

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

جامعة ٢٠ أوت ١٩٥٥ سكيكدة  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات



## Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Spécialité** : COSD

الميدان : رياضيات وإعلام آلي  
الشعبة : رياضيات  
التخصص :

### Thème

---

Solutions périodiques pour certaines classes de systèmes différentiels  
polynômiaux perturbées

---

Présenté par : **Anfal Bouloudnine**  
Soutenu publiquement le : 02/07/2025

Devant le jury composé de :

Boufoul Amel	M.C.A.	Université de Skikda	Président
Nassima Debz	M.C.B.	Université de Skikda	Encadrant
Chougui Zoulikha	M.C.B.	Université de Skikda	Examinateur

Année universitaire : 2024/2025



## Remerciements

Je tiens à saisir cette occasion pour adresser mes profonds remerciements et ma sincère reconnaissance à ALLAH, en premier lieu.

La première personne que je souhaite remercier est mon encadreur *Madame Nassima Debez*, pour son orientation, sa confiance et sa patience, qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait jamais pu arriver à bon port.

Je souhaite que ce travail représente un hommage à sa haute personnalité.

Je remercie les membres du jury *Dr. Boulfoul Amel* et *Dr. Chougui Zoulikha* pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes, de près ou de loin, qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

## ***Dédicace***

***Allah tout puissant, merci d'être toujours auprès de moi.***

***À mon très cher père (Riyad) :***

***Quoi que je fasse ou je dise, je ne saurais point te remercier  
comme il se doit. Ton affection me sauve, ta bienveillance  
me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source  
pour affronter les différents obstacles.***

***À ma très chère mère (Rania) :***

***Tu es la lumière de ma vie, la flamme de mon cœur, ma vie et mon  
bonheur. Que Dieu te garde pour moi, je t'adore maman.***

***À mes chères sœurs (Asma) :***

***Pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.***

***À mon frère (Ayoub) et (Anes) :***

***Ceux qui ont toujours cru en moi et en mes compétences.***

***Enfin, je remercie toute la famille Bouloudnine et Djarddir,  
les amis, je vous dis merci beaucoup.***

---

# Résumé

---

Ce mémoire est dédié à l'analyse du nombre maximal de cycles limites apparaissant dans des systèmes d'équations différentielles ordinaires dépendant d'un petit paramètre.

L'approche adoptée repose sur l'usage de la théorie de la moyennisation. Deux grandes catégories de systèmes sont examinées dans ce cadre.

## La première catégorie

La première catégorie des systèmes différentiels polynômiaux généralisés de Kukles, exprimés sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où les polynômes  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^3 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $d_0 = d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$ ,  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $l_i(x)$ ,  $h_i(x)$  sont des polynômes de même degré  $n$ .  $d_0^i \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

## La deuxième catégorie

La deuxième catégorie s'intéresse à des systèmes différentiels de **kukles** défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x, y), \\ \dot{y} = x - f(x, y) - g(x, y)y - h(x, y)y^2 - d_0^1 y^3, \end{cases}$$

où  $l(x, y)$ ,  $g(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $h(x, y)$  sont des polynômes de même degrés  $n$ ,  $d_0^i \neq 0$ . Des exemples illustratifs sont fournis pour mieux comprendre le comportement de ces deux types de systèmes.

## Mots clés :

Système dynamique - Cycle limite - Théorie de la moyennisation - Système polynômial - Système de Kukles.

---

# Abstract

---

This thesis explores the problem of determining the maximum number of limit cycles in certain classes of ordinary differential systems that depend on small parameter. The main tool used in this study is the averaging theory, which provides a framework for analyzing the behavior of such systems under perturbations.

## The first class

The first class of systems investigated consists of generalized polynomial differential systems of the Kukles type, described by the equations

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

where  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^3 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  and  $d_0 = d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$ , where  $l_i(x), f_i(x), g_i(x), h_i(x)$  are polynomials of given degree  $n$ ,  $d_0^i \neq 0$  a réel number for all  $i = 1, 2$  and  $\varepsilon$  is a small positive parameter.

## The second class

The second class focuses on Kukles type differential systems, which take the form

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x, y), \\ \dot{y} = x - f(x, y) - g(x, y)y - h(x, y)y^2 - d_0^1 y^3, \end{cases}$$

where  $l(x, y), f(x, y), g(x, y)$ , and  $h(x, y)$  are polynomials of given degree  $n$ .

Both classes are examined through illustrative examples that demonstrate the application of theoretical results.

## Keywords :

Dynamical system- limit cycle- polynomial différentiel system- Averaging theory - kukles system.

---

## ملخص

---

ملخص موضوع هذه المذكرة يركز على دراسة عدد الحلول الدورية الخاصة بالجمل التفاضلية المتعلقة بوسيط صغير بإستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى والثانية نقوم بدراسة نوعين من الجمل التفاضلية المعممة .

