la dimension, en ayant ici à surmonter une difficulté essentielle : Les opérateurs non linéaires rencontrés ne sont pas en général faiblement continus et il faut donc démontrer que la famille des solutions approchées grâce aux estimations a priori est compacte dans une topologie forte convenable pour laquelle l'opérateur est continu. Les outils sont donc ici les théorèmes de compacité, et l'injection d'un espace de Sobolev.

la deuxième partie de ce mémoire s'articule autour de la restauration d'images basée sur la régularisation de la fonction de catta et al. L'objectif est d'obtenir des images de bonne qualité.

Nous espérons que ce travail sera d'un apport considérable pour les promotions à venir, ce qui enrichira la documentation universitaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Beck, A., Teboulle, M. : A fast iterative shrinkagethresholding algorithm for linear inverse problems. Accepted by SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008.
- [2] Brezis.H, Analyse fonctionnelle, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] Daniel Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses, 2013.
- [4] Dautray, R., Lions, J.-L. : Mathematical Analysis VI and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 6, Evolution Problems II. Springer, 1993.
- [5] J.MALIK P. .PERONA. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1987.
- [6] J.MARKER. Cours de L3 MFA. Université Paris-Sud Orsay, 2013.
- [7] J. MOREL et T. COLL F. CATTÉ, P. LIONS. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion. Society for Industrial and Applied Mathematics, Feb, 1992.
- [8] M.Maouni ; Représentation des images numériques,Cours de Magistère Mathématiques Appliquées ENS Kouba,2014
- [9] Nesterov, Y. : Smooth minimization of non-smooth functions. Mathematical Programming (A), pp. 127-152, 2005.
- [10] Song-Mu Zheng, Nonlinear évolution équations, Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [11] T. Gallouët, R. Herbin, Cours equation aux dérivée partielle, Université Aix de Marseille, (2014).
- [12] Terebes R, M. Thèse Diffusion Directionnelle. Applications a la restauration et a l'amelioration d'image de documents anciens. New York, providence, Rhode Idland, 2004.
- [13] [https ://github.com](https://github.com)



Dans ce mémoire on a utilisé des modèles numériques pour résoudre les problèmes : [Catté et All](#) , [Perona et Malik](#) et l'équation de la chaleur et on a utilisé la programmation [13] de ces modèles avec Matlab :

Programme 1 : Résolution du modèle de Catté et al 2-D

```

%ANISODIFF2DConventionalanisotropicdiffusion
%DIFFIM = ANISODIFF2D(IM, NUMITER, DELTAT, KAPPA, OPTION)
%%ARGUMENTDESCRIPTION :
%IM – grayscaleimage(MxN).
%NUMITER – numberofiterations.
%DELTAT – integrationconstant(0 <= deltat <= 1/7).
%Usually, duetonumericalstabilitythis
%parameterissettoitsmaximumvalue.
%KAPPA – gradientmodulusthresholdthatcontrolstheconduction.
%1 –  $g(x, y, t) = \exp(-(\text{nabla}I/\text{kappa}).^2)$ ,
%privilegeshigh – contrastedgesoverlow – contrastones.
%2 –  $g(x, y, t) = 1./(1 + (\text{nabla}I/\text{kappa}).^2)$ ,
%privilegeswideregionsoversmallerones.
%%OUTPUTDESCRIPTION :
%DIFFIM – (diffused)imagewiththelargestscale – spaceparameter.
%%Example
%-----
%s = phantom(512) + randn(512);
numiter = 15;
deltat = 1/7;
kappa = 30;
option = 2;
%ad = anisodiff2D(s, numiter, deltat, kappa, option);
%subplot(1, 2, 1), imshow(s, []), subplot(1, 2, 2), imshow(ad, [])
%%Seealsoanisodiff1D, anisodiff3D.
%References :
%P.PeronaandJ.Malik.
%Scale – SpaceandEdgeDetectionUsingAnisotropicDiffusion.
%IEEETransactionsonPatternAnalysisandMachineIntelligence,
%12(7) : 629 – 639, July1990.
%%G.Grieg, O.Kubler, R.Kikinis, andF.A.Jolesz.
%NonlinearAnisotropicFilteringofMRIData.
%IEEETransactionsonMedicalImaging,
%11(2) : 221 – 232, June1992.
%%MATLABimplementationbasedonPeterKovesianisodiff(.) :
%P.D.Kovesi.MATLABandOctaveFunctionsforComputer

