

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de
Skikda

Faculté des Sciences
Département de
Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ،
سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/ 2021/ 2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude de système dynamique chaotique et chaos

Option : Système dynamique et commande optimale

Par :

Bechina Safa

Encadré par : *Selmani Wissame*

M.C.B U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : Bendib El Ouahma

M.C.B U. SKIKDA

Examineur: Youssfi Abla

M.C.B U. SKIKDA

Année universitaire : 2021/2022



Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Allah, le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à ce terme ce présent travail.

Je remercie très chaleureusement mon encadreur Dr.Selmani Wissame merci pour vos échanges scientifiques, vos conseils et votre rigueur, merci pour votre soutien scientifique et humain.

Je remercie Dr.Bendib El ouahma, Maître de conférence (B) à l'université 20 Août 1955 - Skikda , pour avoir accepté de présider ce jury , pour son aide Scientifique et ses conseils .

Je remercie Dr.Youssfi Abla, Maître de conférence (B) à l'université 20 Août 1955 - Skikda, d'avoir accepté d'être membre de ce jury en tant qu'examineur de ce mémoire.

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes parents, sans leurs sacrifices je ne serais pas devenue celle que je suis aujourd'hui
Mes vifs remerciements vont au Chef du Département de Mathématiques ainsi qu'à tous les ami(e)s.*

Enfin, merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin la réalisation de ce mémoire



Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents qui ont voulu voir en moi le fruit d'un long sacrifice, et je ne les remercierai pas assez, pour tous les efforts qu'ils ont déployés tout au long de cette durée d'études et je prie Dieu le tout puissant de les protéger et de leur accorder une longue vie.

A mon seul frère et mes sœurs

A tous mes collègues, amis et mes camarades.

A toute ma famille et à tous les enseignants du département de mathématiques.

A toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, pour la réalisation de ce travail.

Principales notations utilisées

$B(x, r, p, q)$: la fonction de Blumberg en dimension un dépend des trois paramètres réels r, p, q . I : matrice identité.

$\det J$: déterminant de la matrice jacobienne.

$tr J$: trace de la matrice jacobienne.

S_i ($i = 1, 2$) : valeurs propres ou multiplicateurs.

(k, j) : cycle d'ordre k , j caractérise l'ordre d'échange des k points du cycle.

$\Lambda^J_{(k)_0}$: une courbe de bifurcation "noeud-col" ou "fold" ou "pli".

Λ^j_k : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".

N_i ($i > 0$) : points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).

p_{BB} : point de la bifurcation big bang.

O : est l'origine ou le point fixe $(0, 0)$.

N^k_s : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud stable.

N^k_I : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud instable.

C^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type col.

C^j_k : point cuspidal.

C^k_{ij} : les points du cycles d'ordre k , (i, j deux entiers naturels).

TNI : transformations non inversibles.

LC_{-1} : le lieu des points pour lequel le $\det J$ de T s'annule.

$LC = LC_0$: lignes critiques de rang 1 des courbes LC_{-1} .

LC_i ($i = 1, \dots, n$) : itérations, les images des courbes LC_{-1} .

E_i ($i \geq 0$) : les ensembles de commutations.

S_i ($i \geq 0$) : les points d'intersections des E_i et E_{i+1} .

P_i ($i \geq 0$) : les points de plying.

Z_i : zones, (i entier naturel).

$B(A)(D)$: bassin (domaine) d'attraction de l'attracteur A .

Δ_c : la diagonale ou l'asymptote pour $c = 1$.

ω : la droite décrivant la stabilité du point fixe $(0,0)$.

S : le plan de caractérisation de la stabilité du point fixe $x = 0$.

CI : courbe invariante.

Résumé

Ce mémoire présente les résultats numériques d'un système dynamique discret en dimension trois, commençant par définir le chaos, attracteur étrange et un système chaotique puis nous allons consacrer notre étude sur un exemple d'un système contenant trois équations différentielles couplées, nous allons étudier son comportement et nous allons tracer les portraits de phases pour différentes valeurs des paramètres de contrôle de plus nous finirons notre étude par l'étude de deux autres attracteurs étranges similaires à l'attracteur de Lorenz.

Nos résultats numériques sont donnés à l'aide du logiciel Maple.

Abstract

This thesis presents the numerical results of a discrete dynamical system in dimension three, starting by defining chaos, strange attractor and a chaotic system then we will devote our study to an example of a system containing three coupled differential equations, we will studied its behavior and we are going to draw the phase portraits for different values of the control parameters, moreover, we will finish our study by studying two other strange attractors similar to the Lorenz attractoc. Our numerical results are given using the Maple software.

ملخص

تقدم هذه الرسالة النتائج العددية لنظام ديناميكي منفصل في البعد الثالث ، بدءاً من تعريف الفوضى والجاذب الغريب والنظام الفوضوي، ثم سنخصص دراستنا لمثال لنظام يحتوي على ثلاث معادلات تفاضلية مقترنة، وسندرس سلوكه. وسنقوم برسم صور المرحلة لقيم مختلفة لمعاملات التحكم، علاوة على ذلك ، سنهي دراستنا من خلال دراسة اثنين من الجاذبين الغريبين الآخرين المشابهين لجاذب لورنز. يتم إعطاء نتائجنا العددية باستخدام برنامج مابل.

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	1
Principales notations utilisées	1
Table des figures	8
Introduction	1
Chapitre 1. Rappel et généralités sur les systèmes dynamiques	2
1. Rappels de quelques définitions élémentaires	3
2. Singularités et stabilité	4
3. Ensembles stables et instables	6
4. Plan paramétrique - Bifurcation	8
5. Bifurcation concernant les bassins d'attractions	12
6. Structure feuilletée d'un plan paramétrique	13
7. Plan de phase d'une transformation non inversible	16
8. Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des basins	18
Chapitre 2. Chaos et attracteur étrange de Lorenz	21
1. Introduction	21
2. L'histoire de chaos	21
3. L'attracteur étrange	23
4. Le système chaotique	24
5. Exemple d'un Système dynamique chaotique (Model de Lorenz)	25

Table des matières	7
Chapitre 3. Attracteur étrange et interprétation numérique	32
1. L'attracteur de Lorenz	32
2. Tracé de l'attracteur	33
3. Application de premier retour	34
4. Chaos transitoire	35
5. Coexistence de plusieurs attracteurs	38
6. Solutions périodiques	39
7. Intermittence	41
8. L'attracteur "noeud papillon"	42
9. Attracteur de Rössler	44
Conclusion	1
Bibliographie	1

Table des figures

1	Section de Poincaré	3
2	Trajectoires au voisinage d'un point fixe.	6
3	Courbe invariante d'un point fixe col.	7
4	Bifurcation flod ou noeud-col(pli)	9
5	Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche, et sa dégénérescence apres perturbation du système(à droite), (-) :stable, (...) :instable.	10
6	Bifurcation fourche supercritique(à gauche), sous-critique(à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (...) : instable.	10
7	Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous critique (à droite).	11
8	Structure de bifurcation boites emboîtées.	13
9	Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)	14
10	Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .	15
11	Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .	16
12	Bifurcation d'un domaine D_0 connexe \leftrightarrow non connexe.	19
13	Bifurcation d'un bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiples connexe.	19
14	Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.	20
1	Attracteur de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$	26

Table des figures		9
2	Séries temporelles $x(t), y(t), z(t)$ du système de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$	27
3	Les Exposants de Lyapunov du système de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$	28
4	Attracteur de Lorenz (a) l'espace $(x - z)$, (b) l'espace $(y - x)$, (c) l'espace $(y - z)$	29
1	attracteur de Lorenz pour $R = 28$.	33
2	tracé de x en fonction du temps pour l'attracteur de Lorenz.	34
3	carte de Lorenz de l'attracteur de Lorenz.	35
4	chaos transitoire avec $R = 23.4$; x en fonction de t	36
5	chaos transitoire pour $R = 23.4$; vue de l'attracteur dans l'espace.	37
6	$R = 24.5, x(0) = 6, y(0) = 10, z(0) = 23$; attracteur ponctuel.	38
7	$R = 24.5, x(0) = 4, y(0) = -2, z(0) = 1$; attracteur chaotique.	39
8	$99.5 < R < 100.8$: solution périodique xy^2 et scénario de doublement de période.	40
9	trajectoires périodiques pour $R = 310, 165$ (1 ère ligne), $R = 145, 126.5$ (2 ième ligne).	41
10	intermittence : pour $R = 166$, solution régulière et $R = 166.2$, intermittence.	42
11	attracteur en "noeud papillon" de Mira	43
12	tracé de valeurs de y_n pour l'attracteur noeud papillon.	44
13	attracteur de Rössler avec $c = 14$	45
14	attracteur de Rössler : $c = 4.6$ (1 ère ligne), $8.5, 11$ (2 ème ligne), $12.5, 14$ (3 ème ligne).	46
15	application de premier retour de l'application de Rössler.	48
16	mise en évidence de la sensibilité aux conditions initiales de l'application de Rössler.	49

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires remonte à la fin du XIX^{me} siècle, début du XX^{me} siècle avec, entre autres, les travaux de Poincaré et Lyapounov, essentiellement en liaison avec des problèmes de mécanique.

Depuis 1920 jusqu'à présent les systèmes dynamiques et surtout les systèmes dynamiques à temps discrets ou bien les systèmes donnés par des suites récurrentes jouent un rôle très important puisque il ya des applications dans beaucoup de disciplines scientifiques par exemple : la chimie, la physique, la biologie, l'informatique,...,etc. On distingue deux types des systèmes dynamiques : les systèmes dynamiques à temps continu et les systèmes dynamiques à temps discrets. Dans ce travail nous allons étudier essentiellement les systèmes dynamiques discrets. Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre1 : consiste à présenter quelques notions de base concernant les singularités des transformations ponctuelle de dimension un et deux et leur propriétés qui jouent un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires et quelques types de bifurcation en dimension un. Nous étudions la notion de bifurcation de singularités et de bassins d'attraction.

Chapitre2 : retrace un bref historique de la théorie du chaos déterministe. Dans ce chapitre nous balayerons les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement Chaotique, tels que les attracteurs étranges, les exposants de lyapunov et la dimension fractale, est une illustration concrète de la notion précédente par un exemple célèbre tels que le modèle de lorenz.

Chapitre3 : Nous passons ici aux définitions des attracteurs et attracteurs chaotiques et l'existence d'un attracteur étrange "l'attracteur de Lorenz", puis tracé numériquement.

Rappel et généralités sur les systèmes dynamiques

La modélisation de nombreux systèmes dynamiques conduit à une formulation par les équations différentielles non linéaires et non autonomes. Dans le cas de la dimension deux, la forme explicite suivante :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \Lambda, t) \\ y' = g(x, y, \Lambda, t) \end{cases} \quad (0.1)$$

est la plus courante où f et g sont deux fonctions de classe $C^r (r \geq 0)$ par rapport aux variables réelles x et y du paramètre Λ de R^l , périodiques du période Γ par rapport à t . par la méthode de surface de section de Poincaré, on peut associer au système différentiel (0.1) localement une récurrence autonome T de type difféomorphisme.

L'avantage de cette méthode est de diminuer de l'ordre effectif par l'élimination de la dépendance explicite de temps. Ainsi une transformation ponctuelle constitue l'outil essentiel d'étude des équations différentielles.

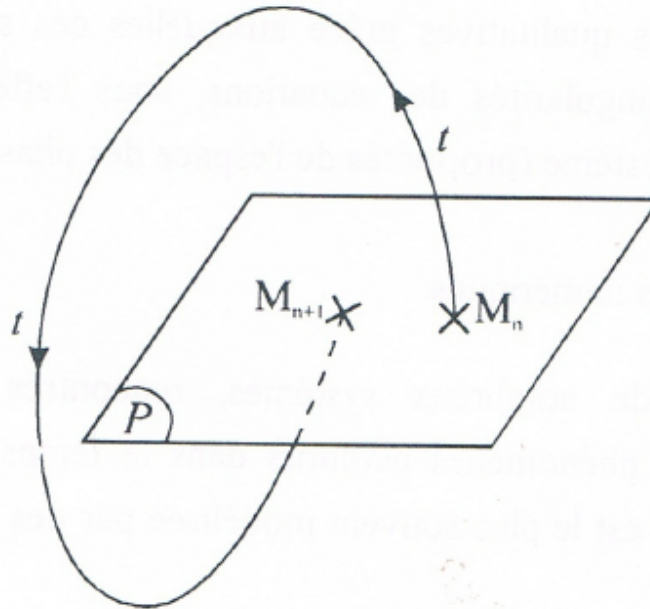


FIGURE 1 – Section de Poincaré

L'idée de base de cette méthode est d'associer à un point $M_n(X_n)$ situé à l'intersection de la surface de section et d'une trajectoire de phase donnée, son conséquent $M_{n+1}(X_{n+1})$ point d'intersection de la surface de section et de la trajectoire considérée (voir [15]), situé après M_n dans le sens du temps croissant. Les points M_n et M_{n+1} sont alors liés par une transformation bidimensionnelle autonome $T : M_{n+1} = TM_n, \quad n = 1, 2, \dots$ (voir figure (1))

Le but de ce chapitre est de rappeler les définitions principales et présenter les résultats généraux spécifiques aux systèmes dynamiques discrets.

1. Rappels de quelques définitions élémentaires

Dans ce paragraphe, nous considérons les transformations ponctuelles (ou récurrences) autonomes sous la forme explicite donnée par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = TX_n = F(X_n, \Lambda) \\ X_n \in \mathbb{R}^p (p = 2), \Lambda \in \mathbb{R}^q (q \geq 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où F est au moins de classe $C^k, k \geq 1$ par rapport à la variable X et au paramètre Λ .

\mathbb{R}^p s'appelle l'espace d'état (de phase) et p la dimension de la transformation (1.1), \mathbb{R}^q s'appelle l'espace des paramètres.

DÉFINITION 1.1. Une solution de (1.1) est formée par une suite de points $X_n, n = 0, 1, \dots$ où X_0 est appelé condition initiale ; les points $X_n, n = 0, 1, \dots$ forment une trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

DÉFINITION 1.2. La transformation T est un difféomorphisme si F dans (1.1) est continuellement différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition. Si F est discontinue ou non différentiable et à inverse unique, alors T est simplement dit inversible. Enfin, si F ne possède pas d'inverse unique, T est appelé un endomorphisme.

