وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــــية العلـــــوم
قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/2023/2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Le comportement asymptotique de certains systèmes thermoélastiques des sols gonflants

Option : AFA

Par : Lekkam Asma

Encadrée par :	**Meradji Selma**	**MCB**	**U. ANNABA**

Devant le jury :

Président :	**Bouzettouta Lamine**	**MCA**	**U. SKIKDA**
Examinateur:	**Lallouche Abdallah**	**MCB**	**U. SKIKDA**

Année : 2023/2024

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah, notre créateur de m' avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur Dr. Meradji Selma qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et sa direction du début à la fin de ce travail.

je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils m' on fait en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie chaleureusement tous les membres de ma famille surtout mes parents pour leur effort et leur fatigue, mes professeurs du primaire jusqu'à l'universitaire, mes amies,et mes proches.

En fin Je remercie tous ce qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de cette étude.

Dédicace

Je dédie ce travail:

A celle qui m'a donné le goût de la vie et le sens de la responsabilité... merci Mère "Habiba"

A celui qui a toujours été ma source d'inspiration et de courage... merci Père "Said"

A mes soeurs : Rima, Soumia , Imene et Hawa.

A mes frères : Abd Raouf et Adam.

A mon fiancé : Oussama.

A tous mes amis et à tous ce qui m'ont soutenu de près ou de loin.

Résumé

- *Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de la stabilité exponentielle ainsi qu'à l'existence et l'unicité de deux systèmes thermoélastiques poreux des sols gonflants par l'utilisation de la méthode des multiplicateurs et la méthode des semi-groupes, respectivement, sous certaines conditions que les coefficients du système doivent les vérifier. Ainsi le flux thermique dans notre cas va être donné par la loi de Maxwell-Cattaneo.*

Mots clés: *sols gonflants, microtempérature, stabilité exponentielle, théorème de Hille-Yosida, fonctionnelle de Lyapunov.*

Abstract

- *In this work, we are interested in the study of exponential stability and the existence and uniqueness of two porous thermoelastic systems for swelling soils using the multiplier method and the semi-group method, respectively, under certain conditions that the system coefficients must verify. In our case, heat flow is given by Maxwell-Cattaneo's law.*

Keywords: *swelling soils, microtempérature, exponential stability, Hille-Yosida theorem, Lyapunov functional.*

Introduction générale

La première théorie incluant un mélange visqueux de liquide, de solide et de gaz a été proposée par Eringen [7]. Les équations de champ ont été obtenues en étudiant cette combinaison résistante à la chaleur [3]. La théorie des milieux poreux, qui étudie ce type de problématique, a également été utilisée pour classer les sols gonflants. En raison de nombreuses recherches visant à atténuer les effets néfastes des sols gonflants, notamment dans les domaines de l'architecture et du génie civil, ce sujet semble prometteur pour des recherches plus approfondies. Pour plus d'informations, voir [1]-[13]. D'après la théorie linéaire des sols élastiques poreux gonflants, les équations fondamentales du champ sont

$$\begin{aligned} \rho_z z_{tt} &= P_{1x} + G_1 + H_1, \\ \rho_u u_{tt} &= P_{2x} + G_2 + H_2, \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

où ρ_z, $\rho_u > 0$ sont les densités du matériau solide élastique et du fluide, tandis que leurs déplacements respectifs sont notés z, u. De plus, (P_1, G_1, H_1) représentent la tension partielle, les forces internes du corps et les forces éternelles agissant sur le déplacement. (P_2, G_2, H_2) sont similaires, mais appliqués au solide élastique. De plus, les équations constitutives des tensions partielles sont fournies par

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, a_2 \\ a_2, a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ u_x \end{pmatrix}, \tag{0.0.2}$$

où a_1, $a_3 > 0$, et $a_2 \neq 0$ est un nombre réel. A est une matrice définie positive avec $a_1 a_3 > a_2^2$. Quintanilla [13] a étudié (0.0.1) en considérant

$$G_1 = G_2 = \xi\left(z_t - u_t\right),\ H_1 = a_3 z_{xxt},\ H_2 = 0,$$

pour $\xi > 0$; la stabilité exponentielle peut être atteinte. De même, dans [17], les chercheurs ont considéré (0.0.1) en prenant différentes conditions :

$$G_1 = G_2 = 0,\ H_1 = -\rho_z \gamma\left(x\right) z_t,\ H_2 = 0,$$

où la fonction d'amortissement visqueux interne $\gamma\left(x\right)$ a une moyenne positive. Ils ont pu déterminer la stabilité exponentielle en utilisant l'approche spectrale. Pour en savoir plus, voir [13]-[14]. Récemment, les scientifiques ont manifesté un vif intérêt pour la thermoélasticité de Lord Shulman, ce qui a donné lieu à une vaste collection de contributions *visant à élucider cette théorie. Ce cadre théorique englobe l'examen d'un système comprenant quatre équations hyperboliques couplées à une dynamique de transfert de chaleur. De plus, la théorie thermoélastique de Lord Shulman a été introduite pour introduire une loi de conduction thermique plus robuste, car elle concerne les matériaux thermoélastiques présentant des vibrations élastiques. Notamment, l'équation de la chaleur dans ce contexte est elle-même hyperbolique et correspond à l'équation initialement formulée par la loi de Fourier. Pour approfondir les détails et acquérir une compréhension complète de cette théorie, il est recommandé au lecteur de consulter les documents suivants : [2],[10]. Les principales équations évolutives régissant les modèles unidimensionnels de thermoélasticité poreuse, qui intègrent à la fois les effets de la microtempérature et de la température [6]-[8], peuvent être exprimées comme suit :*

$$\begin{aligned} \rho_z z_{tt} &= R_x, \\ \rho_u u_{tt} &= H_x + G, \\ \rho R_0 \eta_t &= q_{x,}, \\ \rho E_t &= P_x^* + q - Q. \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

Dans le contexte fourni, les symboles R, R_0, H, E, η, q, G, Q et P^* désignent la contrainte, la température de référence, la contrainte d'équilibre, le premier moment énergétique, l'entropie, le vecteur de flux de chaleur, la force corporelle équilibrée, le flux thermique moyen et le premier moment du flux thermique, respectivement. Pour simplifier les calculs, nous fixons R_0 à 1. Ce travail aborde la contrepartie inhérente des microtempératures dans la théorie de Lord Shulman. Dans ce cas, il devient possible d'adapter les équations constitutives de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &R = P_1 + G_1 + H_1, && P^* = -k_4 T_x, \\ &H = P_2 + P_3, && \rho\eta = \beta_0 z_x - \beta_1 u + a\left(\tau\theta_t + \theta\right), \\ &G = G_2 + H_2, && Q = \left(k_1 - k_2\right) T + \left(k - k_1\right)\theta_x, \\ &q = k\theta_x + k_1 T, && \rho E = -b\left(\tau T_t + T\right) - \mu_2 u_x. \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

Dans lequel le vecteur de microtempérature est indiqué par T, $\tau > 0$ est le paramètre de relaxation et ρ_z, ρ_u, a_1, a_2, a_3, a, $b > 0$. Les coefficients β_0, k, β_1 désignent le couplage *entre la température et le déplacement, la conductivité thermique, le couplage entre la fraction volumique et la température, respectivement. En prenant* $a_2 \neq 0$ *et les coefficients* k_1, k_2, k_4, μ_2 *vérifient les inégalités*

$$a_2^2 < a_1 a_3, \tag{0.0.5}$$

et

$$k_1^2 < k k_2. \tag{0.0.6}$$

Dans le travail actuel, nous nous concentrons sur les effets thermiques, c'est pourquoi nous supposons que $a,\ b > 0$ *pour la capicité thermique. Sous les bonnes hypothèses, on montre que le système est bien posé, et nous utilisons la méthode énergétique pour démontrer le résultat de la stabilité exponentielle. Dans ce travail les éléments suivants sont pris en compte :*

$$\begin{aligned} G_1 = G_2 = 0, \qquad\qquad & P_3 = -\mu_2\left(\tau T_t + T\right), \\ H_1 = -\beta_0\left(\tau\theta_t + \theta\right), & \\ H_2 = -\beta_1\left(\tau\theta_t + \theta\right) - \beta u_t, & \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

En substituant *(0.0.4)*-*(0.0.7)* dans *(0.0.3)*, on obtient

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} = a_1 z_{xx} + a_2 u_{xx} - \beta_0\left(\tau\theta_t + \theta\right)_x, & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_u u_{tt} = a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx} - \beta u_t - \beta_1\left(\tau\theta_t + \theta\right) & \\ \qquad - \mu_2\left(\tau T_t + T\right)_x, & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ a\left(\tau\theta_t + \theta\right)_t = -\beta_0 z_{tx} + \beta_1 u_t + k\theta_{xx} + k_1 T_x, & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ b\left(\tau T_t + T\right)_t = k_4 T_{xx} - \mu_2 u_{tx} - k_2 T - k_1\theta_x, & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{0.0.8}$$

avec les conditions aux limites et les données initiales suivantes

$$\begin{aligned} & u_x(0,t) = u_x(1,t) = z_x(0,t) = z_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ & \theta(0,t) = \theta(1,t) = T(0,t) = T(1,t) = 0, \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{0.0.9}$$

$$\begin{aligned} & u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x),\ z(x,0) = z^0(x), && x \in (0,\ 1), \\ & z_t(x,0) = z^1(x),\ \ \theta(x,0) = \theta^0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta^1(x), && x \in (0,\ 1), \\ & T(x,0) = T^0(x),\ T_t(x,0) = T^1(x), && x \in (0,\ 1). \end{aligned} \tag{0.0.10}$$

Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité via la méthode des semi-groupes pour le système (0.0.8)-(0.0.10)*. Dans la théorie des semi-groupes nous utiliserons le théorème de Hille-Yosida qui est un outil puissant et fondamental reliant les* *propriétés de dissipation énergétique d'un opérateur sans bornes* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *à l'existence, unicité et régularité des solutions d'une équation différentielle stationnaire (problème de Cauchy)*

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \mathcal{A}(t)\Phi(t), \quad t > 0 \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{cases}$$

Pour les résultats de la stabilité, nous utilisons la méthode du multiplicateur basée sur la construction d'une fonction Lyapunov $\mathcal{L}$ *équivalente à l'énergie* E *de la solution. Nous désignons par* $\mathcal{L} \sim E$ *l'équivalence*

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L} \leq c_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{0.0.11}$$

pour deux constantes positives c_1 *et* c_2*. Par exemple, pour établir une stabilité exponentielle, il suffit de montrer qu'il existe une constante* $c > 0$*, telle que*

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{0.0.12}$$

Ce travail est structuré comme suit : le premier chapitre contient des rappels et des notions de base qui seront utiles à notre travail. Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié la stabilité d'un thermoélastique des sols gonflants via Lord Shulman avec des effets de microtempératures. Dans le troisième chapitre, le même système sera étudier dans le cas où l'effet de microtempérature est absent. Plus précisément, nous considérons le même système amorti uniquement des dissipations de type microtempérature.

CHAPITRE 1 Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons de quelques notions de base qui nous seront utiles dans la suite. Dans ce qui suit, on désignera par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Quelques espaces de bases

Dans cette section, on introduit les espaces fondamentaux (Hilbert, Lebesgue et Sobolev). Pour plus de détails voir H. Brezis et L.Sonrier [4], [9].

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *[5] Un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un espace vecrotiel avec le produit scalaire $\langle u, v\rangle$ tel que $\|u\| = \sqrt{\langle u, v\rangle}$ est la norme qui soit $\mathbb{H}$ complète.*

1.1.2 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1.2 *[5] Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$, nous définissons l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit:*

- *pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Si $f \in L^p(\Omega)$, on définie la norme

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *pour* $p = \infty$ *, l'espace* $f \in L^p(\Omega)$ *est l'espace des fonctions mesurables* f *qui sont essentiellement bornées sur* Ω*.*

  Si $f \in L^\infty(\Omega)$*, on a*

$$\|f(x)\|_\infty = ess \sup_\Omega |f(x)| = \inf \{A \geq 0 : \mu \{\{x \in \Omega : f(x) > A\} = 0\}.$$

1.1.3 *Espace de Sobolev dans* $\mathbb{R}^n$

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev.

Espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$

Définition 1.1.3 *Soient* Ω *un ouvert quelconque de* $\mathbb{R}^n$ *et* $P \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq P \leq \infty$*, l'espaces de Sobolev* $W^{1,P}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx \right\}.$$

On pose

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$

Définition 1.1.4 *Soient* Ω *un ouvert quelconque de* $\mathbb{R}^n$ *,* $m \geq 2$ *et un réel* P*,* $1 \leq P \leq \infty$*, l'espaces de Sobolev* $W^{m,P}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \\ \text{tel que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi dx,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$*,* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ *et* $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .. \partial x_n^{\alpha_n}}$.

On pose

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,P}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,P}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<\alpha\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

et l'espace $\mathbb{H}^m$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $u, v \in \mathbb{H}^m(\Omega)$.

Espace de Sobolev $W_0^{1,P}(\Omega)$

Définition 1.1.5 *Étant donné le réel P, $1 \leq P \leq \infty$, on appelle espace de Sobolev et on note $W_0^{1,P}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ (resp $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ si $P = 2$).*

1.2 *Quelques inégalités*

1.2.1 *Inégalité de Hölder*

Lemme 1.2.1 a) *[5] Soient p et q deux nombres réels conjugués c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a $f.g \in L^1(\Omega)$. En particulier, on a

a) *Si $p, q \in]1, +\infty[$*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

b) *Si $p = 1$, $q = +\infty$*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|\, dx \right) \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Remarque 1.2.1 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas $p = 2$, $q = 2$.*

1.2.2 *Inégalité de Young*

Lemme 1.2.2 *[4] Soient p, q deux nombres réels conjugués dans $]1, +\infty[$, alors, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q.$$

En particulier pour $p = q = 2$, on a

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

1.2.3 *Inégalité de Poincaré*

Lemme 1.2.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant:*

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Notons qu'à partir de cette inégalité, on montre que $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$, et par conséquent $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire:^{n}

$$\langle f, g\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla f(x) . \nabla g(x) \, dx,$$

où le "." signifie le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Aussi, on donne l'inégalité de Poincaré habituelle dans $L^2(\Omega)$ à partir du lemme suivant

Lemme 1.2.4 *Soit $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe un constante C positive vérifiant*

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla f(x)\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3 *Inégalités intégrales*

On présente ici quelques inégalités intégrales connues et très utilisées dans les théories de la stabilité des systèmes d'évolutions dissipatifs et aussi non dissipatifs.