القسم الأول هو عبارة عن جمل المعادلات التفاضلية لككلز المعممة من الشكل :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

حيث  $l(x), f(x), g(x), h(x)$  كثيرات حدود بنفس الدرجة  $n$  ،  $d_0 \neq 0$  عدد حقيقي و  $\varepsilon$  وسيط صغر

القسم الثاني هو عبارة عن جمل المعادلات التفاضلية ل لككلز المعممة من الشكل :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x, y), \\ \dot{y} = x - f(x, y) - g(x, y)y - h(x, y)y^2 - d_0^1y^3, \end{cases}$$

حيث  $l(x, y), f(x, y), g(x, y), h(x, y)$  كثيرات حدود بنفس الدرجة  $n$  دراسة القسمين السابقين من الجمل التفاضلية تم توضيحها بواسطة امثلة

**الكلمات المفتاحية :** جملة ديناميكية - حل دوري معزول - جملة معادلات تفاضلية - كثيرات حدود - نظرية المتوسط - معادلات تفاضل ككلز

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 introduction . . . . .	3
1.2 Systèmes différentiels polynomiaux . . . . .	3
1.3 Système dynamique et points d'équilibre . . . . .	4
1.4 Flot d'une équation différentielle . . . . .	4
1.5 Points d'équilibre et Linéarisation . . . . .	5
1.5.1 Points d'équilibre . . . . .	5
1.5.2 Linéarisation des systèmes . . . . .	5
1.5.3 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires . . . . .	6
1.5.4 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires . . . . .	7
1.6 Portrait de phase . . . . .	7
1.7 Orbite périodique et cycle limite . . . . .	7
1.8 Quelques formules mathématiques . . . . .	8
<b>2 Théorie de moyennisation</b>	<b>10</b>
2.1 Introduction . . . . .	10
2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	11
2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre . . . . .	13
<b>3 Nombre de cycles limites issus d'un centre linéaire dans les systèmes de Kukles généralisés</b>	<b>16</b>
3.1 Introduction et résultats principaux . . . . .	16
3.2 Application de la méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	17
3.3 Application de la méthode de moyennisation du deuxième ordre . . . . .	21
<b>4 Analyse du nombre de cycles limites dans une classe généralisée de systèmes de kukles</b>	<b>36</b>
4.1 Présentation du problème et résultats principaux . . . . .	36
4.2 Preuve du Théorème 4.1 . . . . .	37

# Introduction Générale

L'étude des équations différentielles remonte au XVII<sup>e</sup> siècle, initiée notamment par les travaux de **Leibnitz** et **Newton**, dans le contexte de la physique classique. Ils ont posé les fondements du calcul différentiel et intégral, offrant ainsi un outil mathématique puissant pour modéliser les phénomènes naturels et comprendre des notions fondamentales comme les fonctions.

Au fil du temps, l'importance des équations différentielles s'est confirmée, incitant de nombreux mathématiciens à développer des approches variées pour analyser leurs solutions. À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, **Henri Poincaré** (1854–1912) [10] a apporté une contribution majeure en adoptant une perspective géométrique pour étudier ces équations, s'intéressant davantage à la structure qualitative des solutions qu'à leur résolution explicite.

C'est dans ce cadre qu'il a introduit les bases de la **théorie des cycles limites**, en s'appuyant sur des concepts innovants comme la **section de Poincaré**. Plus tard, en 1900, **David Hilbert** [6] a formalisé dans son célèbre sixième problème une question restée ouverte : celle de la détermination du nombre et de la répartition des trajectoires périodiques isolées —appelées **cycles limites** — dans les systèmes différentiels polynomiaux.

Ce questionnement a marqué un tournant dans l'analyse qualitative des équations différentielles et a suscité un intérêt croissant pour la dynamique des systèmes.

Dans ce contexte, ce mémoire s'attache à explorer les propriétés qualitatives des systèmes différentiels plans décrits par des équations de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de variables réelles  $x$  et  $y$ .

La structure de notre travail est la suivante :

**Le chapitre 1**, introduit les bases essentielles des systèmes différentiels planaires, nécessaires à la compréhension ultérieure.

**Le chapitre 2**, nous exposant la théorie de moyennisation du premier et second ordre.

**Le chapitre 3**, nous analysons les cycles limites d'une catégorie plus élaborée de systèmes

---

différentiels de **Kukles**, représentés par

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} l(x) &= \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x), \quad f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x), \\ g(x) &= \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x), \quad h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x), \quad d_0 = \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2, \end{aligned}$$

où  $l_i(x)$ ,  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$  et  $h_i(x)$  des polynômes de degré  $n$ ,  $d_0^i \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

**Le chapitre 4**, nous avons étudié les cycles limites de systèmes différentiels de **kukles** généralisée, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x, y), \\ \dot{y} = x - f(x, y) - g(x, y)y - h(x, y)y^2 - d_0^1 y^3, \end{cases}$$

où  $l(x, y) = \varepsilon l_1(x, y)$ ,  $f(x, y) = \varepsilon f_1(x, y)$ ,  $g(x, y) = \varepsilon g_1(x, y)$ ,  $h(x, y) = \varepsilon h_1(x, y)$ ,  $d_0 = \varepsilon d_0^1$  sont des polynômes de degré  $n$ ,  $d_0^i \neq 0$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Pour chaque approche, nous illustrons nos analyses par des exemples.

**Pour mener à bien nos calculs nous utilisons le logiciel Maple 13.**

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

### 1.1 introduction

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Nous commençons par donner les notions du système dynamique, point d'équilibre, linéarisation et portrait de phase. Ensuite nous présentons aussi la notion d'un cycle limite .

