

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Problème inverse d'identification de source de chaleur

Option :

Par :

YOUSFI Khaoula

Encadré par : LAKHDARI Abdelghani

MCA ESTI ANNABA

Devant le jury :

Président :

Examineur:

Année: 2021/2022

ملخص:

نتطرق من خلال هذه المذكرة الى دراسة مسألة عكسية من النمط التكافؤي المزدوج ثم نعرض تطبيق على مسألة التوصيل الحراري الاستراتيجية المتبعة مبنية على طريقة التعديل التكراري. ننهي هذه الدراسة بتطبيق حسابي لتبيان النتائج النظرية المتحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: المسائل العكسية، المسائل المعتلة، المسائل ذات النمط التكافؤي المزدوج، التوصيل الحراري، التعديل التكراري.

Résumé :

Dans le présent travail, nous étudions un problème inverse engendré par une équation de type bi-parabolique. Ce problème est qualifié mal posé au sens de Hadamard et nécessite un traitement particulier.

Nous illustrons les avantages de ce modèle non dans la représentation du phénomène de conduction de chaleur et même son impact sur le degré de position incorrecte du problème inverse.

Mots clés : Problème inverse, problème mal posé, équation bi-parabolique, équation de conduction de chaleur, régularisation.

Remerciement



avant tout, je dois remercier Dieu le tout puissant qui m'a donné la force pour mener à bien ce travail.

Je remercie mon encadreur Dr. Abdelghani LAKHDARI pour son aide lors de la préparation de ce travail.

Je tiens également à remercier les membres du jury ainsi que tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.





Je souhaite dédier ce modeste travail :

à mes parents qui ont toujours veiller sur moi;

à mon mari : Mohamed Taabani;

à mes frères : Saddik, Abderahmen et Hayder;


à mes amies.

*à tous ceux qui ont contribué de près ou de
loin à la réalisation de ce travail.*

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires et notations	5
1.1 Eléments de théorie spectrale	5
1.1.1 Opérateurs linéaires	5
1.1.2 Opérateurs bornés	5
1.1.3 Opérateurs non-bornés	6
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné	8
1.2 Théorie de Riesz-Fredholm	9
1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	9
1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité	10
1.3 Préliminaires et résultats de base	13
1.3.1 Notations	13
2 Problème inverse de type bi-parabolique	15
2.1 Formulation du problème	15
2.2 Analyse du problème	15
2.3 position incorrecte du problème	17
3 Application : Equation de conduction de chaleur	19
3.1 Modèle classique de conduction thermique	20
3.1.1 Problème direct	20
3.1.2 Problème inverse	20
3.2 Nouveau modèle de conduction de la chaleur	21
3.2.1 Problème direct	21
3.2.2 Problème inverse	22
4 Régularisation du problème	25
4.1 Description de la méthode	25
4.2 Implémentation numérique	26
4.2.1 Exemple	26
4.2.2 Résultats numériques	27
Bibliographie	33

INTRODUCTION

 n 1923, le mathématicien français J. HADAMARD a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [13]. Cet ouvrage fut le point de départ du développement du concept de problème *bien posé* en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique, et dépend continûment des données (stabilité). Par la suite, on considéra que les problèmes ne vérifiant pas les conditions de HADAMARD n'ont pas de valeur pratique et ne peuvent pas modéliser de manière correcte un phénomène physique. La réalité actuelle est toute autre. Il y'a plusieurs problèmes dont une au moins des trois conditions de HADAMARD n'est pas vérifiée; ces problèmes sont dits *mal posés*. En général, la plus grande difficulté dans ce type de problèmes réside dans l'instabilité, *i.e.*, une légère perturbation des données peut provoquer un changement important au niveau de la solution.

Les problèmes *mal posés* apparaissent dans de nombreuses branches des sciences et techniques, comme la géophysique, le contrôle non destructif, la corrosion, l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X,...), l'énergie (calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits), la chimie (détermination des constantes de réaction), le radar et l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle), le traitement d'image (restauration d'images floues) et d'autres domaines pratiques.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien été adaptées pour la résolution des problèmes bien posés. Cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes *mal posés* peuvent avoir des solutions. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Lavrentiev, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes *mal posés*. Ils ont pu donner une définition mathématique précise des "**solutions approchées**" pour une classe assez large de problèmes. Aujourd'hui, ces problèmes représentent un domaine de recherche très riche et plein de questions mathématiques.

Parmi les situations qui se traduisent par un problème *mal posé* on peut citer le problème consistant à déterminer les états passés d'un système physique décrit par une équation différentielle à partir de son état présent, ou bien celui de déterminer les paramètres d'un système à partir de données expérimentales. Dans les deux cas, on parle de *problèmes inverses*.

D'après J.B.Keller [17], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre; si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est

qu'un **problème inverse** consiste à déterminer les **causes** d'un phénomène en fonction de l'observation de ses **effets**. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé **problème direct** consistant à chercher les **effets** à partir des **causes** qui sont observables. Par exemple, localiser l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse.

Les **problèmes inverses** peuvent être classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de **problèmes inverses**, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique. Les **problèmes inverses** sont multiples et leurs applications se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, la détection des fissures, le contrôle non destructif, la mécanique des structures,...

D'après la définition d'un **problème inverse**, on peut voir que ces problèmes risquent de poser des difficultés particulières. En effet, il est raisonnable d'exiger qu'un **problème direct** soit **bien posé** : "les mêmes **causes** produisent les mêmes **effets**". Par contre, il est facile d'imaginer que les mêmes **effets** puissent provenir de **causes** différentes. Ceci illustre une difficulté de l'étude des **problèmes inverses** : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour les différencier.

Une autre difficulté majeure dans l'étude des **problèmes inverses** est qu'ils nécessitent une bonne connaissance des **problèmes directs** associés. Lorsqu'il est question d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir d'observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du **problème direct**) ; cette inversion généralement instable nécessite un traitement particulier. Il s'agit de techniques, dites de **régularisation**, dont le but est de rendre le problème étudié **bien posé** et rendre son implémentations numériques réalisable, et ce en le perturbant légèrement pour éliminer les éléments responsables de l'instabilité.