Lemme 1.3.1 *[9] Soient $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\Phi(0) = 0 \ \textit{et} \ \lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty$$

Supposant que $\exists p \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \Phi'(t) E^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \quad \forall s > 0,$$

alors

- $E(t) \leq E(0) e^{1 - d\Phi(t)}, \quad \forall t > 0, \quad$ *si $p = 0$.*

- $E(t) \leq E(0)(\frac{1+p}{1+pd\Phi(t)})^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0, \quad si\ p > 0.$

Dans le cas particulier où $\Phi(t) = t$, on déduit les inégalités suivantes :

- $E(t) \leq E(0)e^{1-dt}, \quad \forall t > 0, \quad si\ p = 0.$
- $E(t) \leq E(0)(\frac{1+p}{1+pdt})^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0, \quad si\ p > 0,$
  appelées respectivement, estimation exponentielle et estimation polynomiale.

1.4 *Quelques notions sur les opérateurs*

Définition 1.4.1 *[5] Un opérateur linéaire sur un espace X est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(\mathcal{A}) \subset X$ a valeurs dans X, ($D(\mathcal{A})$ s'appelle le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$).*

Définition 1.4.2 *[5] Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{A}$ un opérateur non borné sur $\mathbb{H}$ de domaine $D(\mathcal{A})$,on dit que*

- *$\mathcal{A}$ est dissipatif si*
$$(\mathcal{A}v, v) \leq 0, \quad \forall v \in D(\mathcal{A}).$$
- *$\mathcal{A}$ est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif, i.e $(\mathcal{A}u, u) \geq 0$ pour tout $u \in D(\mathcal{A})$.*
- *$\mathcal{A}$ est maximal monotone si de plus $\mathrm{Im}(I + \mathcal{A}) = \mathbb{H}$, i.e:*
$$\forall f \in \mathbb{H},\ \exists u \in D(\mathcal{A}) \text{ tel que } u + \mathcal{A}u = f.$$

Proposition 1.4.1 *[5] Soit $\mathcal{A}$ un opérateur monotone maximal, alors*

- *$D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathbb{H}$.*
- *$\mathcal{A}$ est un opérateur fermé.*
- *Pour chaque $\lambda > 0$, $(I + \lambda\mathcal{A})$ est bijective de $D(\mathcal{A})$ sur $\mathbb{H}$, $(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\|_{L(\mathbb{H})} \leq 1$.*

1.5 Semi-groupe fortement continue d'opérateurs linéaires

Définition 1.5.1 *[16] Soit X un espace de banach, soit $L(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X à X, une famille $\{S(t), t \geq 0\}$ dans $L(X)$ est un semi-groupes d'opérateur linéaire borné sur X si*

1. $S(0) = I$, *(I est l'opérateur d'identité sur X).*
2. $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \geq 0$ *(la propriété semi-groupe).*
3. *Pour chaque $x \in X$, $S(t)x$ est continue sur $[0, \infty)$.*

Définition 1.5.2 *[16] Le générateur infinitésimal, où générateur du semi-groupe d'opérateurs linéaires $\{S(t),\, t \geq 0\}$. L'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \longrightarrow X$ défini par*

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(\mathcal{A}).$$

Dans le générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$, $D(\mathcal{A})$ est le domaine d'un opérateur $\mathcal{A}$.

1.6 Existence et unicité de la solution

Pour traiter l'existence et l'unicité de la solution on utilise le théorème de Lax-Milgram où le théorème Hille -Yosida.

Définition 1.6.1 *[11] Soit V un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire noté $(.,.)_V$ et de norme associée $\|.\|_V$, on se propose de résoudre le problème suivant*
trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on ait : $A(u, v) = L(v)$,
on impose les conditions suivantes

1) *L est une application définie sur V, à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant de plus*

1. *L est linéaire,*
2. *L est continue, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\text{pour tout } v \in V, \ |L(v)| \leq C \|v\|_v .$$

2) *A est une application définie sur $V \times V$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant de plus*

1. *A est bilinéaire,*

2. *A est continue, i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\textit{pour tout } (u, v) \in V^2, \ |A(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V ,$$

3. *A est coercive, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\textit{pour tout } v \in V, \ A(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 .$$

1.6.1 *Théorème de Lax-Milgram*

Lemme 1.6.1 *[11] Soit V un espace de Hilbert réel, A une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et L une forme linéaire continue sur F.*
Alors, il existe un unique élément u de V solution du problème variationnel. Si la forme bilinéaire est symétrique, (i.e. si $A(u, v) = A(v, u)$ pour tout u, v dans V), en posent

$$\textit{pour tout } v \in V, \ E(v) = \frac{1}{2} A(v, v) - L(v), \tag{1.6.1}$$

telle que (1.6.1) est équivalent à un problème de minimisation pour la fonctionnelle quadratique E.

1.6.2 *Théorème de Hille-Yosida*

Théorème 1.6.1 *[4] Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ il existe une fonction*

$$u \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{H}) \cap ([0, +\infty[; D(\mathcal{A})),$$

unique tel que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 & \textit{sur } [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0 & \textit{(donnée initiale)}, \end{cases}$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \textit{et} \quad \left| \frac{du}{dt} \right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| , \ \ \forall t \geq 0 .$$

1.6.3 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.6.2 *[16] Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire défini, et $D(\mathcal{A})$ domaine dense dans X, alors $\mathcal{A}$ génère un C_0-semi-groupe de contractions sur X si et seulement si*

(i) $\mathcal{A}$ est dissipatif.

(ii) il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

1.7 Stabilité

Présentons d'abord les concepts de base de stabilité.

Définition 1.7.1 *[15] (Système autonomes et non autonomes) Le système non linéaire*

$$x = f(x,t), \tag{1.7.1}$$

est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire si l'équation d'état du système peut s'écrire $x = f(x)$ sinon, le système est appelé non autonome.

Point équilibre

[15]Un état x^* est un état d'équilibre (ou point d'équilibre) du système si une fois que $x(t)$ est égal à x^*, il reste égal à x^* pour tout le temps future. Mathématiquement, cela signifie que le vecteur constant x^* satisfait $f(x^*) = 0$, les point d'équilibre peuvent être trouvés en résolvant les équations algébriques non linéaires.

Définition 1.7.2 *(Stabilité au sens de Lyapunov) Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.7.1) est*

- *Stable si, pour chaque $\epsilon > 0$, il y'a $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|x(0)\| \leq \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- *Instable s'il n'est pas stable.*

- *Asymptotique stable s'il est stable et δ peut être choisi tel que*

$$\|x(0)\| \leq \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Définition 1.7.3 *[15] (Stabilité exponentiel) Un point d'équilibre $x = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs α et λ tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Notez que la stabilité exponentielle implique une stabilité asymptotique. Mais la stabilité asymptotique ne garantit pas une stabilité exponentielle.

Définition 1.7.4 *[15] Une fonction continue scalaire $v(x)$ est dite localement définie positive si $v(0) = 0$ et dans une boule B_{R_0}*

$$x \neq 0 \Longrightarrow v(x) > 0,$$

si $v(0) = 0$ et que la propriété ci-dessus s'applique à tout l'espace d'état, alors $v(x)$ est dite globalement définie positive .

Définition 1.7.5 *Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour (1.7.1), $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$ et $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que*

$$\begin{cases} V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \quad \text{dans } D - \{0\}. \\ V(x) \leq 0 \text{ dans } D. \end{cases}$$

Alors, $x = 0$ est stable, de plus si

$$V'(0) < 0 \text{ dans } D - \{0\},$$

alors $x = 0$ est asymptotique stable.

CHAPITRE 2

Les sols gonflants via Lord Shulman avec effets de microtempératures

2.1 Position du problème

Considérons le système suivant *:*

$$
\begin{cases}
\rho_z z_{tt} = a_1 z_{xx} + a_2 u_{xx} - \beta_0 \left(\tau\theta_{tx} + \theta_x\right), & dans \ (0,1) \times (0,\infty), \\
\rho_u u_{tt} = a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx} - \beta u_t - \beta_1 \left(\tau\theta_t + \theta\right) & \\
\quad - \mu_2 \left(\tau T_{tx} + T_x\right), & dans \ (0,1) \times (0,\infty), \\
a \left(\tau\theta_t + \theta\right)_t = -\beta_0 z_{tx} + \beta_1 u_t + k\theta_{xx} + k_1 T_x, & dans \ (0,1) \times (0,\infty), \\
b \left(\tau T_t + T\right)_t = k_4 T_{xx} - \mu_2 u_{tx} - k_2 T - k_1 \theta_x, & dans \ (0,1) \times (0,\infty).
\end{cases} \tag{2.1.1}
$$

Avec les conditions initiales suivantes

$$
\begin{aligned}
& u\left(x,0\right) = u^0\left(x\right), \, u_t\left(x,0\right) = u^1\left(x\right), \ z\left(x,0\right) = z^0\left(x\right), && x \in (0,\,1), \\
& z_t\left(x,0\right) = z^1\left(x\right), \ \theta\left(x,0\right) = \theta^0\left(x\right), \ \theta_t\left(x,0\right) = \theta^1\left(x\right), && x \in (0,\,1), \\
& T\left(x,0\right) = T^0\left(x\right), \, T_t\left(x,0\right) = T^1\left(x\right), && x \in (0,\,1),
\end{aligned} \tag{2.1.2}
$$

où u^0, u^1, z^0, z^1, θ^0, θ^1, T^0 et T^1 *sont des fonctions données,*

et les conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
& z_x\left(0,t\right) = z_x\left(1,t\right) = u_x\left(0,t\right) = u_x\left(1,t\right) = 0, && t > 0, \\
& \theta\left(0,t\right) = \theta\left(1,t\right) = T(0,t) = T(1,t) = 0, && t > 0.
\end{aligned} \tag{2.1.3}
$$

Pour éliminer les termes non décroissants, on suppose que les conditions initiales satisfaient

$$\int_0^1 u^0 dx = \int_0^1 u^1 dx = 0,$$

et

$$\int_0^1 z^0 dx = \int_0^1 z^1 dx = 0,$$

Dans ce travail, nous montrons que les dissipations dues aux effets des microtempératures et la température sont suffisamment fortes pour stabiliser le système de manière exponentielle. la stabilité de ce système sera étudiée par la la méthode des multiplicateurs

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section nous démontrons l'existence et l'unicite de la solution du système (2.1.1)-(2.1.3), en utilisant la théorie des semi-groupes [12].
On considère l'espace de Hilbert

$$\mathbb{H} = \left\{ H_*^2(0,1) \times L^2(0,1) \times H_*^2(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \right\},$$

où

$$H_*^2(0,1) = \left\{ \Psi \in H^2(0,1),\ \Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0 \right\}.$$

Ensuite, on définie la fonction vectorielle $U = (z, v, u, \phi, \theta, \vartheta, T, S)^T$ et on pose $v = z_t$, et $\phi = u_t$, $\vartheta = \theta_t$ et $S = T_t$, donc le système (2.1.1)-(2.1.3) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}\mathbb{U}, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0 = \left(z^0,\ z^1,\ u^0,\ u^1,\ \theta^0,\ \theta^1, T^0, T^1\right)^T, \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ est défini par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{\rho_z}D^2 & 0 & \frac{a_2}{\rho_z}D^2 & 0 & -\frac{\beta_0}{\rho_z}D & -\frac{\tau\beta_0}{\rho_z}D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{\rho_u}D^2 & 0 & \frac{a_3}{\rho_u}D^2 & -\frac{\beta}{\rho_u} & -\frac{\beta_1}{\rho_u} & -\frac{\tau\beta_1}{\rho_u} & -\frac{\mu_2}{\rho_u}D & -\frac{\tau\mu_2}{\rho_u}D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_0}{a\tau}D & 0 & \frac{\beta_1}{a\tau} & \frac{k}{a\tau}D^2 & -\frac{1}{\tau} & \frac{k_1}{a\tau}D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_2}{b\tau} & -\frac{k_1}{b\tau}D & 0 & \frac{k_4}{b\tau}D^2 - \frac{k_2}{b\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

On muni l'espace $\mathbb{H}$ *du produit scalaire, avec* $U=(z,v,u,\phi,\theta,\vartheta,T,S)^T\in\mathbb{H}$ *et* $\tilde{U}=(\tilde{z},\tilde{v},\tilde{u},\tilde{\phi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta},\tilde{T},\tilde{S})^T\in\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned}\left\langle U,\widetilde{U}\right\rangle :=&\frac{1}{2}\Big\{\rho v\tilde{v}+\rho\phi\tilde{\phi}+a_1 z_x\tilde{z}_x+a_3 u_x\tilde{u}_x+a_2\left(\tilde{u}_x z_x+u_x\tilde{z}_x\right)\\&+a\left[(\tau\vartheta+\theta)\left(\tau\tilde{\vartheta}+\tilde{\theta}\right)\right]+k\tau\theta_x\tilde{\theta}_x+k_4\tau T_x\tilde{T}_x+k_2\tau T\tilde{T}\\&+b\left[(\tau S+T)\left(\tau\tilde{S}+\tilde{T}\right)\right]+k_1\tau\left(\tilde{\theta}_x T+\theta_x\tilde{T}\right)\Big\}.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ *est donné par*

$$D(\mathcal{A})=\begin{pmatrix}U\in\mathbb{H}\ /\ u\in H_*^2(0,1)\cap H^1(0,1),\ v\in H_*^2(0,1),\\ \varphi\in H_*^2(0,1)\cap H^1(0,1),\ \phi\in H_*^2(0,1),\\ \theta\in H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1),\ \vartheta\in H_0^1(0,1),\\ T\in H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1),\ S\in H_0^1(0,1)\end{pmatrix}.$$

D'aprés [2], le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathbb{H}$.

Proposition 2.2.1 $\mathcal{A}$ *est un opérateur dissipatif, c'est à dire*

$$\langle\mathcal{A}U,\ U\rangle_{\mathbb{H}}\leq 0.$$

Preuve *En utilisant la définition du produit scalaire (2.2.1), on trouve*

$$\langle\mathcal{A}U,\ U\rangle_{\mathbb{H}}=-\beta\int_0^1 u_t^2dx-\frac{3k}{4}\int_0^1\theta_x^2dx-k_4\int_0^1 T_x^2dx-\left(k_2-\frac{k_1^2}{k}\right)\int_0^1 T^2dx\leq 0,$$

pour $k_2-\frac{k_1^2}{k}>0$. *Alors l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est dissipatif.*

Maintenant, en utilisant le Lemme de Lax–Milgram ou le théorème de Hille-Yosida pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *[2] Supposons que* $U_0\in D(\mathcal{A})$. *Alors, le problème (2.1.1) admet une unique solution* $U\in C^1([0,\ \infty);\mathbb{H})\cap C^0([0,\ \infty);D(\mathcal{A}))$.

