

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE QUELQUES
PROBLÈMES ISSUES DU CALCUL DES VARIATIONS**

Option : COSD

Par :

Bouakkaz Abir

Encadrée par : *Khenniche. G*

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Présidente : Nasri. N

Examineur: Bouzettouta. L

MCB U.SKIKDA

MCA U. SKIKDA

Année : 2022/2023



Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Allah qui nous a éclairé le bon chemin et qui me a permis de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mon remerciements les plus chaleureux à mon encadrante mademoiselle **KHENNICHE GHANIA** qui m'a dirigé ce travail, pour ces précieux conseils et son suivi au cours de ce travail.

Je tiens à exprimer mon parfaite considération aux membres de jury :

Madame **N.NASRI** comme présidente et monsieur

L.BOUZETTOUTA comme examinateur.

Abir



Dédicaces

Les années de recherche et d'apprentissage ont passé par de nombreux moments inoubliables. Tous les obstacles qui ont résisté à mon voyage scientifique et que j'ai surmonté grâce à Dieu

À mon père, à ma mère, à mes frères et à mes amis proches, qui m'ont soutenu pendant des années de fatigue et de diligence auprès de mes enseignants et de tous ceux qui ont donné une bonne parole.

Me motiver et m'encourager à réussir le parcours scolaire pour chaque personne avec mes capacités et s'efforcer avec toutes ses capacités pour m'aider à offrir toutes mes capacités en face de moi.

Tout le monde

Je vous présente mes mémoires aujourd'hui et je prie الله de prolonger vos âges et de vous soutenir santé et bien-être et j'espère que ce succès sera le début d'un avenir brillant et réussi

Abir

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques problèmes de calcul des variations d'ordre un, d'ordre deux et à deux variables. Suite à cette étude, nous avons déterminé l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à ces problèmes. La méthode de différences finies est utilisée pour l'approximation numérique de ces équations différentielles. La consistance, la stabilité et la convergence ont été établies. Des tests numériques de ces problèmes ont été effectués.

Mots clés: Calcul des variations, équation d'Euler-Lagrange, méthode des différences finies, consistance, stabilité, convergence, tests numériques.

ABSTRACT

In this memory, we have studied some problems of calculus of variations of order one, order two and with two variables. Following this study, we determined the corresponding Euler-Lagrange equation. The finite difference method is used for the numerical approximation of these differential equations. Consistency, stability and convergence have been established. Numerical tests of these problems have been carried out.

key words: Calculus of variations, Euler-Lagrange equation, the finite difference method, Taylor development, consistency, stability, convergence, numerical tests.

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة بعض مسائل درسنا الحساب التغيراتي من الرتبة الأولى ، الرتبة الثانية و ذات متغيرين. إثر هذه الدراسة ، حددنا معادلة أولر لاغرانج . قمنا بدراسة التقريب العددي لهذه المعادلات التفاضلية استخدام طريقة الفروق المنتهية. تم دراسة التلاؤم والاستقرار والتقارب. تم إجراء الاختبارات العددية لهذه المسائل.
الكلمات المفتاحية:

الحساب التغيراتي، معادلة اولر-لاجرانج، طريقة الفروقات المنتهية، نشر طابيلور، التلاؤم،
الاستقرار، التقارب، اختبارات عددية.

CONTENTS

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Rappels Mathématiques | 7 |
| 2 | Problèmes de calcul des variations sans contrainte | 12 |
| 2.1 | Problème de calcul des variations sans contrainte d'ordre 1 | 12 |
| 2.2 | Problème de calcul des variations sans contrainte d'ordre 2 | 17 |
| 2.3 | Problème de calcul des variations sans contrainte à deux variables dépendantes | 22 |
| 3 | Discrétisation spatio-temporelle | 26 |
| 3.1 | Discrétisation du problème obtenu par le calcul des variation d'ordre 2(Ap- plication 1): | 26 |
| 3.1.1 | Discrétisation du domaine | 27 |
| 3.1.2 | Discrétisation temporelle | 27 |
| 3.1.3 | Discrétisation spatiale | 28 |
| 3.1.4 | Discrétisation des conditions aux limites | 32 |
| 3.1.5 | Etude de la consistance, stabilité et convergence du problème | 33 |
| 3.1.6 | Test numérique | 38 |
| 3.2 | Discrétisation du problème obtenu par le calcul des variations d'ordre 2(Ap- plication 2) | 39 |
| 3.2.1 | Discrétisation du domaine | 39 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.2.2 | Discrétisation temporelle | 39 |
| 3.2.3 | Discrétisation spatiale | 40 |
| 3.2.4 | Discrétisation des conditions aux limites | 40 |
| 3.2.5 | Etude de la consistanse, stabilité et convergence | 40 |
| 3.2.6 | Test numérique | 43 |
| 3.3 | Discrétisation du système obtenu par le calcul des variations à deux variables dépendantes : | 44 |
| 3.3.1 | Discrétisation du domaine | 44 |
| 3.3.2 | Discrétisation temporelle | 44 |
| 3.3.3 | Discrétisation spatiale | 45 |
| 3.3.4 | Discrétisation des conditions aux limites | 46 |
| 3.3.5 | Test numérique | 46 |
| | Bibliographie | 48 |

INTRODUCTION

Le calcul des variations est une branche importante des mathématiques. Il a été développé dès le **17^{ième}** siècle par plusieurs mathématiciens notamment les frères Bernoulli, Euler, Gauss, ect...

Le calcul des variations dans le sens le plus large concerne l'étude des problèmes d'extremum impliquant des fonctionnelles. Il est analogue à la théorie des minimas et maximas de l'analyse réelle. La seule difficulté supplémentaire est que les inconnues ne sont pas des nombres mais des fonctions. Cependant, le calcul des variations conduit à une condition nécessaire représentée par l'équation d'**Euler-Lagrange** [7] qui est une équation différentielle ordinaire et aux dérivées partielles linéaire ou non.

Ainsi, le problème fondamental du calcul des variations consiste à comparer les différentes valeurs que peut prendre une intégrale pour plusieurs choix de la fonction $\mathbf{x}(\mathbf{t})$. Plus précisément, on cherche les valeurs maximales et minimales de fonctionnelles représentées par l'intégrale définie.

Dans ce travail, nous nous intéressons à quelques types de problèmes de calcul de variations d'ordre un, d'ordre deux et en termine par un problème de calcul des variations à deux variables. Nous avons déterminé l'équation d'Euler-Lagrange correspondante pour chaque problème; une équation différentielle ordinaire, équation d'ordre supérieure et un système d'équations différentielles. La méthode de différences finies est utilisée pour l'approximation numérique de ces équations différentielles. La consistance, la stabilité et la convergence ont

été établies respectivement pour chaque problème. Des tests numériques de ces problèmes ont été effectués.

Le mémoire comporte trois chapitres :

Le chapitre 1 est un rappel mathématique nécessaire à la suite du travail.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de quelques problèmes de calcul des variations d'ordre 1, d'ordre 2 et à deux variables.

Le chapitre 3, contient la discrétisation des équations différentielles (équation d'Euler-Lagrange) issues du calcul des variations par la méthode des différences finies dont l'étude de la consistance, la stabilité et la convergence des schémas numérique sont établie. Des tests numériques de ces problèmes ont été effectués.

CHAPITRE

1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats d'analyse et également quelques notions et concepts qui seront nécessaires pour résoudre numériquement les problèmes ci-dessus.

Définition 1.1 Une équation différentielle aux dérivées partielles noté par (**EDP**) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certains de ses dérivées partielles.

Définition 1.2 Fonction admissible

On appelle une fonction admissible toute fonction suffisamment régulière $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ et vérifiant les conditions aux limites.

Définition 1.3 Clasisication des EDP

Soit l'EDP suivant d'ordre deux, linéaire à coefficients constants :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g \quad (1.1)$$

tel que $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ et \mathbf{f} sont des constantes.

-L'équation (1.1) est dite elliptique si $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} < 0$.

-L'équation (1.1) est dite parabolique si $b^2 - 4ac = 0$.

-L'équation (1.1) est dite hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$

Définition 1.4 *Accroissement d'une fonctionnelle*

L'accroissement d'une fonctionnelle notée par ΔJ est définie par :

$$\Delta J = J(\mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)) - J(\mathbf{x}(t))$$

où : $\delta \mathbf{x}(t)$ est la variation de la fonction $\mathbf{x}(t)$.

Ainsi l'accroissement $\Delta J(\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t))$ de la fonctionnelle dépend de la fonction $\mathbf{x}(t)$ et de sa variation $\delta \mathbf{x}(t)$.