DÉFINITION 1.3. L'itéré X_{n+r} , avec $r \geq 1$, est appelé conséquent de rang r de X_n , c'est à dire : $X_{n+r} = T^r(X_n)$, X_n est un antécédent de rang r de X_{n+r} noté : $X_n = T^{-r}(X_{n+r})$.

Lorsque T est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang 1 ou aucun.

2. Singularités et stabilité

2.1. Singularités. On distingue deux types de singularités de dimension zéro pour la transformation T : les points fixes et les cycles, encore appelés orbites périodiques.

DÉFINITION 2.1. Un point fixe X^* est un point du plan des phases vérifiant :

$$X^* = T(X^*) \quad (2.1)$$

DÉFINITION 2.2. Un Cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (X_1^*, \dots, X_k^*) du plan des phases, vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1}^* = T(X_i^*) & , \quad i = 1, \dots, k-1 \\ X_1^* = T(X_k^*) \\ X_i^* = T^k(X_i^*) & , \quad i = 1, \dots, k \\ X_i^* \neq T^h(X_i^*) & , \quad i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad 1 \leq h < k. \end{cases} \quad (2.2)$$

Chaque point X_i^* d'un cycle d'ordre k est un point fixe de T^k . Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points X_i^* par applications successives de T , un tel cycle sera désigné par le système (k, j) (k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de T).

Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un, il peut également apparaître des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation T ou T^k .

DÉFINITION 2.3. Dans le plan de phases \mathbb{R}^2 , une courbe définie par l'équation $Q(X) = C$, C une constante, est invariante par la transformation T ou T^k , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$Q(T(X)) = Q(X) \quad \text{ou} \quad Q(T^k(X)) = Q(X) \quad (2.3)$$

Plus généralement, un ensemble A de \mathbb{R}^p est invariant par T ssi $T(A) = A$.

2.2. Stabilité des singularités. Pour caractériser la nature des singularités de dimension zéro, on introduit la notion de multiplicateurs (ou valeurs propres) définie lorsque F est différentiable au point considéré.

- (1) Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe X^* est $S = F'(X^*)$ où $F' = \frac{dF}{dX}$ et celui d'un cycle d'ordre k , $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ est $S = \prod_{i=1}^k F'(X_i^*)$.

Un point fixe ou un cycle d'ordre k est dit attractif (asymptotiquement stable) si $|S| < 1$ et répulsif (instable) si $|S| > 1$.

- (2) Si la dimension de la récurrence $p = 2$, un point fixe X^* ou un cycle d'ordre k , $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ possède deux multiplicateurs S_1 et S_2 qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de F (pour un point fixe) ou F^k (pour un cycle d'ordre k) au point considéré.

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et répulsif si $|S_1| > 1$ ou $|S_2| > 1$.

Selon les valeurs prises par S_1 ou S_2 avec $|S_i| \neq 1, i = 1, 2$, on définit différentes sortes de points fixes ou cycles :

- (1) Col : S_1 et S_2 sont réels : $|S_1| > 1$ et $|S_2| < 1$. Un col est toujours instable.
- (2) noeud : S_1 et S_2 sont réels.
 — Attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$,
 — Répulsif si $|S_i| > 1, i = 1, 2$.
- (3) Foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués, $S_1 = \rho e^{-i\theta}, S_2 = \rho e^{+i\theta}$.
 — Attractif si $\rho < 1$,
 — Répulsif si $\rho > 1$.

La figure (2) représente les trajectoires au voisinage d'un point fixe.

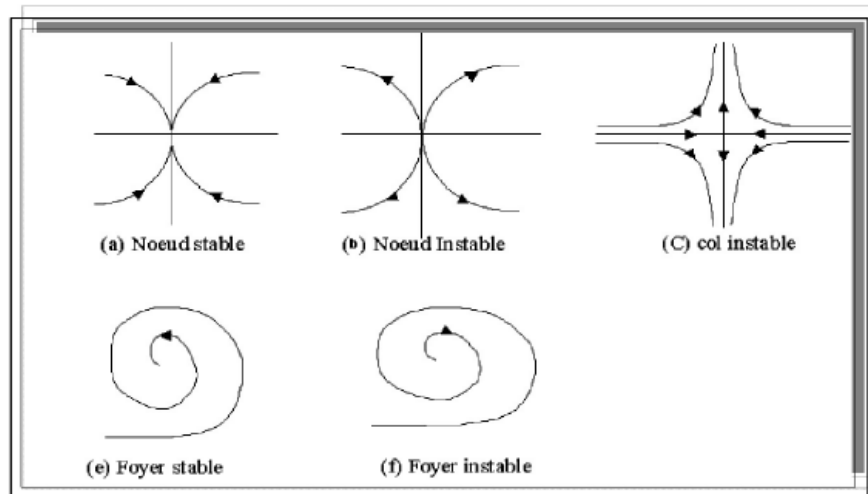


FIGURE 2 – Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

3. Ensembles stables et instables

Pour une transformation ponctuelle T définie par (2), on peut définir les ensembles stables et instables associés à un point fixe.

DÉFINITION 3.1. Soit X^* un point fixe répulsif et U un voisinage de X^* .

- On appelle $W_{loc}^i(X^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est à dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U qui converge vers X^* .
- On appelle $W^i(X^*)$ ensemble instable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers X^* .

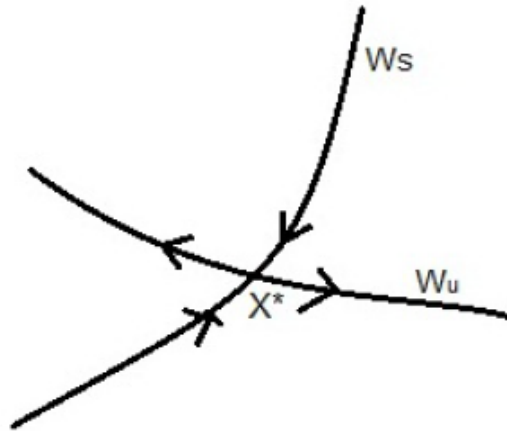


FIGURE 3 – Courbe invariante d'un point fixe col.

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(X^*) = \{X \in U : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{-n} \in U\}, \quad (3.1)$$

$$W^i(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i(X^*)) \quad (3.2)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P1- $W^i(X^*)$ est invariante par rapport à T c'est à dire : $T[W^i(X^*)] = W^i(X^*)$.

P2- Si T est un endomorphisme, en général $W^i(X^*)$ n'est pas invariant par rapport à T^{-1} et on a : $W^i(X^*) \subseteq T^{-1}[W^i(X^*)]$. L'invariance de $W^i(X^*)$ par rapport à T^{-1} a lieu lorsque T est inversible.

DÉFINITION 3.2. Soit X^* un point fixe T répulsif ou attractif.

- On appelle $W_{loc}^s(X^*)$ ensemble stable local ou variété stable locale (c'est à dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers X^* .
- On appelle $W^s(X^*)$ ensemble stable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p dont la séquence d'images successives converge vers X^* .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_n = T^n(X) \rightarrow X^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_n \in U\} \quad (3.3)$$

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_n = T^n(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{\text{loc}}^s(X^*)) \quad (3.4)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P3- $W^s(X^*)$ est invariante par rapport à T^{-1} : $T^{-1}[W^s(X^*)] = W^s(X^*)$.

P4- Si T est un endomorphisme, en général $W^s(X^*)$ n'est pas invariant par rapport à T et on a : $T[W^s(X^*)] \subseteq W^s(X^*)$. L'invariance de $W^s(X^*)$ par rapport à T a lieu lorsque T est inversible.

REMARQUE 3.1.

- (1) Si X^* est un point fixe attractif l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.
- (2) Si T est un difféomorphisme les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.
- (3) Dans le cas d'un point fixe X^* de type nœud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de X^* se réduit à X^* lui-même lorsque T est inversible. Lorsque T est non inversible l'ensemble stable local de X^* se réduit à X^* lui-même et l'ensemble stable global de X^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de X^* . Ceci s'écrit :

$$W^s(X^*) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(X^*) \quad \text{et } \forall X \in W^s(X^*) : \exists m \in \mathbb{N} / T^m(X) = X^* \quad (3.5)$$

- (4) Les définitions des ensembles stables et instables d'un cycle d'ordre k se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de T^k

4. Plan paramétrique - Bifurcation

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre Λ traverse une valeur critique Λ_0 . En particulier les valeurs de Λ correspondent à un cas critique de Lyapunov sont liées à des bifurcations dites classiques. Sous l'effet d'une petite variation autour Λ_0 , ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de nouvelles singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Pour les transformations décrites par (1.1) plusieurs sortes de bifurcations se produisent. Nous ne mentionnerons que celles qui interviennent dans ce travail.

4.1. La bifurcation fold (Noeud - Col). Naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre k , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux points fixes (cycles) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle S_1 ou S_2 est égal à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\emptyset \xleftrightarrow{S=+1} N_s^k \text{ (resp. } N_i^k \text{) } + C^k. \quad (4.1)$$

\emptyset signifie absence de cycle, N_s^k cycle noeud d'ordre k stable, N_i^k cycle noeud d'ordre k instable, C^k cycle col d'ordre k . Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\Lambda_{(k)0}^j$. k correspond à l'ordre du cycle, j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T .

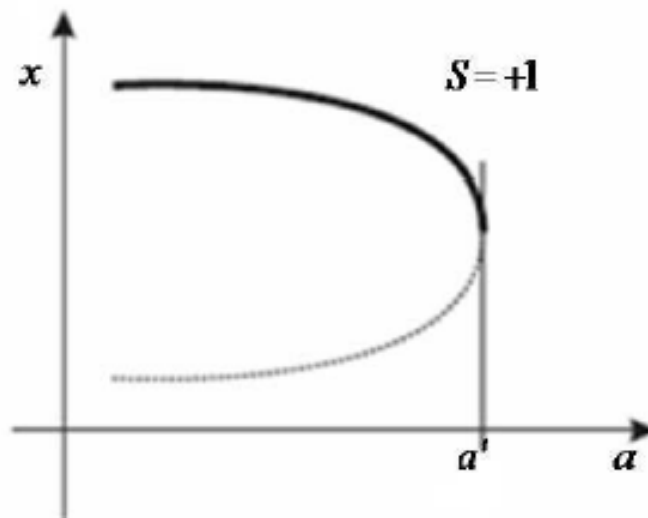


FIGURE 4 – Bifurcation flod ou noeud-col(pli)

4.1.1. *Cas particuliers de la bifurcation fold.* 1. Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux collecteurs différents points fixes se croisent. Au point de passage de l'échange des points fixes il y a la propriété de stabilité. Le point fixe instable devient stable et vice versa. Notez qu'au-de là du point de bifurcation, le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation noeud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation noeud-col, sa représentation dans la Figure 5-6.

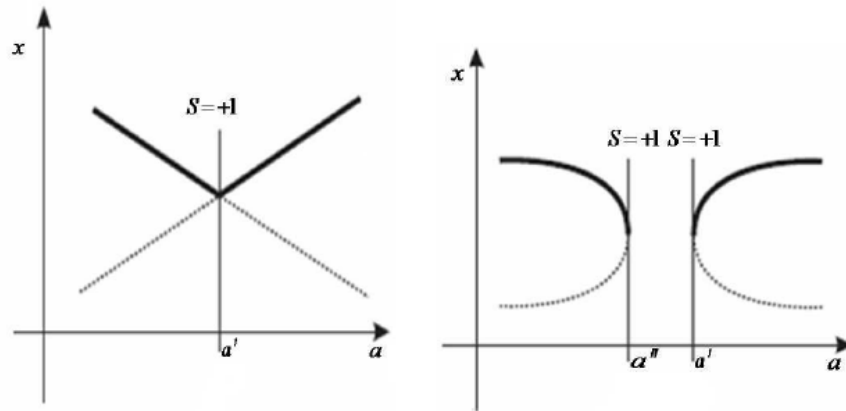


FIGURE 5 – Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) : stable, (...) : instable.

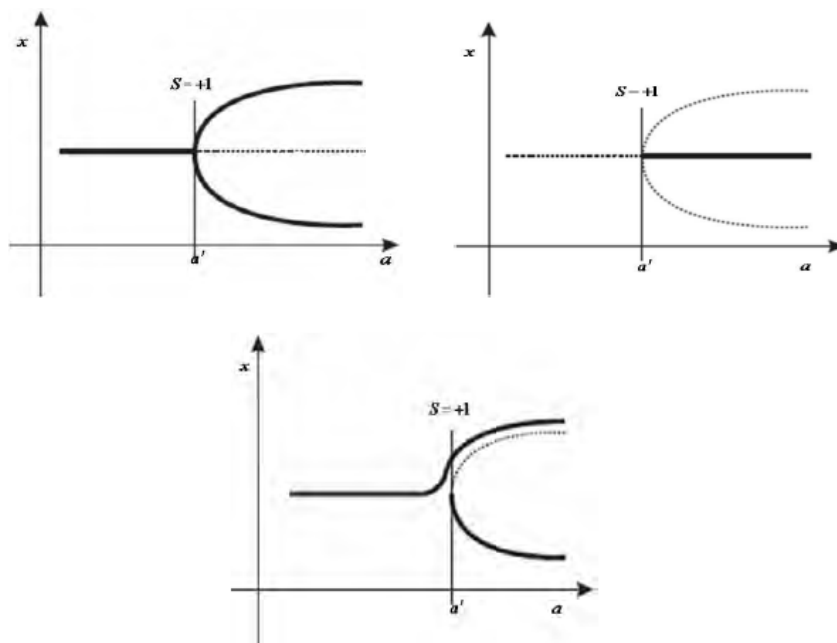


FIGURE 6 – Bifurcation fourche supercritique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (...) : instable.

4.2. La bifurcation flip (doublement de période). Un point fixe (resp. cycle d'ordre k) de type noeud change de stabilité lorsque S_1 ou S_2 est égal à (-1) , et donne naissance à

un cycle d'ordre 2 (resp cycle d'ordre $2k$) qui a la même stabilité que le point fixe (resp cycle d'ordre k) d'origine. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\begin{cases} N_s^k (\text{resp} \cdot N_i^k) \xrightarrow{S=-1} N_i^k (\text{resp} \cdot N_s^k) + N_s^{2k} (\text{resp} \cdot N_i^{2k}) \\ C^k \xrightarrow{S=-1} N_i^k (\text{resp} \cdot N_s^k) + C^{2k} \end{cases} \quad (4.2)$$

N_s^{2k} signifie cycle noeud d'ordre $2k$ stable, N_i^{2k} cycle noeud d'ordre $2k$ instable, C^{2k} cycle col d'ordre $2k$. Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées Λ_k^j .