2.3 *Stabilité exponentielle*

Dans cette section nous allons utiliser la technique des multiplicateurs qui se base sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov pour montrer la stabilisation exponentielle. Nous commençons par l'introduction de quelques fonctionnelles et par la démonstration de quelques lemmes qui nous seront utiles pour la suite de ce chapitre.

Lemme 2.3.1 *Soit (z, u, θ, T) une solution du système (2.1.1), alors la fonctionnelle d'énergie E, définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \begin{pmatrix} \rho_z z_t^2 + \rho_u u_t^2 + a_1 z_x^2 + a_3 u_x^2 + 2a_2 u_x z_x + a(\tau\theta_t + \theta)^2 \\ k\tau\theta_x^2 + b(\tau T_t + T)^2 + k_4 \tau T_x^2 + k_2 \tau T^2 + 2k_1 \tau \theta_x T \end{pmatrix} dx, \ t > 0,$$

vérifié

$$E'(t) \leq -\beta \int_0^1 u_t^2 dx - \frac{3k}{4}\int_0^1 \theta_x^2 dx - k_4 \int_0^1 T_x^2 dx - \left(k_2 - \frac{k_1^2}{k}\right)\int_0^1 T^2 dx, \quad t > 0, \quad (2.3.1)$$

Preuve *La multiplication de la première équation du système (2.1.1) par z_t, la deuxième par u_t , la troisième par $(\tau\theta_t + \theta)$ et la quatrième par $(\tau T_t + T)$,*

$$\begin{aligned}
\rho_z \int_0^1 z_{tt} z_t dx &= a_1 \int_0^1 z_{xx} z_t dx + a_2 \int_0^1 u_{xx} z_t dx \\
&\quad -\beta_0 \int_0^1 (\tau\theta_{tx} + \theta_x) z_t dx, \\
\rho_u \int_0^1 u_{tt} u_t dx &= a_3 \int_0^1 u_{xx} u_t dx + a_2 \int_0^1 z_{xx} u_t dx - \beta \int_0^1 u_t^2 dx \\
&\quad -\beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u_t dx - \mu_2 \int_0^1 (\tau T_{tx} + T_x) u_t dx, \\
a \int_0^1 (\tau\theta_{tt} + \theta_t)(\tau\theta_t + \theta) dx &= -\beta_0 \int_0^1 z_{tx}(\tau\theta_t + \theta) dx + \beta_1 \int_0^1 u_t (\tau\theta_t + \theta) dx \\
&\quad +k \int_0^1 \theta_{xx}(\tau\theta_t + \theta) dx + k_1 \int_0^1 T_x (\tau\theta_t + \theta) dx, \\
b \int_0^1 (\tau T_{tt} + T_t)(\tau T_t + T) dx &= k_4 \int_0^1 T_{xx}(\tau T_t + T) dx - \mu_2 \int_0^1 u_{tx}(\tau T_t + T) dx \\
&\quad -k_2 \int_0^1 T(\tau T_t + T) dx - k_1 \int_0^1 \theta_x (\tau T_t + T) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties sur $[0,1]$ *ainsi que les conditions aux limites (2.1.3), nous trouvons*

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_z}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t^2 dx &= a_1\left[z_x z_t\right]_{x=0}^{x=1} - a_1\int_0^1 z_x z_{tx} dx + a_2\left[u_x z_t\right]_{x=0}^{x=1} \\
&\quad - a_2\int_0^1 u_x z_{tx} dx - \beta_0\left[\left(\tau\theta_t+\theta\right) z_t\right]_{x=0}^{x=1} + \beta_0\int_0^1 \left(\tau\theta_t+\theta\right) z_{tx} dx, \\
\frac{\rho_u}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2 dx &= a_3\left[u_x u_t\right]_{x=0}^{x=1} - a_3\int_0^1 u_x u_{tx} dx + a_2\left[z_x u_t\right]_{x=0}^{x=1} \\
&\quad - a_2\int_0^1 z_x u_{tx} dx - \beta\int_0^1 u_t^2 dx - \beta_1\int_0^1 \left(\tau\theta_t+\theta\right) u_t dx \\
&\quad - \mu_2\left[\left(\tau T_t+T\right) u_t\right]_{x=0}^{x=1} + \mu_2\int_0^1 \left(\tau T_t+T\right) u_{tx} dx, \\
\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\tau\theta_t+\theta\right)^2 dx &= -\beta_0\int_0^1 z_{tx}\left(\tau\theta_t+\theta\right) dx + \beta_1\int_0^1 u_t\left(\tau\theta_t+\theta\right) dx \\
&\quad + k\left[\theta_x\left(\tau\theta_t+\theta\right)\right]_{x=0}^{x=1} - k\int_0^1 \theta_x\left(\tau\theta_{tx}+\theta_x\right) dx \\
&\quad + k_1\left[T\left(\tau\theta_t+\theta\right)\right]_{x=0}^{x=1} - k_1\int_0^1 T\left(\tau\theta_{tx}+\theta_x\right) dx, \\
\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\tau T_t+T\right)^2 dx &= k_4\left[T_x\left(\tau T_t+T\right)\right]_{x=0}^{x=1} - k_4\int_0^1 T_x\left(\tau T_{tx}+T_x\right) dx \\
&\quad - \mu_2\int_0^1 u_{tx}\left(\tau T_t+T\right) dx - k_2\int_0^1 T\left(\tau T_t+T\right) dx \\
&\quad - k_1\int_0^1 \theta_x\left(\tau T_t+T\right) dx.
\end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_z}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t^2dx &= -\frac{a_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_x^2dx - a_2\frac{d}{dt}\int_0^1 u_xz_xdx \\
&\quad +a_2\int_0^1 u_{tx}z_xdx + \beta_0\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, z_{tx}dx, \\
\frac{\rho_u}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2dx &= -\frac{a_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_x^2dx - a_2\int_0^1 z_xu_{tx}dx \\
&\quad -\beta\int_0^1 u_t^2dx - \beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, u_tdx \\
&\quad +\mu_2\int_0^1 (\tau T_t+T)\, u_{tx}dx, \\
\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\, dx &= -\beta_0\int_0^1 z_{tx}\,(\tau\theta_t+\theta)\, dx + \beta_1\int_0^1 u_t\,(\tau\theta_t+\theta)\, dx \\
&\quad -k\tau\int_0^1 \theta_x\theta_{tx}dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx - k_1\tau\int_0^1 T\theta_{tx}dx \\
&\quad -k_1\int_0^1 T\theta_xdx, \\
\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\tau T_t+T)^2\, dx &= -k_4\tau\int_0^1 T_xT_{tx}dx - k_4\int_0^1 T_x^2dx - \mu_2\int_0^1 u_{tx}\,(\tau T_t+T)\, dx \\
&\quad -k_2\tau\int_0^1 TT_tdx - k_2\int_0^1 T^2dx - k_1\tau\int_0^1 \theta_xT_tdx \\
&\quad -k_1\int_0^1 \theta_xTdx.
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_z}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t^2dx &= -\frac{a_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_x^2dx - a_2\frac{d}{dt}\int_0^1 u_xz_xdx \\
&\quad +a_2\int_0^1 u_{tx}z_xdx + \beta_0\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, z_{tx}dx, \\
\frac{\rho_u}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2dx &= -\frac{a_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_x^2dx - a_2\int_0^1 z_xu_{tx}dx - \beta\int_0^1 u_t^2dx \\
&\quad -\beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, u_tdx + \mu_2\int_0^1 (\tau T_t+T)\, u_{tx}dx, \\
\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\, dx &= -\beta_0\int_0^1 z_{tx}(\tau\theta_t+\theta)\, dx + \beta_1\int_0^1 u_t(\tau\theta_t+\theta)\, dx \\
&\quad -\frac{k\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta_x^2dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx - k_1\tau\int_0^1 T\theta_{tx}dx \\
&\quad -k_1\int_0^1 T\theta_xdx, \\
\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\tau T_t+T)^2\, dx &= -\frac{k_4\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 T_x^2dx - k_4\int_0^1 T_x^2dx - \mu_2\int_0^1 u_{tx}(\tau T_t+T)\, dx \\
&\quad -\frac{k_2\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 T^2dx - k_2\int_0^1 T^2dx - k_1\tau\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta_xTdx \\
&\quad +k_1\tau\int_0^1 \theta_{tx}Tdx - k_1\int_0^1 \theta_xTdx.
\end{aligned}$$

Par sommation, on trouve

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{2dt}\int_0^1 \left(\begin{array}{c} \rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a_1z_x^2+a_3u_x^2+2a_2u_xz_x+a(\tau\theta_t+\theta)^2 \\ +k\tau\theta_x^2+b(\tau T_t+T)^2+k_4\tau T_x^2+k_2\tau T^2+2k_1\tau\theta_xT \end{array}\right)dx \\
&= -\beta\int_0^1 u_t^2dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx - 2k_1\int_0^1 \theta_xTdx - k_4\int_0^1 T_x^2dx - k_2\int_0^1 T^2dx.
\end{aligned}$$

Alors, l'énergie associée à ce système est définie par

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a_1z_x^2+a_3u_x^2+2a_2u_xz_x+a(\tau\theta_t+\theta)^2 \\
&\quad +k\tau\theta_x^2+b(\tau T_t+T)^2+k_4\tau T_x^2+k_2\tau T^2+2k_1\tau\theta_xT\big)\, dx, \quad t>0,
\end{aligned}$$

et

$$E'(t) = -\beta\int_0^1 u_t^2dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx - 2k_1\int_0^1 \theta_xTdx - k_4\int_0^1 T_x^2dx - k_2\int_0^1 T^2dx, \quad t>0. \quad (2.3.2)$$

On a

$$-2k_1\int_0^1 \theta_xTdx \le -k_1\int_0^1 \theta_xTdx.$$

Grace à l'inégalité de Young, on arrive à

$$-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}k_1\int_0^1 \theta_xTdx \le \frac{k}{4}\int_0^1 \theta_x^2dx + \frac{k_1^2}{k}\int_0^1 T^2dx, \quad (2.3.3)$$

on substitue (2.3.3) dans (2.3.2) on trouve

$$E'(t) \leq -\beta \int_0^1 u_t^2 dx - \frac{3k}{4} \int_0^1 \theta_x^2 dx - k_4 \int_0^1 T_x^2 dx - \left(k_2 - \frac{k_1^2}{k}\right) \int_0^1 T^2 dx, \quad t > 0, \qquad (2.3.4)$$

où $k_2 > \frac{k_1^2}{k}$.

Remarque 2.3.1 *L'énergie de ce système est positive, car*

$$a_1 \left(z_x + \frac{a_2}{a_1} u_x\right)^2 - \left(\frac{a_2^2}{a_1} - a_3\right) u_x^2 = a_1 z_x^2 + 2a_2 z_x u_x + a_3 u_x^2, \qquad (2.3.5)$$

et

$$\kappa\tau \left(\theta_x + \frac{k_1}{\kappa} T\right)^2 - \tau \left(\frac{k_1^2}{\kappa} - k_2\right) T^2 = \kappa\tau\theta_x^2 + 2k_1\tau\theta_x T + k_2 \tau T^2. \qquad (2.3.6)$$

Puis,substituons (2.3.5) et (2.3.6) dans $E(t)$, *on trouve*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\begin{array}{c} \rho_z z_t^2 + \rho_u u_t^2 + a(\tau\theta_t + \theta)^2 + a_1 \left(z_x + \frac{a_2}{a_1} u_x\right)^2 \\ -\left(\frac{a_2^2}{a_1} - a_3\right) u_x^2 + b(\tau T_t + T)^2 + k_4 \tau T_x^2 + \kappa\tau \left(\theta_x + \frac{k_1}{k} T\right)^2 \\ -\tau \left(\frac{k_1^2}{k} - k_2\right) T^2 \end{array} \right) dx.$$

Si

$$a_2^2 < a_1 a_3,$$

et

$$k_1^2 < k k_2,$$

on arrive à :

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\begin{array}{c} \rho_z z_t^2 + \rho_u u_t^2 + a(\tau\theta_t + \theta)^2 \\ +a_1 \left(z_x + \frac{a_2}{a_1} u_x\right)^2 + b(\tau T_t + T)^2 \\ +k_4 \tau T_x^2 + \kappa\tau \left(\theta_x + \frac{k_1}{\kappa} T\right)^2 \end{array} \right) \geq 0.$$

Donc $E(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

Nous remarquons d'après la relation (2.3.4) que la fonction énergétique est non-croissante. Or, cette inégalité n'implique pas nécessairement la décroissance exponentielle. A cet effet, nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov appropriée afin d'établir une estimation de décroissance exponentielle de l'énergie.

Lemme 2.3.2 *Soit* (z, u, θ, T) *solution du système (2.1.1), alors la fonctionnelle*

$$I_1(t) = \rho_u \int_0^1 u_t z dx - \rho_z \frac{a_3}{a_2} \int_0^1 z_t z dx, \ t > 0, \qquad (2.3.7)$$

vérifié

$$I_1'(t) \leq -\frac{\alpha}{2}\int_0^1 z_x^2 dx + c_1\int_0^1 u_t^2 dx + c_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2 dx + \frac{2\mu_2^2}{\alpha}\int_0^1 (\tau T_t + T)^2, \quad t>0, \tag{2.3.8}$$

où $c_1 = \max\left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \frac{\rho_u a_2}{4a_3}, \frac{2a_3^2\beta_0^2}{\alpha a_2^2} + \frac{2\beta_1^2}{\alpha}\right)$, $\alpha = \left(a_2 - \frac{a_3 a_1}{a_2}\right)$.