En mathématique, la **régularisation** est une procédure qui consiste à remplacer un problème **mal posé** par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés (**bien posé**) rendant son étude théorique et numérique plus aisée.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de **régularisation** ont

été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy *mal posés*. Parmi elles, on cite :

- La méthode de quasi-réversibilité, introduite par Lattes et Lions (1969) [21], qui consiste à transformer le problème de Cauchy *mal posé* d'ordre 2 en un problème différentiel *bien posé* d'ordre plus élevé (d'ordre 4), en perturbant l'opérateur-coefficient de l'équation.
- La méthode de quasi-réversibilité modifiée qui a été introduite par Gasjewski et développée par plusieurs auteurs dont N. Boussetila et F. Rebbani [6].
- La méthode de *régularisation* de Tikhonov [37] est la méthode de *régularisation* la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original *mal posé* en un problème de minimisation.
- La méthode itérative de Kozlov et al. [18] est basée sur une procédure itérative. Elle consiste à résoudre une suite alternative de problèmes *bien posés* avec conditions aux limites mêlées jusqu'à satisfaire un certain critère d'arrêt. La solution approchée converge pour des données compatibles, vers la solution du problème de Cauchy considéré.

Dans ce travail, on étudie un problème inverse de type biparabolique, ensuite nous prenons le cas du phénomène de conduction la chaleur pour comparer le modèle classique et le modèle biparabolique.

CONTENU DU MÉMOIRE

Ce mémoire est composé d'une introduction et quatre chapitres.

- Dans le Chapitre 1, on rappelle certaines notions préliminaires fondamentales et les ingrédients nécessaires d'analyse fonctionnelle pour l'étude du problème en question, et pour faciliter la lecture de la thèse.
- Le Chapitre 2 traite un problème inverse de type biparabolique dont l'objectif est de déterminer l'état initial $u(x, 0)$.
- Le Chapitre 3 est consacré à la comparaison du problème de conduction de chaleur classique et celui de type biparabolique
- Le volet numérique de ce travail fait l'objet du Chapitre 4. On y donne des tests numériques pour des exemples académiques, à travers lesquels, on justifie les résultats théoriques de stabilité obtenus dans ce mémoire.

Préliminaires et notations

1.1 Éléments de théorie spectrale

1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de H_1 , que l'on suppose en général dense dans H_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ |Au|_{H_2}, \quad u \in \mathcal{D}(A), |u|_{H_1} = 1 \},$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1 .

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), \quad v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note par $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des **opérateurs linéaires continus** de H_1 dans H_2 (resp. des **endomorphismes continus** de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

Définition 1.1.1 On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est **inversible** ssi il existe une application $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\mathbf{Inv}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) := \{\mathbf{S} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2), \mathbf{S} \text{ inversible}\}.$$

Théorème 1.1.2 [Théorème des isomorphismes de Banach]

Toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible avec inverse continue.

Définition 1.1.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle **ensemble résolvant** de A , l'ensemble

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\iff \text{bijectif})\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le **spectre** de A et sera noté $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On appelle **rayon spectral** (noté $\text{spr}(A)$) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\rho(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A , il lui correspond $0 \neq h \in H$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ .

Définition 1.1.4 (et proposition) Soit $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S , qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^*h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif (\implies inversible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.5 Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est **auto-adjoint** si $A = A^*$.

$$A = A^* \iff (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H$$

1.1.3 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.6 On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \rightarrow v$ dans H_2 , alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe ($\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$) dans H_1 .

Théorème 1.1.7 [Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1 , alors A est borné

$$(A \text{ est fermé et } \mathcal{D}(A) = H_1 \implies A \text{ borné}).$$

Définition 1.1.8 (et proposition) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A , comme suit :

$$\begin{aligned} A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 &\longrightarrow H_1 \\ \mathcal{D}(A^*) &= \{v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c|u|_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v, Au \rangle$ se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c|u|_{H_1}$, $\forall u \in H_1$. Par suite $f \in H_1' \simeq H_1$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v, Au \rangle_{H_2} = \langle A^* v, u \rangle_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.9 On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), (Au, v) = (u, Av).$$

Définition 1.1.10 L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.1.11 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur fermé symétrique. A est autoadjoint si et seulement si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.12 [Caractérisation des opérateurs à image fermée]

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i** $\mathbf{R}(A)$ est fermé
- ii** $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé
- iii** $\mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp$
- iv** $\mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp$

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.13 Soit $A: \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est surjectif, i.e., $\mathbf{R}(A) = H_2$,
- (b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k |A^* v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

- (c) $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.14 Soit $A: \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que

$$\begin{aligned} |u| &\leq m_1 |Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \\ |v| &\leq m_2 |A^* v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*). \end{aligned}$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A: \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense.

Définition 1.1.15 On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

- On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est appelé la résolvante de A .

- L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite identité de la résolvante :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; A) R(\lambda_2; A).$$

- Le spectre de A est donc un fermé de \mathbb{C} , et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

- Le premier sous-ensemble important du spectre est le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A , il lui correspond au moins $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A\lambda\vartheta = 0$, que l'on appelle vecteur propre (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ .

- Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :
- Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre résiduel de A .
- Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre continu de A .

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.1 On dit qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est **compact** si $K(B_{H_1}(0,1))$ est relativement compacte pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 et on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$.

La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightarrow 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

Théorème 1.2.2 (Théorème de Schauder) Si K est compact, alors K^* est compact et réciproquement.

Théorème 1.2.3 Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.4 On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur autoadjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) \lambda_k e_k.$$

1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

• Version discrète

Définition 1.2.5 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné. Alors A est dit à résolvante compacte si

$$\forall \lambda \in \rho(A), R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2.6 Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est à résolvante compacte ssi il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$.

Théorème 1.2.7 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors

- (1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
- (2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,
- (3) $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$.

Théorème 1.2.8 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \longrightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Remarque 1.2.9 Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint avec $A \geq \theta > 0 \implies 0 \in \rho(A)$, et l'injection $H_1 := (D(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.

• Version continue

Définition 1.2.10 Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projections orthogonales dans H est appelée famille spectrale ou encore résolution de l'identité si elle satisfait aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \quad \text{ou } E_{-\infty} h = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda h, \quad E_{+\infty} h = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda h, \quad h \in H, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ ou } E_{\lambda+0} h = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} h, \quad h \in H. \end{array} \right.$$

Les limites sont prises au sens de la norme de H .