Théorème 1.1 *Théorème de Taylor à deux variables*

On suppose que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et toutes ses dérivées d'ordre inférieur à $n + 1$ sont continues dans

$$D = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{d}\} \quad (\text{c'est à dire } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^{n+1})$$

soit $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D$, il existe ξ compris entre \mathbf{x} et \mathbf{x}_0 et η compris entre \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 avec

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + R_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

où

$$\begin{aligned} p_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \dots \\ & + \dots + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n C_{n+1}^j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1-j} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial \mathbf{x}^{n-j} \partial \mathbf{y}^j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{aligned}$$

ou

$$R_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1-j} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \mathbf{x}^{n+1-j} \partial \mathbf{y}^j}(\xi, \eta)$$

Lemme 1.1 *Lemme fondamental [7]*

Si l'intégrale $\int_a^b f(\mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ où $f(\mathbf{y})$ est une fonction continue par morceaux dans l'intervalle $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, s'annulant pour toute fonction $\eta \in C^1[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ tel que $\eta(\mathbf{a}) = \eta(\mathbf{b}) = 0$, alors, $f(\mathbf{y})$ est identiquement nul dans $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Théorème 1.2 *Théorème fondamental [7]*

Soit $\mathbf{x}^*(t)$ un extremum, la première variation de J doit être nulle en \mathbf{x}^* .i.e ;

$$\delta J(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{x}(t)) = 0$$

pour toute variation admissible $\delta \mathbf{x}(t)$

Théorème 1.3 *Théorème de Green [5]*

On considère une forme différentielle continue définie par

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 : (\omega, \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x} + Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}$$

et un compact $D \subset \mathbb{R}^2$ dans la frontière (∂D) soit de classe C^1 par morceaux et orientée, alors

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P dx + Q dy)$$

Méthode des différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées en combinaison de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini des points discrètes aux noeuds du maillage.

Ainsi, la méthode des différences finies sert à approximer les opérateurs des équations au moyen de développement de Taylor.

Définition 1.5 *Maillage*

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer D.F. Pour une application définie sur un segment de \mathbb{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir éventuellement des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins.

Définition 1.6 *Schéma numérique*

Ecrire un schéma numérique de la résolution d'une équation aux dérivées partielles signifie :

- Substituer les formulations des dérivées par approximations sur tous les point de maillage.
- Réorganiser les équation pour faire apparaitre un schéma explicite ou bien implicite.
- Résoudre un schéma numérique signifie simplement trouver les valeurs discrètes de la fonction en chaque noeud.

Définition 1.7 -La méthode ou le schéma explicite calcule \mathbf{u}_{n+1} en fonction de \mathbf{u}_n c-à-d :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n)$$

-La méthode ou le schéma implicite calcule \mathbf{u}_{n+1} en fonction de $(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$ c-à-d :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$$

Définition 1.8 *La consistance*

C'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continue lorsque les pas de discrétisation \mathbf{k} et \mathbf{h} tendent vers zéro.

Définition 1.9 *Erreur de troncature*

On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant les dérivées par les différences divisées. Le calcul des erreurs de troncature est usuellement basé sur les développements de Taylor. L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'équation est approchée par le schéma. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approchée (erreur de convergence), mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

Définition 1.10 *Consistance de schéma*

Le schéma est consistant d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace, si il existe $\mathbf{c} \subset \mathbb{R}_+$ ne dépende que \mathbf{U} telque : $\| \mathbf{E}_u^{(n)} \leq \mathbf{c}(\mathbf{k} + \mathbf{h}^2) \|$.

Définition 1.11 *La stabilité*

Par définition, un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature,...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant :

Un schéma peut être :

- *Inconditionnellement instable* : Quels que soient \mathbf{k} et \mathbf{h} les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.

- *Inconditionnellement stable* : Quels que soient \mathbf{k} ; \mathbf{h} les erreurs causées par le schéma numérique n'explode pas au fil des itérations.

- *Conditionnellement stable* : On doit poser une condition sur \mathbf{k} et \mathbf{h} pour que la solution n'explode pas.

Définition 1.12 *Théorème de Lax*

*Si la solution \mathbf{u} de l'EDP est suffisamment régulière, un schéma **stable et consistant** est **convergent**.*

CHAPITRE

2

PROBLÈMES DE CALCUL DES VARIATIONS SANS CONTRAINTE

2.1 Problème de calcul des variations sans contrainte d'ordre 1

Soit $[t_0, t_f]$ un intervalle de \mathbb{R} et soit $\mathbb{E} = C^1([t_0, t_f], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^1 définie sur $[t_0, t_f]$ à valeur dans \mathbb{R} .

Considérons le problème suivant :

$$J(\mathbf{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt \quad (2.1)$$

et $F \in C^2$ et $\mathbf{x}(t)$ est une fonction admissible de classe C^1 .

avec

$$\mathbf{x}(t_0) = A \text{ et } \mathbf{x}(t_f) = B \quad (2.2)$$

Notre objectif consiste à déterminer l'extrémum de la fonctionnelle J qui est solution de l'équation d'Euler-Lagrange.

Nous allons, donné ci-dessus le développement de l'équation d'Euler-Lagrange à travers les étapes suivantes.

Première étape : Hypothèse d'extremum

On suppose que $\mathbf{x}^*(t)$ est la courbe qui vérifie le problème (2.1)- (2.2) et soit $\mathbf{x}(t)$ une autre courbe qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t) \quad (2.3)$$

où $\delta\mathbf{x}(t)$ est une variation de $\mathbf{x}^*(t)$ et vérifie

$$\delta\mathbf{x}(t_0) = \delta\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

telle que : $J(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x})$ est continuellement différentiable sur \mathbf{E} .

Deuxième étape : Accroissement

Considérons l'accroissement de la fonctionnelle J :

$$\Delta J = J(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t)) - J(\mathbf{x}^*(t)) \quad (2.5)$$

alors,

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} [F(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), t) - F(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t)] dt \quad (2.6)$$

Troisième étape : Première variation

Pour déterminer la première variation de J en utilise le développement de Taylor autour de $\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}^* + \delta\dot{\mathbf{x}}$ pour le premier terme de l'intégrale (2.6) et en gardant tout simplement les termes linéaires en $\delta\mathbf{x}(t)$ et $\delta\dot{\mathbf{x}}(t)$.

Alors, on a

$$F(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), t) = F(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)_* \delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* \delta\dot{\mathbf{x}} + \dots \quad (2.7)$$

prenant les termes linéaires de la relation (2.7) et substituant la relation (2.7) dans (2.6) on obtient :

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} (F(x^*, \dot{x}^*, t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_* \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} - F(x^*, \dot{x}^*, t)) dt. \quad (2.8)$$

On trouve donc,

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_* \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} \right) dt. \quad (2.9)$$

En faisant une intégration par partie dans le deuxième terme de la relation (2.9)

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} dt \quad (2.10)$$

On prenant

$$U = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_*, \quad U' = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \quad (2.11)$$

et

$$V' = \delta \dot{x}, \quad V = \delta x$$

Alors, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} dt = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta x \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta x dt, \quad (2.12)$$

comme

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0 \quad (2.13)$$

aussi, on a

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta x dt \quad (2.14)$$

Substituant le relation (2.14) dans (2.10) on a

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x^*}(x^*, \dot{x}^*, t) \delta x(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t) \delta x^* \right] dt \quad (2.15)$$

qui est valable pour tout δx de classe C^1 .

D'après le théorème fondamental[7], on déduit que la variation de J est nulle en extremum, i.e.

$$\delta J(x^* + \delta x) = 0 \quad (2.16)$$

C'est -à-dire

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x^*}(x^*, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^*}(x^*, \dot{x}^*, t) \right] \delta x^* dt = 0 \quad (2.17)$$

d'après le lemme fondamental [7], on a le résultat suivant :

$$\frac{\partial F}{\partial x^*}(x^*, \dot{x}^*, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^*} \right) (x^*, \dot{x}^*, t) = 0 \text{ Pour tout } t \in [t_0, t_f]. \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) est appelée l'équation d'**Euler-Lagrange** qui est une condition nécessaire.

Condition suffisante

Pour établir la nature de l'extremum, c'est-à-dire, s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, nous devons prendre en considération la deuxième variation et examiner son signe.

Donc, nous trouvons une condition suffisante de l'extremum .

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_* (\delta x(t))^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right)_* (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* (\delta x(t) \delta \dot{x}(t)) \right] \quad (2.19)$$

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} [\delta x(t), \delta \dot{x}(t)] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}}_I \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Si la deuxième variation $\delta^2 J$ est positive (négative) cela veut dire que la matrice (I) dans (2.20) doit être définie positive (négative). Ceci prouve la nature de l'extremum.

Dans beaucoup de cas $\delta x(t)$ est arbitraire, le coefficient de $(\delta \dot{x})^2$ i.e., $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}$ détermine le signe de $\delta^2 J$.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) > 0 & \text{pour le minimum } (*) \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) < 0 & \text{pour le maximum } (**) \end{cases}$$

Exemple

Le problème de la trajectoire la plus rapide entre deux points (le problème de brachistochrone) fut soumis par Jean Bernoulli à ses contemporains en 1696. Leibniz, Newton, de l'Hôpital ainsi que son frère Jacques Bernoulli trouvèrent la solution : il s'agit d'une arche de cycloïde. La méthode classique pour résoudre le problème est le calcul des variations.