Preuve *On multiplie la deuxième équation du système (2.1.1) par z et on intégre sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve*

$$\begin{aligned}\rho_u\int_0^1 u_{tt} z dx &= a_3\int_0^1 u_{xx} z dx + a_2\int_0^1 z_{xx} z dx - \beta\int_0^1 u_t z dx - \beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta) z dx \\ &\quad -\mu_2\int_0^1 (\tau T_{tx} + T_x) z dx.\end{aligned}$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (2.1.3), on trouve

$$\begin{aligned}\rho_u\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t z dx - \rho_u\int_0^1 u_t z_t dx &= a_3[u_x z]_{x=0}^{x=1} - a_3\int_0^1 u_x z_x dx + a_2[z_x z]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad -a_2\int_0^1 z_x^2 dx - \beta\int_0^1 u_t z dx - \beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta) z dx \\ &\quad -\mu_2[(\tau T_t + T) z]_{x=0}^{x=1} + \mu_2\int_0^1 (\tau T_t + T) z_x dx,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\rho_u\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t z dx - \rho_u\int_0^1 u_t z_t dx &= -a_3\int_0^1 u_x z_x dx - a_2\int_0^1 z_x^2 dx - \beta\int_0^1 u_t z dx \\ &\quad -\beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta) z dx + \mu_2\int_0^1 (\tau T_t + T) z_x dx.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Maintenant, multiplions la première équation du système (2.1.1) par $-\frac{a_3}{a_2}z$, intégrant sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient

$$-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_{tt} z dx = -\frac{a_3 a_1}{a_2}\int_0^1 z_{xx} z dx - a_3\int_0^1 u_{xx} z dx + \frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1 (\tau\theta_{tx}+\theta_x) z dx.$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx + \rho_z\frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2 dx &= -\frac{a_3 a_1}{a_2}[z_x z]_{x=0}^{x=1} + \frac{a_3 a_1}{a_2}\int_0^1 z_x^2 dx \\ &\quad -a_3[u_x z]_{x=0}^{x=1} + a_3\int_0^1 u_x z_x dx + \frac{a_3\beta_0}{a_2}[(\tau\theta_t+\theta) z]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad -\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta) z_x dx,\end{aligned}$$

alors

$$-\rho_z \frac{a_3}{a_2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx + \rho_z \frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2 dx = \frac{a_3 a_1}{a_2}\int_0^1 z_x^2 dx + a_3\int_0^1 u_x z_x dx - \frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z_x dx, \tag{2.3.10}$$

On fait la somme de (2.3.9) et (2.3.10), on obtient:

$$\begin{aligned}\rho_u \frac{d}{dt}\int_0^1 u_t z dx - \rho_z \frac{a_3}{a_2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx &= -\left(a_2 - \frac{a_3 a_1}{a_2}\right)\int_0^1 z_x^2 dx + \rho_u \int_0^1 u_t z_t dx \\ &-\beta\int_0^1 u_t z dx - \rho_z \frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2 dx + \mu_2 \int_0^1 (\tau T_t + T) z_x dx \\ &-\beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx - \frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z_x dx.\end{aligned}$$

Alors

$$I_1(t) = \rho_u \int_0^1 u_t z dx - \rho_z \frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t z dx,$$

et

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= -\left(a_2 - \frac{a_3 a_1}{a_2}\right)\int_0^1 z_x^2 dx + \rho_u \int_0^1 u_t z_t dx - \beta \int_0^1 u_t z dx \\ &-\rho_z \frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2 dx + \mu_2 \int_0^1 (\tau T_t + T) z_x dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx \\ &-\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z_x dx. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

En utilisant le fait que $\alpha = \left(a_2 - \frac{a_3 a_1}{a_2}\right)$ *et les inégalités de Young et de Poincaré, on trouve*

$$\rho_u \int_0^1 u_t z_t dx \le \rho_z \frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2 dx + \frac{\rho_u^2 a_2}{4\rho_z a_3}\int_0^1 u_t^2 dx, \tag{2.3.12}$$

$$-\beta \int_0^1 u_t z dx \le \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\alpha}{8}\int_0^1 z_x^2 dx, \tag{2.3.13}$$

$$-\beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx \le \frac{2\beta_1^2}{\alpha}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + \frac{\alpha}{8}\int_0^1 z_x^2 dx, \tag{2.3.14}$$

$$\mu_2 \int_0^1 (\tau T_t + T) z_x dx \le \frac{2\mu_2^2}{\alpha}\int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + \frac{\alpha}{8}\int_0^1 z_x^2 dx, \tag{2.3.15}$$

$$-\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, z_x dx \leq \frac{2a_3^2\beta_0^2}{\alpha a_2^2}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\, dx + \frac{\alpha}{8}\int_0^1 z_x^2 dx, \tag{2.3.16}$$

On remplace (2.3.12), (2.3.13), (2.3.14), (2.3.15) et (2.3.16) dans (2.3.11), on trouve

$$I_1'(t) \leq -\frac{\alpha}{2}\int_0^1 z_x^2 dx + c_1\int_0^1 u_t^2 dx + c_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\, dx + \frac{2\mu_2^2}{\alpha}\int_0^1 (\tau T_t+T)^2\, dx,$$

où $c_1 = \max\left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \frac{\rho_u^2 a_2}{4a_3\rho_z}, \frac{2a_3^2\beta_0^2}{\alpha a_2^2} + \frac{2\beta_1^2}{\alpha}\right)$.

Lemme 2.3.3 *Soit (z,u,θ,T) solution du système (2.1.1), alors la fonctionnelle*

$$I_2(t) = \rho_u\int_0^1 u_t u dx + \frac{\beta}{2}\int_0^1 u^2 dx, \quad t>0, \tag{2.3.17}$$

vérifié

$$I_2'(t) \leq -\frac{a_3}{2}\int_0^1 u_x^2 dx + \rho_u\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{3a_2^2}{2a_3}\int_0^1 z_x^2 dx + \frac{3\mu_2^2}{2a_3}\int_0^1 (\tau T_t+T)^2\, dx \tag{2.3.18}$$
$$+\frac{3\beta_1^2}{2a_3}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\, dx, \quad t>0.$$

Preuve *On multiplie la deuxième équation du système (2.1.1) par u et on intègre sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient*

$$\begin{aligned}\rho_u\int_0^1 u_{tt}u dx &= a_3\int_0^1 u_{xx}u dx + a_2\int_0^1 z_{xx}u dx - \beta\int_0^1 u_t u dx - \mu_2\int_0^1 (\tau T_{tx}+T_x)\, u dx \\ &\quad -\beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, u dx.\end{aligned}$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (2.1.3), on trouvre

$$\begin{aligned}\rho_u\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t u dx - \rho_u\int_0^1 u_t^2 dx &= a_3[u_x u]_{x=0}^{x=1} - a_3\int_0^1 u_x^2 dx + a_2[z_x u]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad -a_2\int_0^1 z_x u_x dx - \beta\frac{d}{2dt}\int_0^1 u^2 dx - \mu_2\left[(\tau T_t+T)\, u\right]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad +\mu_2\int_0^1 (\tau T_t+T)\, u_x dx - \beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, u dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\rho_u\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t u dx - \rho_u\int_0^1 u_t^2 dx &= -a_3\int_0^1 u_x^2 dx - a_2\int_0^1 z_x u_x dx \\ &\quad -\beta\frac{d}{2dt}\int_0^1 u^2 dx + \mu_2\int_0^1 (\tau T_t+T)\, u_x dx \\ &\quad -\beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, u dx.\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Ensuite

$$I_2(t) = \rho_u \int_0^1 u_t u dx + \frac{\beta}{2}\int_0^1 u^2 dx, \quad t > 0,$$

et

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= -a_3 \int_0^1 u_x^2 dx - a_2 \int_0^1 z_x u_x dx + \rho_u \int_0^1 u_t^2 dx \\ &\quad + \mu_2 \int_0^1 (\tau T_t + T) u_x dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau \theta_t + \theta) u dx \quad t > 0. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy–Schwarz, on arrive à

$$-a_2 \int_0^1 z_x u_x dx \leq \frac{3a_2^2}{2a_3} \int_0^1 z_x^2 dx + \frac{a_3}{6} \int_0^1 u_x^2 dx, \tag{2.3.20}$$

$$\mu_2 \int_0^1 (\tau T_t + T) u_x dx \leq \frac{3\mu_2^2}{2a_3} \int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + \frac{a_3}{6} \int_0^1 u_x^2 dx, \tag{2.3.21}$$

$$-\beta_1 \int_0^1 (\tau \theta_t + \theta) u dx \leq \frac{3\beta_1^2}{2a_3} \int_0^1 (\tau \theta_t + \theta)^2 dx + \frac{a_3}{6} \int_0^1 u_x^2 dx. \tag{2.3.22}$$

On substitue (2.3.20), (2.3.21) et (2.3.22) dans $I_2'(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_2'(t) &\leq -\frac{a_3}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \rho_u \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{3a_2^2}{2a_3} \int_0^1 z_x^2 dx \\ &\quad + \frac{3\mu_2^2}{2a_3} \int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + \frac{3\beta_1^2}{2a_3} \int_0^1 (\tau \theta_t + \theta)^2 dx \quad t > 0. \end{aligned}$$

Lemme 2.3.4 *Soit (z, u, θ, T) solution du système (2.1.1), alors la fonctionnelle*

$$I_3(t) = -\rho_z \int_0^1 z_t z dx, \ t > 0, \tag{2.3.23}$$

vérifié, pour tout $\varepsilon_3 > 0$

$$I_3'(t) \leq -\rho_z \int_0^1 z_t^2 dx + c_3 \int_0^1 z_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 (\tau \theta_t + \theta)^2 dx, \quad t > 0, \tag{2.3.24}$$

où $c_3 = a_1 + \frac{a_2}{4\varepsilon_3} + \frac{\beta_0^2}{4\varepsilon_3}$.

Preuve *En multipliant la première équation du système (2.1.1) par $-z$ et en intègrant sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve*

$$-\rho_z \int_0^1 z_{tt} z dx = -a_1 \int_0^1 z_{xx} z dx - a_2 \int_0^1 u_{xx} z dx + \beta_0 \int_0^1 (\tau \theta_{tx} + \theta_x) z dx,$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (2.1.3), on arrive à

$$\begin{aligned}-\rho_z\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx+\rho_z\int_0^1 z_t^2 dx &= -a_1[z_x z]_{x=0}^{x=1}+a_1\int_0^1 z_x^2 dx-a_2[u_x z]_{x=0}^{x=1}\\ &+a_2\int_0^1 u_x z_x dx+\beta_0[(\tau\theta_t+\theta)\,z]_{x=0}^{x=1}\\ &-\beta_0\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_x dx,\end{aligned}$$

on obtient

$$-\rho_z\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx+\rho_z\int_0^1 z_t^2 dx=a_1\int_0^1 z_x^2 dx+a_2\int_0^1 u_x z_x dx-\beta_0\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_x dx,$$

alors

$$I_3(t)=-\rho_z\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx,\quad t>0,$$

et

$$I_3'(t)=-\rho_z\int_0^1 z_t^2 dx+a_1\int_0^1 z_x^2 dx+a_2\int_0^1 u_x z_x dx-\beta_0\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_x dx,\quad t>0.$$

En appliquant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$a_2\int_0^1 u_x z_x dx\le\varepsilon_3\int_0^1 u_x^2 dx+\frac{a_2^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 z_x^2 dx,\tag{2.3.25}$$

$$-\beta_0\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_x dx\le\varepsilon_3\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)^2 dx+\frac{\beta_0^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 z_x^2 dx,\tag{2.3.26}$$

La substitution des estimations précédentes dans I_3' donne

$$I_3'(t)\le-\rho_z\int_0^1 z_t^2 dx+c_3\int_0^1 z_x^2 dx+\varepsilon_3\int_0^1 u_x^2 dx+\varepsilon_3\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)^2 dx,\quad t>0.$$

où $c_3=a_1+\frac{a_2^2}{4\varepsilon_3}+\frac{\beta_0^2}{4\varepsilon_3}$.

Lemme 2.3.5 *Soit (z,u,θ,T) la solution du système (2.1.1), alors la fonctionnelle*

$$I_4(t)=-a\tau^2\int_0^1\theta_t\theta dx-\frac{a\tau}{2}\int_0^1\theta^2 dx,\qquad t>0,\tag{2.3.27}$$

vérifié, pour tout $\varepsilon_4>0$

$$\begin{aligned}I_4'(t)\le-\frac{a}{2}\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)^2 dx+c_4\int_1^1\theta_x^2 dx+\varepsilon_4\int_0^1 u_t^2 dx\\ +\varepsilon_4\int_1^1 z_t^2 dx+\varepsilon_4\int_0^1 T_x^2 dx,\quad t>0,\end{aligned}\tag{2.3.28}$$

où $c_4=(a+k\tau+\frac{\beta_0^2\tau^2}{4\varepsilon_4}+\frac{\beta_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4}+\frac{k_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4})$.

Preuve *Multiplions la troisième équation du système (2.1.1) par $-\tau\theta$ et intègrons sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve*

$$\begin{aligned}-a\tau^2\int_0^1 \theta_{tt}\theta dx - a\tau\int_0^1 \theta_t\theta dx &= \beta_0\tau\int_0^1 z_{tx}\theta dx - \beta_1\tau\int_0^1 u_t\theta dx\\ &-k\tau\int_0^1 \theta_{xx}\theta dx - k_1\tau\int_0^1 T_x\theta dx.\end{aligned}$$

En intégrant par parties sur (0, 1), en utilisant les conditions aux limites (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}-a\tau^2\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta_t\theta dx - a\tau\frac{d}{2dt}\int_0^1 \theta^2 dx &= -a\tau^2\int_0^1 \theta_t^2 dx + \beta_0\tau[z_t\theta]_{x=0}^{x=1} - \beta_0\tau\int_0^1 z_t\theta_x dx\\ &-\beta_1\tau\int_0^1 u_t\theta dx - k_1\tau[T\theta]_{x=0}^{x=1} + k_1\tau\int_0^1 T\theta_x dx\\ &-k\tau[\theta_x\theta]_{x=0}^{x=1} + k\tau\int_0^1 \theta_x^2 dx,\end{aligned}$$

on arrive à

$$I_4(t) = -a\tau^2\int_0^1 \theta_t\theta dx - \frac{a\tau}{2}\int_0^1 \theta^2 dx, \quad t>0,$$

et

$$I_4'(t) = -a\tau^2\int_0^1 \theta_t^2 dx - \beta_0\tau\int_0^1 z_t\theta_x dx - \beta_1\tau\int_0^1 u_t\theta dx + k_1\tau\int_0^1 T\theta_x dx + k\tau\int_0^1 \theta_x^2 dx,$$

en utilisant le fait que

$$\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2 dx \le 2\int_0^1 (\tau\theta_t)^2 dx + 2\int_0^1 \theta^2 dx,$$

alors

$$-\int_0^1 (\tau\theta_t)^2 dx \le -\frac{1}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2 dx + \int_0^1 \theta^2 dx,$$

on substitue dans $I_4'(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}I_4'(t) &\le -\frac{a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2 dx + a\int_0^1 \theta^2 dx - \beta_0\tau\int_0^1 z_t\theta_x dx\\ &-\beta_1\tau\int_0^1 u_t\theta dx + k\tau\int_0^1 \theta_x^2 dx - k_1\tau\int_0^1 T_x\theta dx, \quad t>0.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$a\int_0^1 \theta^2 dx \le a\int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{2.3.29}$$

$$-\beta_0\tau\int_0^1 z_t\theta_x dx \le \varepsilon_4\int_0^1 z_t^2 dx + \frac{\beta_0^2\tau^2}{4\varepsilon_4}\int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{2.3.30}$$

$$-\beta_1\tau\int_0^1 u_t\theta dx \leq \varepsilon_4\int_0^1 u_t^2dx+\frac{\beta_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4}\int_0^1\theta_x^2dx, \tag{2.3.31}$$

$$-k_1\tau\int_0^1 T_x\theta dx \leq \varepsilon_4\int_0^1 T_x^2dx+\frac{k_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4}\int_0^1\theta_x^2dx. \tag{2.3.32}$$

En substituant les inégalités précédentes dans $I_4'(t)$, on termine par

$$\begin{aligned} I_4'(t) \leq & -\frac{a}{2}\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)^2dx+c_4\int_1^1\theta_x^2dx+\varepsilon_4\int_0^1u_t^2dx \\ &+\varepsilon_4\int_1^1 z_t^2dx+\varepsilon_4\int_0^1T_x^2dx, \quad t>0, \end{aligned}$$

où $c_4=(a+k\tau+\frac{\beta_0^2\tau^2}{4\varepsilon_4}+\frac{\beta_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4}+\frac{k_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4})$.