4.3. La bifurcation de Neïmark-Hopf. Un point fixe (resp cycles d'ordre k) de type foyer change de stabilité (lorsque $S_{1,2} = \rho \exp(\pm i\varphi)$ vérifient $\rho = 1$) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. On a le schéma

$$F_s^k (\text{resp} \cdot F_i^k) \xrightarrow{\rho=1} F_i^k (\text{resp} \cdot F_s^k) + C.F.I_s^k (\text{resp} \cdot C.F.I_i^k), \quad (4.3)$$

où F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable, F_i^k cycles foyer d'ordre k instable, C.F.Is correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k stables (attractives), C.F.Is correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k instables (répulsives). Ces courbes fermées invariantes s'échangent cycliquement par k applications successives de T . Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées Γ_k^j .

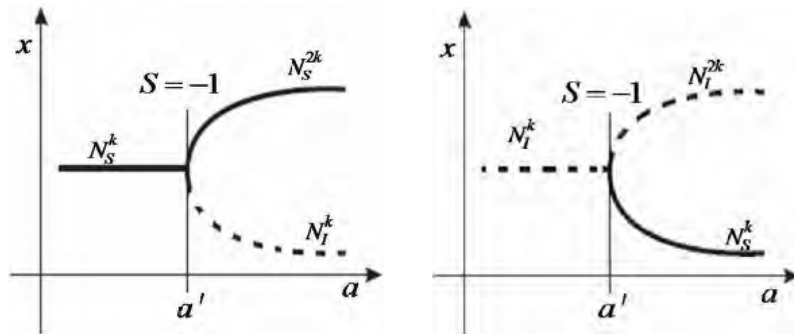


FIGURE 7 – Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous critique (à droite).

5. Bifurcation concernant les bassins d'attractions

Dans ce paragraphe (voir [1], [3]) on décrit. les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction, ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin avec une ligne critique d'une transformation ponctuelle non inversible.

5.1. La bifurcation de contact de type 1. Cette bifurcation apparait lorsque la frontière du bassin \mathcal{F} entre en contact avec LC a une certaine valeur de bifurcation, elle concerne le changement de l'intersection entre le bassin d'attraction \mathcal{D} et LC est formée de segments non connexe :

- bassin connexe \rightarrow bassin non connexe
- bassin non connexe \rightarrow bassin connexe
- bassin simplement connexe \rightarrow bassin multiplement connexe

5.2. La bifurcation de contact de type 2. Cette bifurcation apparait lorsque la frontière d'une aire chaotique entre en contact avec la frontière de son bassin immédiat après la bifurcation l'aire chaotique se détruit en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de l'aire chaotique. Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leur point limite et de leurs antécédents, appartenant à l'aire chaotique avant la bifurcation.

Ces points sont responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évoluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

5.2.1. Structure de bifurcation Boîtes-emboîtées. //

La structure de bifurcation "boîtes-emboîtées" a été mise en évidence en 1975, cette structure est un autre type d'organisation fractal pour l'ensemble de bifurcation dans le plan paramétrique d'un système dynamique donné. Rappelons que le terme bifurcation désigne des changements qualitatifs du système sous l'effet des variations des paramètres. Ici le terme fractal indique que les boîtes sont autosimilaires c'est à dire que l'ensemble est semblable aux parties (boîtes) et ceci reste vrai même quand ces parties sont infinitésimales. Cette structure fractale donne une route vers le chaos pour un grand nombre de systèmes dynamiques.

La cascade de Merberg ou cascade de doublement de période constitue une partie de la structure de bifurcation "boîtes-emboîtée" les détails concernant cette structure peuvent

être trouvés dans Mira et Gumowski [6,7]. Appelons Ω l'intervalle $[\lambda_{(1)0}, \lambda_1^*]$ lide l'axe paramétrique contenant tous les structures de bifurcation "boîtes-emboîtées". A l'intérieur de cette boîte Ω_1 on distingue deux sous intervalles (boîtes) sur l'axe paramétrique notés ω_1 et Δ_1 . En général, l'indice k utilisé désigne les boîtes ω_k et Δ_k qui forment la boîte ω_k , cette dernière traduit la même organisation des bifurcations que la boîte Ω_1 mais par rapport à la transformations T^K . La Figure(8) donne une représentation de la disposition de ces boîtes. Dans [7] une structure de bifurcation "boîtes-emboîtées" de type cubique a été décrite pour la transformation définie par :

$$X_{n+1} = -X_n^3 + \mu X^2 + \lambda X^n \quad (5.1)$$

Ce type de structure constitue une propriété caractéristique des endomorphismes à une dimension défini par une fonction à deux extrema, vérifiant des conditions de régularités suffisantes pour assurer l'existence d'un attracteur au voisinage de chaque extremum.

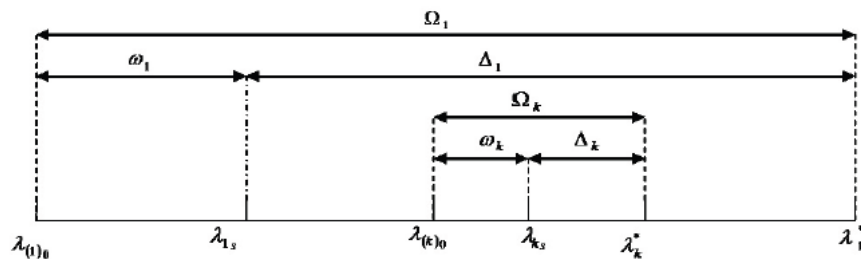


FIGURE 8 – Structure de bifurcation boîtes emboîtées.

6. Structure feuilletée d'un plan paramétrique

L'étude de la structure de bifurcation de (2.1) dans le plan de paramètres $\Lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2)$ montre que pour un point de ce plan, il peut exister plusieurs cycles d'ordre et de stabilité différents. Cette remarque induit le caractère feuilleté du plan des paramètres. Chaque feuillet est alors associé à un cycle bien défini par son ordre k , l'ordre d'échange de ses points j , et les valeurs propres de la transformation linéaire associée S_1 et S_2 , les feuillets pouvant se joindre en des points ou courbes particuliers. Soit $|z|$ une norme qualitative associée à un cycle, l'espace $(|z|, \lambda_1, \lambda_2)$ donne une représentation tridimensionnelle qualitative de la structure de ces feuillets. Les courbes $\Lambda_{(k)0}^j$ désignent les courbes correspondant à une bifurcation fold. Elles sont la jonction de deux feuillets, l'un lié au cycle né stable, l'autre lié au cycle né instable.

Des communications plus complexes entre feuilletés peuvent apparaître par des singularités de codimension deux comme les points cuspidaux.

6.0.1. *Zone de communication entre feuilletés.* Des zones de communication entre feuilletés du plan des paramètres peuvent apparaître [2, 9]. Ces zones sont caractérisées par l'existence d'un point cuspidal C_k^j sur une courbe de bifurcation de type fold associée à des courbes de bifurcation de type flip. Il existe trois schémas distincts d'association de la courbe fold avec courbes flip qui correspondent à trois zones de communication.

6.0.2. *Zone échangeur.* Dans le plan de paramètres (λ_1, λ_2) , une zone échangeur met en jeu une courbe de type fold $\Lambda_{(k)_0}^j$ formant un point cuspidal C_k^j , des courbes de types flip $\Lambda_k^j, \Lambda_k^{j'}, \Lambda_k^l$ et soit une courbe de bifurcation fold $\Lambda_{(k)_0}^l$, soit une courbe de bifurcation flip $\Lambda_{k/2}^l$, donnant naissance à un cycle d'ordre double (k, l) à partir d'un cycle $(k/2, l)$

Figures 9 (a)(b). Ces zones échangeurs sont respectivement désignées par $ZEK[l_0, j], ZEK[l, j]$.

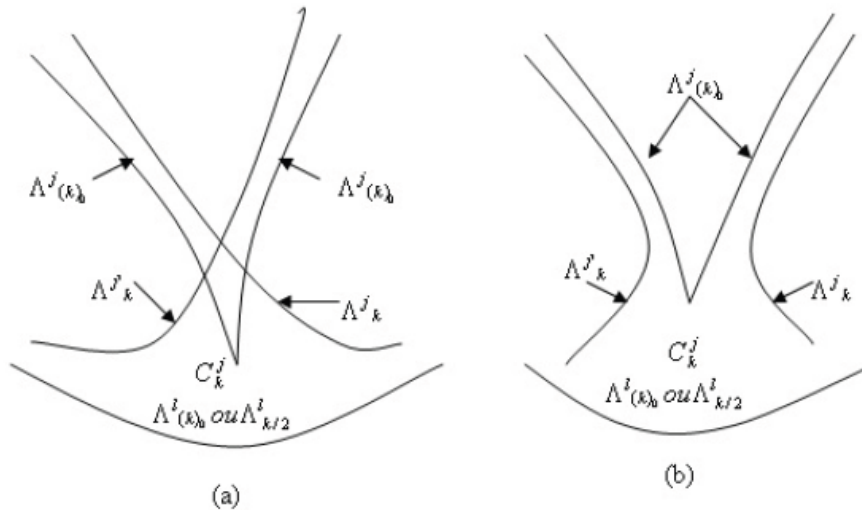


FIGURE 9 – Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

6.0.3. *Zone col.* Cette zone met en jeu deux courbes de type fold $\Lambda_{(k)_0}^j$ et $\Lambda_{(k)_0}^{j'}$ et deux courbes flip Λ_k^j et $\Lambda_k^{j'}$ voir Figure 10.

Le principe de cette communication est que le cycle col $(k, j), (S > 1)$ qui naît au cours de la bifurcation $\Lambda_{(k)_0}^j, (S = +1)$ est le cycle de base qui définit aussi la courbe de bifurcation $\Lambda_{(k)_0}^{j'}$ présentant un point cuspidal $C_k^{j'}$ dans le plan des paramètres. La zone col est désignée par le formalisme $ZCK[j, j']$.

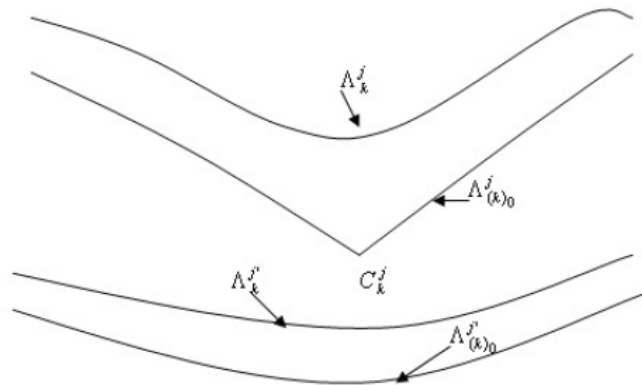


FIGURE 10 – Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .

6.0.4. *Zone source.* Cette zone met en jeu sept courbes de bifurcation :

- la courbe de type fold $\Lambda_{(k)_0}^j$ présentant un point cuspidal C_k^j ,
- la courbe de type flip Λ_k^j formant une boucle qui entoure le point cuspidal,
- la courbe de type flip $\Lambda_k^{j'}$ située sur le même feuillet que Λ_k^j ,
- les deux courbes de type fold $\Lambda_{(2k)_0}^m$ et $\Lambda_{(2k)_0}^{m'}$ se terminant sur Λ_k^j par les deux points C_{2k} et C_{2k}' ,
- les deux courbes de type flip Λ_{2k}^m et $\Lambda_{2k}^{m'}$, chacune d'elles résultant d'un doublement d'ordre d'une branche de Λ_k^j et venant aussi des cycles $(2k, m)$ et $(2k, m')$ générés par les deux courbes fold précédentes. Cette zone est désignée par le formalisme $ZSK[l, j, (m, m')]$.

Ces différentes zones de communications correspondent, lorsqu'elles sont associées à des cycles stables, à des zones de multistabilité dans l'espace des paramètres. Plusieurs études dont ont mis en évidence plusieurs scénarios concernant les transitions d'une zone source ou d'une zone col avec une zone échangeur lors de la variation d'un troisième paramètre.

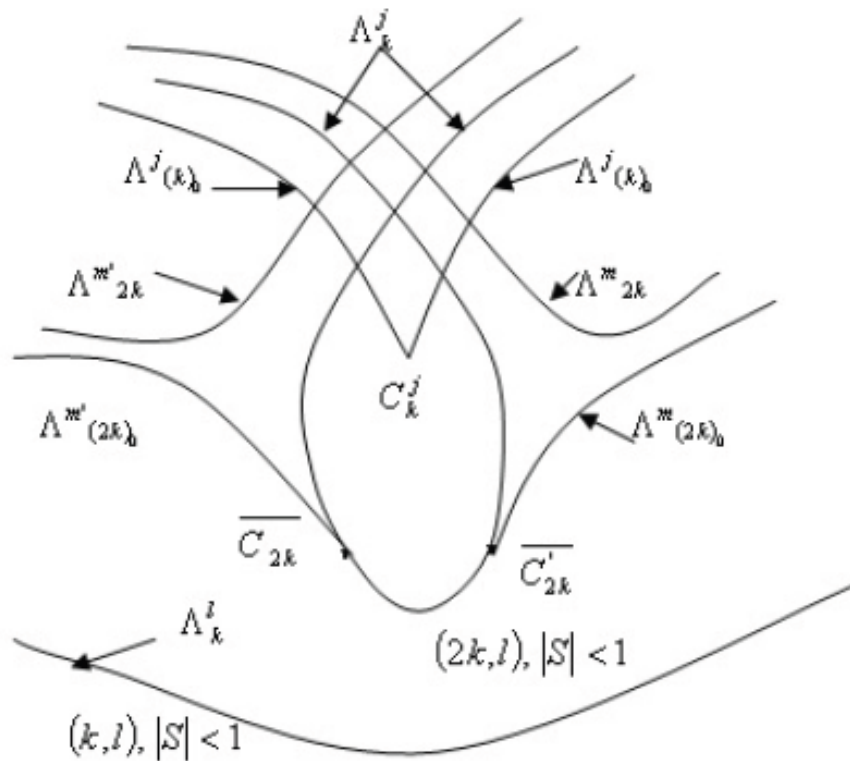


FIGURE 11 – Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .

7. Plan de phase d'une transformation non inversible

Dans ce paragraphe nous donnons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phase d'une transformation ponctuelle non inversible de type (3.2) pour des valeurs de paramètres fixés.