On cherche à minimiser

$$s = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (2.21)$$

on peut exprimer l'équation comme :

$$ds = \sqrt{dt^2 + dx^2} = dt \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 + \dot{x}^2} \quad (2.22)$$

comme

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{2g(x - x_1)}} dt \quad (2.23)$$

(on va volontairement inclure une dépendance en x_1) dans (2.23) afin de pouvoir tenir compte par la suite d'un point de départ variable, le cas d'un point de départ fixe pouvant se remener par changement de repère à $x_1 = 0$).

On prend la fonctionnelle définie par

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dx \quad (2.24)$$

où les bornes t_1 et t_2 sont fixes. La variation de cette fonctionnelle est nulle si F vérifie l'équation d'Euler-Lagrange (2.18) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Si de plus F ne dépend pas explicitement de t , on peut alors utiliser l'identité de Beltrami :

$$F - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c \quad (2.25)$$

où c est une constante à déterminer à partir des conditions initiales.

Dans le cas qui nous intéresse,

$$F(t, x, \dot{x}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{2g(x - x_1)}} \quad (2.26)$$

on peut donc utiliser (2.25), ce qui mène à

$$(x - x_1)(1 + \dot{x}^2) = \frac{1}{2gc^2} \quad (2.27)$$

2.2 Problème de calcul des variations sans contrainte d'ordre 2

Le problème consiste à déterminer l'extremum de la fonctionnelle définie sur $\mathbb{E} = C^2(D, \mathbb{R})$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ par

$$J(u(x, y)) = \iint_D f(u, u_x, u_y, x, y) dx dy \quad (2.28)$$

avec :

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ sur } \partial D \quad (2.29)$$

Le problème de calcul des variations est le suivant :

$$\min J(u(x, y)), \text{ telle que } u \in D \quad (2.30)$$

qui vérifie les conditions aux bord (2.29).

Nous allons développer la solution du problème (2.28)-(2.29) à travers les étapes suivantes :

Première étape : Hypothèse d'extremum

On suppose que $u^*(x, y)$ est un extremum et que $u(x, y)$ est suffisamment proche de $u^*(x, y)$ on a :

$$u(x, y) = u^*(x, y) + \delta u(x, y) \quad (2.31)$$

où $\delta u(x, y)$ est la variation de $u^*(x, y)$ avec :

$$\delta u(x, y) = 0 \text{ sur } \partial D \quad (2.32)$$

Deuxième étape : Accroissement

Nous avons :

$$\Delta J = J(u^*(x, y) + \delta u) - J(u^*(x, y)) \quad (2.33)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\Delta J = \iint_D \left[F(u^* + \delta u, u_x^* + \delta u_x, u_y^* + \delta u_y, x, y) - F(u^*, u_x^*, u_y^*, x, y) \right] dx dy \quad (2.34)$$

Troisième étape : Première variation

On utilise le développement de Taylor à F autour de $u^*(x, y) + \delta u(x, y)$ et $u_x^* + \delta u_x(x, y)$ et en gardant simplement les termes linéaires, on a

$$\begin{aligned} F(u^*(x, y) + \delta u, u_x^* + \delta u_x, u_y^* + \delta u_y, x, y) &= F(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u}(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \delta u \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u_x}(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \delta u_x \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u_y}(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \delta u_y + \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituant la relation (2.35) dans (2.34) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta J &= \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u}(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \delta u_x \right. \\ &\left. + \frac{\partial F}{\partial u_y}(u^*(x, y), u_x^*, u_y^*, x, y) \delta u_y \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.36)$$

On remarque que

$$\delta u_x \frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta u \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \delta u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right), \quad (2.37)$$

et

$$\delta u_y \frac{\partial F}{\partial u_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta u \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \delta u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right). \quad (2.38)$$

en substituant (2.37) et (2.38) dans (2.36) on obtient :

$$\Delta J = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right) \delta u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \delta u \right] dx dy \quad (2.39)$$

D'après le Théorème de Green [5] on a

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P dx + Q dy) \quad (2.40)$$

En appliquant le résultat (2.40) sur le deuxième terme de l'intégrale (2.39) on obtient :

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta u \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \delta u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \right] dx dy = \int_{\partial D} \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u_x} dy - \delta u \frac{\partial F}{\partial u_y} dx \right] \quad (2.41)$$

La condition au bord donné par la relation (2.32) permis d'écrire :

$$\int_{\partial D} \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u_x} dy - \delta u \frac{\partial F}{\partial u_y} dx \right] \quad (2.42)$$

Donc, on obtient :

$$\delta J = \iint_D \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] dx dy \quad (2.43)$$

Quatrième étape : Condition d'extremum

D'après le Théorème fondamental [7] ; une condition nécessaire pour que J est un extremum est que $\delta J = 0$ ceci implique que :

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \delta u \right] dx dy = 0, \quad (2.44)$$

Comme $\delta u(x, y) = 0$ sur ∂D ; donc d'après le lemme fondamental [7] on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (2.45)$$

L'équation (2.45) est appelée l'équation d'Euler-Lagrange .

Application 1

La variable de temps comme une constante, Soit le problème variationnelle [4] suivant :

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} u \right] dx dy \quad (2.46)$$

sous la condition aux bord

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ sur } \partial D \quad (2.47)$$

telle que la dérivée du temps $\frac{\partial u}{\partial t}$ est traitée comme une constatnte [4].

En appliquant le résultat obtenu (2.45) ci-dessus c'est-à-dire l'équation d'Euler-Lagrange, avec

$$F(u, u_x, u_y, x, y) = \frac{1}{2}K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} u(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y) \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \implies \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_y} = K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \implies \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (2.50)$$

En substituant (2.48),(2.49) et (2.50) dans (2.45) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (x, y) \left(K(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} (x, y) \right) \right) = 0 \quad (2.51)$$

Application 2

On considère la fonctionelle suivant :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u(x, 0) = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

En appliquant la résultat (2.45) précédent on trouve :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_t} = u_t \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial u_t} \right) = u_{tt} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = -cu_x \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) = -cu_{tt} \quad (2.56)$$

L'équation d'Euler-Lagrange est donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (2.57)$$

2.3 Problème de calcul des variations sans contrainte à deux variables dépendantes

Nous allons généraliser le problème de calcul des variations simple à un problème de calcul des variations à deux variables dépendantes.

Notre objectif est de déterminer l'extremum de la fonctionnelle J suivante :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) dt \quad (2.58)$$

avec les conditions aux bord

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0; x(t_f) = x_f \\ y(t_0) = y_0; y(t_f) = y_f \end{cases} \quad (2.59)$$

On suppose que F est de classe C^2 et de classe C^1 par rapport à x et y . Supposant que x^* et y^* sont des extremums et $x(t)$ et y^* sont suffisamment proches des extremums x^*, y^* , i.e

$$x(t) = x^*(t) + \xi\eta \quad (2.60)$$

et

$$y(t) = y^*(t) + \xi\beta \quad (2.61)$$

ξ réel.

Alors,

$$\xi \longrightarrow J(x^*(t) + \xi\eta, y^*(t) + \xi\beta) \quad (2.62)$$

tel que pour $\xi = 0$ pour toute choix de $\eta, \beta : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

$$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0 \quad (2.63)$$

et

$$\beta(t_0) = \beta(t_f) = 0 \quad (2.64)$$

La fonctionnelle $\xi \longrightarrow J(x + \xi\eta, y + \xi\beta)$ ait un extremum pour $\xi = 0$ pour tout choix $\eta, \beta : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que

$$J(x + \xi\eta, y + \xi\beta) = \int_{t_0}^{t_f} F(x + \xi\eta, \dot{X} + \xi\dot{\eta}, y + \xi\beta, \dot{y} + \xi\dot{\beta}, t) dt \quad (2.65)$$

Ainsi, l'extremum de J est donné par :

$$\frac{d}{d\xi} J(x + \xi\eta, y + \xi\beta) |_{\xi=0} = 0 \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} (J(x^* + \xi\eta, y^* + \xi\beta)) &= \frac{d}{d\xi} \int_{t_0}^{t_f} F(x^* + \xi\eta, \dot{x} + \xi\dot{\eta}, y^* + \xi\beta, \dot{y} + \xi\dot{\beta}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{d\xi} (F(x^* + \xi\eta, \dot{x} + \xi\dot{\eta}, y^* + \xi\beta, \dot{y} + \xi\dot{\beta}, t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^*} \frac{\partial \dot{x}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^*} \frac{\partial \dot{y}^*}{\partial \xi} \right) dt \end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$\frac{\partial x^*}{\partial \xi} = \eta, \quad \frac{\partial \dot{y}^*}{\partial \xi} = \dot{\beta}$$

alors

$$\frac{d}{d\xi} (J) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \eta + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\eta} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \beta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\beta} \right) dt \quad (2.67)$$

En fait une intégration par partie pour les termes

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt$$

et

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\beta} dt$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \dot{\eta} dt &= \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^*} \eta \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^*} \right) \eta dt \\ \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_* \dot{\beta} dt &= \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}^*} \beta \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}^*} \right) \beta dt \end{aligned} \quad (2.68)$$

d'après la condition et (2.63) (2.64) on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}(\mathcal{J}) &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^*} \right) \eta - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^*} \right) \eta - \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^*} \right) \beta - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}^*} \right) \beta \quad (2.69) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^*} \eta - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^*} \right) \eta \right] dt + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^*} \beta - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}^*} \right) \beta \right] dt \end{aligned}$$

D'après le lemme fondamentale [7] on a

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (2.70)$$

pour la première variable.