Lemme 2.3.6 *Soit (z,u,θ,T) la solution du système (2.1.1), alors la fonctionnelle*

$$I_5(t)=-b\tau^2\int_0^1 T_tTdx-\frac{b\tau}{2}\int_0^1T^2dx, \qquad t>0, \tag{2.3.33}$$

vérifié, pour tout $\varepsilon_5>0$

$$I_5'(t)\leq -\frac{b}{2}\int_0^1(\tau T_t+T)^2dx+c_5\int_0^1T_x^2dx+\frac{\mu_2\tau}{2}\int_0^1u_t^2dx+\frac{k_1\tau}{2}\int_0^1\theta_x^2dx, \quad t>0, \tag{2.3.34}$$

où $c_5=(b+k_4\tau+\frac{\mu_2\tau}{2}+k_2\tau+\frac{k_1\tau}{2})$.

Preuve *En multipliant la quatrième équation du système (2.1.1) par $-\tau T$ et on intégre sur l'intervalle $[0,1]$, nous obtenons*

$$\begin{aligned} -\tau^2b\int_0^1T_{tt}Tdx-b\tau\int_0^1T_tTdx &= -k_4\tau\int_0^1T_{xx}Tdx+\mu_2\tau\int_0^1u_{tx}Tdx \\ &\quad +k_2\tau\int_0^1T^2dx+k_1\tau\int_0^1\theta_xTdx. \end{aligned}$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (2.1.3), on trouve

$$\begin{aligned} -b\tau^2\frac{d}{dt}\int_0^1T_tTdx-\frac{b\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1T^2dx &= -b\tau^2\int_0^1T_t^2dx+k_4\tau\int_0^1T_x^2dx+\mu_2\tau[u_tT]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad -\mu_2\tau\int_0^1u_tT_xdx+k_2\tau\int_0^1T^2dx+k_1\tau\int_0^1\theta_xTdx, \end{aligned}$$

donc

$$I_5(t)=-b\tau^2\int_0^1T_tTdx-\frac{b\tau}{2}\int_0^1T^2dx, \quad t>0,$$

et

$$\begin{aligned} I_5'(t) &= -b\tau^2\int_0^1 T_t^2dx + k_4\tau\int_0^1 T_x^2dx - \mu_2\tau\int_0^1 u_tT_xdx + \\ &\quad +k_2\tau\int_0^1 T^2dx + k_1\tau\int_0^1 \theta_xTdx, \quad t>0, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx \leq 2\int_0^1 (\tau T_t)^2 dx + 2\int_0^1 T^2dx,$$

ce qui nous donne

$$-\int_0^1 (\tau T_t)^2 dx \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + \int_0^1 T^2dx.$$

On remplace dans $I_5'(t)$*, on trouve*

$$\begin{aligned} I_5'(t) &\leq -\frac{b}{2}\int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + b\int_0^1 T^2dx + k_4\tau\int_0^1 T_x^2dx \\ &\quad -\mu_2\tau\int_0^1 u_tT_xdx + k_2\tau\int_0^1 T^2dx + k_1\tau\int_0^1 \theta_xTdx, \quad t>0. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$b\int_0^1 T^2dx \leq b\int_0^1 T_x^2dx, \tag{2.3.35}$$

$$-\mu_2\tau\int_0^1 u_tT_xdx \leq \frac{\mu_2\tau}{2}\int_0^1 T_x^2dx + \frac{\mu_2\tau}{2}\int_0^1 u_t^2dx, \tag{2.3.36}$$

$$k_2\tau\int_0^1 T^2dx \leq k_2\tau\int_0^1 T_x^2dx, \tag{2.3.37}$$

$$k_1\tau\int_0^1 \theta_xTdx \leq \frac{k_1\tau}{2}\int_0^1 \theta_x^2dx + \frac{k_1\tau}{2}\int_0^1 T_x^2dx. \tag{2.3.38}$$

En insérant les relations (2.3.35) et (2.3.36), (2.3.37) et (2.3.38) dans $I_5'(t)$*, on obtient*

$$I_5'(t) \leq -\frac{b}{2}\int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + c_5\int_0^1 T_x^2dx + \frac{\mu_2\tau}{2}\int_0^1 u_t^2dx + \frac{k_1\tau}{2}\int_0^1 \theta_x^2dx, \quad t>0,$$

où $c_5 = (b + k_4\tau + \frac{\mu_2\tau}{2} + k_2\tau + \frac{k_1\tau}{2})$.

Lemme 2.3.7 *La fonctionnelle* $\mathcal{L}(t)$ *définie par*

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + N_4I_4(t) + N_5I_5(t), \ t>0, \tag{2.3.39}$$

où N, N_1, N_4 et N_5 sont des nombres réels positifs à sélectionner de manière appropriée par la suite, et l'énergie $E(t)$ est équivalente à $\mathcal{L}(t)$, càd:
il existe deux constantes positives β_1 et β_2 satisfont

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t > 0. \tag{2.3.40}$$

Preuve *on peut facilement prouver que l'énergie est équivalente à la fonctionnelle de Lyapunov, on a*

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = |N_1 I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + N_4 I_4(t) + N_5 I_5(t)|, \quad t > 0,$$

en rappelant les équations (2.3.7), (2.3.17), (2.3.23), (2.3.27) et (2.3.33) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \; & N_1\rho_u \int_0^1 |u_t z|\, dx + \frac{N_1\rho_z a_3}{a_2}\int_0^1 |z_t z|\, dx + \rho_u \int_0^1 |u_t u|\, dx \\ & + \frac{\beta}{2}\int_0^1 u^2 dx + \rho_z \int_0^1 |z_t z|\, dx + N_4 a\tau^2 \int_0^1 |\theta_t \theta|\, dx \\ & + \frac{N_4 a\tau}{2}\int_0^1 \theta^2 dx + N_5 b\tau^2 \int_0^1 |T_t T|\, dx + \frac{N_5 b\tau}{2}\int_0^1 T^2 dx. \end{aligned}$$

En rappelant les inégalités de Young et de Poincaré

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \; & \frac{N_1\rho_u}{2}\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{N_1\rho_u}{2}\int_0^1 z_x^2 dx + \frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2}\int_0^1 z_t^2 dx \\ & + \frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2}\int_0^1 z_x^2 dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\beta}{2}\int_0^1 u_x^2 dx \\ & + \frac{\rho_z}{2}\int_0^1 z_t^2 dx + \frac{\rho_z}{2}\int_0^1 z_x^2 dx + \frac{N_4 a\tau^2}{2}\int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{N_4 a\tau^2}{2}\int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & + \frac{N_4 a\tau}{2}\int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{N_5 b\tau^2}{2}\int_0^1 T_t^2 dx + \frac{N_5 b\tau^2}{2}\int_0^1 T^2 dx \\ & + \frac{N_5 b\tau}{2}\int_0^1 T_x^2 dx, \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \frac{N_4 a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t)^2 dx &= \frac{N_4 a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta - \theta)^2 dx \\ &\leq N_4 a \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + N_4 a \int_0^1 \theta^2 dx \\ &\leq N_4 a \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + N_4 a \int_0^1 \theta_x^2 dx, \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{N_5 b}{2}\int_0^1 (\tau T_t)^2\, dx &= \frac{N_5 b}{2}\int_0^1 (\tau T_t + T - T)^2\, dx \\ &\leq N_5 b\int_0^1 (\tau T_t + T)^2\, dx + N_5 b\int_0^1 T^2 dx \\ &\leq N_5 b\int_0^1 (\tau T_t + T)^2\, dx + N_5 b\int_0^1 T_x^2 dx.\end{aligned} \tag{2.3.43}$$

En substituant (2.3.42) et (2.3.43) dans (2.3.41), on obtient

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq\ & \left(\frac{N_1\rho_u}{2} + \frac{\rho_u}{2}\right)\int_0^1 u_t^2 dx + \left(\frac{N_1\rho_u}{2} + \frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2} + \frac{\rho_z}{2}\right)\int_0^1 z_x^2 dx \\ & + \left(\frac{\rho_u}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\int_0^1 u_x^2 dx + \left(\frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2} + \frac{\rho_z}{2}\right)\int_0^1 z_t^2 \\ & + N_4 a\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2\, dx + \left(\frac{N_4 a\tau^2}{2} + \frac{N_4 a\tau}{2} + N_4 a\right)\int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & + N_5 b\int_0^1 (\tau T_t + T)^2\, dx + \frac{N_5 b\tau^2}{2}\int_0^1 T^2 dx \\ & + \left(\frac{N_5 b\tau}{2} + N_5 b\right)\int_0^1 T_x^2 dx,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq c' E(t),$$

d'où

$$(N - c')E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c')E(t), \quad t > 0.$$

Alors, pour N assez grand, on trouve deux constante positives β_1 et β_2, telles que

$$\beta_1 = N - c' > 0 \text{ et } \beta_2 = N + c',$$

nous trouvons l'estimation

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t > 0,$$

ainsi, $\mathcal{L}(t)$ et $E(t)$ sont équivalentes.

Théorème 2.3.1 *Soit (z, u, θ, T) la solution du système (2.1.1), alors l'énergie $E(t)$ décroît exponentiellement, c'est à dire qu'il existe deux constantes positives C et d indépendantes des données initiales telles que*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-dt} \quad , \forall t > 0, \tag{2.3.44}$$

Preuve *En différenciant l'équation (2.3.39), puis en rappelant les équations (2.3.1), (2.3.8), (2.3.18), (2.3.24), (2.3.28) et (2.3.34), on obtient*

$$\mathcal{L}'(t) \leq NE'(t) + N_1 I_1'(t) + I_2'(t) + I_3'(t) + N_4 I_4'(t) + N_5 I_5'(t) \quad , t > 0,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \quad \leq \quad & -\beta N \int_0^1 u_t^2 dx - \frac{3kN}{4} \int_0^1 \theta_x^2 dx - k_4 N \int_0^1 T_x^2 dx \\
& - \left(k_2 - \frac{k_1^2}{k}\right) N \int_0^1 T^2 dx - \frac{\alpha N_1}{2} \int_0^1 z_x^2 dx + N_1 c_1 \int_0^1 u_t^2 dx \\
& + N_1 c_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + \frac{2\mu_2^2 N_1}{\alpha} \int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx - \frac{a_3}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \\
& + \rho_u \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{3a_2^2}{2a_3} \int_0^1 z_x^2 dx + \frac{3\mu_2^2}{2a_3} \int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx \\
& + \frac{3\beta_1^2}{2a_3} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx - \rho_z \int_0^1 z_t^2 dx + c_3 \int_0^1 z_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx \\
& + \varepsilon_3 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx - \frac{aN_4}{2} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + c_4 N_4 \int_1^1 \theta_x^2 dx \\
& + \varepsilon_4 N_4 \int_0^1 u_t^2 dx + \varepsilon_4 N_4 \int_1^1 z_t^2 dx + \varepsilon_4 N_4 \int_0^1 T_x^2 dx \\
& - \frac{bN_5}{2} \int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx + c_5 N_5 \int_0^1 T_x^2 dx + \frac{\mu_2 \tau N_5}{2} \int_0^1 u_t^2 dx \\
& + \frac{k_1 \tau N_5}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx,
\end{aligned}$$

Puis, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \quad \leq \quad & -C_1 \int_0^1 u_t^2 dx - C_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx - C_3 \int_0^1 T_x^2 dx - C_4 \int_0^1 T^2 \\
& - C_5 \int_0^1 z_x^2 dx - C_6 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx \\
& - C_7 \int_0^1 (\tau T_t + T)^2 dx - C_8 \int_0^1 u_x^2 dx - C_9 \int_0^1 z_t^2 dx
\end{aligned}$$

avec C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9 *sont données par*

$$\begin{aligned}
C_1 &= \beta N - N_1 c_1 - \rho_u - \varepsilon_4 N_4 - \frac{\mu_2 \tau N_5}{2} \\
C_2 &= \frac{3kN}{4} - c_4 N_4 - \frac{k_1 \tau N_5}{2}, \; C_3 = k_4 N - \varepsilon_4 N_4 - c_5 N_5, \; C_4 = \left(k_2 - \frac{k_1^2}{k}\right) N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 &= \frac{\alpha N_1}{2} - \frac{3a_2^2}{2a_3} - c_3, \; C_6 = \frac{aN_4}{2} - N_1 c_1 - \frac{3\beta_1^2}{2a_3} - \varepsilon_3, \\
C_7 &= \frac{bN_5}{2} - \frac{2\mu_2^2 N_1}{\alpha} - \frac{3\mu_2^2}{2a_3}, \; C_8 = \frac{a_3}{2} - \varepsilon_3, \; C_9 = \rho_z - \varepsilon_4 N_4,
\end{aligned}$$

Afin de choisir les C_i strictements positives nous choisissons les paramètres ε_i de la maniére suivante:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{4},\ \varepsilon_4 = \frac{\rho_z}{2N_4}.$$

Alors, on arrive à

$$\begin{aligned} C_1 &= \beta N - N_1 c_1 - \rho_u - \frac{\rho_z}{2} - \frac{\mu_2 \tau N_5}{2},\ C_2 = \frac{3kN}{4} - c_4 N_4 - \frac{k_1 \tau N_5}{2}, \\ C_3 &= k_4 N - \frac{\rho_z}{2} - c_5 N_5,\ C_4 = \left(k_2 - \frac{k_1^2}{k}\right) N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{\alpha N_1}{2} - \frac{3a_2^2}{2a_3} - c_3,\ C_6 = \frac{aN_4}{2} - N_1 c_1 - \frac{3\beta_1^2}{2a_3} - \frac{a_3}{4}, \\ C_7 &= \frac{bN_5}{2} - \frac{2\mu_2^2 N_1}{\alpha} - \frac{3\mu_2^2}{2a_3},\ C_8 = \frac{a_3}{4},\ C_9 = \frac{\rho_z}{2}. \end{aligned}$$

Si nous choisissons nos paramètres de manière appropriée, tous les coefficients C_i, $i = 1,..,9$ deviennent posotifs. Tout d'abord, nous sélectionnons N_1 assez grand pour que

$$N_1 > \frac{3a_2^2}{\alpha a_3} + \frac{2c_3}{\alpha},$$

et, nous prenons N_4 assez grand pour que

$$N_4 > \frac{2N_1 c_1}{a} + \frac{3\beta_1^2}{aa_3} + \frac{a_3}{2a},$$

ensuite, nous choisissons N_5 assez grand pour que

$$N_5 > \frac{4\mu_2^2 N_1}{b\alpha} + \frac{3\mu_2^2}{ba_3}.$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que $\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t)$ reste valide et

$$N > \frac{N_1 c_1}{\beta} + \frac{\rho_u}{\beta} + \frac{\rho_z}{2\beta} + \frac{\mu_2 \tau N_5}{2\beta} +,\ N > \frac{4c_4 N_4}{3k} + \frac{2k_1 \tau N_5}{3k},\ N > \frac{\rho_z}{2k_4} + \frac{c_5 N_5}{k_4}.$$

Ainsi, on arrive à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -C_{11} \int_0^1 \left(u_t^2 + \theta_x^2 + T_x^2 + T^2 + z_x^2 + (\tau\theta_t + \theta)^2 + (\tau T_t + T)^2 + u_x^2 + z_t^2\right) dx \\ &\leq -C_{12} E(t), \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

où $C_{11} = \max(C_i)$, *pour* $i = \overline{1,9}$.