Les variétés critiques. Dans le plan de phase, la non inversibilité des applications (endomorphismes) est caractérisée par la présence des singularités appelées lignes critiques (LC_k). Ce type de singularité, introduit pour la première fois par Mira en 1964. Les lignes critiques interviennent dans la détermination d'aire absorbante et d'aire chaotique, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

DÉFINITION 7.1. En dimension un, un point critique de rang $k + 1$ est le conséquent de rang k d'un extremum de la courbe $Y = h_k(X)$ où h_k est la fonction définissant T^k , il est noté C_k .

DÉFINITION 7.2. En dimension deux une ligne critique notée LC ou LC_0 est le lieu des points du plan de phase ayant au moins deux antécédents de rang 1 confondus. C'est la généralisation à la dimension deux de la notion de point critique défini en dimension un.

Une ligne critique LC_k de rang $k + 1$, est la ligne conséquente de rang k de LC_0 , $k = 1, 2, \dots$. La ligne critique LC_{-1} est l'antécédent de rang un de LC_0 , avec pour définition :

$$T(LC_{-1}) = LC \text{ et } LC_{-1} \subseteq T^{-1}(LC)$$

L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :

- a) Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.
- b) Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations.

Les lignes critiques partagent le plan de phase en zones Z_i ; chaque zone Z_i possède i antécédents de rang un.

Formulation mathématique des lignes critiques. Cas différentiable. Dans le cas où T est différentiable, une courbe LC_{-1} est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de T s'annule.

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, J(X) = 0\} \quad (7.1)$$

Cas non différentiable. Dans le cas où T est non différentiable, une courbe LC_{-1} est le lieu des points de non différentiabilité. On suppose que ces points sont des antécédents de rang un confondus puisque T est continûment différentiable par morceaux. Cet ensemble est donc : $LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\}$.

DÉFINITION 7.3. Les exposants de Lyapunov, présentés par Oseledec pour la première fois en 1968, jouent un rôle important dans l'étude des systèmes non linéaires, notamment les systèmes chaotiques. Ils qualifient le degré de divergence des trajectoires d'un système dynamique non linéaire soumis à des conditions initiales différentes. Cette divergence est exprimée par les exposants de Lyapunov. Les exposants de Lyapunov caractérisant ainsi le comportement du système non linéaire et notamment son caractère chaotique ou hyperchaotique.

8. Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine D , située dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur A . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de D avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible.

On notera ∂D la frontière de D , D_0 le bassin immédiat de l'attracteur A et ∂D sa frontière. La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type $(Z_0 - Z_2)$

PROPOSITION 8.1. *Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ dépendant d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_b , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :*

- (a) *bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)*
- (b) *bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplément connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).*
- (c) *augmentation ou diminution du nombre d'îlots de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.*
- (d) *augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.*
- (e) *transition lacs \leftrightarrow baie.*
- (f) *transition frontière externe faiblement fractale \leftrightarrow frontière externe fortement fractale.*

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC .

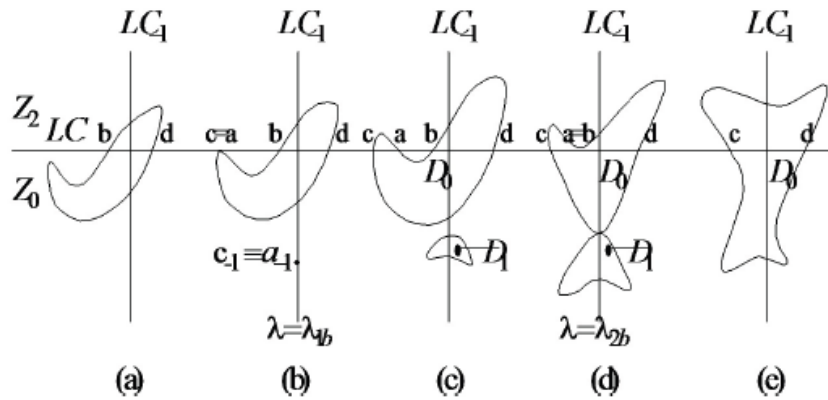


FIGURE 12 – Bifurcation d’un domaine D_0 connexe \leftrightarrow non connexe.

La partie (a) de cette proposition est illustrée par la Figure 11, sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation $\lambda = \lambda_{1b}$, correspond à un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv c$. $\{T^{-n}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, est une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d’une séquence arborescente de N îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour $\lambda < \lambda_{1b}$, devient non connexe pour $\lambda > \lambda_{1b}$. La seconde bifurcation $\lambda = \lambda_{2b}$, correspond à un contact tangentiel entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$, donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre ∂D_0 et la frontière ∂D_1 de l’îlot D_1 . Après cette dernière bifurcation D redevient connexe.

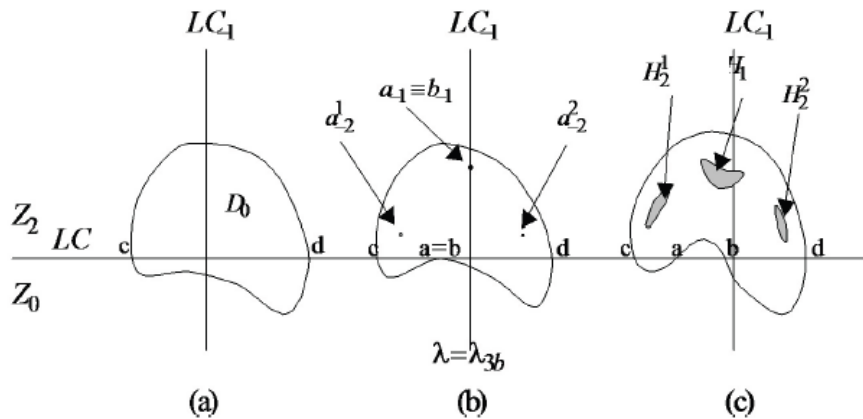


FIGURE 13 – Bifurcation d’un bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiple-ment connexe.

La partie (b) de cette proposition, est illustrée par la Figure 13, sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur $\lambda = \lambda_{3b}$ a lieu un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$. Les antécédents de tout rang $T^{-n}(a)$ du point a , forment une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N lacs.

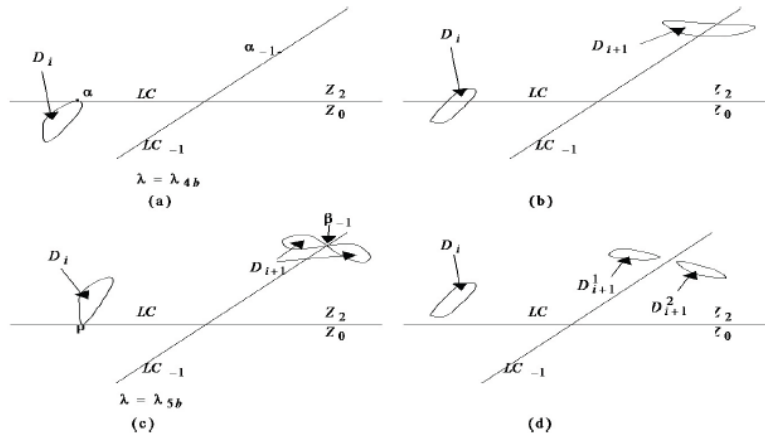


FIGURE 14 – Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

La partie (c) est illustrée par la Figure 14, sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur $\lambda = \lambda_{4b}$ (Fig 14a) et qui correspond à un contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\alpha = D_i \cap LC$. Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_{4b}$, l'îlot D_i était à l'intérieur de la région Z_0 ($D_i \cap \overline{Z_2} = \emptyset$). A la bifurcation, les antécédents de tout rang $T^{-n}(\alpha)$ de α ($T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$) constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots $D_{i+n}, D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. En continuant à faire varier le paramètre λ de manière continue, l'îlot D_i progresse dans la région Z_2 (Fig 14b). La seconde valeur de bifurcation $\lambda = \lambda_{5b}$ (Fig 14c), correspond à un nouveau contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\beta = D_i \cap LC$ ($D_i \subset \overline{Z_2}$).

Ceci implique que le point $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$ est un point d'intersection limite entre LC_{-1} et D_{i+1} , avant que ce dernier se divise en deux îlots $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$, lorsque la valeur de λ dépasse la seconde valeur de bifurcation (Fig 14d).

La partie (d) est analogue à la partie (c), en substituant dans le raisonnement de la partie (c) les îlots par des lacs d'un bassin multiplement connexe.

Chaos et attracteur étrange de Lorenz

1. Introduction

Depuis la découverte de Mr Edward N. Lorenz en 1963 [7] avec son fameux papillon [8] et la naissance de la théorie du chaos avec, les recherches dans ce domaine ont connus une croissance sans cesse. à nos jours l'application de la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences, c'est le cas de la physique, la biologie (la démographie, les épidémies, etc.), la chimie et l'économie, etc. Ce chapitre sera consacré à l'étude des systèmes dynamique chaotiques.

Après un rappel et des généralités sur les systèmes dynamiques, la théorie du chaos sera introduite avec un bref historique, tout en étalant cette étude sur les propriétés fondamentales des systèmes chaotique : espace des phases, points d'équilibres, les exposants de lyapunov, diagramme de bifurcation et section de poincaré et leurs influences sur le comportement chaotique des systèmes dynamiques.

2. L'historique de chaos

Dans le milieu scientifique, le concept a émergé dans la seconde partie des années 1970 en tant que science des phénomènes non linéaires complexes montrant certaines caractéristiques communes [10]. le mathématicien Henri Poincaré qui a démontré que certains systèmes mécaniques, dont l'évolution temporelle est gouvernée par des équations hamiltoniennes, peuvent exhiber un mouvement chaotique. Malheureusement, ceci fut considéré par beaucoup de physiciens comme simple curiosité. Il a fallu 70 ans pour que le météorologiste E.N. Lorenz (1963) découvre que même un simple ensemble de trois équation (non linéaires couplées de premier ordre) peut donner lieu à des trajectoires complètement chaotiques. Ainsi, Lorenz a mis en évidence un des premiers exemples de

chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs. Dans les années qui ont suivi, à cause des résultats théoriques, de la puissance incrémentale des ordinateurs, et des techniques expérimentales de plus en plus raffinées, il est devenu vrai semblable que ce phénomène est abondant dans la nature et a beaucoup de conséquences et de ramifications dans de nombreux domaines scientifiques. Il faut noter que la non-linéarité est une condition nécessaire, mais pas suffisante pour générer le chaos.

Le mot chaos n'a pas ici le même sens que l'usage dans la vie courante. ([12]) On retrouve trace de mot du grec Khaos dans les écrits de Christine de Pisan (Chemin de long estude) qui définit le chaos comme un

" état de confusion des éléments ayant précédé l'organisation du monde "

Au XVIème siècle Des portes, le décrit dans ses Elegies comme" Toute sorte de confusion, de désordre "

Le chaos, dans son sens familier aujourd'hui, c'est le désordre et la violence, mais aussi l'intelligibilité.

Loin de ces considérations historiques et mythologiques, Chaos : un terme souvent utilisé comme métaphore du désordre. Et la théorie du Chaos a vu le jour dans les travaux d'Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle et c'est dans les années soixante qu'elle fut redécouverte après la publication d'un article qui allait révolutionner le monde des sciences. Le chaos est devenu un champ d'exploration de la science.

Le chaos est défini par un comportement lié à l'instabilité et à la non-linéarité dans des systèmes dynamiques déterministes. La relation entre l'instabilité et la chaotité est alors que le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions est ce qu'affirmait Poincaré dans le chapitre sur le Hasard de son ouvrage intitulé Science et Méthode : Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.

Le phénomène de croissance rapide des erreurs de prédiction est ce que l'on appelle chaos. Ce phénomène introduit donc du hasard dans la description d'un système déterministe comme celles de la dynamique du mouvement des astres. La théorie du chaos étudie en détail comment une petite incertitude sur l'état initial d'une évolution temporelle déterministe peut donner lieu à une incertitude des prédictions qui croît rapidement avec

le temps. On dit qu'il y a dépendance sensitive des conditions initiales. La propriété de sensibilité aux conditions initiales se traduit par le fait que, dans l'espace des phases, la distance entre deux trajectoires tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps, pouvant atteindre une distance limite qui est de l'ordre du diamètre de l'attracteur. La sensibilité aux conditions initiales caractérise un système chaotique.

La théorie du chaos selon Keller est (l'étude qualitative du comportement apériodique instable d'un système dynamique déterministe). qui admet le manque d'une définition générale d'un système dynamique chaotique considère qu'un tel système possède trois propriétés essentielles. Premièrement, il est radicalement sensible aux conditions initiales. Deuxièmement, il peut faire preuve d'un comportement hautement désordonné et troisièmement, malgré cette dernière caractéristique de désordre, un système dynamique chaotique est déterministe c'est-à-dire qu'il obéit à des lois qui décrivent complètement son mouvement.

3. L'attracteur étrange

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotique : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace de phase et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. [10]

Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale et non entière ; sa trajectoire est complexe ; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. ([12]) En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant " t "voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré " vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur[9]. Une " définition " d'un attracteur étrange peut être formulée : Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

- **Attraction** : U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U ; est entièrement contenue dans U : De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.
- **Sensibilité** : les orbites dont le point initial est dans R sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.
- **Fractal** : A est un objet fractal.
- **Mélange** : Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

4. Le système chaotique

On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il est modélisé par des équations différentielles non linéaires. Pour être chaotique, un système à temps continu doit être au minimum d'ordre 3 (3 états). ([10])

4.1. Les caractéristiques du système chaotique. Un phénomène chaotique n'est pas aléatoire mais obéissant au contraire à des lois déterministes, parfois assez simple dans leur représentation mathématique. Les phénomènes traités par les lois du chaos se caractérisent par des propriétés génériques fondamentales en plus de la sensibilité aux conditions initiales parmi lesquelles on peut citer [6].

4.1.1. *La non linéarité.* Un système chaotique c'est un ensemble d'équations dynamiques non linéaires et déterministes.

La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause [7].

4.1.2. *La Sensibilité aux conditions initiales.* Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Il est clair que la moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction sur l'évolution à long terme du système.

4.1.3. *Le déterministe.* La notion de déterminisme signifie la capacité de prédire le futur d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent.

4.1.4. *L'imprévisibilité.* L'imprévisibilité est due à la sensibilité aux conditions initiales ; et en pratique, celles-ci peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

4.1.5. *L'irrégularité.* Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements).