Théorème 1.2.11 Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint dans H . Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda x, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x.$$

On note symboliquement $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$.

Théorème 1.2.12 Soit $\lambda \mapsto f(\lambda)$ une fonction continue à valeurs réelles. Soit $\mathcal{D} \subset H$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ h \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty \right\}.$$

Alors \mathcal{D} est dense dans H et on définit un opérateur auto-adjoint S dans H par :

$$(Sx, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad x \in \mathcal{D}, y \in H,$$

de domaine $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$.

1.2.2.1 Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H , $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$, $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$, sa décomposition spectrale.

Définition 1.2.13 On définit :

- Les puissances de A .

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathcal{D}(A^r) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathcal{L}(H)$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.

Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $h \in \mathcal{D}(A^r)$, on a $a(A^r h, h) \geq \lambda_0^r |h|^2$.

Pour tout $r \geq 0$, $\mathcal{D}(A^r)$ muni de la norme $|h|_r^2 = |A^r h|^2$, $h \in \mathcal{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.

Si $0 \leq r_1 \leq r_2$, $\mathcal{D}(A^{r_2}) \subset \mathcal{D}(A^{r_1})$ et $\mathcal{D}(A^{r_2})$ est dense dans $\mathcal{D}(A^{r_1})$.

- $f(A)$ pour une fonction f continue sur \mathbb{R} .

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad h \in \mathcal{D}(f(A)) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

1.2.2.2 Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm

On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact donné par sa décomposition spectrale :

$$\forall h \in H, \quad h = h_0 + \sum_{k \geq 1} (h, e_k) e_k, \quad h_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Th = \sum_{k \geq 1} (h, e_k) \lambda_k e_k.$$

Considérons l'équation

$$(T - \lambda I)f = g, \tag{1.1}$$

où $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n, g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e_n$ sont deux vecteurs de H donnés.

• Si $\lambda \notin \sigma(A)$, la solution de l'équation (1.1) est donnée par :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda}.$$

• Si $\lambda = \lambda_s \neq 0$, l'équation (1.1) n'a de solution que si $g_s = 0$ ($\iff g \in \ker(T - \lambda_s I)^\perp$) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n \neq s}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda_s} \right] + G_s,$$

où G_s est un élément arbitraire de $\ker(T - \lambda_s I)$.

• Si $\lambda = 0$, pour que l'équation $Tf = g$ ait une solution il faut et il suffit que

$$f_0 = 0 \iff f \in \mathbf{N}(T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T)}$$

et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^2}$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n \right] + G_0.$$

où G_0 est un élément arbitraire de $\ker(T)$.

1.2.2.3 Décomposition en valeurs singulières

Considérons maintenant un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, où H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. L'une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Th_1 = h_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD)⁴ de l'opérateur T . Cette décomposition propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Définition 1.2.14 (*Valeur singulière.*)

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le nombre réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^* T : H_1 \rightarrow H_1$.

Théorème 1.2.15 (Décomposition en valeurs singulières (SVD)) Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :

1. (s_n) est décroissante, $s_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
2. $T\varphi_k = s_k\psi_k, T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.
3. $\forall h \in H_1, h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k) \varphi_k + Pr_0 h$.
4. $\forall h \in H_1, Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k) \psi_k$.
5. $\forall \tilde{h} \in H_2, T^* \tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k) \varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé système singulier de T .

La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{R}(T)$.

Remarque 1.2.16 *Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème inverse donné (cf. [48]).*

1.3 Préliminaires et résultats de base

Dans cette section, nous présentons quelques notations et résultats utiles pour la suite.

1.3.1 Notations

On note par $C(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires fermés définis de façon dense dans H .

Le domaine, l'image et le noyau d'un opérateur linéaire $B \in C(H)$ sont désignés par $\mathcal{D}(B), R(B)$ et $N(B)$, les symboles $\rho(B), \sigma(B)$, et $\sigma_p(B)$ sont respectivement utilisés pour la résolvants, le spectre et le spectre pncuel de B . Si V est un sous-espace fermé de H , on désigne par Π_V, V la projection orthogonal de H sur V .

Pour faciliter la lecture, nous résumons quelques faits bien connus pour les opérateurs non expansifs.

Définition 1.3.1 *A Un opérateur linéaire $M \in \mathcal{L}(H)$ est dit non expansif si $\|M\| \leq 1$.*

Théorème 1.3.2 Soit $M \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif avec $\|M\| \leq 1$. $V_0 = N(M)$ et $V_1 = N(I, M)$. Alors nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \Pi_{V_1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n = \Pi_{V_0}$$

$$\forall h \in H, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n h = \Pi_{V_1} h, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n . h = \Pi_{V_0} h.$$

Considérons l'équation

$$S\varphi = (I - M)\varphi = \psi. \quad (1.2)$$

Pour les opérateurs non expansifs M .

Théorème 1.3.3 Soit M un opérateur linéaire auto-adjoint, positif et non expansif sur H .

Soit $\hat{\psi} \in H$ tel que (1.2) ait une solution $\hat{\varphi}$.

• Si 1 n'est pas la valeur propre de M , c'est-à-dire $(I - M)$ est injectif ($V_1 = N(I - M) = \{0\}$), alors les approximations successives :

$$\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \hat{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

converger vers $\hat{\varphi}$ pour toute donnée initiale $\varphi_0 \in H$.

Preuve. de l'hypothèse et en vertu du théorème (1.3.2) nous avons

$$\forall \varphi_0 \in H, M^n \varphi_0 \longrightarrow \Pi_{V_1} \varphi_0 = \Pi_{\{0\}} \varphi_0 = 0. \quad (1.3)$$

Par induction par rapport à n , on voit aisément que φ_n a la forme explicite.

$$\begin{aligned} \varphi_n &= M^n \varphi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} M^j \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n)(I - M)^{-1} \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n) \hat{\varphi}, \end{aligned}$$

et (1.3) nous permet de conclure que

$$\hat{\varphi} - \varphi_n = M^n(\varphi_0 - \hat{\varphi}) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Remarque 1.3.4 Dans de nombreuses situations, certains problèmes inverses peuvent être réduites en des équations de Fredholm de première espèce de la forme $B\varphi = \psi$, où B est un opérateur compact, positif et auto-adjoint. Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\varphi = (I - \omega B)\varphi + \omega\psi = L\varphi + \omega\psi,$$

où $L = (I - \omega B)$, et ω où L est un paramètre positif satisfaisant $\omega < \frac{1}{\|B\|}$. On voit bien que l'opérateur L est non expansif et 1 n'est pas une valeur propre de L . Il découle du théorème (1.3.3) que la suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge et $(I - \omega B)^n \zeta \longrightarrow 0$, pour chaque $\zeta \in H$ comme $n \longrightarrow \infty$.