En prenant le coté droit de l'équivalence (2.3.40), on obtient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_{13} \mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0, \tag{2.3.45}$$

où $C_{13} = \frac{C_{12}}{\beta_2}$*, par une simple intégration de (2.3.45) sur* $[0,1]$ *on obtient*

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-C_{13}t}, \quad \forall t > 0,$$

on utilise l'autre côté de la relation d'équivalence (2.3.40), on arrive à

$$E(t) \leq C_{14}e^{-C_{13}t}, \ \forall t > 0,$$

avec $C_{14} = \frac{\mathcal{L}(0)}{\beta_1}$*, d'où le résultat désiré.*

CHAPITRE 3 Les sols gonflants via Lord Shulman sans effets de microtempératures

Dans ce chapitre, nous considérons le même système que dans le chapitre précédent (2.1.1), mais cette fois ci, nous supposons que les coefficients du systèmes satisfont la relation suivante:

$$b = k_1 = k_2 = k_4 = \mu_2 = 0. \tag{3.0.1}$$

Ainsi, en considérant les équations d'évolution mentionné précédemment:

$$\begin{aligned} \rho_z z_{tt} &= R_{x,} \\ \rho_u u_{tt} &= H_x + G, \\ \rho R_0 \eta_t &= q_{x,}, \\ \rho E_t &= P_x^* + q - Q. \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

avec la condition donnée par (3.0.1). *Alors, les équations constitutives (0.0.4) deviennent comme suit:*

$$\begin{array}{ll} R = P_1 + G_1 + H_1, & q = k\theta_x, \\ H = P_2, & \rho\eta = \beta_0 z_x - \beta_1 u + a\left(\tau\theta_t + \theta\right), \\ G = G_2 + H_2, & Q = k\theta_x. \end{array} \tag{3.0.3}$$

Rappelons que: $\tau > 0$ *est le paramètre de relaxation et* ρ_z, ρ_u, a_1, a_2, a_3, $a > 0$. *Les coefficients* β_0, k, β_1 *désignent le couplage entre la température et le déplacement, la conductivité thermique, le couplage entre la fraction volumique et la température, respectivement. En prenant* $a_2 \neq 0$ *et les coefficients* a_1, a_3 vérifient :

$$a_2^2 < a_1 a_3, \tag{3.0.4}$$

Dans ce travail les éléments suivants sont pris en compte :

$$\begin{aligned} G_1 &= G_2 = 0, \\ H_1 &= -\beta_0 \left(\tau\theta_t + \theta\right), \\ H_2 &= -\beta_1 \left(\tau\theta_t + \theta\right) - \beta u_t, \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

Maintenant, en remplaçant (3.0.5) et (3.0.3) dans (3.0.2), on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} = a_1 z_{xx} + a_2 u_{xx} - \beta_0 \left(\tau\theta_{tx} + \theta_x\right), & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_u u_{tt} = a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx} - \beta u_t - \beta_1 \left(\tau\theta_t + \theta\right), & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ a\left(\tau\theta_t + \theta\right)_t = -\beta_0 z_{tx} + \beta_1 u_t + k\theta_{xx}, & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty). \end{cases}$$

Considérons les mêmes conditions initiales proposées précédemment, sauf que:

$b = k_1 = k_2 = k_4 = \mu_2 = 0$, *et les conditions aux limites*

$$\begin{aligned} &z_x(0,t) = z_x(1,t) = u(0,t) = u(1,t) = 0, && t > 0, \\ &\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

3.1 *Position du problème*

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} = a_1 z_{xx} + a_2 u_{xx} - \beta_0 \left(\tau\theta_{tx} + \theta_x\right), & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_u u_{tt} = a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx} - \beta u_t - \beta_1 \left(\tau\theta_t + \theta\right), & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty), \\ a\left(\tau\theta_t + \theta\right)_t = -\beta_0 z_{tx} + \beta_1 u_t + k\theta_{xx}, & dans\ \ (0,1)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x), z(x,0) = z^0(x), && x \in (0,\,1), \\ &z_t(x,0) = z^1(x),\ \ \theta(x,0) = \theta^0(x), \theta_t(x,0) = \theta^1(x), && x \in (0,\,1), \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

où u^0, u^1, z^0, z^1, θ^0, θ^1 *sont des fonctions données,*

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} &z_x(0,t) = z_x(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, && t > 0, \\ &\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Poincaré pour z, *on déduit de la première équation du système (3.1.1) et les conditions aux limites*

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 z(x,t)dx = 0, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{3.1.4}$$

ainsi,

$$\int_0^1 z(x,t)dx = t\int_0^1 z^1(x)dx + \int_0^1 z^0(x)dx, \ \forall\, t \geq 0,$$

donc si on pose

$$\overline{z}(x,t) = z(x,t) - t\int_0^1 z^1 dx - \int_0^1 z^0 dx, \ t \geq 0, \quad x \in [0,1].$$

Alors, $(\overline{z},\ u, \theta)$ *satisfait l'equation (3.1.1) et*

$$\int_0^1 \overline{z}(x,t)dx = 0, \ t \geq 0,$$

Maintenant nous travaillons avec $\overline{z}$ *mais écrivons* z *pour la simplicité.*

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous donnons des résultats d'existence et d'unicité pour le système (3.1.1)-(3.1.3) en utilisant la théorie des semi-groupes.[12].

Si on note $U = (z, v, u, \phi, \theta, \vartheta)^T$, *où* $v = z_t$, *et* $\phi = u_t$ *et* $\vartheta = \theta_t$.

Alors, le système (3.1.1)-(3.1.3) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}\mathbb{U}, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0 = \left(z^0,\ z^1,\ u^0,\ u^1,\ \theta^0,\ \theta^1\right)^T, \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *est défini par*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{\rho_z}D^2 & 0 & \frac{a_2}{\rho_z}D^2 & 0 & -\frac{\beta_0}{\rho_z}D & -\frac{\tau\beta_0}{\rho_z}D \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{\rho_u}D^2 & 0 & \frac{a_3}{\rho_u}D^2 & -\frac{\beta}{\rho_u} & -\frac{\beta_1}{\rho_u} & -\frac{\tau\beta}{\rho_u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_0}{a\tau}D & 0 & \frac{\beta_1}{a\tau} & \frac{k}{a\tau}D^2 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

On considère les espaces suivants :

$$H_*^2(0,1) = \left\{\Psi \in H^2(0,1),\ \Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0\ \right\},$$

et soit

$$\mathbb{H} = \left\{H_*^2(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)\right\},$$

l'espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant

$$\left\langle U,\widetilde{U}\right\rangle :=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\rho v\tilde{v}+\rho\phi\tilde{\phi}+a_1 z_x\tilde{z}_x+a_3 u_x\tilde{u}_x+a_2\left(\tilde{u}_x z_x+u_x\tilde{z}_x\right)\right.$$
$$\left.+a\left[\left(\tau\vartheta+\theta\right)\left(\tau\tilde{\vartheta}+\tilde{\theta}\right)\right]+k\tau\theta_x\tilde{\theta}_x\right\},$$

pour $U=(z,v,u,\phi,\theta,\vartheta)^T\in\mathbb{H}$ *et* $\tilde{U}=(\tilde{z},\tilde{v},\tilde{u},\tilde{\phi},\tilde{\theta},\widetilde{\vartheta})^T\in\mathbb{H}$.
Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ *est donné par*

$$D\left(\mathcal{A}\right)=\left(\begin{array}{c} U\in\mathbb{H}\ /\ z\in H_*^2\left(0,1\right)\cap H^1\left(0,1\right),\ v\in H_*^2\left(0,1\right), \\ u\in H^2\left(0,1\right)\cap H_0^1\left(0,1\right),\ \phi\in H_0^1\left(0,1\right), \\ \theta\in H_0^1\left(0,1\right)\cap H^2\left(0,1\right),\ \vartheta\in H_0^1\left(0,1\right) \end{array}\right),$$

et $D(\mathcal{A})$ *est dense dans* $\mathbb{H}$.
Donc, on a

$$\langle\mathcal{A}U,\ U\rangle_{\mathbb{H}}=-\beta\int_0^1 u_t^2dx-k\int_0^1\theta_x^2dx\leq 0,$$

alors l'opérateur $\mathcal{A}$ *est dissipatif. Maintenant, en utilisant le Lemme de Lax–Milgram et des arguments de régularité, nous pouvons prouver que l'opérateur* $I-\mathcal{A}$ *est surjectif. Ainsi, en utilisant le théorème de Lumer-Phillips, en déduit que* $\mathcal{A}$ *est un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe sur* $\mathbb{H}$ *et on a alors le résultat suivant :*

Théorème 3.2.1 *[12] Soit* $U_0\in D(\mathcal{A})$*, alors le problème (3.1.1)-(3.1.3) admet une solution unique* $U\in C\left(\mathbb{R}_+,\ D(\mathcal{A})\right)\cap C^1\left(\mathbb{R}_+,\mathbb{H}\right)$. *De plus si* $U_0\in\mathbb{H}$*, alors* $U\in C\left(\mathbb{R}_+,\mathbb{H}\right)$.

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section nous prouvons le résultat de stabilité exponentielle pour le problème (3.1.1)-(3.1.3), en utilisant la technique des multiplicateurs. Pour atteindre notre objectif, nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov approprié pour établir une décroissance exponentielle.

Lemme 3.3.1 *Soit* (z,u,θ) *une solution du système (3.1.1), alors la fonctionnelle d'énergie* E*, définie par*

$$E\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_0^1(\rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a_1 z_x^2+a_3 u_x^2+2a_2 u_x z_x+a\left(\tau\theta_t+\theta\right)^2+k\tau\theta_x^2)dx,\quad t>0,\ (3.3.1)$$

satisfait

$$E'(t) = -\beta \int_0^1 u_t^2 dx - k \int_0^1 \theta_x^2 dx, \quad t > 0. \tag{3.3.2}$$

Preuve *Multipliant la première équation du système (3.1.1) par z_t, la seconde par u_t et la troisième par $(\tau\theta_t + \theta)$,*

$$\begin{aligned}
\rho_z \int_0^1 z_{tt} z_t dx &= a_1 \int_0^1 z_{xx} z_t dx + a_2 \int_0^1 u_{xx} z_t dx - \beta_0 \int_0^1 (\tau\theta_{tx} + \theta_x) z_t dx, \\
\rho_u \int_0^1 u_{tt} u_t dx &= a_3 \int_0^1 u_{xx} u_t dx + a_2 \int_0^1 z_{xx} u_t dx - \beta \int_0^1 u_t^2 dx \\
&\quad -\beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u_t dx, \\
a \int_0^1 (\tau\theta_{tt} + \theta_t)(\tau\theta_t + \theta) dx &= -\beta_0 \int_0^1 z_{tx} (\tau\theta_t + \theta) dx + \beta_1 \int_0^1 u_t (\tau\theta_t + \theta) dx \\
&\quad +k \int_0^1 \theta_{xx} (\tau\theta_t + \theta) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties et les conditions aux limites (3.1.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_z}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 z_t^2 dx &= a_1 [z_x z_t]_{x=0}^{x=1} - a_1 \int_0^1 z_x z_{tx} dx + a_2 [u_x z_t]_{x=0}^{x=1} - a_2 \int_0^1 u_x z_{tx} dx \\
&\quad -\beta_0 [(\tau\theta_t + \theta) z_t]_{x=0}^{x=1} + \beta_0 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z_{tx} dx, \\
\frac{\rho_u}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx &= a_3 [u_x u_t]_{x=0}^{x=1} - a_3 \int_0^1 u_x u_{tx} dx + a_2 [z_x u_t]_{x=0}^{x=1} - a_2 \int_0^1 z_x u_{tx} dx \\
&\quad -\beta \int_0^1 u_t^2 dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u_t dx, \\
\frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx &= -\beta_0 \int_0^1 z_{tx} (\tau\theta_t + \theta) dx + \beta_1 \int_0^1 u_t (\tau\theta_t + \theta) dx \\
&\quad +k [\theta_x (\tau\theta_t + \theta)]_{x=0}^{x=1} - k \int_0^1 \theta_x (\tau\theta_{tx} + \theta_x) dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_z}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 z_t^2 dx &= -\frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 z_x^2 dx - a_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x z_x dx \\
&\quad +a_2 \int_0^1 u_{tx} z_x dx + \beta_0 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z_{tx} dx, \\
\frac{\rho_u}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx &= -\frac{a_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx - a_2 \int_0^1 z_x u_{tx} dx \\
&\quad -\beta \int_0^1 u_t^2 dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u_t dx, \\
\frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx &= -\beta_0 \int_0^1 z_{tx} (\tau\theta_t + \theta) dx + \beta_1 \int_0^1 u_t (\tau\theta_t + \theta) dx \\
&\quad -k\tau \int_0^1 \theta_x \theta_{tx} dx - k \int_0^1 \theta_x^2 dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_z}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t^2dx &= -\frac{a_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_x^2dx - a_2\frac{d}{dt}\int_0^1 u_xz_xdx \\
&\quad + a_2\int_0^1 u_{tx}z_xdx + \beta_0\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, z_{tx}dx, \\
\frac{\rho_u}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2dx &= -\frac{a_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_x^2dx - a_2\int_0^1 z_xu_{tx}dx \\
&\quad -\beta\int_0^1 u_t^2dx - \beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\, u_tdx, \\
\frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2 dx &= -\beta_0\int_0^1 z_{tx}(\tau\theta_t+\theta)\, dx + \beta_1\int_0^1 u_t(\tau\theta_t+\theta)\, dx \\
&\quad -\frac{k\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta_x^2dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx.
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on obtient

$$\frac{d}{2dt}\int_0^1 \left(\begin{array}{c} \rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a_1z_x^2+a_3u_x^2 \\ +2a_2u_xz_x+a(\tau\theta_t+\theta)^2+k\tau\theta_x^2 \end{array}\right) dx = -\beta\int_0^1 u_t^2dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx.$$

Alors

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a_1z_x^2+a_3u_x^2+2a_2u_xz_x+a(\tau\theta_t+\theta)^2+k\tau\theta_x^2\right) dx, \quad t>0,$$

et

$$E'(t) = -\beta\int_0^1 u_t^2dx - k\int_0^1 \theta_x^2dx, \quad t>0.$$

Remarque 3.3.1 *L'énergie de ce système est positive, car*

$$a_1\left(z_x+\frac{a_2}{a_1}u_x\right)^2 - \left(\frac{a_2^2}{a_1}-a_3\right)u_x^2 = a_1z_x^2+2a_2z_xu_x+a_3u_x^2, \tag{3.3.3}$$

en remplaçant (3.3.3) dans $E(t)$, on obtient

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\begin{array}{c} \rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a(\tau\theta_t+\theta)^2+\kappa\tau\theta_x^2+a_1\left(z_x+\frac{a_2}{a_1}u_x\right)^2 \\ -\left(\frac{a_2^2}{a_1}-a_3\right)u_x^2 \end{array}\right) dx, \quad \forall t>0.$$

Si

$$a_2^2 < a_1a_3,$$

on arrive à :

$$E(t)\geq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho_z z_t^2+\rho_u u_t^2+a(\tau\theta_t+\theta)^2+\kappa\tau\theta_x^2++a_1\left(z_x+\frac{a_2}{a_1}u_x\right)^2\right) dx \geq 0.$$

Donc $E(t)\geq 0$, $\forall t\geq 0$.