### 1.2 Systèmes différentiels polynomiaux

#### Définition 1.1

On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

- Si  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réelles, on dit que (1.1) est un système différentiel polynômial.
- Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, on appelle alors le degré du système (1.1) le nombre  $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .
- Si les polynômes  $P$  et  $Q$  s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^{n-j}, \\ Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^{n-j}. \end{cases}$$

on dit que  $P$  et  $Q$  sont homogènes, dans ce cas, le système (1.1) s'appelle système différentiel polynômial homogène.

Nous supposons que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  (donc les conditions de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)).

### 1.3 Système dynamique et points d'équilibre

Un système dynamique est un phénomène qui évolue au cours du temps. Cette évolution est décrite généralement par des équations différentielles ordinaires. Il peut être également :

- autonome : si l'évolution ne dépend pas du temps .
- non autonome : si l'évolution dépend du temps.

#### Définition 1.2

Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie qui vérifie :

1.  $U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
2.  $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
3.  $U(0, x) = x$ .
4.  $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.4 Flot d'une équation différentielle

#### Définition 1.3

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = F(x), \tag{1.2}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $F(x) \in \mathbb{R}^n$ . On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des applications

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définies par :

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0),$$

où  $\varphi(t, x_0)$  est la solution de (1.3) telle que  $\varphi(0, x_0) = x_0$ .

## 1.5 Points d'équilibre et Linéarisation

### 1.5.1 Points d'équilibre

#### Définition 1.4

On appelle point d'équilibre ou point critique du système (1.2) tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$F(x_0) = 0.$$

#### Remarque 1.1

Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

### 1.5.2 Linéarisation des systèmes

Les systèmes qui modélisent des phénomènes naturelles sont généralement non linéaires. Afin d'étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, on se ramène à l'étude de ses systèmes linéarisés associés.

#### definition 1.5

Considérons le système différentiel linéaire du système (1.2), Le système

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

où  $A = DF(x_0) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ , est appelé matrice jacobienne associée au système (1.2) en  $x_0$ .

#### Exemple 1.2

soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y), \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \tag{1.4}$$

Les points d'équilibre de ce système sont :  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

La matrice du système linéarisé est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne associée à (1.4) calculée en  $(0, 0)$  est

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et la matrice jacobienne associée à (1.4) calculée en  $(1, 1)$  est

$$DF(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéaires du système (1.4) sont :

- **au point**  $(0, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$$

- **au point**  $(1, 1)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

### Définition 1.6

Le point critique  $x_0$  est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  n'a de partie réelle nulle.

### Remarque 1.2

La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.

### 1.5.3 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires

#### Définition 1.7

Soit le système différentiel linéaire (1.4), où  $A$  est une matrice constante inversible, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique  $x = x_0$  est un point selle, il est toujours instable.
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :
  1. Si  $\lambda_i < 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud stable.
  2. Si  $0 < \lambda_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud instable.
  3. Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud propre, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes conjuguées avec  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$  et  $i = 1, \dots, n$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un foyer. Il est stable si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  et instable si  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont imaginaires pures avec  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$  et  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un centre et il est stable mais pas asymptotiquement stable.

### 1.5.4 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires

On considère le système non linéaire autonome (1.3) et son système linéarisé associé (1.4), le point  $x_0$  est appelé :

- **Puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles négatives.
- **Source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles positives.
- **Selle** s'il est hyperbolique et si la matrice  $A$  a au moins une valeur propre avec la partie réelle négative et au moins une valeur propre avec la partie réelle positive.

## 1.6 Portrait de phase

Soit le système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels de degré  $d$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système ci-dessus représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites.

### Définition 1.8

Les points critiques du système (1.5) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites du système, ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$ , s'appelle le portrait de phase. Le plan  $(x, y)$  est appelé le plan de phase.

## 1.7 Orbite périodique et cycle limite

### Définition 1.9

On appelle solution périodique toute solution  $x = \phi(t)$  du système (1.5) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$  vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t) \quad (1.6)$$

Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie (1.7) est appelé période.

### Définition 1.10

Un cycle limite  $C$  du système (1.5) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace des phases. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de  $C$  dans lequel il n'y a pas d'autre courbes fermées. Quand toutes les trajectoires voisines approchent du cycle limite  $C$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , il est dit stable ou attractif, si

en revanche toutes les trajectoires voisines s'éloignent du cycle limite  $C$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$ , il est dit instable ou non attractif.

## 1.8 Quelques formules mathématiques

Dans notre étude, nous allons utiliser les formules suivantes et pour plus de détails voir [1].

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \begin{cases} \neq 0, & \text{si } i \text{ et } j \text{ pair,} \\ = 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair,} \\ = \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i = 2k, j = 0, \\ = \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!}, & \text{si } i = 2k, j = 2, \\ = \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)!}, & \text{si } i = 2k, j = 4, \\ = \frac{15\pi \alpha_k}{2^{k+2} (k+3)!}, & \text{si } i = 2k, j = 6, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\alpha_k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1)$ ,  $\alpha_{k+1} = (2k - 1)\alpha_k$ .