D'autre part on a l'équation par rapport à \mathbf{y} la deuxième variable

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) = 0 \quad (2.71)$$

Application

Soit la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \int_0^L (u_t v - v_x u - \frac{1}{2} \rho_1 u_t^2 - \frac{1}{2} \rho_2 v_t^2 + \frac{1}{2} \tau_1 u_x^2 + \frac{1}{2} \tau_2 v_x^2 + \frac{1}{2} v^2) dx dt \quad (2.72)$$

avec des conditions aux bord

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0 & v(0, x) = v_0 \\ u_t(0, x) = f_1 & v_t(0, x) = f_2 \end{cases} \quad (2.73)$$

On applique les relations (2.70) et (2.71) précédentes.

D'une part on a

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = -v_x \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_t} = -\rho_1 u_t \implies \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_t} \right) = -\rho_1 u_{tt} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} = \tau_1 u_x \implies \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} \right) = \tau_1 u_{xx} \quad (2.76)$$

Alors l'équation de Euler-Lagrange par rapport à \mathbf{u} est donnée par

$$\mathbf{v}_t + \rho_1 \mathbf{u}_{tt} - \tau_1 \mathbf{u}_{xx} = \mathbf{0} \quad (2.77)$$

d'autre part on a :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{u}_t + \mathbf{v} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_t} = -\rho_2 \mathbf{v}_t \implies \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_t} \right) = -\rho_2 \mathbf{v}_{tt} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_x} = \tau_2 \mathbf{v}_x \implies \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_x} \right) = \tau_2 \mathbf{v}_{xx} \quad (2.80)$$

Donc l'équation d'Euler-Lagrange par rapport à \mathbf{v} est donnée par

$$\mathbf{u}_t + \rho_2 \mathbf{v}_{tt} - \tau_2 \mathbf{v}_{xx} = \mathbf{0} \quad (2.81)$$

Ainsi, le système des équations d'Euler-Lagrange est :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{v}_x + \rho_1 \mathbf{u}_{tt} - \tau_1 \mathbf{u}_{xx} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_t + \mathbf{v} + \rho_2 \mathbf{v}_{tt} - \tau_2 \mathbf{v}_{xx} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{u}_t(0, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{v}_t(0, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_2 \end{array} \right. \quad (2.82)$$

CHAPITRE

3

DISCRÉTISATION SPATIO-TEMPORELLE

L'objectif de ce chapitre est la discrétisation par la méthode des différences finies des problèmes (2.51), (2.57) et (2.82) issues du calcul des variations décrit dans le chapitre précédent.

3.1 Discrétisation du problème obtenu par le calcul des variation d'ordre 2(Application 1) :

Cette section est consacré à la discrétisation du problème (2.51) sur le domaine $[0, 1]^2, [0, T]$, ceci consiste à remplacer, par un schéma approprié, le problème continu (2.51) par un système algebrique.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \left[K(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[K(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{cases} u(x, , y, t) = 0 \\ u(x, y, 0) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

Cette équation est équivalente à l'équation parabolique où $u : [0, 1][0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction suffisamment régulière et $K(x, y)$ est une fonction régulière positive dans le rectangle Ω .

L'approximation s'effectue en trois étapes successives.

-La première étape consiste à discrétiser le domaine $[0, 1]^2, [0, T]$.

-La deuxième consiste à discrétiser les opérateurs $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial y} \left(K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ discrétisation spatio-temporelle.

-La troisième étape consiste à discrétiser les conditions aux limites.

3.1.1 Discrétisation du domaine

Pour établir le schéma d'approximation du problème (2.51) précédent nous commençons par discrétiser le domaine $\Omega = [0, 1]^2$.

On subdivise d'une part,

l'intervalle $[0, 1]^2$ en $n + 1$ parties de longueur h tel que $h = \frac{1}{n+1}$ est le pas de discrétisation dans la direction x et y c'est-à-dire qu'on définit un maillage du point $M_{i,j}$ sur l'axe des x et l'axe des y .

on pose :

$$\begin{cases} x_i = ih \\ y_j = jh \text{ pour } i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

et d'autre part

l'intervalle $[0, T]$ en M intervalle de temps k telle que : $T = Mk$ où k le pas de discrétisation temporelle.

$$t_m = mk \text{ pour } m = 1, \dots, M$$

.

3.1.2 Discrétisation temporelle

La dérivée par rapport au temps est approchée par un schéma de type différence finie implicite

$$u(t + k, x) = u(t, x) - k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + o(k^2) \quad (3.3)$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_m) = \frac{u(x_i, y_j, t_{m+1}) - u(x_i, y_j, t_m)}{k} + o(k) \quad (3.4)$$

3.1.3 Discrétisation spatiale

On va discrétiser les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x} [k(x, y)u_x]$ et $\frac{\partial}{\partial y} [k(x, y)u_y]$ respectivement.

La discrétisation des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x} [k(x, y)u_x]$ et $\frac{\partial}{\partial y} [k(x, y)u_y]$ consiste à remplacer les dérivées par la quotient différentiels faisant intervenir les valeurs de la fonction $u(x, y)$ aux points du maillage. Pour établir le schéma de discrétisation des opérateurs définissant le problème, deux schémas sont pris en compte, le schéma **Avant-Arrière** [1] et le schéma **Arrière-Avant** [1] puis on procède à la moyenne de ces deux schémas.

On prend le pas de discrétisation dans les deux directions OX et OY comme étant égaux : $\Delta x = \Delta y = h$.

Etape 01 : on fixe y et on pose : $K(x, y)u_x(x, y) = v_1(x, y)$

schéma Avant-Arrière :

On a

$$v_1(x + h, y) = v_1(x, y) + h \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2} + o(h^2), \quad (3.5)$$

donc

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{v_1(x + h, y) - v_1(x, y)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2} + o(h^3). \quad (3.6)$$

substituant $v_1(x, y) = k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}$ dans (3.6) en obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{h} (K(x + h, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - K(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (K(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)) \\ &\quad + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour de raisons de simplicité, on note par $K_{i,j} \equiv K(x_i, y_j)$ et $u_{i,j} \simeq u(x_i, y_j)$

Aussi, on a :

$$u(x + h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + o(h^2) \quad (3.8)$$

alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (3.9)$$

et

$$u(x - h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + o(h^2) \quad (3.10)$$

donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \quad (3.11)$$

Substituant (3.9) et (3.11) dans (3.7) on obtient :

$$\frac{\partial v_1(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h} \left[K_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right] - \frac{1}{h} \left[K_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \right] - \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v_1(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h^2} [K_{i+1,j} u_{i+1,j} - (K_{i,j} + K_{i+1,j}) u_{i,j} + K_{i,j} u_{i-1,j}] + \xi_x^{av}(x_i, y_j) \quad (3.13)$$

Où $\xi_x^{av}(x_i, y_j)$ est l'erreur de trancure donnée par :

$$\xi_x^{av}(x_i, y_j) = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x_i, y_j) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + o(h^2) \right)$$

Schéma Arrière-Avant :

On a :

$$v_1(x - h, y) = v_1(x, y) - h \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = \frac{v_1(x, y) - v_1(x - h, y)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2} + O(h^2) \quad (3.15)$$

D'où

$$\frac{\partial v_1(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{v_1(x_i, y_j) - v_1(x_{i-1}, y_j)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_1(x_i, y_j)}{\partial x^2} + O(h^2) \quad (3.16)$$

Substituant $v_1(x, y) = K(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ dans (3.16) on obtient :

$$\frac{\partial v_1(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h} \left[K_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right] - \frac{1}{h} \left[K_{i-1,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (K_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x}) \right] \right] \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial v_1(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h^2} [K_{i,j} u_{i+1,j} - (K_{i,j} + k_{i-1,j}) u_{i,j} + K_{i-1,j} u_{i-1,j}] + \xi_x^{ar}(x_i, y_j) \quad (3.18)$$

Où $\xi_x^{ar}(x_i, y_j)$ est l'erreur de troncature donnée par :

$$\xi_x^{ar}(x_i, y_j) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x_i, y_j) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_i, y_j) + o(h^2) \quad (3.19)$$