Nous remarquons d'après la relation (3.3.2) que la fonction énergétique est non-croissante. Or, cette inégalité n'implique pas nécessairement la décroissance exponentielle. A cet effet, nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov appropriée afin d'établir une estimation de décroissance exponentielle de l'énergie.

Lemme 3.3.2 *Soit*

$$I_1(t) = \rho_u \int_0^1 u_t z dx - \rho_z \frac{a_3}{a_2} \int_0^1 z_t z dx, \; t > 0, \tag{3.3.4}$$

et soit (z, u, θ) solution du système (3.1.1), alors nous avons

$$I_1'(t) \leq -\frac{\alpha}{2} \int_0^1 z_x^2 dx + c_1 \int_0^1 u_t^2 dx + c_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx, \quad t > 0, \tag{3.3.5}$$

où $c_1 = \max\left(\frac{3\beta^2}{2\alpha} + \frac{\rho_u^2 a_2}{4a_3\rho_z}, \; \frac{3a_3^2\beta_0^2}{2\alpha a_2^2} + \frac{3\beta_1^2}{2\alpha}\right)$, $\alpha = \left(a_2 - \frac{a_3 a_1}{a_2}\right)$.

Preuve *En multipliant la deuxième équation du système (3.1.1) par z et on intégre sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient*

$$\rho_u \int_0^1 u_{tt} z dx = a_3 \int_0^1 u_{xx} z dx + a_2 \int_0^1 z_{xx} z dx - \beta \int_0^1 u_t z dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx.$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (3.1.3), on trouve

$$\begin{aligned} \rho_u \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t z dx - \rho_u \int_0^1 u_t z_t dx \;&=\; a_3 [u_x z]_{x=0}^{x=1} - a_3 \int_0^1 u_x z_x dx + a_2 [z_x z]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad - a_2 \int_0^1 z_x^2 dx - \beta \int_0^1 u_t z dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \rho_u \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t z dx - \rho_u \int_0^1 u_t z_t dx \;&=\; -a_3 \int_0^1 u_x z_x dx - a_2 \int_0^1 z_x^2 dx - \beta \int_0^1 u_t z dx \\ &\quad - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Maintenant, multiplions la première équation du système (3.1.1) par $-\frac{a_3}{a_2} z$, intégrant sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient

$$-\rho_z \frac{a_3}{a_2} \int_0^1 z_{tt} z dx = -\frac{a_3 a_1}{a_2} \int_0^1 z_{xx} z dx - a_3 \int_0^1 u_{xx} z dx + \frac{a_3 \beta_0}{a_2} \int_0^1 (\tau\theta_{tx} + \theta_x) z dx.$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (3.1.3), on trouve

$$\begin{aligned}-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx+\rho_z\frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2dx &= -\frac{a_3a_1}{a_2}[z_xz]_{x=0}^{x=1}+\frac{a_3a_1}{a_2}\int_0^1 z_x^2dx-a_3[u_xz]_{x=0}^{x=1}\\ &\quad +a_3\int_0^1 u_xz_xdx+\frac{a_3\beta_0}{a_2}[(\tau\theta_t+\theta)\,z]_{x=0}^{x=1}\\ &\quad -\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_xdx,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx+\rho_z\frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2dx &= \frac{a_3a_1}{a_2}\int_0^1 z_x^2dx+a_3\int_0^1 u_xz_xdx\\ &\quad -\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_xdx,\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

On fait la somme de (3.3.6) et (3.3.7), on arrive à:

$$\begin{aligned}\rho_u\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t z dx-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx &= -\left(a_2-\frac{a_3a_1}{a_2}\right)\int_0^1 z_x^2dx+\rho_u\int_0^1 u_tz_tdx\\ &\quad -\beta\int_0^1 u_tzdx-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2dx-\beta_1\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,zdx\\ &\quad -\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_xdx.\end{aligned}$$

Alors

$$I_1(t)=\rho_u\int_0^1 u_tzdx-\rho_z\frac{a_3}{a_2}\int_0^1 z_tzdx,$$

et

$$\begin{aligned}I_1'(t) &= -\left(a_2-\frac{a_3a_1}{a_2}\right)\int_0^1 z_x^2dx+\rho_u\int_0^1 u_tz_tdx-\beta\int_0^1 u_tzdx\\ &\quad -\frac{\rho_za_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2dx-\beta_1\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,zdx-\frac{a_3\beta_0}{a_2}\int_0^1(\tau\theta_t+\theta)\,z_xdx.\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

Une application des inégalités de Young et de Poincaré et en utilisant le fait que

$$\alpha=\left(a_2-\frac{a_3a_1}{a_2}\right),$$

on trouve

$$\rho_u\int_0^1 u_tz_tdx\le\frac{\rho_za_3}{a_2}\int_0^1 z_t^2dx+\frac{\rho_u^2a_2}{4a_3\rho_z}\int_0^1 u_t^2dx,\tag{3.3.9}$$

$$-\beta\int_0^1 u_tzdx\le\frac{3\beta^2}{2\alpha}\int_0^1 u_t^2dx+\frac{\alpha}{6}\int_0^1 z_x^2dx,\tag{3.3.10}$$

$$-\beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z dx \leq \frac{3\beta_1^2}{2\alpha} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + \frac{\alpha}{6} \int_0^1 z_x^2 dx, \tag{3.3.11}$$

$$-\frac{a_3\beta_0}{a_2} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) z_x dx \leq \frac{3a_3^2\beta_0^2}{2\alpha a_2^2} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + \frac{\alpha}{6} \int_0^1 z_x^2 dx, \tag{3.3.12}$$

On remplace (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11) et (3.3.12) dans (3.3.8), on trouve

$$I_1'(t) \leq -\frac{\alpha}{2} \int_0^1 z_x^2 dx + c_1 \int_0^1 u_t^2 dx + c_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx,$$

où $c_1 = \max\left(\frac{3\beta^2}{2\alpha} + \frac{\rho_u^2 a_2}{4a_3\rho_z}, \ \frac{3a_3^2\beta_0^2}{2\alpha a_2^2} + \frac{3\beta_1^2}{2\alpha}\right)$.

Lemme 3.3.3 *Soit*

$$I_2(t) = \rho_u \int_0^1 u_t u dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 u^2 dx, \quad t > 0, \tag{3.3.13}$$

et soit (z, u, θ) *solution du système (3.1.1), alors nous avons*

$$I_2'(t) \leq -\frac{a_3}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \rho_u \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{a_2^2}{a_3} \int_0^1 z_x^2 dx + \frac{\beta_1^2}{a_3} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx \quad t > 0. \tag{3.3.14}$$

Preuve *En multipliant la deuxième équation du système (3.1.1) par u et on intègre sur l'intervalle* $[0, 1]$*, on obtient*

$$\rho_u \int_0^1 u_{tt} u dx = a_3 \int_0^1 u_{xx} u dx + a_2 \int_0^1 z_{xx} u dx - \beta \int_0^1 u_t u dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u dx.$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (3.1.3), on trouvre

$$\begin{aligned} \rho_u \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t u dx - \rho_u \int_0^1 u_t^2 dx &= a_3 [u_x u]_{x=0}^{x=1} - a_3 \int_0^1 u_x^2 dx + a_2 [z_x u]_{x=0}^{x=1} - a_2 \int_0^1 z_x u_x dx \\ &\quad - \frac{\beta d}{2dt} \int_0^1 u^2 dx - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \rho_u \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t u dx - \rho_u \int_0^1 u_t^2 dx &= -a_3 \int_0^1 u_x^2 dx - a_2 \int_0^1 z_x u_x dx - \frac{\beta d}{2dt} \int_0^1 u^2 dx \\ &\quad - \beta_1 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta) u dx. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Puis

$$I_2(t) = \rho_u \int_0^1 u_t u dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 u^2 dx, \quad t > 0,$$

et

$$I_2'(t) = -a_3\int_0^1 u_x^2dx - a_2\int_0^1 z_xu_xdx + \rho_u\int_0^1 u_t^2dx - \beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\,udx \quad t>0.$$

En rappelant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy–Schwarz, on obtient

$$-a_2\int_0^1 z_xu_xdx \leq \frac{a_2^2}{a_3}\int_0^1 z_x^2dx + \frac{a_3}{4}\int_0^1 u_x^2dx, \tag{3.3.16}$$

$$-\beta_1\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\,udx \leq \frac{\beta_1^2}{a_3}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\,dx + \frac{a_3}{4}\int_0^1 u_x^2dx. \tag{3.3.17}$$

On remplace (3.3.16) et (3.3.17) dans $I_2'(t)$, on arrive à

$$I_2'(t) \leq -\frac{a_3}{2}\int_0^1 u_x^2dx + \rho_u\int_0^1 u_t^2dx + \frac{a_2^2}{a_3}\int_0^1 z_x^2dx + \frac{\beta_1^2}{a_3}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\,dx \quad t>0.$$

Lemme 3.3.4 *Soit*

$$I_3(t) = -\rho_z\int_0^1 z_tzdx,\ t>0, \tag{3.3.18}$$

et soit (z,u,θ) solution du système (3.1.1), alors nous avons pour tout $\varepsilon_3>0$

$$I_3'(t) \leq -\rho_z\int_0^1 z_t^2dx + c_3\int_0^1 z_x^2dx + \varepsilon_3\int_0^1 u_x^2dx + \varepsilon_3\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\,dx, \quad t>0, \tag{3.3.19}$$

où $c_3 = a_1 + \frac{a_2^2}{4\varepsilon_3} + \frac{\beta_0^2}{4\varepsilon_3}$.

Preuve *En multipliant la première équation du système (3.1.1) par $-z$ et en intègrant sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient*

$$-\rho_z\int_0^1 z_{tt}zdx = -a_1\int_0^1 z_{xx}zdx - a_2\int_0^1 u_{xx}zdx + \beta_0\int_0^1 (\tau\theta_{tx}+\theta_x)\,zdx,$$

Par l'intégration par parties et les conditions aux limites (3.1.3), on trouve

$$\begin{aligned}-\rho_z\frac{d}{dt}\int_0^1 z_tzdx + \rho_z\int_0^1 z_t^2dx &= -a_1[z_xz]_{x=0}^{x=1} + a_1\int_0^1 z_x^2dx - a_2[u_xz]_{x=0}^{x=1}\\ &\quad +a_2\int_0^1 u_xz_xdx + \beta_0[(\tau\theta_t+\theta)\,z]_{x=0}^{x=1}\\ &\quad -\beta_0\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\,z_xdx,\end{aligned}$$

on obtient

$$-\rho_z\frac{d}{dt}\int_0^1 z_tzdx + \rho_z\int_0^1 z_t^2dx = a_1\int_0^1 z_x^2dx + a_2\int_0^1 u_xz_xdx - \beta_0\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)\,z_xdx,$$

alors

$$I_3(t) = -\rho_z \frac{d}{dt}\int_0^1 z_t z dx, \quad t > 0,$$

et

$$I_3'(t) = -\rho_z \int_0^1 z_t^2 dx + a_1 \int_0^1 z_x^2 dx + a_2 \int_0^1 u_x z_x dx - \beta_0 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)\, z_x dx, \quad t > 0.$$

Grace à les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$a_2 \int_0^1 u_x z_x dx \le \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{a_2^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 z_x^2 dx, \tag{3.3.20}$$

$$-\beta_0 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)\, z_x dx \le \varepsilon_3 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + \frac{\beta_0^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 z_x^2 dx, \tag{3.3.21}$$

En remplaçant les estimations précédentes dans I_3' on arrive à

$$I_3'(t) \le -\rho_z \int_0^1 z_t^2 dx + c_3 \int_0^1 z_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx, \quad t > 0.$$

où $c_3 = a_1 + \frac{a_2^2}{4\varepsilon_3} + \frac{\beta_0^2}{4\varepsilon_3}$.

Lemme 3.3.5 *Soit*

$$I_4(t) = -a\tau^2 \int_0^1 \theta_t \theta dx - \frac{a\tau}{2}\int_0^1 \theta^2 dx, \qquad t > 0, \tag{3.3.22}$$

et soit (z, u, θ) solution du système (3.1.1), alors nous avons pour tout $\varepsilon_4 > 0$

$$I_4'(t) \le -\frac{a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + c_4 \int_1^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 u_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_1^1 z_t^2 dx, \qquad t > 0, \tag{3.3.23}$$

où $c_4 = (a + k\tau + \frac{\beta_0^2\tau^2}{4\varepsilon_4} + \frac{\beta_1^2\tau^2}{4\varepsilon_4})$.