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l + 1)\theta d\theta \begin{cases} \neq 0, & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ = 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair,} \\ = \pi C_{i,l}, & i \text{ pair, } j = 1 \text{ et } l \geq 0, \\ = \pi \tilde{C}_{i,l}, & i \text{ pair, } j = 3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \cos(2l\theta) d\theta \begin{cases} \neq 0, & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ = 0, & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ impair,} \\ = \pi k_{i,l}, & i \text{ impair, } j = 1 \text{ et } l \geq 0, \\ = \pi \tilde{k}_{i,l}, & i \text{ impair, } j = 3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $C_{i,l}$ ,  $\tilde{C}_{i,l}$ ,  $K_{i,l}$ ,  $\tilde{k}_{i,l}$  sont des constantes non nulles.

$$\bullet \int_0^\theta \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta) \quad (1.10)$$

$$\bullet \int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta. \quad (1.11)$$

$$\bullet \int_0^\theta \cos^{2i+1} t \sin^2 t dt = \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta, \quad (1.12)$$

ou :

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l} & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,l} & l = i+1. \end{cases}$$

$$\bullet \int_0^\theta \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{8}\theta - \frac{1}{32}\sin(4\theta). \quad (1.13)$$

$$\bullet \int_0^\theta \sin^4 t dt = \frac{3}{8}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{1}{32}\sin(4\theta). \quad (1.14)$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{4}. \quad (1.15)$$

# Chapitre 2

## Théorie de moyennisation

### 2.1 Introduction

L'approche de la moyennisation constitue un outil mathématique classique pour analyser les comportements dynamiques des systèmes non linéaires, dans le cadre de la recherche de trajectoires périodiques.

Trouver des solutions périodiques à un système différentiel est en général une tâche complexe, souvent hors de portée par des méthodes directes. La méthode de la moyennisation permet de transformer cette difficulté en un problème plus accessible : la recherche des racines d'un système algébrique non linéaire. Cette approche est aujourd'hui l'une des plus courantes, dans l'analyse qualitative des systèmes dynamiques.

L'origine de cette méthode remonte aux travaux de **Krylov et Bogoliubov** en (1937) [3], **Bogoliubov et Mitropolskii** (1961) [2]. Elle a été développée par **Verhulst** [13], **Sanders et Verhulst** [12], **Malkin** (1956) [9], **Roseau** (1966) [11], **Llibre et Buica** (2004) [4].

Le principe fondamental repose sur l'étude d'une équation différentielle perturbée que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (2.1)$$

où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon < 1$  et  $f$  est  $T$ -périodique en  $t$ . L'objectif est alors de déterminer l'équation moyennée :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x), \quad (2.2)$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt,$$

et de rechercher les solutions périodiques de l'équation (2.1) à travers celle de l'équation moyennée (2.2).

Ce chapitre est dédié à la présentation des principaux résultats associés à cette méthode, qui sera exploitée dans le reste du mémoire pour l'étude des systèmes considérés.

## 2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

Ce théorème donne une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques des systèmes différentiels périodiques.

### théorème 2.1

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \quad (2.3)$$

Où  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques en la première variable et  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous définissons

$F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme suit :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2.4)$$

Supposons que :

- (i)  $F_1$  et  $R$  sont localement lipschitziennes par rapport à  $x$ .
- (ii) Pour  $a \in D$  avec  $F_{10}(a) = 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $F_{10}(z) \neq 0$ , pour tout  $z \in \bar{V}a$  et  $\det(D_z F_{10}(a)) \neq 0$ .

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.3)  $T$ -périodique isolée telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Exemple 2.1

Soit l'équation de **Van Der Pol** :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad (2.5)$$

L'équation peut s'écrire sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.6)$$

En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , le système perturbé (2.6) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (2.7)$$

on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^2), \quad |x| < 1.$$

On pose :

$$x = \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta,$$

Donc :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^3). \quad (2.8)$$

De (2.4) on obtient :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(\theta, r) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.6) sont donnés par les racines positives de l'équation :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{8} r (r^2 - 4) = 0. \quad (2.9)$$

Alors

$$F_{10}(r) = 0 \Rightarrow r = 2 > 0,$$

et

$$F'_{10}(r) = \frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow F'_{10}(2) = 1 \neq 0.$$

D'après le **Théorème 2.1** le système (2.6) possède un seul cycle limite, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit .

## 2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions des certains systèmes différentiels périodiques.

### Théorème 2.2

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.10)$$

Où  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à  $t$ .  $D$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On définit  $F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.11)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, s) dt + F_2(s, z) \right] ds \quad (2.12)$$

Supposons que :

- (i) Pour tout  $\forall t \in \mathbb{R}, F_1 \in C^1, F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement lipschitziens par rapport à  $x$ .  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ .
- (ii) Pour  $V \subset D$ , un sous ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\forall \varepsilon \in ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \setminus \{0\}$ , il existe  $a_\varepsilon \in V$  tel que :

$$F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0, \quad \text{et} \quad \det(F'_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F'_{20}(a_\varepsilon)) \neq 0.$$

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique isolée  $\varphi(0, \varepsilon)$  de l'équation (2.10), telle que  $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$ .

## Remarques 2.1

- Si  $F_{10}$  n'est pas identiquement nulle, alors les racines simples positives de  $F_{10} + \varepsilon F_{20}$  sont principalement les racines simples positives de  $F_{10}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit la théorie de la moyennée du premier ordre.
- Si  $F_{10}$  est identiquement nulle et  $F_{20}$  n'est pas identiquement nulle, alors les racines simples positives de  $F_{10} + \varepsilon F_{20}$  sont principalement les racines simples positives de  $F_{20}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit la théorie de la moyennée du second ordre.