En prenant la moyenne des deux expressions précédentes (3.13) et (3.18) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2h^2} [(k_{i,j} + k_{i+1,j}) u_{i+1,j} - (2k_{i,j} + k_{i+1,j} + k_{i-1,j}) u_{i,j} \\ &\quad + (k_{i,j} + k_{i-1,j}) u_{i-1,j}] + \frac{1}{2} (\xi_x^{av}(x_i, y_j) + \xi_x^{ar}(x_i, y_j)) \end{aligned}$$

Etape 2 : On fixe x et on pose $K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = v_2(x, y)$

Le schéma Avant-Arrière :

$$v_2(x, y+h) = v_2(x, y) + h \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}(x, y) + o(h^3) \quad (3.20)$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{h} (v_2(x, y+h) - v_2(x, y)) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}(x, y) + o(h^2) \quad (3.21)$$

Substituant $v_2(x, y) = K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}$ dans (3.21) :

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} \simeq \frac{1}{h} (K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) \quad (3.22)$$

D'autre part on a :

$$u(x, y+h) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + o(h^2) \quad (3.23)$$

$$u(x, y-h) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + o(h^2) \quad (3.24)$$

donc :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \simeq \frac{u(x, y + h) - u(x, y)}{h} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \simeq \frac{u(x, y) - u(x, y - h)}{h} \quad (3.26)$$

En substituant (3.25) et (3.26) dans (3.22) on obtient :

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} \simeq \frac{1}{h} (K_{i,j+1} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}) - \frac{1}{h} (K_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}) + \xi_y^{av}(x_i, y_j) \quad (3.27)$$

tel que :

$$\xi_y^{av}(x_i, y_j) = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x_i, y_j) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + o(h^2) \right)$$

Schéma Arrière-Avant

$$v_2(x, y - h) = v_2(x, y) - h \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}(x, y) + o(h^3) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{v_2(x, y) - v_2(x, y - h)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}(x, y) + o(h^2). \quad (3.29)$$

Substituant (3.28) dans (3.29) on trouve :

$$\frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) \simeq \frac{1}{h} (K_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} - K_{i,j-1} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}) + \xi_y^{ar}(x_i, y_j) \quad (3.30)$$

tel que

$$\xi_y^{ar}(x_i, y_j) = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x_i, y_j) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + o(h^2) \right).$$

est le reste.

On prend la moyenne des deux schémas (3.27) et (3.30) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) \simeq & \frac{1}{2h^2} [(K_{i,j} + k_{i,j+1})u_{i,j+1} - (2K_{i,j} + k_{i,j+1} + K_{i,j-1})u_{i,j} \\ & - (K_{i,j} + K_{i,j-1})u_{i,j-1} + \frac{1}{2}(\xi_y^{ar}(x_i, y_j))] + \xi_y^{av}(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le schéma complet par rapport à \mathbf{x} et \mathbf{y} est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, t_{m+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, t_m)}{k} - \frac{1}{2h^2} (k_{i+1,j} + 4K_{i,j} + K_{i-1,j} + K_{i,j+1} + K_{i,j-1}) \mathbf{u}_{i,j} \\ - \frac{1}{2h^2} [(K_{i-1,j} + K_{i,j}) \mathbf{u}_{i-1,j} + (K_{i,j-1} + K_{i,j}) \mathbf{u}_{i,j-1}] \\ - \frac{1}{2h^2} [(K_{i,j+1} + K_{i,j}) \mathbf{u}_{i,j+1} + (K_{i,j} + K_{i+1,j})] \mathbf{u}_{i+1,j} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^m = -\mu [K_{i,j} + K_{i+1,j}] \mathbf{u}_{i+1,j}^{m+1} - \mu [K_{i,j} + K_{i-1,j}] \mathbf{u}_{i-1,j}^{m+1} \\ + [\mu (4K_{i,j} + K_{i+1,j} + K_{i-1,j} + K_{i,j+1} + K_{i,j-1} + 1) \mathbf{u}_{i,j}^{m+1}] \\ - \mu [K_{i,j} + K_{i,j+1}] \mathbf{u}_{i,j+1}^{m+1} - \mu [K_{i,j} + K_{i,j-1}] \mathbf{u}_{i,j-1}^{m+1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Telle que $\mu = \frac{k}{2h^2}$

3.1.4 Discrétisation des conditions aux limites

La condition au bord $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$ est discrétisée par :

$$\mathbf{u}_{i,j}^m = \mathbf{0}$$

et la condition initiale $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \mathbf{0}$ est discrétisée par :

$$\mathbf{u}_{i,j}^0 = \mathbf{0}$$

La discrétisation complète du problème (3.1) et (3.2) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{i,j}^m = -\mu [K_{i,j} + K_{i+1,j}] \mathbf{u}_{i+1,j}^{m+1} - \mu [K_{i,j} + K_{i-1,j}] \mathbf{u}_{i-1,j}^{m+1} \\ + [\mu (4K_{i,j} + K_{i+1,j} + K_{i-1,j} + K_{i,j+1} + K_{i,j-1}) + 1] \mathbf{u}_{i,j}^{m+1} \\ - \mu [K_{i,j} + K_{i,j+1}] \mathbf{u}_{i,j+1}^{m+1} - \mu [K_{i,j} + K_{i,j-1}] \mathbf{u}_{i,j-1}^{m+1} \quad i, j = 1, \dots, n \quad m = 1, \dots, M \\ \mathbf{u}_{i,j}^m = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{i,j}^0 = \mathbf{0} \quad i, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.34)$$

3.1.5 Etude de la consistance, stabilité et convergence du problème

Dans cette sous section, nous allons démontrer la consistance, stabilité et la convergence de schéma (3.34).

On démontre que le schéma de discrétisation (3.34) est consistant avec le problème continue (3.1) .

Soit l'opérateur :

$$\mathbf{A}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{K}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mathbf{K}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] = 0 \quad (3.35)$$

Définissons l'opérateur approcher par la relation suivant :

$$\tilde{\mathbf{A}}(u) = 0 \quad (3.36)$$

On dit que le schéma de discrétisation $\tilde{\mathbf{A}}(u)$ est consistante avec l'opérateur $\mathbf{A}(u)$ si :

$$| \mathbf{A}(u) - \tilde{\mathbf{A}}(u) | \longmapsto 0 \quad h \longmapsto 0 \quad k \longmapsto 0 \quad (3.37)$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \frac{1}{k} [-u(x_i, y_j, t_m) + u(x_i, y_j, t_m + k)] - \frac{1}{2h^2} [\mathbf{K}(x_i + h, y_j) + \mathbf{K}(x_i, y_j)] \\ &u(x_i + h, y_j, t_m + k) + \frac{1}{2h^2} [\mathbf{K}(x_i - h, y_j) + \mathbf{K}(x_i, y_j - h) + 4\mathbf{K}(x_i, y_j) \\ &+ \mathbf{K}(x_i + h, y_j) + \mathbf{K}(x_i, y_j + h)] u(x_i, y_j, t_m + k) - \frac{1}{2h^2} [\mathbf{K}(x_i - h, y_j) + \mathbf{K}(x_i, y_j)] \\ &u(x_i - h, y_j, t_m + k) - \frac{1}{2h^2} [\mathbf{K}(x_i, y_j - h) + \mathbf{K}(x_i, y_j)] u(x_i, y_j - h, t_m + k) \\ &- \frac{1}{2h^2} [k(x_i, y_j) + ik(x_i, y_j + h)] u(x_i, y_j + h, t_m + k) + O(h^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Calculant $K(x_i + h, y_j)$, $K(x_i - h, y_j)$, $K(x_i, y_j + h)$ et $K(x_i, y_j - h)$:

$$\begin{cases} K(x_i - h, y_j) = K(x_i, y_j) - h \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) + \dots \\ K(x_i + h, y_j) = K(x_i, y_j) + h \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) + \dots \\ K(x_i, y_j - h) = K(x_i, y_j) - h \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) + \dots \\ K(x_i, y_j + h) = K(x_i, y_j) + h \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) + \dots \end{cases} \quad (3.39)$$

En procédant le même développement de Taylor pour $u(x_i - h, y_j, t_m + k)$, $u(x_i + h, y_j, t_m + k)$, $u(x_i, y_j + h, t_m)$ et $u(x_i, y_j - h, t_m)$.