Problème inverse de type biparabolique

2.1 Formulation du problème

Dans ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert séparable complexe muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$, $\mathcal{L}(H)$ représente l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur H .

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur positif, auto-adjoint à résolvante compacte, donc A admet une base orthonormale de vecteurs propres $(\phi_n) \subset H$ associés aux valeurs propres réelles $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = \langle h, \phi_n \rangle.$$

Dans cette section, nous considérons le problème rétrograde d'identification de source $u(0) = f$ et la distribution de température $u(t)$ pour $0 \leq t < T$, dans le problème biparabolique suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 u = \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2 u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(T) = g, \quad u_t(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $0 < T < \infty$ et f est une fonction à valeur H donnée.

2.2 Analyse du problème

Considérons le problème bien posé suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 w = \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2 U(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \xi, \quad u_t(0) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\xi \in \mathcal{D}(A)$.

Notons $\mathbb{H}^1 = \mathcal{D}(A) \times H$. Dénommant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ nous définissons la norme en \mathbb{H}^1 comme $\|U\|_{\mathbb{H}^1}^2 = \|Au_1\|^2 + \|u_2\|^2$. Dans ce cas, l'équation différentielle du second ordre dans (2.2) peut être reformulée sous forme de système de premier ordre dans l'espace de Hilbert \mathbb{H}^1 comme suit :

$$U'(t) = \mathcal{A}U(t), \quad U(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

en posant

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2A \end{pmatrix},$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire sans limite avec le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A^2) \times \mathcal{D}(A)$.

Il est bien connu que \mathcal{A} est un générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{\mathcal{T}(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ sur \mathbb{H}^1 ([18], Théorème 2.1), plus précisément, $\mathcal{T}(t)$ est analytique avec la forme explicite suivante :

$$\mathcal{T}(t)Z = e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tB_n} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1 \quad (2.4)$$

où $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 & -2\lambda_n \end{pmatrix}$. En utilisant certaines techniques d'algèbre matricielle, nous pouvons donner la forme de e^{tB_n} comme suit :

$$e^{tB_n} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{T}(t)Z = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

En utilisant la théorie des semigroupes [30], nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.3).

Théorème 2.2.1 *Pour tout $U(0) \in \mathbb{H}^1$ le problème (2.3) admet une solution unique $W \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{H}^1) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathbb{H}^1) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, donnée par*

$$U(t) = \mathcal{T}(t)U(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

En particulier, pour $U(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient

$$U(t) = \mathcal{F}(t)U(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

En conséquence du théorème (2.2.1), nous avons le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2 Pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A)$, le problème (2.2) admet une solution unique

$$w \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \\ \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^2))$$

donnée par

$$u(t) = \mathcal{R}(t; A)\xi = (I + tA)e^{-tA}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t\lambda_n) e^{-t\lambda_n} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (2.7)$$

Remarque 2.2.3 Il est facile de vérifier que

$$\|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} (1 + t\lambda) e^{-t\lambda} \leq (1 + t\lambda_1) e^{-t\lambda_1}, \quad (2.8)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{0 \leq t \leq T} (1 + t\lambda_1) e^{-t\lambda_1} = 1. \quad (2.9)$$

2.3 position incorrecte du problème

Théorème 2.3.1 Soit $g \in H$, la solution formelle unique du problème (2.1) est donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (2.10)$$

Dans ce cas,

$$f = u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + T\lambda_n} e^{T\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (2.11)$$

Preuve. En utilisant la méthode de Fourier généralisée, la solution de (2.1) peut être écrite sous la forme suivante

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \phi_n, \quad u_n = \langle u, \phi_n \rangle, \quad (2.12)$$

où $u_n(t) = \langle u(t), \phi_n \rangle$ est le coefficient de Fourier de $u(t)$.

Substitution de $u(T) = g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n$ et (2.12) dans (2.1), nous obtenons la famille d'équations différentielles ordinaires du second ordre

$$\begin{cases} u_n''(t) + 2\lambda_n u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n = 0, & 0 < t < T, \\ u_n(T) = g_n, \quad u_n'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour chaque n fixe, cette équation différentielle est uniquement résoluble et sa solution unique est donnée par

$$u_n(t) = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} g_n = \sigma(t, \lambda_n) g_n.$$

Enfin, la solution formelle du problème (2.1) prend la forme

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} g_n \phi_n, \quad g_n = \langle g, \phi_n \rangle.$$

□ De cette représentation, nous remarquons que $u(t)$ est instable dans $[0, T[$. Cela découle des hautes fréquences :

$$\sigma(t, \lambda_n) = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Application : Equation de conduction de chaleur

En thermodynamique, le phénomène de conduction est définie comme étant un transfert de chaleur à travers la matière sans qu'il n'y ait pour autant déplacement de cette dernière. Cette propagation thermique suit la loi normale de Gauss (L'état d'équilibre est atteint lorsque la température est partout égale).

Le modèle classique décrivant ce phénomène est le suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \Delta T(x, t) = 0, & 0 < t < T, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

Cependant, selon [11, 31], l'équation (3.1) ne décrit pas avec précision le phénomène de conduction, et ce en raison de la vitesse de propagation issue de ce modèle ($\sigma = e^{-t|\xi|^2}$).