5. Exemple d'un Système dynamique chaotique (Model de Lorenz)

5.1. Modèle de Lorenz. Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard [11, 13].

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, [12] il constitua le premier et le célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

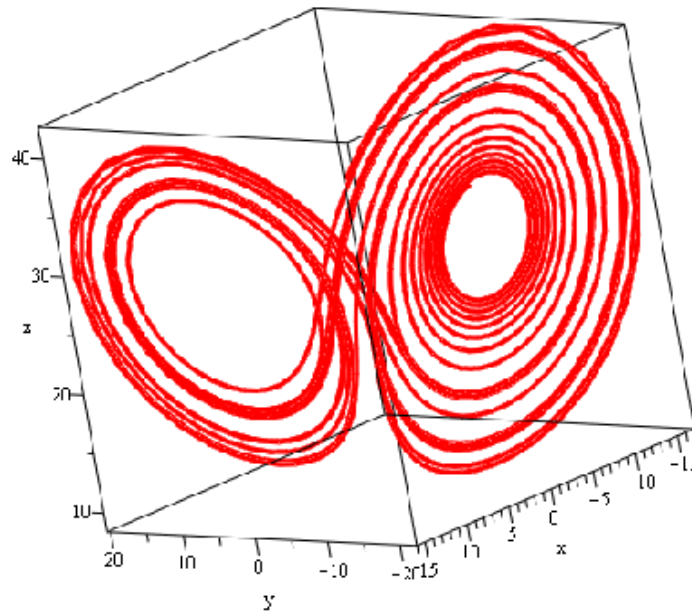
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (5.1)$$

σ ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égal à 10 dans les simulations), $b = 8/3$ et r est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs du paramètres de contrôle.

5.1.1. *Calcul des points d'équilibres.* Les points fixes sont par définition tel que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Un premier point fixe trivial est $P_0 : x = y = z = 0, \forall r \geq 0$

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = y & (1) \\ rx - y - xz = 0 & (2) \\ xy - bz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{b}{xy} & (3) \end{cases}$$

FIGURE 1 – Attracteur de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$

(1) dans (3) donne $x^2 = bz \Leftrightarrow x = \mp \sqrt{bz}$

(1) dans (2) donne $-xz + rx - x = 0 \Leftrightarrow z = r - 1$

les points fixes P_1 et P_2 sont donc

$$P_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (5.2)$$

Pour $r = 1, P_0 = P_1 = P_2$ donc pour $r \in [0; 1]$, il n'y a qu'un seul point fixe P_0 et pour $r > 1$, il y a 3 points fixes P_0, P_1 et P_2 .

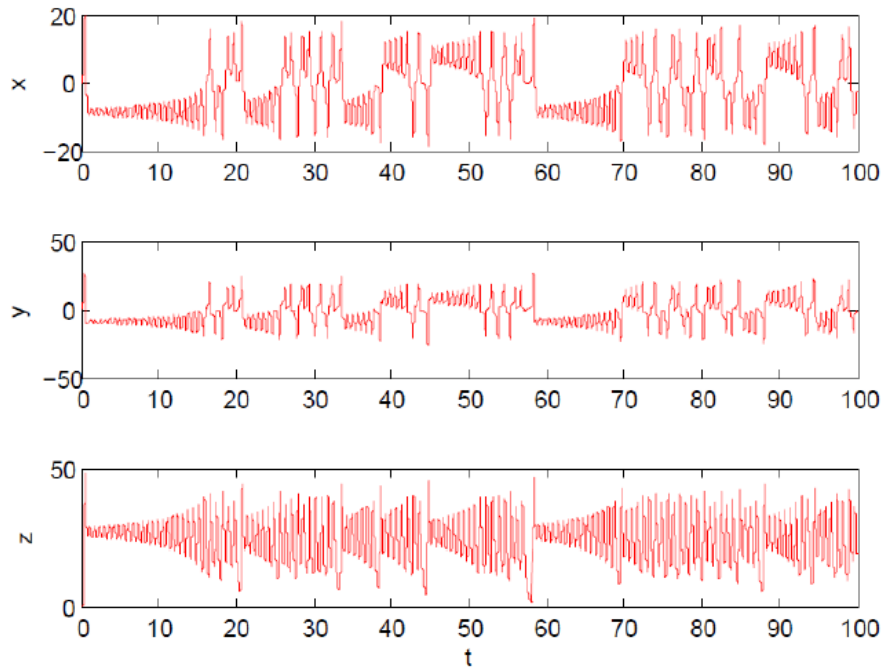


FIGURE 2 – Séries temporelles $x(t), y(t), z(t)$ du système de Lorenz $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$

5.1.2. *Stabilité des points d'équilibres.* Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes pour le cas $|r - 1| \ll 1$

La stabilité des points d'équilibres est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice jacobienne en ces points. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

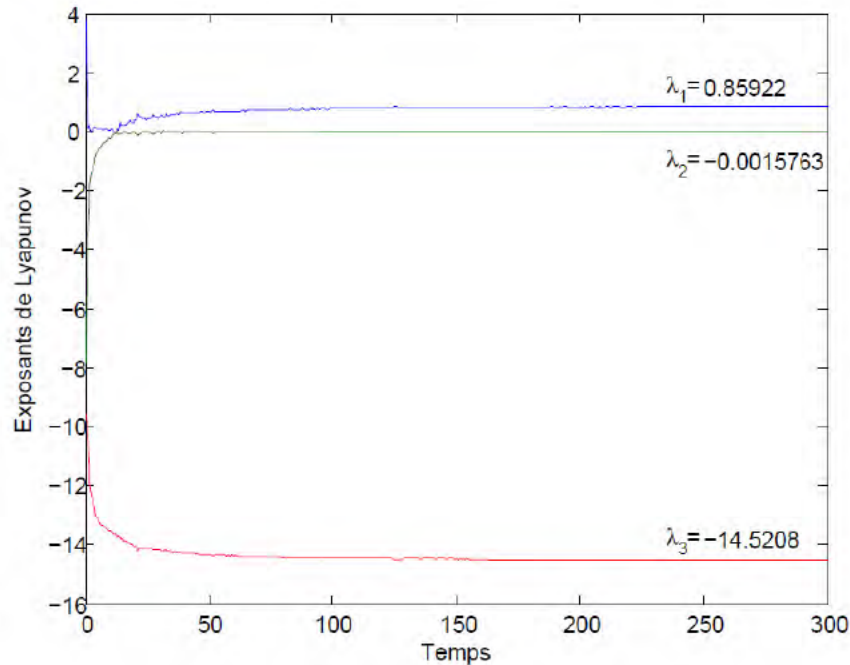


FIGURE 3 – Les Exposants de Lyapunov du système de Lorenz $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

-Pour P_0 . L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de paramètre b, σ et r . La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$(\lambda + b) [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0 \quad (5.5)$$

a pour racines :

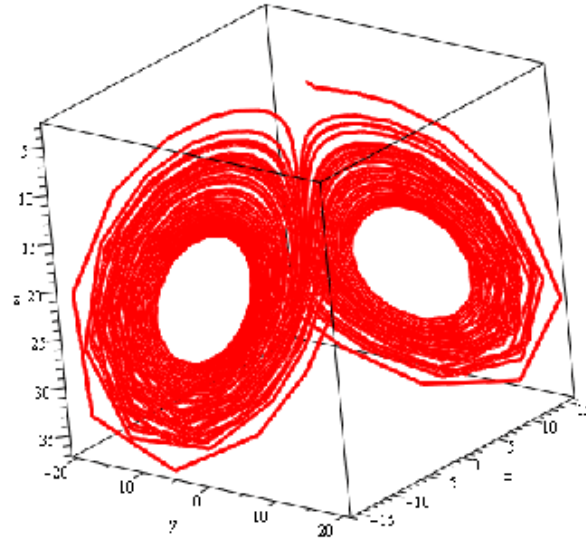


FIGURE 4 – Attracteur de Lorenz (a) l'espace $(x - z)$, (b) l'espace $(y - x)$, (c) l'espace $(y - z)$

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2}$$

$$\lambda_3 = -b$$

- Pour P_1 et P_2 : La matrice jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \quad (5.7)$$

Le polynôme est d'ordre trois, on peut le résoudre par les formules de Cardan et déterminer le signe des racines par les conditions de Routh-Hurwitz.

Et selon les valeurs du paramètre r , ce polynôme peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| \ll 1$ si $|r - 1| \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_1^3 de

l'équation

$$\lambda_1 \cong -\frac{2\sigma b(r-1)}{+br} < 0 \text{ pour } r > 1 \quad (5.8)$$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas de r .

$$-\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1 + b) - (\sigma b + b) = 0 \quad (5.9)$$

On résout donc :

$$\Delta = (\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = -\frac{(\sigma + 1 + b) - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (5.10)$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (5.11)$$

On fait de même avec P_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (noeud stable)

Donc pour les points P_1, P_2 sont stable pour $|r - 1| \ll 1$.

pour $r = 1$, on a donc une bifurcation fourche super critique. On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation se déstabilisent à leur tour pour une valeur r_c par une bifurcation de Hopf. Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la partie réelle change de signe a la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm iw$ quand r assume sa valeur critique r_c .

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer ω et la valeur de r_c . Reprenons l'équation

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \\
 &\Leftrightarrow (i\omega)^3 + (\sigma + b + 1)(i\omega)^2 + b(\sigma + r_c)(i\omega) + 2b\sigma(r_c - 1) \Leftrightarrow \\
 &\begin{cases} \omega^2(\sigma + 1 + b) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\ \omega^3 - \omega(\sigma b + br_c) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ \omega^2 = \sigma b + br_c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b} - b} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Application numérique : $r_c = 24.74$ et $\omega = \pm 92.64$.

Attracteur étrange et interprétation numérique

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotique : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace de phase et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

Dans un espace de phase à 2 dimensions, le théorème de Poincaré-Bendixson enseigne que les seuls attracteurs possibles dans le cas général sont des points fixes ou des cycles limites.

A 3 dimensions la situation se complique :aux attracteurs précédents, il faut ajouter les mouvements quasi périodiques comportant deux ou plusieurs fréquences sur un tore (une fréquence pour tourner autour du petit cercle du tore et une fréquence différente pour faire le tour du tore suivant l'axe) et les mouvements chaotiques constituant les attracteurs étranges. Ces attracteurs surnommés étranges par ceux qui les ont vu pour la première fois sur leur ordinateur sont des fractales souvent très esthétiques.

Nous allons en tracer quelques attracteurs étranges fameux dans ce chapitre et dans les suivants en étudiant ces propriétés. Ce type des attracteurs apparaissent dans le cas de systèmes chaotiques dissipatifs, comme le sont les systèmes naturels, le climat par exemple. On commencera par les systèmes itératifs à 1, puis à 2 dimensions, puis on passera à des systèmes comportant au moins 3 dimensions gouvernés par des équations différentielles.

1. L'attracteur de Lorenz

C'est certainement, avec l'attracteur de Hénon, l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia, une des figures les plus connues du chaos. Lorenz l'a popularisé avec "l'effet

papillon”, qui exprime la sensibilité aux conditions initiales :le battement d’ailes d’un papillon peut provoquer un cyclone à l’autre bout du monde une semaine après!Il se trouve, est-ce une coïncidence, que l’attracteur de Lorenz a un peu la forme d’un papillon!

2. Tracé de l'attracteur

Le système d'équations différentielles de Lorenz est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

Les valeurs numériques choisies par Lorenz sont : $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, R$ pouvant varier.

Représentons l'attracteur avec $R = 28$:

> restart :with(DEtools) :

> DEplot3d ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 28*x - y - x*z ,

D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 10..30, [[x(0) = 0.1, y(0) = 0, z(0) = 0.1]],

stepsize = 0.02, scene = [x, y, z], linecolor = red);

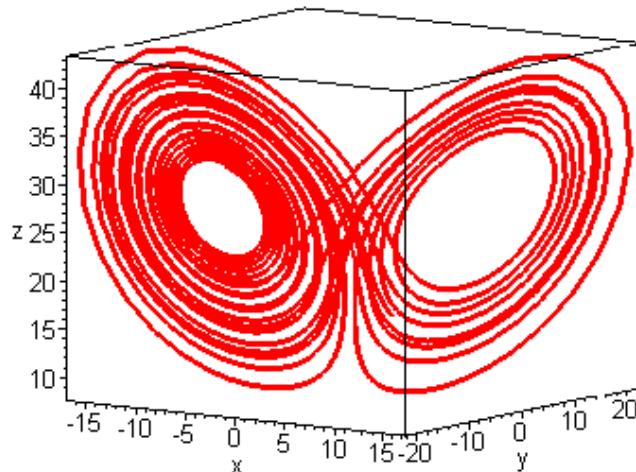


FIGURE 1 – attracteur de Lorenz pour $R = 28$.

Le mouvement est chaotique. Le point tourne autour d'un point fixe instable en s'éloignant de celui-ci; lorsqu'il se trouve à une certaine distance, il saute sur l'autre point fixe instable et s'éloigne à nouveau. On le voit en traçant x en fonction du temps :

```
>phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 28*x - y - x*z, D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t =
20..60, [[x(0) = 0.1, y(0) = 0, z(0) = 0.1]],
stepsize = 0.05, scene = [t, x], linecolor = red);
```

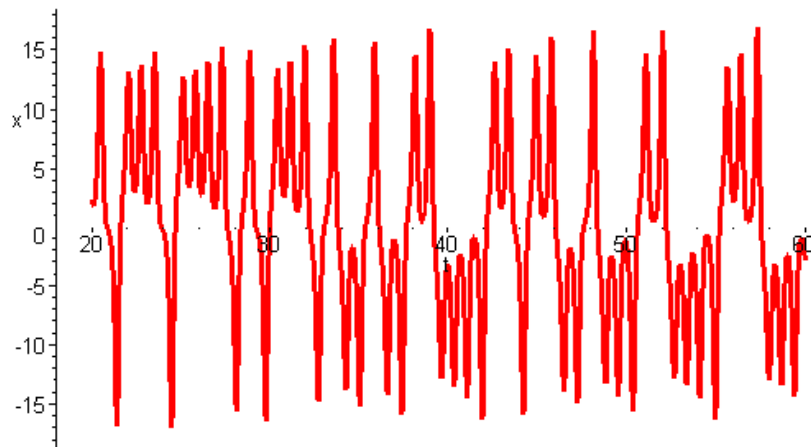


FIGURE 2 – tracé de x en fonction du temps pour l'attracteur de Lorenz.