```

```

%VisionandImageProcessing.
%TheUniversityofWesternAustralia.Availablefrom :
% < http : //www.csse.uwa.edu.au/ pk/research/matlabfns/ > .
%Convertinputimagetodouble.
im = imread('immm.tif')
%im = imnoise(id,' gaussian',0.05)
%im = imfilter(ih,t,' conv');
e = fspecial(' gaussian', [1111],0.5);
%im = rgb2gray(id)%im = double(im);
%PDE(partialdifferentialequation)initialcondition.
diffim = im;
%Centerpixeldistances.
dx = 1;
dy = 1;
dd = sqrt(2);
%2Dconvolutionmasks – finitedifferences.
hN = [010;0 – 10;000];
hS = [000;0 – 10;010];
hE = [000;0 – 11;000];
hW = [000;1 – 10;000];
hNE = [001;0 – 10;000];
hSE = [000;0 – 10;001];
hSW = [000;0 – 10;100];
hNW = [100;0 – 10;000];
%Anisotropicdiffusion.
fort = 1 : 1 : num_iter
%Finitedifferences.[imfilter(.,.,' conv')
%canbereplacedbyconv2(.,.,' same')]
nablaN1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaN = imfilter(nablaN1,hN,' conv');
nablaS1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaS = imfilter(nablaS1,hS,' conv');
nablaW1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaW = imfilter(nablaW1,hW,' conv');
nablaE1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaE = imfilter(nablaE1,hE,' conv');
nablaNE1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaNE = imfilter(nablaNE1,hNE,' conv');
nablaSE1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaSE = imfilter(nablaSE1,hSE,' conv');
nablaSW1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaSW = imfilter(diffim,hSW,' conv');
nablaNW1 = imfilter(diffim,e,' conv');
nablaNW = imfilter(nablaNW1,hNW,' conv');
%Diffusionfunction.
if option == 1
cN = exp(-(nablaN/kappa).^2);
cS = exp(-(nablaS/kappa).^2);
cW = exp(-(nablaW/kappa).^2);
cE = exp(-(nablaE/kappa).^2);

```

```

cNE = exp(-(nablaNE/kappa).^2);
cSE = exp(-(nablaSE/kappa).^2);
cSW = exp(-(nablaSW/kappa).^2);
elseif option == 2
cN = 1./(1 + (nablaN/kappa).^2);
cS = 1./(1 + (nablaS/kappa).^2);
cW = 1./(1 + (nablaW/kappa).^2);
cE = 1./(1 + (nablaE/kappa).^2);
cNE = 1./(1 + (nablaNE/kappa).^2);
cSE = 1./(1 + (nablaSE/kappa).^2);
cSW = 1./(1 + (nablaSW/kappa).^2);
cNW = 1./(1 + (nablaNW/kappa).^2);
end
diffim = diffim + ...
delta_t * (...
(1/(dy^2)) * cN * nablaN + (1/(dy^2)) * cS * nablaS + ...
(1/(dx^2)) * cW * nablaW + (1/(dx^2)) * cE * nablaE + ...
(1/(dd^2)) * cNE * nablaNE + (1/(dd^2)) * cSE * nablaSE + ...
(1/(dd^2)) * cSW * nablaSW + (1/(dd^2)) * cNW * nablaNW);
%DiscretePDEsolution.
%Iterationwarning.
end
subplot(1, 2, 1), imshow(im); title('Imageoriginal')
subplot(1, 2, 2), imshow(diffim); title('Imagefiltr')

```

Programme 2 : Résolution du modèle de Perona-Malik en 2-D

```

%ANISODIFF2DConventionalanisotropicdiffusion
%DIFFIM = ANISODIFF2D(IM, NUM_ITER, DELTA_T, KAPPA, OPTION)
%uponagrayscaleimage.A2Dnetworkstructure
%of8neighboringnodesisconsideredfor
%diffusionconduction.
%ARGUMENTDESCRIPTION :
%IM - grayscaleimage(MxN).
%NUM_ITER - numberofiterations.
%DELTA_T - integrationconstant(0 <= delta_t <= 1/7).
%Usually, duetonumericalstabilitythis
%parameterissettoitsmaximumvalue.
%KAPPA - gradientmodulusthresholdthatcontrolstheconduction.
%1 - g(x, y, t) = exp(-(nablaI/kappa).^2),
%privilegeshigh - contrastedgesoverlow - contrastones.
%2 - g(x, y, t) = 1./(1 + (nablaI/kappa).^2),
%privilegeswideregionsoversmallerones.
%%OUTPUTDESCRIPTION :
%DIFFIM - (diffused)imagewiththelargestscale - spaceparameter.
%%Example
% - - - - -
%s = phantom(512) + randn(512);
num_iter = 15;