Preuve *Multiplions la troisième équation du système (3.1.1) par $-\tau\theta$ et intègrons sur l'intervalle $[0, 1]$, on obtient*

$$\begin{aligned} -a\tau^2 \int_0^1 \theta_{tt}\theta dx - a\tau \int_0^1 \theta_t \theta dx \;&=\; \beta_0 \tau \int_0^1 z_{tx}\theta dx - \beta_1 \tau \int_0^1 u_t \theta dx \\ &\quad -k\tau \int_0^1 \theta_{xx}\theta dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur (0, 1), en utilisant les conditions aux limites (3.1.3), on arrive à

$$\begin{aligned} -a\tau^2 \frac{d}{dt}\int_0^1 \theta_t \theta dx - a\tau \frac{d}{2dt}\int_0^1 \theta^2 dx \;&=\; -a\tau^2 \int_0^1 \theta_t^2 dx + \beta_0 \tau [z_t\theta]_{x=0}^{x=1} - \beta_0 \tau \int_0^1 z_t \theta_x dx \\ &\quad -\beta_1 \tau \int_0^1 u_t \theta dx - k\tau [\theta_x \theta]_{x=0}^{x=1} + k\tau \int_0^1 \theta_x^2 dx, \end{aligned}$$

on trouve

$$I_4(t) = -a\tau^2 \int_0^1 \theta_t \theta dx - \frac{a\tau}{2} \int_0^1 \theta^2 dx, \quad t > 0,$$

et

$$I_4'(t) = -a\tau^2 \int_0^1 \theta_t^2 dx - \beta_0 \tau \int_0^1 z_t \theta_x dx - \beta_1 \tau \int_0^1 u_t \theta dx + k\tau \int_0^1 \theta_x^2 dx,$$

en utilisant le fait que

$$\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx \leq 2 \int_0^1 (\tau\theta_t)^2 dx + 2 \int_0^1 \theta^2 dx,$$

alors

$$-\int_0^1 (\tau\theta_t)^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + \int_0^1 \theta^2 dx,$$

on remplace dans $I_4'(t)$, *on obtient*

$$\begin{aligned} I_4'(t) \quad \leq \quad & -\frac{a}{2} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + a \int_0^1 \theta^2 dx - \beta_0 \tau \int_0^1 z_t \theta_x dx \\ & -\beta_1 \tau \int_0^1 u_t \theta dx + k\tau \int_0^1 \theta_x^2 dx, \quad t > 0. \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Young et de l'inégalité de Poincaré

$$a \int_0^1 \theta^2 dx \leq a \int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{3.3.24}$$

$$-\beta_0 \tau \int_0^1 z_t \theta_x dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 z_t^2 dx + \frac{\beta_0^2 \tau^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{3.3.25}$$

$$-\beta_1 \tau \int_0^1 u_t \theta dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\beta_1^2 \tau^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{3.3.26}$$

En remplaçant les inégalités précédentes dans $I_4'(t)$, *on termine par*

$$I_4'(t) \leq -\frac{a}{2} \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 dx + c_4 \int_1^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 u_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_1^1 z_t^2 dx, \quad t > 0,$$

où $c_4 = (a + k\tau + \frac{\beta_0^2 \tau^2}{4\varepsilon_4} + \frac{\beta_1^2 \tau^2}{4\varepsilon_4})$.

Maintenant, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}$ *et on montre qu'elle est équivalente à l'énergie fonctionnelle.*

Lemme 3.3.6 *La fonctionnelle* $\mathcal{L}(t)$ *définie par*

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1 I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + N_4 I_4(t), \ t > 0, \tag{3.3.27}$$

où N, N_1 et N_4 sont des nombres réels positifs à sélectionner de manière appropriée par la suite, et l'énergie $E(t)$ est équivalente à $\mathcal{L}(t)$, càd:
il existe deux constantes positives β_1 et β_2 satisfont

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t > 0. \tag{3.3.28}$$

Preuve *on peut facilement prouver que l'énergie est équivalente à la fonctionnelle de Lyapunov, on a*

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = |N_1 I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + N_4 I_4(t)|, \quad t > 0,$$

en tenant compte de (3.3.4), (3.3.13), (3.3.18) et (3.3.22) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq\ & N_1\rho_u \int_0^1 |u_t z|\, dx + \frac{N_1\rho_z a_3}{a_2} \int_0^1 |z_t z|\, dx + \rho_u \int_0^1 |u_t u|\, dx \\
& + \frac{\beta}{2}\int_0^1 u^2 dx + \rho_z \int_0^1 |z_t z|\, dx + N_4 a\tau^2 \int_0^1 |\theta_t \theta|\, dx \\
& + \frac{N_4 a\tau}{2} \int_0^1 \theta^2 dx.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young et de Poincaré

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq\ & \frac{N_1\rho_u}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{N_1\rho_u}{2} \int_0^1 z_x^2 dx + \frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2} \int_0^1 z_t^2 dx \\
& + \frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2} \int_0^1 z_x^2 dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^1 u_x^2 dx \\
& + \frac{\beta}{2}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\rho_z}{2}\int_0^1 z_t^2 dx + \frac{\rho_z}{2}\int_0^1 z_x^2 dx \\
& + \frac{N_4 a\tau^2}{2} \int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{N_4 a\tau^2}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{N_4 a\tau}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
\frac{N_4 a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t)^2\, dx =\ & \frac{N_4 a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta - \theta)^2\, dx \\
\leq\ & N_4 a \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2\, dx + N_4 a \int_0^1 \theta^2 dx \\
\leq\ & N_4 a \int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2\, dx + N_4 a \int_0^1 \theta_x^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

En remplaçant (3.3.30) dans (3.3.29), on arrive à

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(t)-NE(t)| \;\leq\; & \left(\frac{N_1\rho_u}{2}+\frac{\rho_u}{2}\right)\int_0^1 u_t^2dx+\left(\frac{N_1\rho_u}{2}+\frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2}+\frac{\rho_z}{2}\right)\int_0^1 z_x^2dx \\
&+\left(\frac{\rho_u}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\int_0^1 u_x^2dx+\left(\frac{N_1\rho_z a_3}{2a_2}+\frac{\rho_z}{2}\right)\int_0^1 z_t^2 \\
&+N_4a\int_0^1\left(\tau\theta_t+\theta\right)^2dx+\left(\frac{N_4a\tau^2}{2}+\frac{N_4a\tau}{2}+N_4a\right)\int_0^1\theta_x^2dx,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\mathcal{L}(t)-NE(t)|\leq c'E(t),$$

d'où

$$(N-c')E(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq(N+c')E(t),\quad t>0.$$

Alors, pour N assez grand, on trouve deux constante positives β_1 et β_2, telles que $\beta_1=N-c'>0$ et $\beta_2=N+c'$, nous trouvons l'estimation

$$\beta_1E(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq\beta_2E(t),\quad t>0,$$

ainsi, $\mathcal{L}(t)$ et $E(t)$ sont équivalentes.

Théorème 3.3.1 *Soit (z,u,θ) la solution du système (3.1.1), alors l'énergie $E\left(t\right)$ décroît exponentiellement, c'est à dire qu'il existe deux constantes positives C et d indépendantes des données initiales telles que*

$$E(t)\leq CE(0)e^{-dt}\quad,\forall t>0, \tag{3.3.31}$$

Preuve *En différenciant l'équation (3.3.27), puis en rappelant les équations (3.3.2), (3.3.5), (3.3.14), (3.3.19) et (3.3.23), on obtient*

$$\mathcal{L}'(t)\leq NE'(t)+N_1I_1'\left(t\right)+I_2'\left(t\right)+I_3'\left(t\right)+N_4I_4'\left(t\right),\ t>0,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \;\leq\; & -\beta N\int_0^1 u_t^2dx-kN\int_0^1\theta_x^2dx-\frac{\alpha N_1}{2}\int_0^1 z_x^2dx+N_1c_1\int_0^1 u_t^2dx \\
&+N_1c_1\int_0^1\left(\tau\theta_t+\theta\right)^2dx-\frac{a_3}{2}\int_0^1 u_x^2dx+\rho_u\int_0^1 u_t^2dx \\
&+\frac{a_2^2}{a_3}\int_0^1 z_x^2dx+\frac{\beta_1^2}{a_3}\int_0^1\left(\tau\theta_t+\theta\right)^2dx \\
&-\rho_z\int_0^1 z_t^2dx+c_3\int_0^1 z_x^2dx+\varepsilon_3\int_0^1 u_x^2dx+\varepsilon_3\int_0^1\left(\tau\theta_t+\theta\right)^2dx \\
&-\frac{aN_4}{2}\int_0^1\left(\tau\theta_t+\theta\right)^2dx+c_4N_4\int_1^1\theta_x^2dx+\varepsilon_4N_4\int_0^1 u_t^2dx \\
&+\varepsilon_4N_4\int_0^1 z_t^2dx
\end{aligned}$$

Puis, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) &\leq -C_1\int_0^1 u_t^2dx - C_2\int_0^1 \theta_x^2dx - C_3\int_0^1 z_x^2dx \\ &\quad -C_4\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\,dx - C_5\int_0^1 u_x^2dx - C_6\int_0^1 z_t^2dx\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

où C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 *sont définis comme suit*

$$\begin{aligned}C_1 &= \beta N - N_1c_1 - \rho_u - \varepsilon_4 N_4,\ C_2 = kN - c_4N_4,\\ C_3 &= \frac{\alpha N_1}{2} - \frac{a_2^2}{a_3} - c_3,\ C_4 = \frac{aN_4}{2} - N_1c_1 - \frac{\beta_1^2}{a_3} - \varepsilon_3,\\ C_5 &= \frac{a_3}{2} - \varepsilon_3,\ C_6 = \rho_z - \varepsilon_4 N_4.\end{aligned}$$

Afin de choisir les C_i *strictements positives nous sélectionnons les paramètres* ε_i *de la maniére suivante:*

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{4},\ \varepsilon_4 = \frac{\rho_z}{2N_4}.$$

Alors, on arrive à

$$\begin{aligned}C_1 &= \beta N - N_1c_1 - \rho_u - \frac{\rho_z}{2},\ C_2 = kN - c_4N_4,\\ C_3 &= \frac{\alpha N_1}{2} - \frac{a_2^2}{a_3} - c_3,\ C_4 = \frac{aN_4}{2} - N_1c_1 - \frac{\beta_1^2}{a_3} - \frac{a_3}{4},\\ C_5 &= \frac{a_3}{4},\ C_6 = \frac{\rho_z}{2}.\end{aligned}$$

Si nous choisissons nos paramètres de manière appropriée, tous les coefficients C_i, $i = 1, .., 6$ *deviennent posotifs. Tout d'abord, nous choisissons* N_1 *assez grand pour que*

$$N_1 > \frac{2a_2^2}{\alpha a_3} + \frac{2c_3}{\alpha},$$

et, nous prenons N_4 *assez grand pour que*

$$N_4 > \frac{2N_1c_1}{a} + \frac{2\beta_1^2}{aa_3} + \frac{a_3}{2a}.$$

Finallement, nous choisissons N *assez grand pour que* $\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t)$ *reste valable et*

$$N > \frac{N_1c_1}{\beta} + \frac{\rho_u}{\beta} + \frac{\rho_z}{2\beta},\ N > \frac{c_4N_4}{k}.$$

Tous ces choix avec la relation (3.3.32) conduisent à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) &\leq -C_{11}\int_0^1 \left(u_t^2 + \theta_x^2 + z_x^2 + (\tau\theta_t+\theta)^2 + u_x^2 + z_t^2\right)dx\\ &\leq -C_{12}E(t),\quad \forall t > 0,\end{aligned}$$

pour certaines constantes positives C_{11} *et* C_{12}.
En prenant le coté droit de l'équivalence (3.3.28), on obtient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_{13}\mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0, \tag{3.3.33}$$

où $C_{13} = \frac{C_{12}}{\beta_2}$, *une simple intégration de (3.3.33) donne*

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-C_{13}t}, \quad \forall t > 0,$$

on utilise l'autre côté de la relation d'équivalence (3.3.28), on arrive à

$$E(t) \leq C_{14}e^{-C_{13}t}, \; \forall t > 0,$$

avec $C_{14} = \frac{\mathcal{L}(0)}{\beta_1}$, *d'où le résultat désiré.*

Conclusion

Ce travail étudie la stabilité d'un thermoélastique des sols gonflants via Lord Shulman avec et sans effets de microtempératures. Nous avons établi que notre problème était bien posé en utilisant la méthode des semigroupes. De plus, nous avons utilisé la méthode énergétique pour prouver la stabilité du système.

Bibliographie

[1] Apalara, T.A.; Yusuf, M.O.; Mukiawa, S.E.; Almutairi, O.B. Exponential stabilization of swelling porous systems with thermoelastic damping. *J. King Saud Univ. Sci.* **2023**, 35, 102460.

[2] Bazarra, N.; Fernández, J.R.; Quintanilla, R. Lord-Shulman thermoelasticity with microtemperatures. *Appl. Math. Optim.* **2020**, 84, 1667–1685.

[3] Bedford, A.; Drumheller, D.S. Theories of immiscible and structured mixtures. *Int. J. Eng. Sci.* **1983**, 21, 863–960.

[4] Brezis, H. Analyse fonctionnelle Théorie et Application,Dunod, Paris **1999**.

[5] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. *Springer Science + Business Media,*LLC **2011**.

[6] Dridi, H.; Djebabla, A. On the stabilization of linear porous elastic materials by microtemperature effect and porous damping. *Ann. Dell Univ. Ferrara* **2020**, 66, 13–25.

[7] Eringen, A.C. A continuum theory of swelling porous elastic soils. *Int. J. Eng. Sci.* **1994**, 32, 1337–1349.

[8] Iesan, D.; Quintanilla, R. On a theory of thermoelasticity with microtemperature. *J. Therm. Stress.* **2000**, 23, 199–215.

[9] Lacroix-Sonrier, M-Th. Distribution-Espaces de Sobolev-Applications, Ellipses,Paris, 1998.delay, Applicable Analysis98(16), 2903-2915, (**2019**).

[10] Lord, H.W.; Shulman, Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. Mech. Phys. Solids* **1967**, 15, 299–309.

[11] Lucquin, B. E´quatios aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses, (**2004**).

[12] Pazy, Amnon. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Vol. 44. Springer Science.

[13] Quintanilla, R. Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation. J. Comput. Appl. Math **2002**, 145, 525–533.

[14] Quintanilla, R. On the linear problem of swelling porous elastic soils with incompressible fluid. *Int. J. Eng. Sci.* **2002**, 40, 1485–1494.

[15] Slotine, J. J. E.; Li, W. Applied Nonlinear Control, Massachusetts Institue of Technology,Prentice Hall, **1991**.

[16] Vrabie, L. l. C0–semigroups and applications, Elsevier Science B. V. **2003**.

[17] Wang, J.M.; Guo, B.Z. On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping. *IMA J. Appl. Math.* **2006**, 71, 565–582.