## Exemple 2.2

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax, \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \quad (2.13)$$

En coordonnées polaires, le système (2.13) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta - 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta, \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta},$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \varepsilon + r \left( -15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta \right. \\ & + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta \\ & \left. + 48r^2 \cos^2 \theta + a \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.10) avec :

$$F_1(\theta, r) = -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5),$$

$$\begin{aligned} F_2(\theta, r) = & r(-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ & + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a), \end{aligned}$$

$$F_3(\theta, r, \varepsilon) = O(\varepsilon^3).$$

Donc nous allons appliquer le Théorème précédent.

$$F_{10}(r) = \frac{-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) d\theta = 0,$$

et

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) = -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5),$$

$$\int_0^s F_1(r, s) ds = \frac{r^2}{3} (8 - 8 \cos^3 \theta + 7 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta),$$

On trouve

$$\begin{aligned} f_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) \int_0^\theta F_1(s, r) ds + F_2(\theta, r) \right] d\theta, \\ &= r(a - r^2). \end{aligned}$$

1. Si  $a > 0$ , l'équation  $f_{20}(r) = 0$  a une seule racine positive et  $\frac{d}{dr} f_{20} = -2a \neq 0$ . Alors le système différentiel (2.13) a un cycle limite d'amplitude  $r = \sqrt{a}$  car :

$$\frac{d}{dr} f_{20}(\sqrt{a}) = -2a < 0.$$

2. Si  $a \leq 0$ , alors l'équation  $f'_{20}(r) = 0$  n'a pas de racine, donc le système différentiel (2.13) n'a pas de cycle limite.

## Chapitre 3

# Nombre de cycles limites issus d'un centre linéaire dans les systèmes de Kukles généralisés

### 3.1 Introduction et résultats principaux

Dans [7], les auteurs se sont intéressés à déterminer, à l'aide de la méthode de moyennisation, le nombre de cycles limites pouvant émerger des trajectoires périodiques autour d'un centre linéaire pour un système polynomial de **kukles** s'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

où les polynômes  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont de degré  $n_1, n_2, n_3$ .  $d_0 \neq 0$  est un nombre réel.

Il a été démontré que ce système peut engendrer jusqu'à  $\lambda_1^* = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, 1 \right\}$  cycles limites à l'aide de la première approximation de la méthode de moyennisation, et jusqu'à

$$\lambda_2^* = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_1 + 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_3 + 3}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_2 + 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_3 + 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, 1 \right\}$$

En employant la deuxième approximation.

Ce chapitre est consacré à l'analyse du nombre maximal de cycles limites pour une généralisation du système de **kukles**, exprimée par

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon l_2(x)$ ,  $f(x) = f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon h_2(x)$  et  $d_0^i = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$  où  $l_1(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $h_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont de même degrés  $n$ ,  $d_0^i \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Les principaux résultats de ce travail sont exposés dans les Théorèmes **3.1** et **3.2**.

## 3.2 Application de la méthode de moyennisation du premier ordre

Dans cette section, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ . d'une classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon l_1(x)y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon (f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + d_0^1 y^3), \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  $l_1(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$  et  $h_1(x)$  sont de degrés  $n$ ,  $d_0^1 \neq 0$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

### Théorème 3.1

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$  en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre est

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \right\}.$$

### Preuve du Théorème 3.1

Pour appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, on écrit le système en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , et  $r > 0$ .

Nous prenons

$$l_1(x) = \sum_{i=0}^n e_i x^i, \quad f_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g_1(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, \quad h_1(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

le système (3.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = -1 + \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=0}^n r^{i+1} e_i \cos^i \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 \cos \theta \sin^3 \theta \right). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, le système (3.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + o(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \left( \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right). \quad (3.5)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) d\theta.
 \end{aligned}$$

pour calculer l'expression exacte de  $F_{10}(r)$  nous utilisons les expressions dans (1.7) . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) d\theta, \\
 &= -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3}{8} d_0^1 r^2 \right),
 \end{aligned}$$

où  $\alpha_i = 3.5 \dots (2i - 1)$ .

Donc le polynôme  $F_{10}(r)$  possède au plus  $\lambda_1 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \right\}$  racines réelles positives, alors le système **(3.3)** a  $\lambda_1$  cycles limites. Par conséquent, le **Théorème 3.1** est démontré.

### Exemple 3.1

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (y + yx^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon (-x - x^2 - 2y + 3yx + 5yx^2 - 2y^2x - y^2x^2 + y^3). \end{cases} \quad (3.6)$$

L'équation moyennée du premier ordre est

$$F_{10}(r) = r(r^2 - 1), \quad (3.7)$$

qui a exactement une seule racine positive  $r_1 = 1$ . Nous concluons donc que le système (3.6) a un seule cycle limite.