Dans le modèle biparabolique, la vitesse de propagation de chaleur est plus ou moins raisonnable du fait qu'elle est amortie par rapport à celle du modèle classique ($\sigma = (1 + t|\xi|^2) e^{-t|\xi|^2}$)

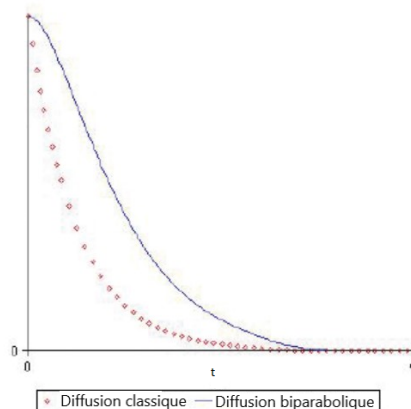


FIGURE 3.1 – Vitesse de propagation de chaleur

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au problème rétrograde de conduction de chaleur unidimensionnel, dont l'objectif est de reconstruire l'état initial (température initiale) d'un phénomène de conduction de chaleur dans un solide (Barre métallique de longueur L) à partir d'une mesure expérimentale effectuée à l'instant final $t = F$.

Il est bien connu que les phénomènes de transfert (ou transport) sont irréversibles et la résolution de tels problèmes nécessite un traitement particulier.

3.1 Modèle classique de conduction thermique

3.1.1 Problème direct

Le problème direct consiste à déterminer la distribution de la chaleur dans le solide à partir de la température initiale de ce dernier en plus de conditions aux limites supposées nulles. Ce phénomène est modélisé par :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - k\Delta T(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, F] \\ T(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

où $f(x)$ est une fonction donnée.

Par la méthode de séparation de variables, nous obtenons la solution formelle de ce problème, donnée par :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} f_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.3)$$

où $f_n(x)$ est le coefficient de Fourier :

$$f_n(x) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Ce problème est bien posé car la solution obtenue est sous la forme d'une série de Fourier **convergente** où seules les composantes en sinus sont présentes, puisqu'on a imposé des conditions aux limites nulles.

A partir de cette représentation, on peut donc calculer sans le moindre soucis la distribution de la température T en tout point de la barre $0 \leq x \leq L$ et à n'importe quel instant $0 \leq t \leq F$.

3.1.2 Problème inverse

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - k\Delta T(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, F] \\ T(x, F) = g(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

Ici le problème inverse consiste à déterminer la condition initiale $T(x, 0) = f(x)$ à partir de l'état final $T(x, F) = g(x)$. Ce problème est appelé **Problème rétrograde de conduction de la chaleur**.

Ce problème est mal posé, et ceci s'explique par le comportement de la solution

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{k(F-t)n^2\pi^2}{L^2}} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.5)$$

où $g_n(x)$ est le coefficient de Fourier :

$$g_n(x) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

donc

$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{kFn^2\pi^2}{L^2}} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.6)$$

On remarque d'après (3.6) que la solution est instable, et cela découle du comportement du terme général de la série obtenue. $e^{\frac{kFn^2\pi^2}{L^2}} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3.2 Nouveau modèle de conduction de la chaleur

3.2.1 Problème direct

Le nouveau modèle proposé par [12] consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles de type parabolique classique par une équation de type hyperbolique plus représentative du phénomène en question. Ce problème est appelé **Biparabolique** et il est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, t) - 2k\Delta \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + k^2\Delta^2 T(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, F] \\ T(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

où $f(x)$ est une fonction donnée.

D'après (2.7), le problème (3.7) admet une solution unique donnée par :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{kt n^2 \pi^2}{L^2}\right) e^{-\frac{kt n^2 \pi^2}{L^2}} f_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.8)$$

où $f_n(x)$ est le coefficient de Fourier :

$$f_n(x) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

3.2.2 Problème inverse

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, t) - 2k\Delta \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + k^2 \Delta^2 T(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, F] \\ T(x, F) = g(x), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où $g(x)$ représente la température finale (fonction donnée).

Comme dans le cas de la conduction classique, ce problème inverse consiste à déterminer la condition initiale $T(x, 0) = f(x)$ à partir de l'état final $T(x, F) = g(x)$. C'est le problème rétrograde de conduction de la chaleur de type biparabolique.

Il s'agit d'un problème mal posé. En effet, d'après (2.10), l'unique solution formelle de (3.9) est donnée par :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L^2 + ktn^2\pi^2}{L^2 + kFn^2\pi^2} \right) e^{\frac{k(F-t)n^2\pi^2}{L^2}} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.10)$$

où

$$g_n(x) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

dans ce cas

$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L^2}{L^2 + kFn^2\pi^2} \right) e^{\frac{kFn^2\pi^2}{L^2}} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.11)$$

A partir de cette représentation, on remarque que la solution est instable, et cela découle des hautes fréquences $\left(\frac{L^2}{L^2 + kFn^2\pi^2} \right) e^{\frac{kFn^2\pi^2}{L^2}} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Ce problème est mal posé dans le sens où la solution ne dépend pas continûment de la donnée g (donnée expérimentale). C'est à dire qu'une légère perturbation de cette dernière peut provoquer un changement important de la solution.

En effet, la donnée g est issue de mesures expérimentales et quelque soit la précision du capteur utilisé, cette donnée est certainement entachée de bruit qu'on note δ . Cette approximation est notée g_δ et elle est donnée par :

$$g_\delta = g + \delta$$

La solution correspondante à cette donnée bruitée est notée f_δ et elle est donnée par :

$$f_\delta(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n e^{\frac{k(F)n^2\pi^2}{L^2}} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{Solution avec donnée exacte}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n e^{\frac{k(F)n^2\pi^2}{L^2}} \delta_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{Erreur amplifiée}} \quad (3.12)$$

avec $\sigma_n = \left(\frac{L^2}{L^2 + kFn^2\pi^2} \right)$

Remarque : Dans le modèle classique (3.4), la solution formelle est donnée par :


$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k(F)n^2\pi^2}{L^2} x} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

dans le cas du modèle biparabolique, le paramètre $\sigma_n = \left(\frac{L^2}{L^2 + kFn^2\pi^2} \right)$ joue le rôle de paramètre de relaxation, puisque

$$0 < \sigma_n < 1$$

De cette remarque, on observe que le caractère "mal posé" du modèle biparabolique est modéré par rapport au cas parabolique classique.

Régularisation du problème

ans ce chapitre, nous donnons une approximation stable de la solution du problème mal posé (3.9) en utilisant une méthode de spécification de fonction qui est une variante de la méthode itérative de "Landweber" connue sous le nom de méthode de Kozlov-Maz'ya [18].