```

```

delta_t = 1/2;
kappa = 30;
option = 2;
%ad = anisodiff2D(s, num_iter, delta_t, kappa, option);
%subplot(1, 2, 1), imshow(s, []), subplot(1, 2, 2), imshow(ad, [])
%%Seealsoanisodiff1D, anisodiff3D.
%References :
%P.PeronaandJ.Malik.
%Scale – SpaceandEdgeDetectionUsingAnisotropicDiffusion.
%IEEETransactionsonPatternAnalysisandMachineIntelligence,
%12(7) : 629 – 639, July1990.
%%G.Grieg, O.Kubler, R.Kikinis, andF.A.Jolesz.
%NonlinearAnisotropicFilteringofMRIData.
%IEEETransactionsonMedicalImaging,
%11(2) : 221 – 232, June1992.
%%MATLABimplementationbasedonPeterKovesianisodiff(.) :
%P.D.Kovesi.MATLABandOctaveFunctionsforComputer
%VisionandImageProcessing.
%TheUniversityofWesternAustralia.Availablefrom :
% < http : //www.csse.uwa.edu.au/ pk/research/matlabfns/ > .
%Convertinputimagetodouble.
id = imread('iaaa.tif')
im = imnoise(id, 'gaussian', 0.05)
%e = fspecial('gaussian', [1111], 0.7);
%im = imfilter(id, e, 'conv');
%im = rgb2gray(id)%im = double(im);
%PDE(partialdifferentialequation)initialcondition.
diffim = im;
%Centerpixeldistances.
dx = 1;
dy = 1;
dd = sqrt(2);
%2Dconvolutionmasks – finitedifferences.
hN = [010; 0 – 10; 000];
hS = [000; 0 – 10; 010];
hE = [000; 0 – 11; 000];
hW = [000; 1 – 10; 000];
hNE = [001; 0 – 10; 000];
hSE = [000; 0 – 10; 001];
hSW = [000; 0 – 10; 100];
hNW = [100; 0 – 10; 000];
%Anisotropicdiffusion.
fort = 1 : 1 : num_iter
%Finitedifferences.[imfilter(.,., 'conv')
%canbereplacedbyconv2(.,., 'same')]
nablaN = imfilter(diffim, hN, 'conv');
nablaS = imfilter(diffim, hS, 'conv');
nablaW = imfilter(diffim, hW, 'conv');
nablaE = imfilter(diffim, hE, 'conv');
nablaNE = imfilter(diffim, hNE, 'conv');

```

```

nablaSE = imfilter(diff_i m, hSE, 'conv');
nablaSW = imfilter(diff_i m, hSW, 'conv');
nablaNW = imfilter(diff_i m, hNW, 'conv');
%Diffusionfunction.
ifoption == 1
cN = exp(-(nablaN/kappa).^2);
cS = exp(-(nablaS/kappa).^2);
cW = exp(-(nablaW/kappa).^2);
cE = exp(-(nablaE/kappa).^2);
cNE = exp(-(nablaNE/kappa).^2);
cSE = exp(-(nablaSE/kappa).^2);
cSW = exp(-(nablaSW/kappa).^2);
elseifoption == 2
cN = 1./(1 + (nablaN/kappa).^2);
cS = 1./(1 + (nablaS/kappa).^2);
cW = 1./(1 + (nablaW/kappa).^2);
cE = 1./(1 + (nablaE/kappa).^2);
cNE = 1./(1 + (nablaNE/kappa).^2);
cSE = 1./(1 + (nablaSE/kappa).^2);
cSW = 1./(1 + (nablaSW/kappa).^2);
cNW = 1./(1 + (nablaNW/kappa).^2);
end
diff_i m = diff_i m + ...
delta_t * (...
(1/(dy^2)) * cN. * nablaN + (1/(dy^2)) * cS. * nablaS + ...
(1/(dx^2)) * cW. * nablaW + (1/(dx^2)) * cE. * nablaE + ...
(1/(dd^2)) * cNE. * nablaNE + (1/(dd^2)) * cSE. * nablaSE + ...
(1/(dd^2)) * cSW. * nablaSW + (1/(dd^2)) * cNW. * nablaNW);
%DiscretePDEsolution.
%Iterationwarning.
end
subplot(1, 2, 1), imshow(im); title('Imageoriginal')
subplot(1, 2, 2), imshow(diff_i m); title('Imagefiltr')

```

Programme 3 :Résolution du modèle de la Chaleur 2-D

```
I = imread('ia.tif');  
%id = imread('ia.tif')  
%I = imnoise(id, 'gaussian', 0.05)  
%Creation filter, fspecial.  
h = fspecial('gaussian', [1111], 2.5);  
I2 = imfilter(I, h, 'conv');  
%Affichage original image et filtered image.  
%imshow(I)  
%title('Original Image')  
%imshow(I2)  
%title('Filtered Image');  
subplot(1, 2, 1), imshow(I); title('Image original')  
subplot(1, 2, 2), imshow(I2); title('Image filtr')
```