Alors, on a

$$u(x_i + h, y_j, t_m + k) = u(x_i, y_j, t_m) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_m) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t_m) \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} u(x_i - h, y_j, t_m) = u(x_i, y_j, t_m) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_m) \\ \quad - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m) - \dots \\ u(x_i + h, y_j, t_m) = u(x_i, y_j, t_m) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_m) \\ \quad + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m) + \dots \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} u(x_i, y_j - h, t_m) = u(x_i, y_j, t_m) - h \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_m) \\ \quad - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m) - \dots \\ u(x_i, y_j + h, t_m) = u(x_i, y_j, t_m) + h \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_m) \\ \quad + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m) + \dots \end{cases} \quad (3.42)$$

On remplaceons les relations (3.39),(3.40),(3.41) et (3.42) dans l'operateur \hat{A} on trouve :

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \simeq & \frac{1}{k}[u(x_i, y_j, t_m) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_m) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x_i, y_j, t_m) - u(x_i, y_j, t_m)] \\
& - \frac{1}{2h^2}[2K(x_i, y_j) + h \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j)][u(x_i, y_j, t_m + k) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_m + k) \\
& + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_m + k) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_m + k) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m + k) + \dots] \\
& + 8K(x_i, y_j)u(x_i, y_j, t_m + k) - [2K(x_i, y_j) - h \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j)][u(x_i, y_j, t_m + k) \\
& - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_m + k) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_m) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_m + k) \\
& + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m + k) - [2K(x_i, y_j) + h \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j)][u(x_i, y_j, t_m + k) \\
& - h \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_m + k) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_m + k) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_m + k) \\
& + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m + k)] - [2K(x_i, y_j) - h \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j)][u(x_i, y_j, t_m + k) \\
& - h \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_m + k) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_m + k) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_m + k) \\
& + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m + k)]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Par la simplification de la relation (3.43) on trouve :

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = & [\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_m) + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t_m)] - [K(x_i, y_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_m) \\
& - \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_m) - \frac{h}{12} K(x_i, y_j) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\
& - K(x_i, y_j) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_m) - \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_m) - \frac{h^2}{12} K(x_i, y_j) \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m) \\
& - \frac{h^2}{6} \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}] + O(h^2)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Par conséquant :

$$\begin{aligned}
A(u) - \tilde{A} &= \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^2}{12} K(x_i, y_j) \frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m) \\
&+ \frac{h^2}{6} \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_m) \\
&+ \frac{h^2}{12} K(x_i, y_j) \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m) \\
&+ \frac{h^2}{6} \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) \frac{\partial^3}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_m)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|A(u) - \tilde{A}(u)| &\leq \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t_m) + \frac{h^2}{12} K(x_i, y_j) \frac{\partial^4}{\partial x^4}(x_i, y_j, t_m) \\
&+ \frac{h^2}{6} \frac{\partial K}{\partial x}(x_i, y_j) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_m) \\
&+ \frac{h^2}{12} K(x_i, y_j) \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j, t_m) \\
&+ \frac{h^2}{6} \frac{\partial K}{\partial y}(x_i, y_j) \frac{\partial^3}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_m)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Alors

$$|A(u) - \tilde{A}(u)| \xrightarrow{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} 0 \tag{3.47}$$

Ainsi, la consistance est vérifiée.

La stabilité

Proposition 3.1 *Supposons que la coefficient $K(x, y)$ et le fonction u sont continus et suffisamment différentiables. Alors, les schémas implicite (3.40) est inconditionnellement stable. De plus il est consistant et l'erreur de troncature locale de ce schéma est noté $(\mathbb{E}_{i,j}^i)$ vérifie :*

$$|\mathbb{E}_{i,j}^i| \leq C^n(k + h^2) \text{ ou } C^n \text{ est une constante}$$

Cas particulier : Etude de la stabilité dans le cas $K(x, y) = c$ où c constante

Considérons le nouveau problème avec $K(x, y) = c$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 & \text{dans } [0, 1]^2 [0, T] \\ u(x, y, t) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u(x, y, 0) = 0 & \text{dans } \Omega [0, 1]^2 \end{cases} \quad (3.48)$$

Le schéma implicite obtenue par la méthode de différence fini est :

$$\frac{u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j}^m}{k} - \frac{c}{h^2} [u_{i-1,j}^{m+1} - 4u_{i,j}^{m+1} + u_{i+1,j}^{m+1} + u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}] = 0$$

ceci implique :

$$u_{i,j}^m = -\lambda u_{i-1,j}^{m+1} - \lambda u_{i+1,j}^{m+1} + (1 + 4\lambda)u_{i,j}^{m+1} - \lambda u_{i,j+1}^{m+1} \quad (3.49)$$

avec $\lambda = \frac{ck}{h^2}$.

On utilise la méthode de Von-Neuman, posant que

$$u_{i,j}^m = \varphi(mk) e^{i\alpha ih} \cdot e^{i\theta jh} \quad (3.50)$$

Substituant (3.50) dans le schéma (3.49) on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(mk) e^{i\alpha ih} \cdot e^{i\theta jh} &= -\lambda \varphi((m+1)k) e^{i\alpha(i-1)h} e^{i\theta jh} - \lambda \varphi((m+1)k) e^{i\alpha(i+1)h} e^{i\theta jh} \\ &\quad - \lambda \varphi((m+1)k) e^{i\alpha ih} e^{i\theta(j-1)h} - \lambda \varphi((m+1)k) e^{i\alpha ih} e^{i\theta(j+1)h} \\ &\quad + (1 + 4\lambda) \varphi(mk) e^{i\alpha ih} \cdot e^{i\theta jh} \end{aligned} \quad (3.51)$$

On pose $t = nk$

$$\begin{aligned}
\varphi(t)e^{i\alpha ih}.e^{i\theta jh} &= -\lambda\varphi(t+k)e^{i\alpha ih}.e^{-i\alpha h}.e^{i\theta jh} - \lambda\varphi(t+k)e^{i\alpha ih}.e^{i\alpha h}.e^{i\theta jh} \\
&\quad - \lambda\varphi(t+k)e^{i\alpha ih}.e^{i\theta jh}.e^{-i\theta h} - \lambda\varphi(t+k)e^{i\alpha ih}.e^{i\theta jh}.e^{i\theta h} \\
&\quad + (1+4\lambda)\varphi(t)e^{i\alpha ih}.e^{i\theta jh} \\
&= \varphi(t+k)e^{i\alpha ih}.e^{i\theta jh} \left[-\lambda(e^{i\alpha h} + e^{-i\alpha h}) - \lambda(e^{i\theta h} + e^{-i\theta h}) + 1 + 4\lambda \right] \\
1 &= \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} \left[1 - 4\lambda \left(\sin \frac{\alpha h}{2} + \sin \frac{\theta h}{2} \right) \right] \\
1 &= \epsilon \left[1 - 4\lambda \left(\sin \frac{\alpha h}{2} + \sin \frac{\theta h}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Donc :

$$\epsilon = \frac{1}{1 - 4\lambda \left(\sin \frac{\alpha h}{2} + \sin \frac{\theta h}{2} \right)}$$

Nous avons donc toujours

$$|\epsilon| \leq 1$$

le schéma (3.49) est donc inconditionnellement stable.

La convergence :

Comme le schéma implicite (3.49) est consistant et stable alors d'après le théorème de Lax il est convergent.

3.1.6 Test numérique

| Nombre de points de discrétisation n | Temps t | Nombre des itérations | temps d'exécution |
|--|-----------|-----------------------|-------------------|
| 50 | 3 | 2 itr | 35 sec |
| 80 | 3 | 2 itr | 131 sec |

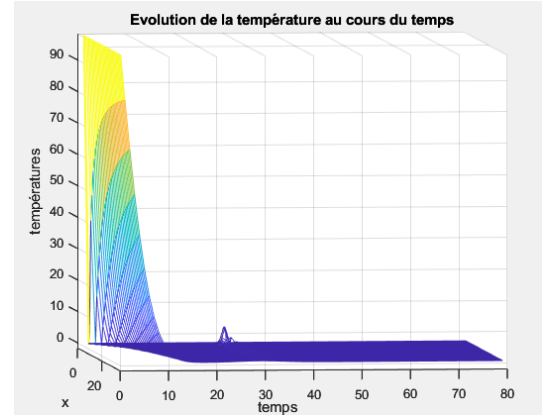
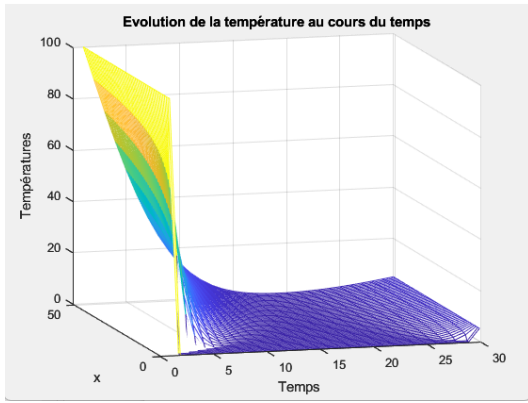


FIGURE 3.1 : Evolution de la température au cours du temps

3.2 Discrétisation du problème obtenu par le calcul des variations d'ordre 2 (Application 2)

Considérons le problème (2.82) issue du problème (2.52)-(2.53)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \text{ tel que } \Omega = [0, 1], t > 0 \quad (3.53)$$

3.2.1 Discrétisation du domaine

On découpe l'intervalle $[0, 1]$ en $(n + 1)$ intervalles de longueur h . On pose : $h = \frac{1}{n+1}$ pas de discrétisation dans la direction de x et $k = \frac{1}{n+1}$ pas de discrétisation de t