4.1 Description de la méthode

Cette méthode a été introduite par Louis Landweber dans les années 1950 [20]. En 2011, V.A. Kozlov et V.G. Maz'ya ont proposé une nouvelle version de cette méthode et dont l'idée principale consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés, où l'équation originale est préservée.

L'algorithme itératif commence par le choix arbitraire de f_0 (généralement la fonction nulle), la première approximation $T_0(x, t)$ est la solution du problème direct (bien posé) suivant :

$$P_0 : \begin{cases} \frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}(x, t) - 2k\Delta \frac{\partial T_0}{\partial t}(x, t) + k^2 \Delta^2 T_0(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, F] \\ T_0(x, 0) = f_0(x), \quad \frac{\partial T_0}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Une fois $T_k(x, t)$ construite, on définit le problème P_{k+1} par

$$P_{k+1} : \begin{cases} \frac{\partial^2 T_{k+1}}{\partial t^2}(x, t) - 2k\Delta \frac{\partial T_{k+1}}{\partial t}(x, t) + k^2 \Delta^2 T_{k+1}(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, F] \\ T_{k+1}(x, 0) = f_{k+1}(x), \quad \frac{\partial T_{k+1}}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

où f_{k+1} est donnée par :

$$f_{k+1} = f_k - \omega (T_k(x, F) - g(x)) \quad (4.3)$$

avec

$$0 < \omega \leq \frac{e^{F\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}}{1 + F\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

L'idée ici est que si la suite des solutions $(T_k(x, t))_{k \geq 0}$ est convergente c'est que les termes f_k se rapprochent de plus en plus les uns des autres pour k assez élevé, ce qui nous permettra de conclure que plus k est grand plus $f_k(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ puisque $T_k(x, F)$ sera proche de $g(x)$.

4.2 Implémentation numérique

Dans cette section, nous donnons quelques résultats numériques illustrant l'algorithme utilisé. Tous les résultats sont obtenus par **MATLAB**.

Soit le problème inverse suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, t) - 2\Delta \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \Delta^2 T(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, \pi] \times [0, 1] \\ T(0, t) = T(\pi, t) = 0 \\ T(x, 1) = g(x), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

où $f(x)$ est la condition initiale inconnue et $g(x)$ est la condition finale donnée.

Le problème (4.4) est un exemple concret de celui décrit par (3.9) où $k = 1$, $L = \pi$ et $F = 1$.

Dans ce cas, la formule (3.11) prend la forme

$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n^2} \right) e^{n^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx) \quad (4.5)$$

Pour illustrer la méthode utilisée sur cet exemple, on se donne une condition initiale $T(x, 0) = f(x)$ (fonction assez régulière), ensuite nous calculons la condition finale résultante $g(x)$ à partir de laquelle nous allons reconstruire l'état initial par l'algorithme de Kozlov-Maz'ya.

4.2.1 Exemple

Considérons le problème direct suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, t) - 2\Delta \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \Delta^2 T(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, \pi] \times [0, 1] \\ T(0, t) = T(\pi, t) = 0 \\ T(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

avec

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \quad (4.7)$$

La solution du problème (4.6) est donnée par :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + tn^2) e^{-tn^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx) \quad (4.8)$$

De plus, on sait que les fonctions $(\sin(mx))_{m \geq 1}$ sont deux à deux orthogonales sur l'intervalle $[0, \pi]$.

i.e :

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

Alors, la solution (4.8) sous sa forme réduite est

$$T(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + t) e^{-t} \sin(x) \quad (4.9)$$

Par conséquent, la donnée finale est

$$g(x) = T(x, 1) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x)}{e} \quad (4.10)$$

4.2.2 Résultats numériques

En subdivisant l'intervalle $[0, \pi]$ en N subdivisions de longueurs égales $h = \frac{\pi}{N+1}$ et l'intervalle $[0, 1]$ en M subdivisions de longueurs égales $l = \frac{1}{M+1}$ on obtient la forme discrétisée du problème P_k :

$$P_k = \begin{cases} \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2}(x_i, t_j) - 2\Delta \frac{\partial T_k}{\partial t}(x_i, t_j) + \Delta^2 T_k(x_i, t_j) = 0 & i = 0, 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, 2, \dots, M \\ T_k(x_0, t_j) = T_k(x_N, t_j) = 0 \\ T_k(x_i, t_0) = f_k(x_i), \quad \frac{\partial T_k}{\partial t}(x_i, t_0) = 0 \end{cases}$$

dont la solution discrète est donnée par :

$$T_k(x_i, t_j) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t_j n^2) e^{-t_j n^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_k(x) \sin(nx) dx \right)_{x=x_i} \sin(nx_i)$$

Nous commençons par résoudre le problème P_0 dans lequel on pose $f_0(x_i) = 0$ et ensuite pour passer au problème suivant, on utilise le processus itératif (4.3) sous sa forme discrète :

$$f_{k+1}(x_i) = f_k(x_i) - \omega (T_k(x_i, t_M) - g(x_i)) \quad \text{où } 0 < \omega \leq \frac{e}{2}$$

Test avec donnée exacte :

▷ Résultat avec un pas d'espace $N = 40$ et un nombre d'itérations $k = 40$:

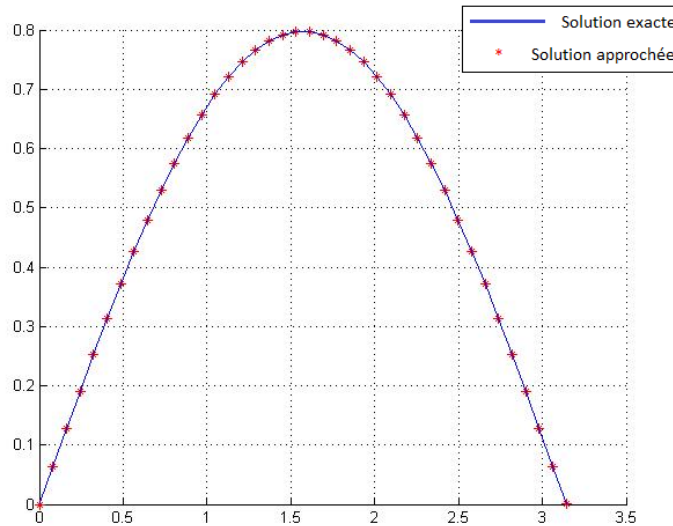


FIGURE 4.1 – $N = 40$, $\omega = 0.6795$, $k = 40$

Maintenant, et puisque en pratique la donnée g vient de l'expérience, donc elle est sensée être entachée de bruit. Pour cela, et afin d'effectuer des tests de stabilité, nous considérons la donnée bruitée

$$g_{\delta} = g + \delta, \quad \text{où : } \delta = \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g))$$

La commande MATLAB "randn(.)" renvoie un vecteur dont la distribution des éléments est normalisée (moyenne nulle et variance $\sigma^2 = 1$) et ε est un coefficient représentant le niveau de perturbation.