3. Application de premier retour

Traçons l'application de premier retour ou application de Lorenz, en traçant z d'un maximum en fonction de z du maximum précédent. Pour cela, on emploie une méthode différente de celle que l'on a utilisée pour l'attracteur de Rössler : à l'aide de portrait de phase (normmé phase portrait), on extrait la liste de tous les z correspondant au pas d'intégration de 0,05 et l'on cherche les valeurs de z qui sont localement des maximas, c'est-à-dire plus grandes que la précédente et la suivante :

```
> p := phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 28*x - y - x*z,
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 0..100, [[x(0) = 0.1, y(0) = 0, z(0) = 0.1]] stepsize = 0.05,
scene = [t, z]) :
> liste := op(1, op(1, p)) : (liste des [t, z] toutes les 0,05 s)
> liste1 := op ([]) :
for i from 2 to nops(liste)-1 do :
if op (2, liste [i]) > op(2, liste [i - 1]) and op (2, liste [i]) > op(2, liste [i + 1])
then liste1 := liste1, op(2, liste[i]) fi od : (liste des maximas locaux de z) > display(pointplot([seq([liste1[i],
```

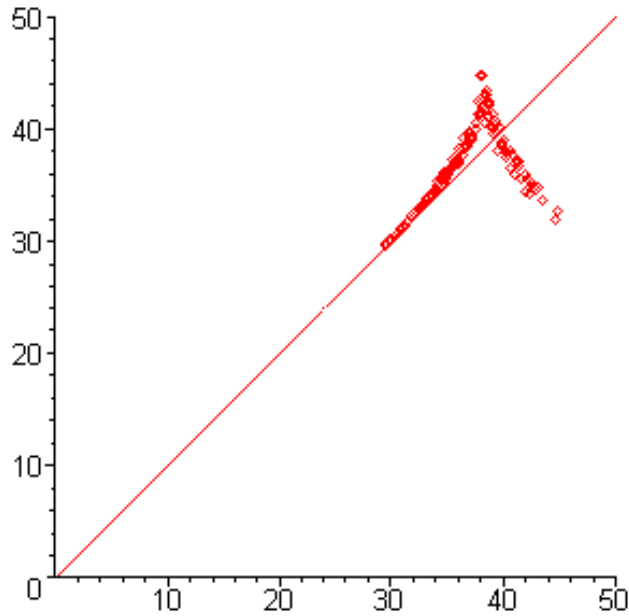


FIGURE 3 – carte de Lorenz de l'attracteur de Lorenz.

$[i + 1]]$,

$i = 5..nops([\text{liste1}]) - 1$), color = red), plot ($x > x, 0..50, 0..50$)); L'application de Lorenz ressemble, avec une certaine épaisseur, à l'application tente, que l'on sait chaotique.

4. Chaos transitoire

Les points fixes de l'application de Lorenz sont données par les solutions du système :

$$\begin{cases} 0 = -\sigma x + \sigma y \\ 0 = Rx - y - xz \\ 0 = -bz + xy \end{cases}$$

> sol := solve

($\{-x + y = 0, -x^*z + R^*x - y = 0, x^*y - b^*z = 0\}, \{x, y, z\}$)

sol := $\{y = 0, z = 0, x = 0\}, \{z = R - 1, x = \text{RootOf}(Z - bR + b),$

$y = \text{RootOf}(Z - bR + b)\}$

> allvalues(op(2,[sol]));

$$\{x = \sqrt{bR - b}, y = \sqrt{bR - b}, z = R - 1\}$$

$$\{x = -\sqrt{bR - b}, y = -\sqrt{bR - b}, z = R - 1\}$$

L'équilibre $(0, 0, 0)$ existe pour tout R ; il est stable pour $R < 1$. Les 2 autres points, notés $C+$ et $C-$, sont stables de $R = 1$ à $R = 24.74$.

Lorsque l'on fait varier le paramètre R , on a une grande variété de comportements de l'attracteur de Lorenz.

Illustrons ce tableau avec un tracé de chaos transitoire, pour $R = 23.4$:

```
> restart :with(DEtools) :
```

```
> phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 23.4*x - y - x*z,
```

```
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 0..150, [[x(0) = 4, y(0) = -2, z(0) = 3]],
```

```
stepsize = 0.05, scene = [t, x], linecolor = red, view = [60..150, -16..16]);
```

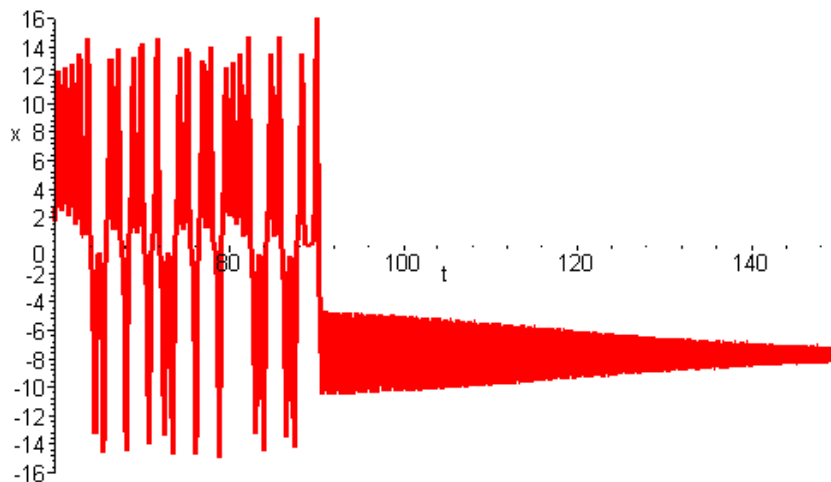


FIGURE 4 – chaos transitoire avec $R = 23.4$; x en fonction de t

Le mouvement du point est chaotique jusqu'à ce qu'il vienne se fixer sur l'un des deux attracteurs ponctuels. Il s'agit d'une crise de frontière : une partie de l'attracteur étrange fait partie du bassin d'attraction de l'un des deux attracteurs ponctuels (voir chapitre 10).

```
> DEplot3d ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 23.4*x - y - x*z,
```

```
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 0..150, [[x(0) = 4, y(0) = -2, z(0) = 3]],
```

```
stepsize = 0.05, scene = [x, y, z], linecolor = red);
```

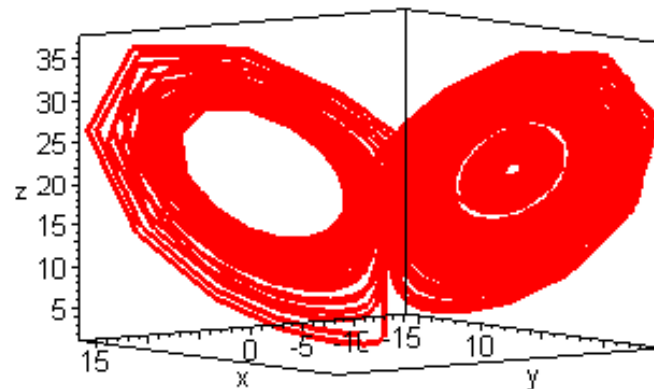


FIGURE 5 – chaos transitoire pour $R = 23.4$; vue de l'attracteur dans l'espace.

Le point tourne de façon chaotique autour des 2 points fixes jusqu'à ce qu'il soit attiré par le point de droite; il s'enroule alors sur une spirale qui s'approche de façon asymptotique du point fixe.

Résumons quelques-unes de ces propriétés dans un tableau :

R	Attracteur		
$[-\infty, 1]$	$(0, 0, 0)$ point fixe attracteur		
$[1, 13,93]$	<table border="1"> <tr> <td>2 points fixes attracteurs C^+ et C^-</td> </tr> <tr> <td>l'origine est instable</td> </tr> </table>	2 points fixes attracteurs C^+ et C^-	l'origine est instable
2 points fixes attracteurs C^+ et C^-			
l'origine est instable			
$[13,93, 24,06]$	<table border="1"> <tr> <td>chaos transitoire : orbites chaotiques mais pas d'attracteur chaotique ; C^+ et C^- stables</td> </tr> </table>	chaos transitoire : orbites chaotiques mais pas d'attracteur chaotique ; C^+ et C^- stables	
chaos transitoire : orbites chaotiques mais pas d'attracteur chaotique ; C^+ et C^- stables			
$[24,06, 24,74]$	<table border="1"> <tr> <td>l'attracteur chaotique coexiste avec les 2 points fixes attracteurs</td> </tr> </table>	l'attracteur chaotique coexiste avec les 2 points fixes attracteurs	
l'attracteur chaotique coexiste avec les 2 points fixes attracteurs			
$> 24,74$	<table border="1"> <tr> <td>attracteur chaotique</td> </tr> <tr> <td>les 2 points fixes sont instables</td> </tr> </table>	attracteur chaotique	les 2 points fixes sont instables
attracteur chaotique			
les 2 points fixes sont instables			

5. Coexistence de plusieurs attracteurs

Lorsque $R \in [24.06, 24.74]$, il y a coexistence de l'attracteur chaotique et des 2 points fixes attracteurs; suivant les conditions initiales, le point va se diriger vers l'un ou l'autre de ces attracteurs; on trace x en fonction de t pour la même valeur $R = 24.5$ avec les 2 ensembles de conditions initiales : d'abord $(x(0) = 6, y(0) = 10, z(0) = 23)$, puis $(x(0) = 4, y(0) = -2, z(0) = 1)$:

```
> phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 24.5*x - y - x*z,
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 0..300, [[x(0) = 6, y(0) = 10, z(0) = 23]],
stepsize = 0.05, scene = [t, z], linecolor = red, view = [0..300, 0..30]);
```

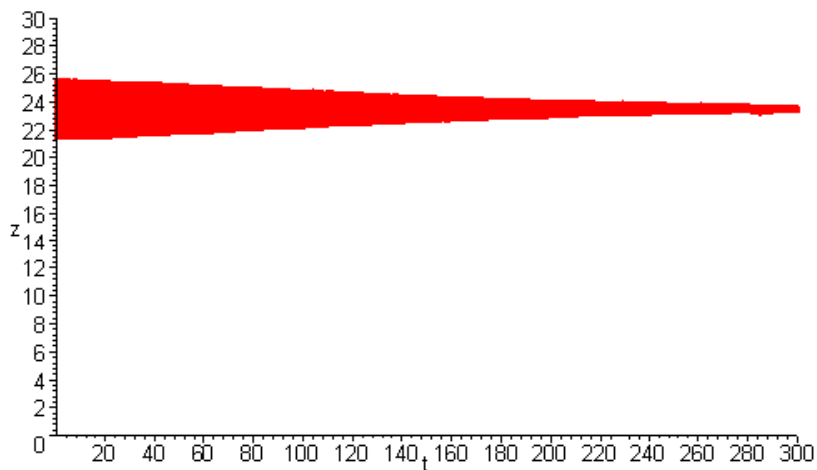


FIGURE 6 – $R = 24.5, x(0) = 6, y(0) = 10, z(0) = 23$; attracteur ponctuel.

```
> phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 24.5*x - y - x*z,
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 0..300, [[x(0) = 4, y(0) = -2, z(0) = 1]],
stepsize = 0.05, scene = [t, z], linecolor = red, view = [200..300, 0..40]);
```

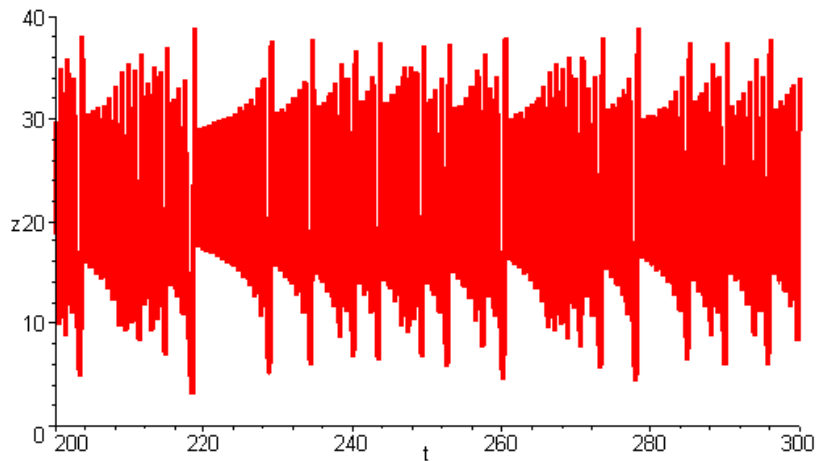


FIGURE 7 – $R = 24.5, x(0) = 4, y(0) = -2, z(0) = 1$; attracteur chaotique.

Il y a coexistence de 3 attracteurs avec des bassins d'attraction différents et multistabilité.

6. Solutions périodiques

Lorsque $R > 24.74$, l'attracteur est chaotique, mais, comme pour l'application logistique, il existe des fenêtres de régularité où le comportement est périodique. Traçons l'attracteur pour $R = 100.7$ et $R = 99.7$:

```
> restart :with(DEtools) :with(plots) :
```

```
> p1 := phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 100.7*x - y - x*z ,
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 50..60, [[x(0) = 10, y(0) = 0, z(0) = 10]],
stepsize = 0.01, scene = [x, z], linecolor = red ) :
```

```
> p2 := phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 99.7*x - y - x*z , D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t =
50..60, [[x(0) = 10, y(0) = 0, z(0) = 10]],
stepsize = 0.01, scene = [x, z], linecolor = red) :
```

```
> A := array(1..2, 1..1) :
```

```
> A[1, 1] := p1 : A[2, 1] := p2 :
```

```
> display(A) ;
```

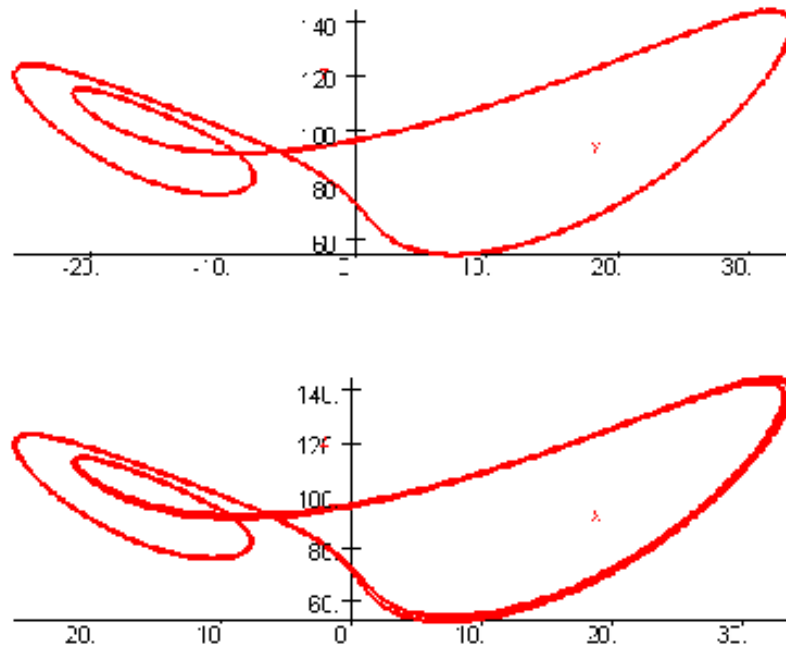


FIGURE 8 – $99.5 < R < 100.8$: solution périodique xy^2 et scénario de doublement de période.