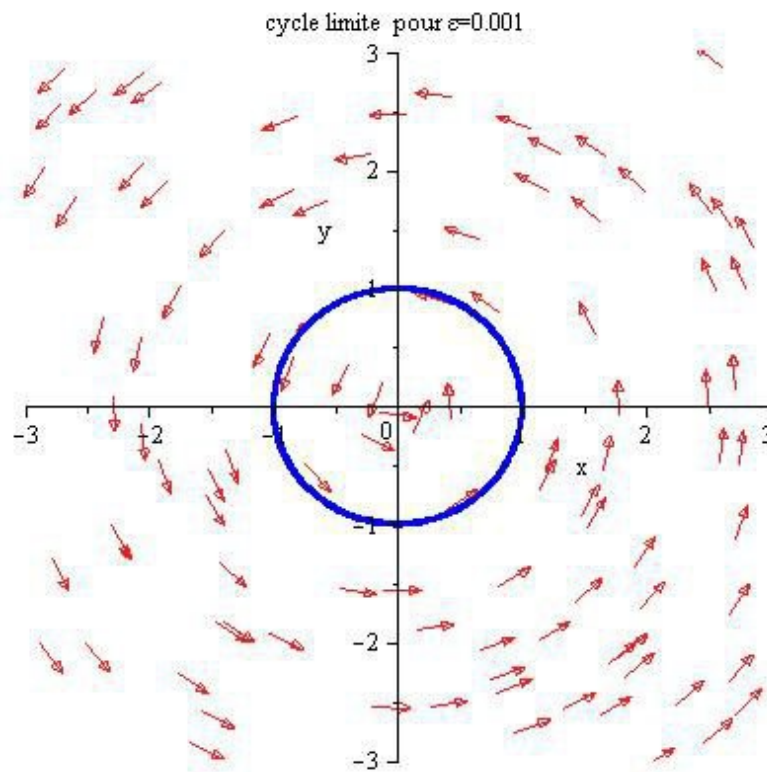


FIGURE 3.1 – Cycle limite pour  $\varepsilon = 0.001$

### 3.3 Application de la méthode de moyennisation du deuxième ordre

Dans cette section, en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$  d'une classe des systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon l_1(x)y + \varepsilon^2 l_2(x)y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + d_0^1 y^3) \\ \quad - \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + d_0^2 y^3) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $l_i(x)$ ,  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$  et  $h_i(x)$  sont des polynômes de degré  $n$ ,  $d_0^2 \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

#### Théorème 3.2

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ , en utilisant la méthode de moyennisation du second ordre est

$$\lambda_2 = \max \left\{ 1, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor \right\}$$

#### Preuve du théorème 3.2

Pour appliquer la méthode de moyennisation du second ordre, on écrit le système (3.8) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; \quad r > 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \end{cases}$$

Nous prenons

$$l_2(x) = \sum_{i=0}^n v_i x^i, \quad f_2(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i, \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^n q_i x^i, \quad h_2(x) = \sum_{i=0}^n s_i x^i.$$

Le système (3.8) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) \\ \quad + \varepsilon^2 \left( \sum_{i=0}^n v_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^2 r^3 \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + d_0^1 r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \right) \\ \quad - \frac{\varepsilon^2}{r} \left( \sum_{i=0}^n v_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + d_0^2 r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \right). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, le système (3.9) s'écrit sous la forme suivant :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

où :

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\ & - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) = & \sum_{i=0}^n v_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\
& - \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta - d_0^i r^3 \sin^4 \theta + \left( \sum_{i=0}^n c_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\
& - \sum_{i=0}^n b_i r^i \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - d_0^i r^2 \sin^4 \theta \left. \right) \times \left( \sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\
& - \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} \cos^{i+1} \theta - \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta - \\
& \left. d_0^1 r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \right). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Pour calculer  $F_{20}(r)$ , prenant  $F_{10}(r)$  identiquement nulle ce qui équivaut à

$$F_{10}(r) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = -3d_0^1, & \text{si } i = 1, \\ b_{2i} = 0, & \text{si } 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ et } i \neq 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

En remplaçant l'expression (3.12) dans (3.10) et (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned}
F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+1} \theta \\
& \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^i r^3 (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) = & \sum_{i=0}^n v_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\
& - \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^2 r^3 \sin^4 \theta + \left( \sum_{i=0}^n c_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
& - d_0^1 (r^2 \sin^4 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \left. \right) \times \left( \sum_{i=0}^n c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} \cos^{i+1} \theta \right. \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+2} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \\
& \left. - d_0^i r^3 (\sin^2 \theta \cos \theta - 3 \cos^3 \theta \sin \theta) \right). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n e_i(i+1)r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^n a_i i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} (2i+2) r^{2i+1} \\ &\cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^n c_i (i+2) r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta - 3r^2 d_0^1 r^2 (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Et

$$y(\theta, r) = \int_0^\theta F_1(s, r) ds,$$

Pour calculer l'expression de  $y(\theta, r)$  nous utilisons les expressions **(1.10)**, **(1.11)**, **(1.12)**, **(1.13)** et **(1.14)**. Nous obtenons

$$\begin{aligned} y(\theta, r) &= \sum_{i=0}^n e_i r^{i+1} \left( \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) \right) + \sum_{i=0}^n a_i r^i \left( \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta) \right) \\ &- \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i+2} \tilde{\gamma}_{i,\ell} \sin(2\ell+1)\theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \left( \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta \right) \\ &- r^3 d_0 \left( \frac{\sin(4\theta)}{8} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,\ell} = \begin{cases} \gamma_{i-\ell} - \gamma_{i+\ell} & 0 \leq \ell \leq i, \\ -\gamma_{\ell-i} & \ell = i+1. \end{cases}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r),$$

Telle que

$$\begin{aligned} F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y(0, r) d\theta, \\ F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(0, r) d\theta. \end{aligned}$$

Dans les Lemmes qui suivent, nous calculons les intégrales  $F_{20}^1(r)$  et  $F_{20}^2(r)$ .