Tests avec donnée bruitée :

▷ Résultats pour différents niveaux de perturbation avec un pas d'espace fixe $N = 40$ et un nombre d'itération $k = 40$:

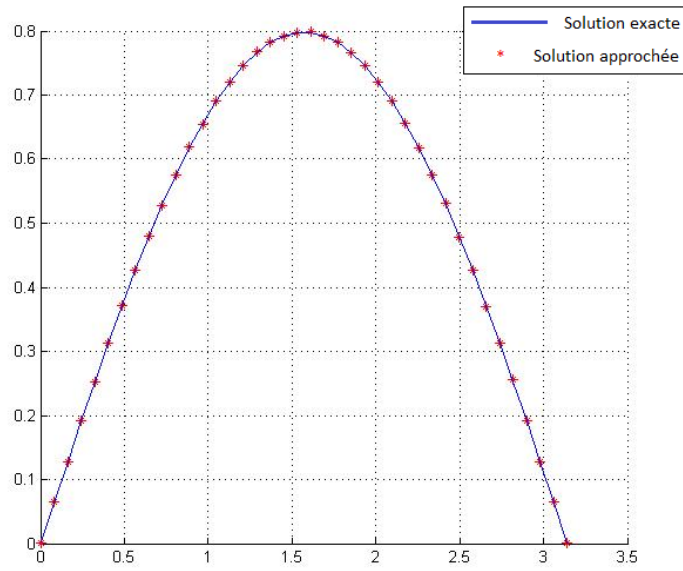


FIGURE 4.2 – $N = 40$, $\omega = 0.6795$, $k = 40$, $\varepsilon = 10^{-3}$

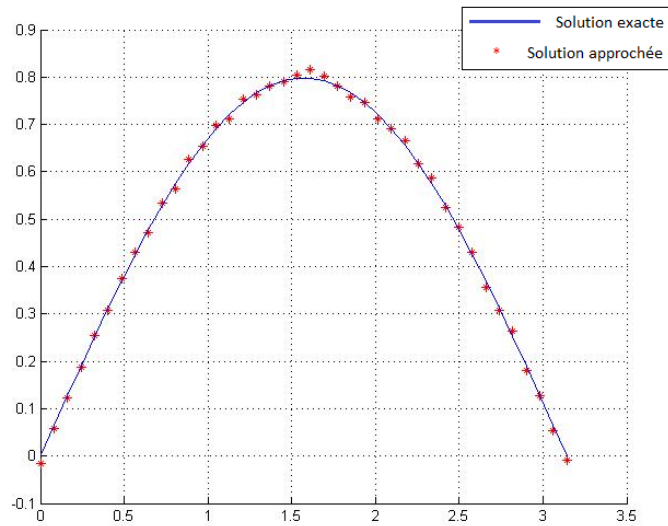


FIGURE 4.3 – $N = 40$, $\omega = 0.6795$, $k = 40$, $\varepsilon = 10^{-2}$

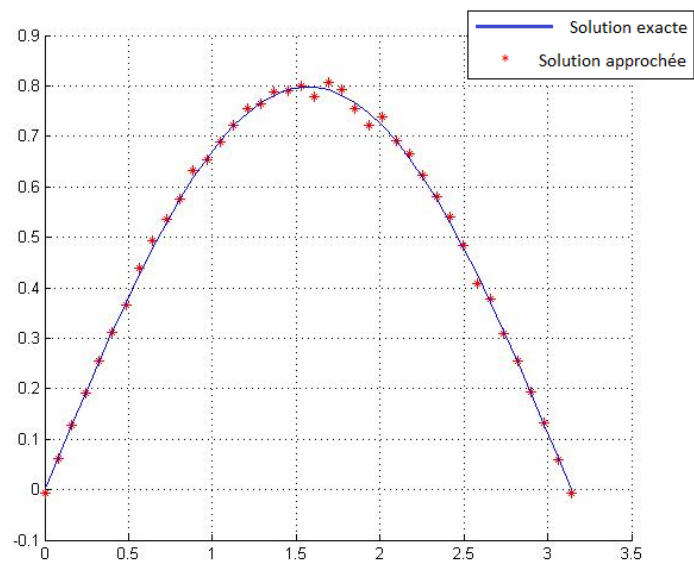


FIGURE 4.4 – $N = 40$, $\omega = 0.6795$, $k = 40$, $\varepsilon = 10^{-1}$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, la stratégie de régularisation suivie est basée sur la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya pour approcher la solution d'un problème rétrograde de conduction de chaleur de type biparabolique .

Les résultats obtenus dans le présent travail, ouvrent de nouveaux horizons dans le développement des méthodes numériques pour la résolution de certains problèmes inverses en thermique.

L'étude de problèmes inverses de conduction de chaleur d'ordre fractionnaire (subdiffusion) est l'une des perspectives que nous prévoyons d'entamer dans un futur proche.