3.2.2 Discrétisation temporelle

La dérivée par rapport au temps est approchée par un schéma de type différence finie centré ; la dérivée temporelle étant discrétisée par :

$$u(t + k, x) = u(t, x) + k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(k^3) \quad (3.54)$$

$$u(t - k, x) = u(t, x) - k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(k^3) \quad (3.55)$$

Le schéma de discrétisation temporelle est donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \simeq \frac{1}{k^2} [u(t - k, x) + u(t + k, x) - 2u(t, x)] \quad (3.56)$$

3.2.3 Discrétisation spatiale

On prend le pas de discrétisation comme étant égale $\Delta x = h$

$$u(t, x + h) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (3.57)$$

$$u(t, x - h) = u(t, x) - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^3) \quad (3.58)$$

Le schéma de discrétisation spatiale est donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \simeq \frac{1}{h^2} [u(t, x - h) + u(t, x + h) - 2u(t, x)] \quad (3.59)$$

Alors, le schéma final par rapport à x et t est donné par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \simeq \frac{u_j^{i+1} + u_j^{i-1} - 2u_j^i}{k^2} - c \frac{u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i}{h^2} \quad (3.60)$$

Alors, on a

$$\frac{u_j^{i+1} + u_j^{i-1} - 2u_j^i}{k^2} - c \frac{u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i}{h^2} = 0 \quad (3.61)$$

3.2.4 Discrétisation des conditions aux limites

Les conditions au bord $u(t, 0) = u(t, l) = 0$ et la condition $u(x, 0) = H(x)$ sont discrétisées par :

$$u_0^i = u_l^i = 0 \quad (3.62)$$

$$u_j^0 = H(x) \quad (3.63)$$

et la condition $u_t(x, 0) = 0$ est discrétisée par :

$$\frac{1}{h} [u_j^1 - u_j^0] = 0 \quad (3.64)$$

3.2.5 Etude de la consistence, stabilité et convergence

Consistance :

On pose

$$\tilde{A}(u) = \frac{u_j^{i+1} + u_j^{i-1} - 2u_j^i}{k^2} - c \frac{u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i}{h^2} \quad (3.65)$$

et

$$A(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

le schéma de discrétisation est dite consistant si :

$$| A(u) - \tilde{A}(u) | \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0 \quad (3.66)$$

On a :

$$\begin{cases} u(x_i, t_j + k) = u(x_i, t_j) + \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(k^4) \\ u(x_i, t_j - k) = u(x_i, t_j) - \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(k^4) \end{cases} \quad (3.67)$$

et

$$\begin{cases} u(x_i - h, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4) \\ u(x_i + h, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + O(h^4) \end{cases} \quad (3.68)$$

substituant (3.67) et (3.68) dans (3.65) on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u) &= \frac{1}{k^2} [(u(x_i, t_j) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(k^4)) \\ &\quad + (u(x_i, t_j) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(k^4) - 2u(x_i, y_j)] \\ &\quad - c \frac{1}{h^2} [(u(x_i, t_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^3)) \\ &\quad + (u(x_i, t_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4) - 2u(x_h, y_j))] \end{aligned} \quad (3.69)$$

par simplification on trouve :

$$\tilde{A}_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + 2O(k^2) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + 2O(h^2) \quad (3.70)$$

Alors, on a

$$| A(u) - \tilde{A}(u) | = 2O(k^2) + 2O(h^2) \quad h \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0 \quad (3.71)$$

Alors,

$$| A - \tilde{A} | = 0 \quad h \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0 \quad (3.72)$$

Le schéma est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace, l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque h et k tendent vers 0.

Stabilité

Dans le cas de schémas numériques appliqués à des problèmes hyperboliques nous choisissons comme condition de stabilité est d'imposer au vecteur des solutions approchées d'être conservé ou de décroître en norme au cours du temps.

$$u_i^{j+1} = 2\left(1 - \left(\frac{k}{h}\right)^2\right)u_i^j + \left(\frac{k}{h}\right)^2 (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) - u_i^{j-1} \quad (3.73)$$

Pour avoir la combinaison convexe :

$$2\left(1 - \left(\frac{k}{h}\right)^2\right) + \left(\frac{k}{h}\right)^2 + \left(\frac{k}{h}\right)^2 - 1 = 1 \quad (3.74)$$

et

$$0 < \left(\frac{k}{h}\right)^2 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{k}{h} < 1 \quad (3.75)$$

et

$$0 < 2\left(1 - \left(\frac{k}{h}\right)^2\right) < 1 \quad (3.76)$$

pour l'inégalité :

$$2\left(1 - \left(\frac{k}{h}\right)^2\right) > 0$$

est vérifiée pour : $\left(\frac{k}{h}\right)^2 < 1$.

Il nous reste la deuxième inégalité c.à.d :

$$2\left(1 - \left(\frac{k}{h}\right)^2\right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{k}{h}\right)^2 < 1$$

Donc, la condition de stabilité est :

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 < 1$$

Convergence

D'après le théorème de Lax, on obtient la convergence (consistance et stabilité implique la convergence).

3.2.6 Test numérique

| l'intervalle | nombre des points n | pas de discrétisation h | temps d'exécution |
|--------------|-----------------------|---------------------------|-------------------|
| $[0, L]$ | 101 | 0.01 | 2sec |
| $[0, L]$ | 1001 | 0.001 | 205 sec |

| l'intervalle | nombre des points n | pas de discrétisation h | temps d'exécution |
|--------------|-----------------------|---------------------------|-------------------|
| $[-L, L]$ | 101 | 0.02 | 4 sec |
| $[-L, L]$ | 1001 | 0.002 | 419 sec |

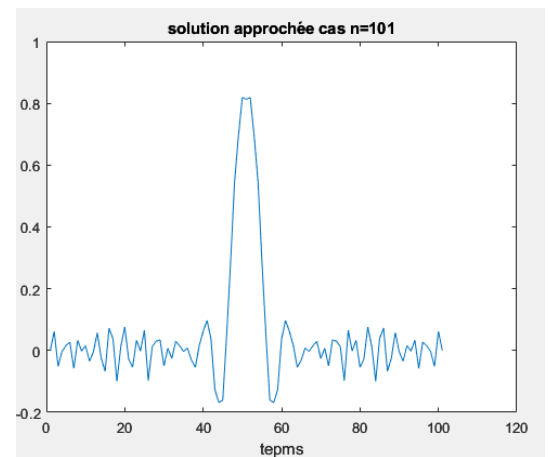
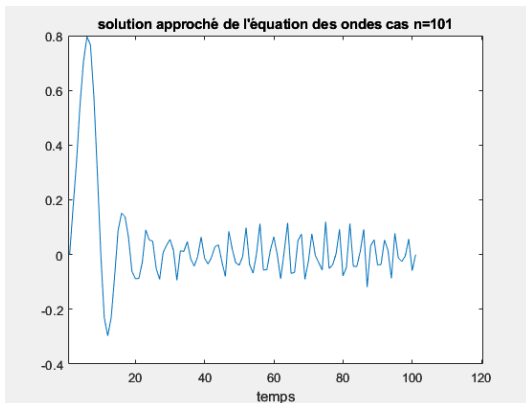


FIGURE 3.2 : solutions approchées de l'équation des ondes cas $n=101$

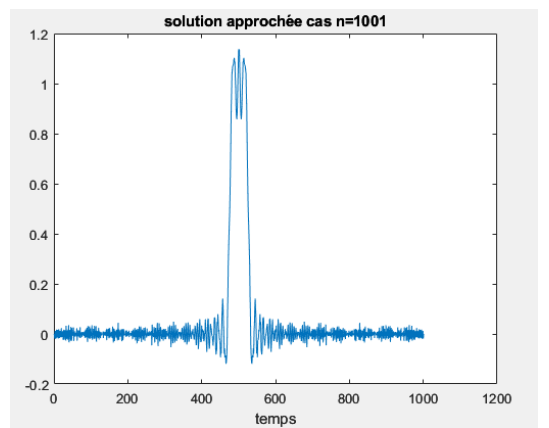
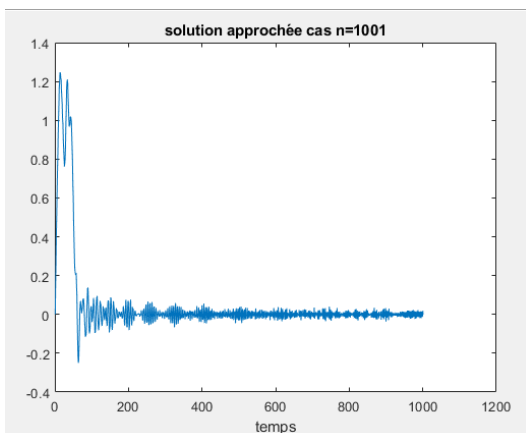


FIGURE 3.3 : solution approchée cas $n=1001$

3.3 Discrétisation du système obtenu par le calcul des variations à deux variables dépendantes :

Considérons le problème (2.82) issue du problème (2.72)-(2.73)

$$\begin{cases} v_x + \rho_1 u_{tt} - \tau_1 u_{xx} = 0 \\ u_t + \rho_2 v_{tt} - \tau_2 v_{xx} = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

avec

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0 & v(0, x) = v_0 \\ u_t(0, x) = f_1 & v_t(0, x) = f_2 \end{cases} \quad (3.78)$$

3.3.1 Discrétisation du domaine

On découpe l'intervalle $[0, 1]^2$ en $(n + 1)$ intervalles de longueur h .