### Lemme 3.1

L'intégrale  $F_{20}^1(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par

$$\begin{aligned}
 F_{20}^1(r) = & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} N_1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} N_2 \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} N_3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} N_4 \\
 & + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+3} N_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+5} N_6
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

où

$$\begin{aligned}
 N_1 &= e_{2i+1} b_{2j+1} \left( \frac{(2j+1)\alpha_{i+j+2}}{(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+3)!} - (i+1) \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} \right), \\
 N_2 &= -a_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{(2j+2)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+2}(i+j+2)!} + i \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} \right), \\
 N_3 &= -c_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{(2j+2)(10i+4j+15)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+3)!} + (i+1) \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} \right), \\
 N_4 &= e_{2i}(2i+1)d_0^1 \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \frac{2K_{2i+1,1} - K_{2i+1,2}}{16} \right), \\
 N_5 &= a_{2i+1}(2i+1)d_0^1 \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \frac{K_{2i+1,2} - 2K_{2i+1,1}}{16} \right), \\
 N_6 &= c_{2i+1}d_0^1 \left( \frac{(90i+45)\alpha_i}{2^{i+4}(i+4)!} + (2i+3) \left( \frac{\tilde{K}_{2i+1,2} - 2\tilde{K}_{2i+1,1}}{16} \right) \right).
 \end{aligned}$$

**Preuve 1**

Des expressions (3.15) et (3.16) nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(\theta, r) y(\theta, r) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i e_j r^{i+j+1} \frac{(j+1)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta d\theta \right. \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i a_j \frac{r^{i+j} j}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+2} (2j+2)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i c_j \frac{r^{i+j+2} (j+2)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n e_i \frac{3r^{i+3}}{(i+2)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i e_j \frac{r^{i+j+1} (j+1)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i a_j \frac{r^{i+j-1} j}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+2} (2j+2)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i c_j \frac{r^{i+j+2} (j+2)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n e_i \frac{3r^{i+3}}{(i+2)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+4} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+2} \theta \sin^4 \theta) d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i e_j \frac{r^{i+j}}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta d\theta \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \frac{r^{i+j-1} j}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta d\theta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+1}(2j+1)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i \\
& c_j \frac{r^{i+j+1}(j+2)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta \sum_{i=0}^n a_i \frac{3r^{i+2}}{(i+1)} d_0^1 \int_0^{2\pi} \\
& (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i e_j \frac{r^{i+j}(j+1)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin \theta d\theta - \\
& \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \frac{r^{i+j-1} j}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+1}(2j+2)}{(i+1)} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i c_j \frac{r^{i+j+1}(j+2)}{(i+1)} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^n a_i \frac{3r^{i+2}}{(i+1)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+3} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta) d\theta \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} e_j \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,n} r^{2i+j+2} (j+1) \int_0^{2\pi} \sin(2\ell+1)\theta \sin \theta \cos^{j+1} \theta d\theta + \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} a_j \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,n} r^{2i+j+1} j \int_0^{2\pi} \sin(2\ell+1)\theta \sin \theta \cos^j \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \\
& b_{2i+1} b_{2j+1} \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} r^{2i+2j+2} (j+2) \int_0^{2\pi} \sin(2\ell+1)\theta \sin^2 \theta \cos^{2j+1} \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \\
& \sum_{j=0}^n b_{2i+1} c_j \sum_{n=0}^{n+1} \tilde{\gamma}_{i,n} r^{2i+j+3} (j+2) \int_0^{2\pi} \sin(2\ell+1)\theta \sin^3 \theta \cos^j \theta d\theta + \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} 3r^{2i+4} d_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(2\ell+1)\theta (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\
& - 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i 4e_j \frac{r^{i+j+2}(j+1)}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta d\theta + 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i a_j \frac{r^{i+j+1} j}{(i+1)(i+3)} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta + 2 \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+2}(2j+2)}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j \frac{r^{i+j+1}(j+2)}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta + 6 \sum_{i=0}^n c_i \frac{r^{i+4}}{(i+1)(i+3)} d_0^1 \\
& \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i e_j \frac{r^{i+j+2}(j+1)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta d\theta \\
& - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i a_j \frac{r^{i+j+1} j}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+3}(2j+2)}{(i+1)} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n_3} c_i c_j \frac{r^{i+j+3}(j+2)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
& - \sum_{i=0}^n c_i \frac{3r^{i+4}}{(i+1)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+3} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta) d\theta \\
& - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^n c_i e_j \frac{r^{i+j+3}(j+1)}{(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+4} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^n c_i a_j \frac{r^{i+j+1} j}{(i+3)} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+3}(2j+2)}{(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+4} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j \frac{r^{i+j+3}(j+2)}{(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^n c_i \frac{r^{i+4}}{(i+3)} 3d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+5} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+3} \theta \sin^4 \theta) d\theta \\
& - \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^n c_j (j+1) r^{j+3} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin(4\theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^n a_{ij} j r^{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin(4\theta) \sin \theta d\theta \\
& + \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} (2j+2) r^{2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin(4\theta) \sin^2 \theta d\theta \\
& + \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^n c_j (j+2) r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin(4\theta) \sin^3 \theta d\theta + \frac{3}{8} d_0^1 r^5 \\
& \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin(4\theta) \sin^2 \theta + \sin(4\theta) \sin^4 \theta) d\theta + \frac{1}{4} d_0^1 \sum_{i=0}^n c_j (j+1) r^{j+3} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta \sin(2\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}d_0^1 \sum_{i=0}^n a_j j r^{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta \sin(2\theta) d\theta - \frac{1}{4}d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} (2j+2) r^{2j+4} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^2 \theta \sin(2\theta) d\theta - \frac{3}{4}d_0^1 \sum_{i=0}^n c_j (j+2) r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta \sin(2\theta) d\theta \\
& - \frac{3}{4}d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin(2\theta)) d\theta.
\end{aligned}$$