Bibliographie

- [1] O.M. Alifanov, Inverse heat transfer problem. Springer-Verlag; 1994.p.172-178.
- [2] M.A. Atakhadzaev, O.M. Egamberdiev, The Cauchy problem for the abstract bicaloric equation, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol. 31, No. 4, 187-191 (1990).
- [3] J.V. Beck, B. Blackwell, C.R St-Clair, Inverse Heat Conduction : Ill-Posed Problems. Wiley-interscience Publication. New York (1985).
- [4] F.B. Belgacem, Why is the Cauchy problem severely ill-posed, *Inverse Problems* 23 (2007), 823- 836.
- [5] A. Ben Abda, Sur quelques problèmes inverses géométriques via des équations de conduction elliptiques : Etude théorique et numérique. Thèse de Doctorat, Ecole nationale d'ingénieurs de Tunis.
- [6] N. Boussetila, Thèse de Doctorat : Etude de problèmes non locaux et régularisation de problèmes mal posés en EDP, Annaba 2006.
- [7] A.S. Carasso, Bochner Subordination, Logarithmic Diffusion Equations, and Blind Deconvolution of Hubble Space Telescope Imagery and Other Scientific Data, SIAM 2010.
- [8] W. Cheng and Q. Zhao, A modified quasi-boundary value method for a two-dimensional inverse heat conduction problem, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 79, no. 2, pp. 293.302 , Jan. 2020, doi : 10.1016/j.camwa.2019.06.031.
- [9] N. Daouas and M.S. Radhouani, Analyse d'un problème inverse de conduction de chaleur bidimensionnelle non linéaire À l'aide du filtre de Kalman discret, (Conference paper) : Congrès Français de Thermique. At : Vittel-France. June 2002.
- [10] HW. Engel, W. Rundel, eds. Inverse problems in diffusion processes. *SIAM, Philadelphia*. 1995.
- [11] G. Fichera, Is The Fourier Theory of Heat Propagation Paradoxical?, *Rendicont 1 Del Circolo Matematico Di Palermo, Serie II. Tomo XLI*, pp. 5-28 (1992)
- [12] V.L. Fushchich, A.S. Galitsyn, A.S. Polubinskii, A new mathematical model of heat conduction processes, *UkrainianMath. J.*, 42, 210-216 (1990)
- [13] J. Hadamard, Lectures on Cauchy problem in linear partial differential equations, Yale University Press, New Haven, CT, (1923).

- [14] C.H. Huang, M.N. Ozisik, Inverse problem of determining the unknown strength of an internal plane heat source, *Journal of the Franklin Institute*, vol.329, n :4, p. 751-764, (1992).
- [15] Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag. 2006.
- [16] M. Jahedi, F. Berntsson, J. Wren, and B. Moshfegh, Transient inverse heat conduction problem of quenching a hollow cylinder by one row of water jets, *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 117, pp. 748.756, Feb. 2018, doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.048.
- [17] J.B. Keller, Inverse problems, *Amer.Math.Monthly*, 83 : 107-118, (1976).
- [18] V. A. Kozlov and V. G. Maz'ya, On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, *Lenningrad Mathematics Journal*, vol. 1, pp. 1207.1228, 1990.
- [19] A. Lakhdari and N. Boussetila, An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem, *Boundary Value Problems*, vol. 2015, article 55, 2015.
- [20] L. Landweber, An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *Amer. J. Math.* 73, 615.624, (1951).
- [21] Lattes R, Lions JL. *The method of quasi-reversibility; Applications to partial differential equations*. Elsevier, New York. 1969.
- [22] R. LELEU, Transferts de chaleur, Ref TIP452WEB - "Opérations unitaires". *Génie la réaction Chim.*, Jun. 1992, Accessed : Jun. 22, 2021. [Online]. Available : <https://www-techniques-ingenieur-fr.sndll.arn.dz/base-documentaire/archives-th12/archives-operations-unitaires-genie-de-la-reaction-chimique-tiajb/archive-1/transferts-de-chaleur-j1080/>.
- [23] T. Lu, B. Liu, P. X. Jiang, Y. W. Zhang, and H. Li, A two-dimensional inverse heat conduction problem in estimating the fluid temperature in a pipeline, *Appl. Therm. Eng.*, vol. 30, no. 13, pp. 1574.1579, Sep. 2010, doi : 10.1016/j.applthermaleng.2010.03.011.
- [24] X. Luo and Z. Yang, A new approach for estimation of total heat exchange factor in reheating furnace by solving an inverse heat conduction problem, *Int. J. Heat Mass Transf*, vol. 112, pp. 1062.1071, Sep. 2017, doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.009.
- [25] D. Maxwell, Kozlov-Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration, arXiv :1107.2194v1, math.AP, 12 Jul 2011.
- [26] S. Mohasseb, M. Moradi, T. Sokhansefat, F. kowsari, A. Kasaeian, and O. Mahian, A novel approach to solve inverse heat conduction problems : Coupling scaled boundary finite element method to a hybrid optimization

- algorithm, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 84, pp. 206.212, Nov. 2017, doi : 10.1016/j.enganabound.2017.08.018.
- [27] W. Muuniz, H.F.C. Velho, and F.M. Ramos, A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition of the heat equation. *Journal of Computation Applied Mathematics*, Vol.103, p.145.163, (1999).
- [28] M.N. Özisik, H.R.B Orlande, *Inverse Heat Transfer : Fundamentals and applications*. Taylor and Francis 99.35350 (2000).
- [29] M.N. Özisik, *Boundary Value Problems of Heat Conduction*. Dover Publication, Inc. Mineola, New York (2013)
- [30] A. Pazy : *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*, Springer, Berlin (1983)
- [31] J.L. Preziosi, DD : *HeatWaves*, *Rev.Mod. Physics*, 41.73 (1989)
- [32] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Méthodes numériques algorithmes, analyse et applications*, Springer. Verlag Italia, Milano 2004, 2007.
- [33] P.Reulet, and G.Leplat, *Méthode inverse pour la détermination expérimentale des conductivités thermiques et de la capacité calorifique de matériaux orthotropes en fonction de la température*. Société Française de Thermique (2011).
- [34] A. Rondepierre et A. Rouchon. *Introduction aux équations aux dérivées partielles*. 2ème année IC, Département STPI, INSA Toulouse. (2012–2013).
- [35] A.N. Tikhonov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 153 (1963).
- [36] P. Xiong, J. Deng, T. Lu, Q. Lu, Y. Liu, and Y. Zhang, A sequential conjugate gradient method to estimate heat flux for nonlinear inverse heat conduction problem, *Ann. Nucl. Energy*, vol. 149, p. 107798, Dec. 2020, doi : 10.1016/j.anucene.2020.107798.