On pose :

$h = \frac{1}{n + 1}$ le pas de discrétisation dans la direction de x

$t_i = ik, x_j = jh$.

3.3.2 Discrétisation temporelle

On remplace les opérateurs u_t , u_{tt} et v_{tt} par des quotients différentiels. On prend le pas de discrétisation comme égale à $\Delta t = k$ on trouve :

$$u(t + k, x) = u(t, x) + k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + O(h^2) \quad (3.79)$$

$$u(t + k, x) = u(t, x) + k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(k^3) \quad (3.80)$$

$$u(t - k, x) = u(t, x) - k \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(k^3) \quad (3.81)$$

Le schéma de discrétisation temporelle par rapport à u est :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \simeq \frac{1}{k} [u(t - k, x) - u(t, x)] \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \simeq \frac{1}{k^2} [u(t - k, x) + u(t + k, x) - 2u(t, x)] \quad (3.83)$$

d'autre part on a

$$v(t+k, x) = v(t, x) + k \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + o(h^3) \quad (3.84)$$

$$v(t-k, x) = v(t, x) - k \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) + o(k^3) \quad (3.85)$$

Le schéma de discrétisation temporelle par rapport à v est :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) \simeq \frac{1}{k^2} [v(t-k, x) + v(t+k, x) - 2v(t, x)] \quad (3.86)$$

3.3.3 Discrétisation spatiale

On remplace les opérateurs u_{xx} , v_x et v_{xx} par des quotients différentiels. On prend le pas de discrétisation comme étant égale $\Delta x = h$

$$u(t, x+h) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + o(h^3) \quad (3.87)$$

$$u(t, x-h) = u(t, x) - h \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + o(h^3) \quad (3.88)$$

Le schéma de discrétisation spatiale par rapport à u est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \simeq \frac{1}{h^2} [u(t, x-h) + u(t, x+h) - 2u(t, x)] \quad (3.89)$$

D'autre part on a

$$v(t, x+h) = v(t, x) + h \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + O(h^2) \quad (3.90)$$

$$v(t, x+h) = v(t, x) + h \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) + o(h^3) \quad (3.91)$$

$$v(t, x-h) = v(t, x) - h \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) + o(h^3) \quad (3.92)$$

Le schéma de discrétisation spatiale par rapport à v est :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \simeq \frac{1}{h} [v(t, x+h) - v(t, x)] \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) \simeq \frac{1}{h^2} [v(t, x-h) + v(t, x+h) - 2v(t, x)] \quad (3.94)$$

Substituant (3.93) et (3.83) dans (3.77) on obtient :

$$\frac{v_{j+1}^i - v_j^i}{h} + \rho_1 \frac{(u_j^{i+1} + u_j^{i-1} - 2u_j^i)}{h^2} - \tau_1 \frac{u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i}{h^2} = 0 \quad (3.95)$$

et (3.82) et (3.94) dans (3.77) :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{k} + \rho_2 \frac{v_j^{i+1} + v_j^{i-1} - 2v_j^i}{h^2} - \tau_2 \frac{v_{j+1}^i + v_{j-1}^i - 2v_j^i}{h^2} = 0 \quad (3.96)$$

3.3.4 Discrétisation des conditions aux limites

La condition au bord $u(0, x) = u_0$ et $v(0, x) = v_0$ sont discrétisées par :

$$\begin{cases} u_j^0 = u_0 \\ v_j^0 = v_0 \end{cases} \quad (3.97)$$

et les discrétisations de $u_t(0, x) = f_1$ et $v_t(0, x) = f_2$ sont :

$$\begin{cases} \frac{u_j^1 - u_j^0}{k} = f_1 \\ \frac{v_j^1 - v_j^0}{k} = f_2 \end{cases} \quad (3.98)$$

Pour l'étude de la consistance, stabilité et convergence on fait les mêmes étapes que le problème (2.52) précédent pour chaque équation.

3.3.5 Test numérique

| intervalle | Variabes | Nombre des points n | Temps d'exécution |
|------------|----------|-----------------------|-------------------|
| $[0, L]$ | (u, v) | 100 | 32 sec |
| $[-L, L]$ | (u, v) | 100 | 69 sec |

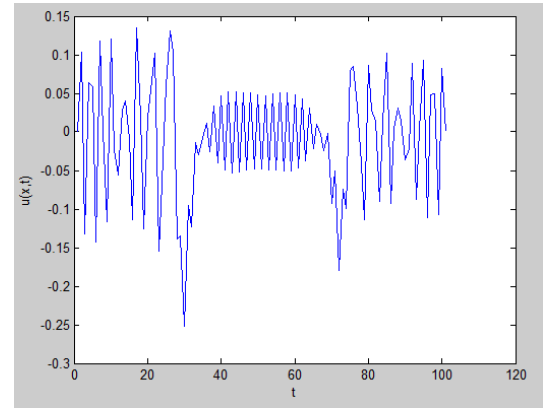
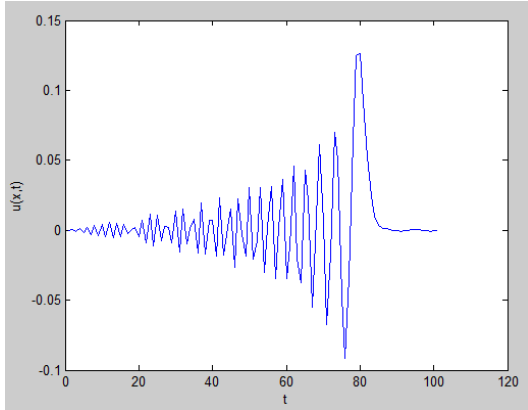


FIGURE 3.4 : Solution approchée du système des ondes -valeurs de u -

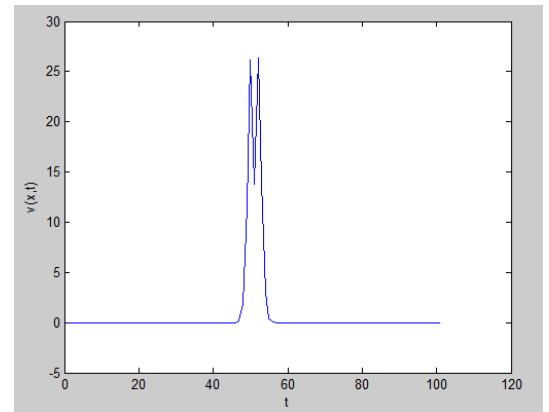
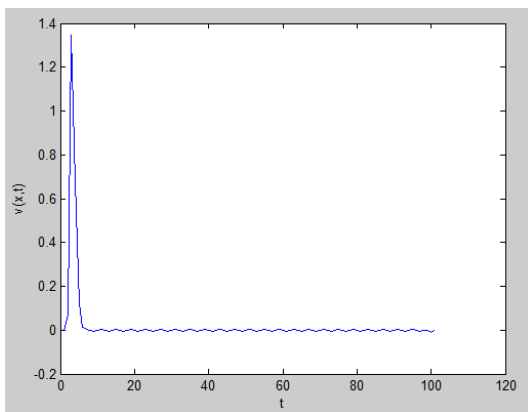


FIGURE 3.5 : Solution approchée du système des ondes -valeurs de v -

CONCLUSION

La résolution des problèmes de calcul des variations sans contrainte consiste à trouver l'équation d'**Euler-Lagrange** du problème d'extremum d'ordre un, deux et à deux variables dépendantes. La méthode des **différences finies** est utilisée pour la résolution numérique de ces problèmes, aussi l'étude de la **consistance, la stabilité et la convergence** sont établis. Ainsi des tests numériques de ces problèmes ont été effectués.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Batatia.H, C.Tauber,P.Speteri,Iterative methode for anisotropic diffusion of speckle medical images.Applied numirical mathematics, 60 :1115-1130,2010.
- [2] Eric Goncalvés,méthodes,analyse et calculs numériques, institut polytechnique de Grenoble, septembre 2005.
- [3] Godounov.S, V.Riablenki, schéma aux différences,office des publications universitaires.
- [4] JAIN. M.K : numircale Solution of Differential Equations, Indian Institute of Technology, Delhi, 1979.
- [5] Jean.Paul, Formes différentielles, Integrales Curvilignes, 28 février 2012.
- [6] Lauraence ;CEvaus, Partial Differential Equations, American Mathematical society Providence, Rholde Istaud, 2002.
- [7] Leitman. G, the calculus of variations optimal contral, Plemum Press, 1981.
- [8] Sibony Moïse, Jean-Claude Mardon : , Approximations et équations différentielles, Analyse numérique2 Hermann,1982.