Pour $R = 100.7$, on a une solution périodique dans laquelle le point fait 2 tours dans la région $x < 0$ et un tour dans la région $x > 0$. On note cette solution xy^2 (un tour autour du point fixe > 0 et 2 tours autour du point fixe < 0). Lorsque le paramètre R diminue, commence un scénario de doublement de période; pour $R = 99.7$, la période a doublé, et la solution se note $(xy^2)^2$. Voyons dans un tableau quelques fenêtres de régularité :

Fenêtre	trajectoire
[99.5, 100.8]	xy^2
[126.4, 126.55]	x^2y^2xy
[145, 167]	x^2y^2
[215, ...]	xy

Cela donne les figures suivantes :

```
> restart :with(DEtools) : with(plots) :
```

```
> p[1] := phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 310*x - y - x*z ,
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 80..90, [[x(0) = 10, y(0) = 0, z(0) = 10]],
stepsize = 0.01, scene = [x, z], linecolor = red) :
```

On fait de même pour p[2], p[3] et p[4] avec $R = 165, 147$ et 126.5 . Puis :

```
> A := array(1..2, 1..2) :
```

```
> A[1,1] := p[1] : A[1,2] := p[2] : A[2,1] := p[3] : A[2,2] := p[4] :
> display(A);
```

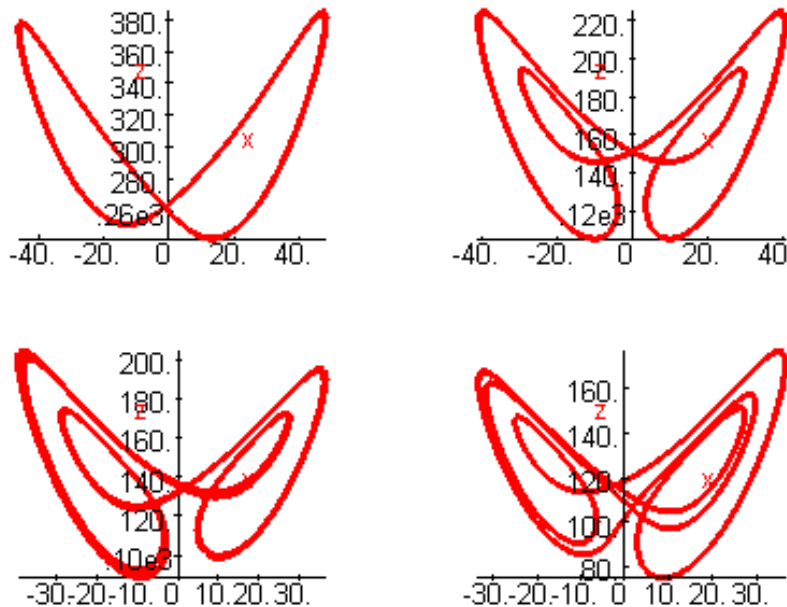


FIGURE 9 – trajectoires périodiques pour $R = 310, 165$ (1 ère ligne), $R = 145, 126.5$ (2 ième ligne).

On observe le doublement de période entre les figures.

7. Intermittence

On a vu que la sortie des fenêtres de régularité lorsque le paramètre R diminue se fait par un scénario de doublement de période. L'entrée dans la fenêtre se fait, elle, par une intermittence : lorsque R est légèrement supérieur à la valeur d'entrée dans la fenêtre, la trajectoire est presque périodique, mais son amplitude augmente doucement, puis revient brusquement à sa valeur de départ. Voyons le pour $R = 166$

(au début de la fenêtre $x^2 y^2$) et 166.2 (légèrement avant) :

```
> restart :with(DEtools) :with(plots) :
```

```
> p[1] := phaseportrait ([D(x)(t) = 10*(y - x), D(y)(t) = 166*x - y - x*z,
D(z)(t) = x*y - 8/3*z], [x, y, z], t = 10..60, [[x(0) = 10, y(0) = 0, z(0) = 10]]
stepsize = 0.01, scene = [t, z], linecolor = red) :
```

De même pour $p[2]$ avec $R = 166.2$. Puis :

```
> A := array(1..2, 1..1) :
```

```
> A[1,1] := p[1] : A[2,1] := p[2] :
> display(A);
```

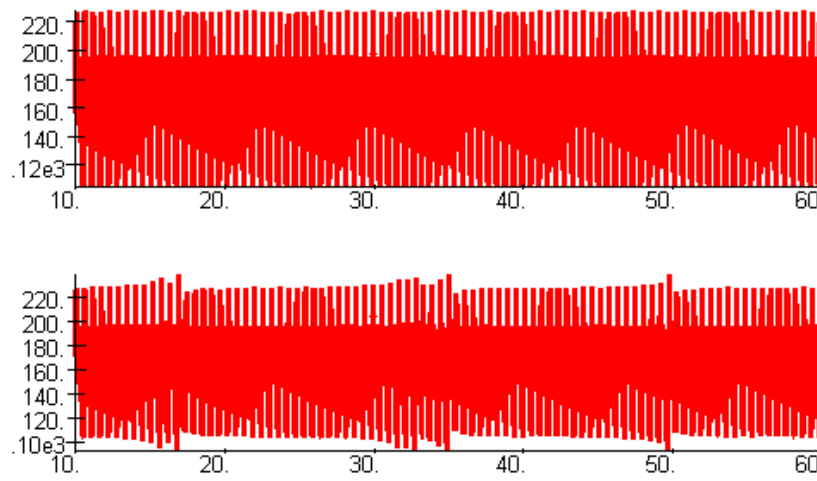


FIGURE 10 – intermittence : pour $R = 166$, solution régulière et $R = 166.2$, intermittence.

En résumé pour l'attracteur de Lorenz, lorsque R augmente, on passe d'un point attracteur à l'origine aux 2 points attracteurs $C+$ et $C-$ puis à un régime chaotique entrecoupé de fenêtres de régularité, la dernière fenêtre en xy semblant se prolonger pour les grandes valeurs de R .

On voit qu'un système simple de 3 équations différentielles d'ordre 1 comme celui de Lorenz mène à un comportement très complexe mais néanmoins structuré. C'est ce type de comportement, encore plus complexe, qui est adopté par les phénomènes naturels avec leurs multiples interactions.

8. L'attracteur "noeud papillon"

On considère l'itération :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (2-a)x_n - by_n \\ y_{n+1} = -bx_n + ay_n \end{cases} \quad \text{si } |x_n| < \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - by_n + (1-a)\text{sgn}(x_n) \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n - b \times \text{sgn}(x_n) \end{cases} \quad \text{si } |x_n| \geq \frac{1}{2}$$

où sgn est la fonction signe ; on prend $a = 0.5$ et $b = 1.1$. On remplace x par z dans le calcul pour distinguer x_n et x_{n+1} :

```
> restart :with(plots) :
```

```

> x := 0.1 : y := 0 : a := 0.50 : b := 1.1 : liste := x, y :
> for n to 5000 do z := x :
if abs(z) < 0.5 then x := -b*y + (2-a)*z : y := a*y - b*z
else x := a*z - b*y + (1-a)*sign(z) : y := b*z + a*y*b*sign(z) fi :
liste := liste, x, y od :
> pointplot([liste ], style=point, color=red);

```

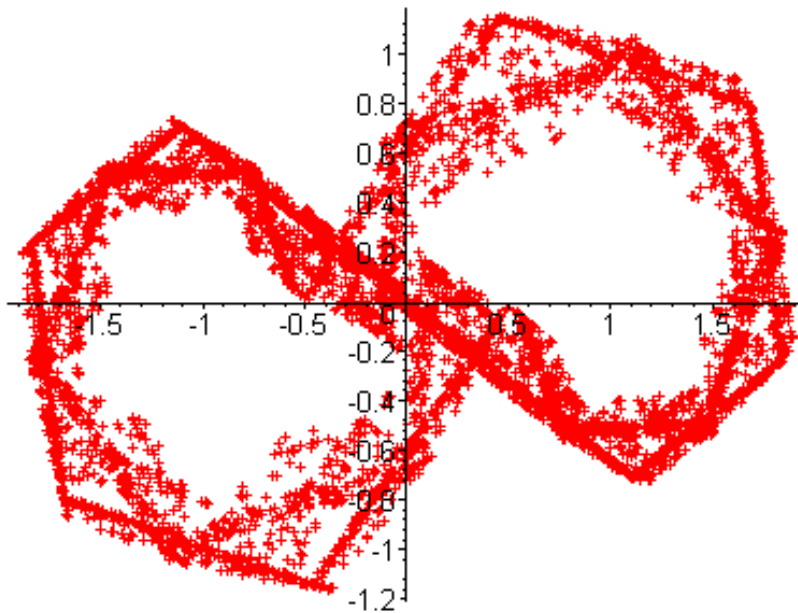


FIGURE 11 – attracteur en "noeud papillon" de Mira

chaotique sur l'attracteur, comme on peut le voir en traçant la valeur de y en fonction du numéro de l'itération :

```

> plot([seq([i, [ liste ][2*i]], i = 100..250)]);

```

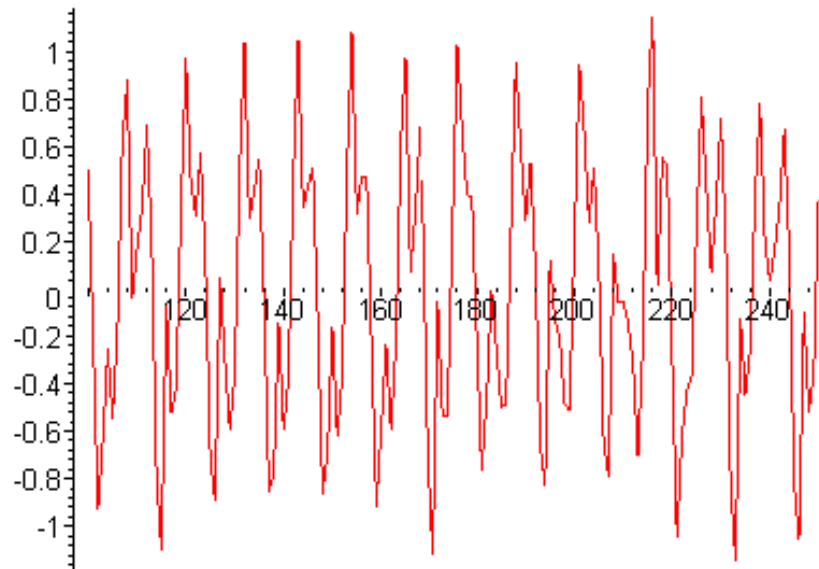


FIGURE 12 – tracé de valeurs de y_n pour l'attracteur noeud papillon.

9. Attracteur de Rössler

Il s'agit là d'un autre type d'attracteur, car la dynamique est donnée, non par une itération, mais par un système d'équations différentielles. On sait alors que, pour obtenir du chaos, il faut un espace de phase au moins de dimension 3.

La dynamique de Rössler est donnée par un système de 3 équations différentielles du 1^{er} ordre couplées :

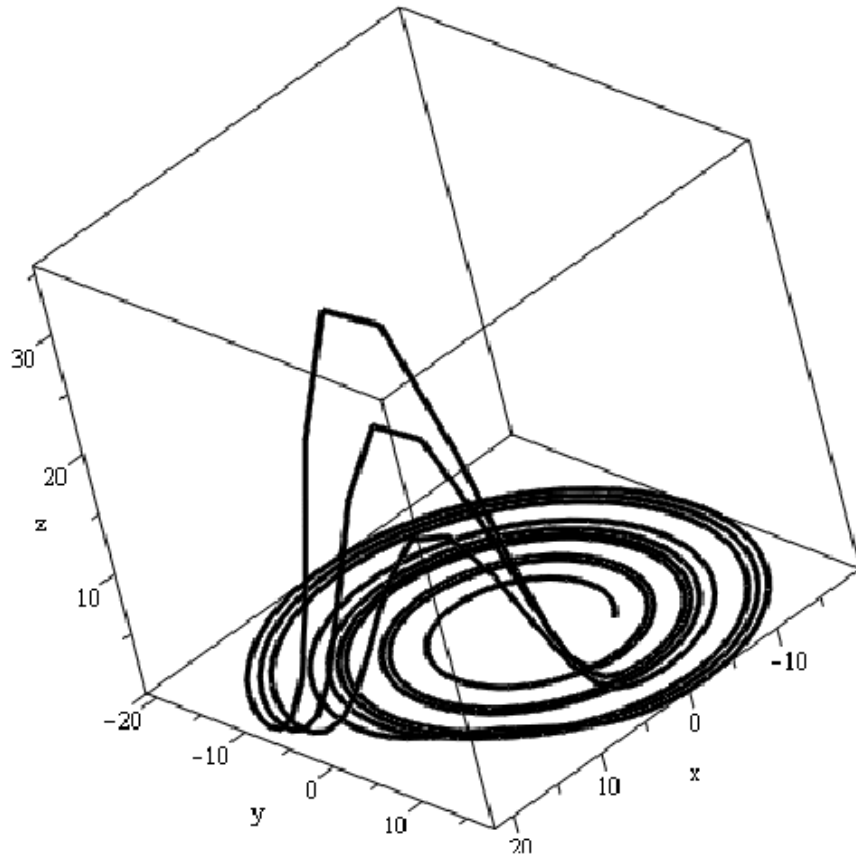
$x = - y + z $
$y = x + ay$
$z = b + (x - c)z$

a, b et c étant 3 coefficients numériques. On prendra $a = b = 0.1$; c pourra varier; traçons, avec DEplot3d, l'attracteur de Rössler pour $c = 14$:

```
> restart :with(plots) :with(DEtools) :
```

```
> DEplot3d ([D(x)(t) = -(y + z), D(y)(t) = x + 0.1*y ,  
D(z)(t) = 0.1 + x*z - 14*z], [x(t), y(t), z(t)], t = 40..100
```

```
[[x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [x, y, z], linecolor = black );
```

FIGURE 13 – attracteur de Rössler avec $c = 14$

Lorsque z est voisin de 0, les 2 premières équations se réduisent à

$$\dot{x} = -y \text{ et } \dot{y} = x + ay, \text{ soit } \ddot{y} - ay + y = 0$$

Avec $a > 0$, c'est l'équation différentielle d'un mouvement harmonique entretenu dont l'amplitude augmente ; dans le plan (x, y) , le point tourne donc sur une spirale qui s'élargit. Quand x devient supérieur à c , \dot{z} devient > 0 d'après la 33^{ième} équation et le point monte rapidement ; d'après la 1^{ière} équation, \dot{x} devient alors < 0 et x diminue, entraînant une décroissance de z et le point est réinjecté d'autant plus près de l'origine qu'il est monté plus haut.

Voyons l'évolution de l'attracteur lorsque c varie :

> for i in [4, 6, 8.5, 11, 12.5, 14] do

$p[i] := \text{phaseportrait}([D(x)(t) = -(y + z), D(y)(t) = x + 0.1 * y,$

$D(z)(t) = 0.1 + x * z - i * z], [x(t), y(t), z(t)], t = 100.250,$

$[[x(0) = 4, y(0) = 0, z(0) = 0]], \text{stepsize} = 0.1, \text{scene} = [x, y],$

linecolor=black, axes=boxed) od :

```
> A := array(1..3, 1..2) :
```

```
> A[1,1] := p[4] : A[1,2] := p[6] :
```

```
A[2,1] := p[8.5] : A[2,2] := p[11] :
```

```
A[3,1] := p[12.5] : A[3,2] := p[14] :
```

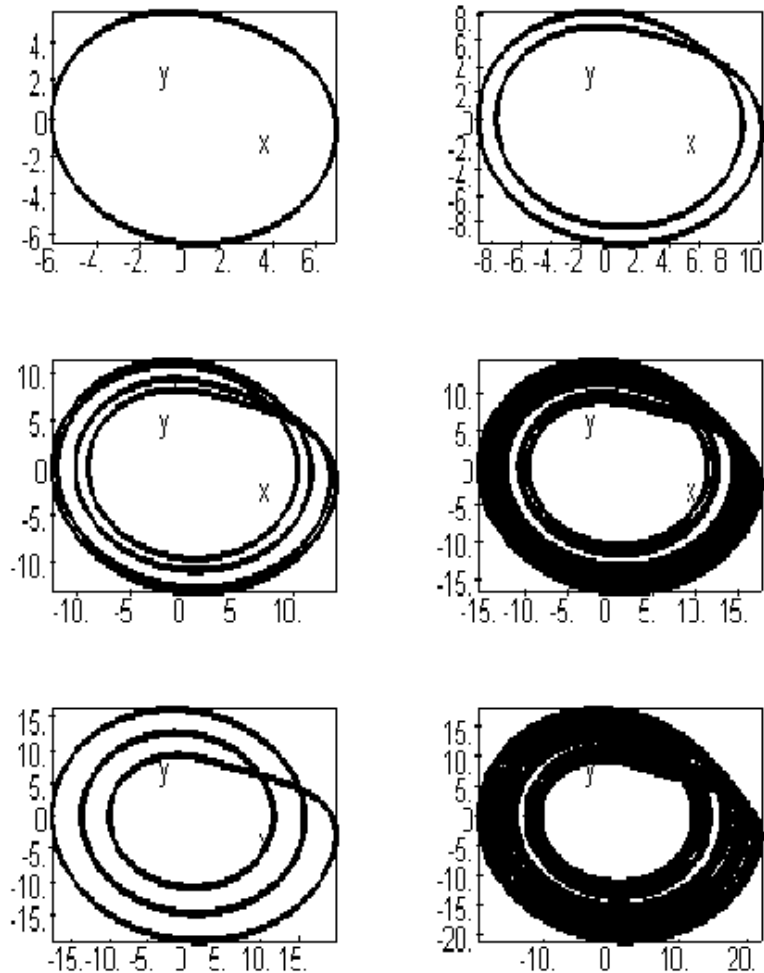


FIGURE 14 – attracteur de Rössler : $c = 4.6$ (1 ère ligne), $8.5, 11$ (2 ème ligne), $12.5, 14$ (3 ème ligne).

- $c = 4$, période 1, $c = 6$, période 2, $c = 8.5$, période 4 : c' est le scénario de doublement de période
- $c = 11$, chaos
- $c = 12.5$, fenêtre de période 3 d'où l'on ressort par doublement de période

— $c = 14$, chaos

De $c = 22$ à 30 , on a une fenêtre d'ordre 4 et 8 où l'on entre par un chaos transitoire et d'où l'on sort par une intermittence. On a une autre fenêtre d'ordre 6 après $c = 46$.

On peut tracer l'application de premier retour, ou application de Lorenz, de l'attracteur de Rössler. On prend pour cela la section de Poincaré de l'attracteur dans le plan xOz . Le point de l'attracteur ayant fini de descendre avant que x ait repris la valeur 0 (ce que l'on peut vérifier en traçant l'attracteur avec phaseportrait et l'option `scene = [x,z]`), cette section est pratiquement confondue pour $x < 0$ avec un segment de l'axe Ox (en réalité, cette section a une faible épaisseur). L'attracteur coupe l'axe à la valeur minimale de x , car d'après la première équation $\dot{x} = -(y+z) = 0$.

On cherche la liste des valeurs minimales de x et on trace la valeur absolue de x_{n+1} en fonction de la valeur absolue x_n :

```
> restart :with(DEtools) :with(plots) :çç > sys := D(x)(t) = -(y+z), D(y)(t) = x+0.1*y, D(z)(t) =
0.1 + x*z - 14*z :çç > fnc := {x(t), y(t),
z(t)} : (système d'équations de Rössler)
> F := dsolve ({ sys, x(0) = 1, y(0) = 0,
z(0) = 1}, fnc, type = numeric,
method=classical,output=listprocedure) : (résolution numérique du système)
> fx := subs(F,x(t)) : (on en tire la valeur de  $x(t)$ )
> liste := seq(fx(i/10), i = 1..5000) : (liste de 5000 valeurs de  $x, t$  variant de 0 à 500)
> listel := op([]) : for i from 2 to nops([liste])-1 do :
if liste [i] < liste [i - 1] and liste [i] < liste [i + 1]
then listel :=listel,listel[i] fi od : (valeurs minimales de  $x$ )
> with(plots) : display(pointplot([seq([abs(listel [i]), abs(listel [i + 1])],
i = 5..nops([listel]) - 1)], color = red), plot (x > x, 0..22, 0..22) ); (tracé de l'application de
Lorenz pour les valeurs absolues)
```

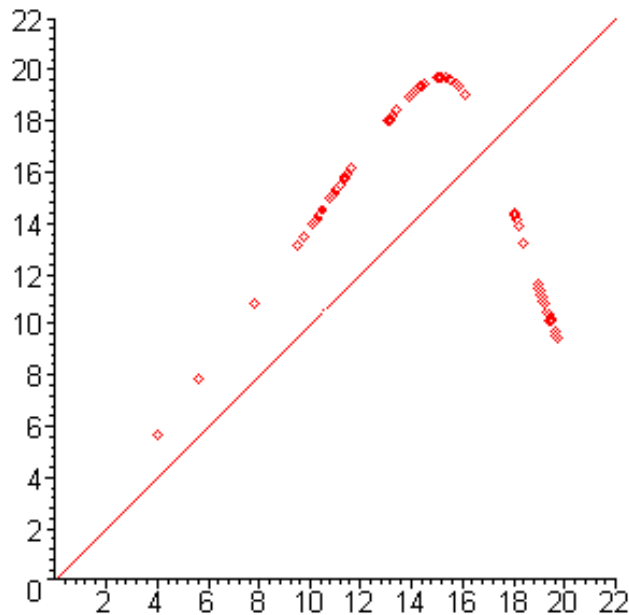


FIGURE 15 – application de premier retour de l’application de Rössler.

On obtient une courbe (en réalité ayant une certaine épaisseur) qui ressemble à l’application logistique ; la pente à l’intersection de la courbe avec la première bissectrice étant < -1 , on en conclut que l’application de Lorenz qui fait passer d’une intersection à l’intersection suivante au tour suivant est chaotique et que le processus d’étirement-repliement à l’oeuvre est du même type que celui de l’application logistique.

Voyons pour finir la sensibilité aux conditions initiales (sci). On trace la différence des valeurs de $x(t)$ pour la même application de Rössler avec des valeurs initiales très voisines ($x(0) = 1$ et $x(0) = 1.01$, $y(0)$ et $z(0)$ étant nuls) :

```
> restart :with(DEtools) :
```

```
> sys := D(x)(t) = -(y + z), D(y)(t) = x + 0.1*y, D(z)(t) = 0.1 + x*z - 14*z :
```

```
> fnc := {x(t), y(t), z(t)} :
```

```
> F := dsolve ({ sys, x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0}, fnc, type = numeric,
method=classical, output=listprocedure) :
```

```
> fx := subs(F, x(t)) :
```

```
> G := dsolve({ sys, x(0) = 1.01, y(0) = 0, z(0) = 0}, fnc, type = numeric, method=classical, output=listproc
```

```
> gx := subs(G, x(t)) :
```

```
> liste := seq([i, xx(i) - gx(i)], i = 1..100) : > plot([liste], color=black) ;
```

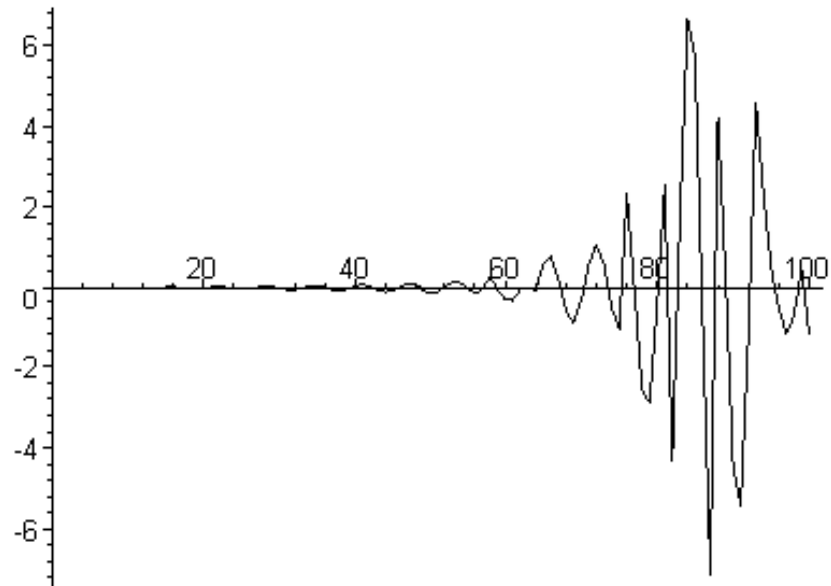


FIGURE 16 – mise en évidence de la sensibilité aux conditions initiales de l'application de Rössler.

On voit qu'à partir de $t = 60$ (ce qui correspond à une douzaine de tours), les 2 mouvements se déconnectent et que la différence devient aussi grande que l'attracteur, ce qui montre la sensibilité aux conditions initiales : deux mouvements très voisins au départ deviennent rapidement déconnectés.

Conclusion

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire, concerne l'étude numérique d'une transformation de dimension trois de Lorenz, les équations du système sont données en fonction des paramètres de contrôle, des courbes et des plans de phases qui ont été tracé afin de prouver l'existence de singularités donné analytiquement, une discussion exposé à propos l'existence des points d'équilibres points fixes, attracteur chaotique et chaos selon la variation du paramètre R

A la fin nous avons pu de trouver l'existence d'un attracteur étrange "l'attracteur de Lorenz" ou nommé aussi "attracteur noeud papillon", tracé numériquement pour $R > 24.74$ et son évolution pour d'autres valeurs.

Bibliographie

- [1] Arrowsmith D.K. "*The Bogdanov Map : Bifurcation, Mode Locking, and Chaos in Dissipative System*", International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 3, , p. 803-842, (1993).
- [2] Ashwin P., Breakspear M., "*Anisotropic properties of riddled basins*", Physica. Lett. A 280 , (2001), 139–145.
- [3] Alaoui.A.H,"*Bifurcation non classiques d'une classe de \mathbb{R}^2 endomorphisme*", thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse,(1984).
- [4] Barugola A, Cathala J.C. et Mira C. "*Annular Chaotic Areas*" Nonlinear Analysis TM & A. 10(11),1223–1236,(1986).
- [5] Canovas J.S, Linero A. "*Topological dynamic classification of doupoly games*", Chaos, Solitons and Fractals, Vol 12, p 1259-1266, (2001).
- [6] Carcasses J.P." *A new kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an n-dimentional map*" Nonlinear Analysis TM & A, vol28, No5, p917 – 946,(1997).
- [7] Carcasses J. P, Taha A.K."*Study of a two-dimensional endomorphism by use of the parametric singularities*". International journal of bifurcations and chaos, vol.10, n^o12, p 2853-2862,(2000).
- [8] Cathala J.C. "*On some Properties of Absorptive Areas in 2nd Order Endomorphisms*", ECIT Batschuns, Sept. 89, Proceedings (World Scientific),(1989).
- [9] Cigala A.R. "*Sopra un criterio di instabilita*", Annali di Mathematica, Ser. 3 , t 11,(1905).
- [10] Ferdjouni.A, "Analyse et synchronisation des systèmes chaotiques de type hyperjerk", Université Saad Dahlab de Blida,(2018-2019).
- [11] GRASSBERGER, P. et PROCACCIA, I. *Characterization of strange attractors*. Physical Review Letters, 50, 346-349,1983.
- [12] Hamaizia.T, "Systemes dynamiques et chaos", Université de constantine-1-,(2013).
- [13] LORENZ E.N., ATMOS J.Sci.20, 130-141(1963).
- [14] Mira.C Chotic dynamics, World Scientific, Singapore,(1987).
- [15] Selmani.W,"Etude du comportement de la dynamique de la récurrence de Myrberg généralisée",Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar-Annaba,Algérie,(2017).
- [16] <http://perso.wanadoo.fr/pascale.et.vincent.bourges/chaos/>