on utilisant les formules **(1.7)**, **(1.8)** et **(1.9)**. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
F_{20}^1 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{(2j+2)}{(2i+3)} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3} (i+j+3)!} \\
& - 9d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2i} r^{2i+3} \frac{(2i+1)\alpha_i}{2^{i+3} (i+3)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \\
& a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \frac{(2j+2)}{(2i+1)} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2} (i+j+2)!} + 9d_0^i \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+3} \frac{(2i+1)\alpha_i}{2^{i+3} (i+3)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j+1} \frac{(2j+2)}{2} r^{2i+2j+3} \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,n} C_{i,n} \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} j r^{2i+2j+1} \sum_{i=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,n} C_{i,n} \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} \frac{(2j+2)}{2} r^{2i+2j+3} \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,n} C_{i,n} \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{(2j+2)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2} (2i+1)(i+j+2)!} \\
& + 9d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+3} \frac{(2i+1)\alpha_i}{2^{i+3} (i+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \\
& \frac{(2j+2)\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3} (2i+3)(i+j+3)!} - 9d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+3} \frac{(2i+3)(2i+1)\alpha_i}{2^{i+4} (i+3)!} \\
& - \frac{1}{16} d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2j} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,2} + \frac{1}{16} d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2j+1} (2j+3) r^{2j+5} \bar{K}_{2j+1,2} + \frac{1}{8} d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2j} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,1} \\
& - \frac{1}{8} d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,1} - \frac{1}{8} d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2j+1} (2j+3) r^{2j+5} \bar{K}_{2j+1,1}
\end{aligned}$$

### Lemme 3.2

L'intégrale  $F_{20}^2(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par :

$$\begin{aligned}
F_{2b}^2(r) = & -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} - \frac{3}{8} d_0^4 r^2 \right) \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} M_1 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} M_2 \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} M_3 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+3} M_4 \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+3} M_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+5} M_6, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
M_1 &= c_{2i+1} b_{2j+1} \left( \frac{(i+j)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
M_2 &= a_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{-\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right), \\
M_3 &= b_{2i+1} c_{2j} \left( \frac{-3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
M_4 &= c_{2i} \left( \frac{-6d_0^1(i^2+1)\alpha_i}{2^{i+2}(i+3)!} \right), \\
M_5 &= a_{2i+1} \left( \frac{d_0^1(6i+6)\alpha_{i+1}}{2^{i+2}(i+3)!} \right), \\
M_6 &= c_{2i+1} \left( \frac{6d_0^1(18i+12)\alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+4)!} \right).
\end{aligned}$$

**Preuve 2**

De l'expressions **(3.14)** on a

$$\begin{aligned}
F_{20}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^n v_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^n p_i r^i \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta d\theta \right. \\
&\quad - \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad - d_0^i r^3 \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i c_j r^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i a_j r^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i c_j r^{i+j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad + d_0^i \sum_{i=0}^n e_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2} \theta \sin^4 \theta d\theta - 3d_0^i \sum_{i=0}^n e_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+4} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i c_j r^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j r^{i+j-1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} r^{i+2j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i c_j r^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
&\quad \left. - d_0^i \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta d\theta + 3d_0^i \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+3} \theta \sin^2 \theta d\theta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} c_j r^{2i+j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+1} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} a_j r^{2i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left. \right) \\
 & \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} c_j r^{2i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 & - d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2} \theta \\
 & \sin^5 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+4} \theta \sin^5 \theta d\theta \\
 & - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j r^{i+j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j} \theta \sin^5 \theta d\theta - \\
 & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i a_j r^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
 & - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} r^{i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j r^{i+j+3} \\
 & \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin^5 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{i=0}^n c_i r^{i+4} \int_0^{2\pi} \cos^{i+3} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 & - d_0^1 \sum_{i=0}^n c_i r^{i+4} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^6 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{j=0}^n c_j r^{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^6 \theta d\theta \\
 & - d_0^1 \sum_{j=0}^n c_j r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin^6 \theta d\theta - d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^7 \theta d\theta \\
 & + 3d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin^5 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{j=0}^n c_j r^{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 & + 3d_0^1 \sum_{j=0}^n a_j r^{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} r^{2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+4} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
 & + 3d_0^1 \sum_{j=0}^n c_j r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{j+3} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 & + d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta - 3d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \sin^3 \theta d\theta \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Nous utilisons les deux expressions (1.7) et (1.15). Nous trouvons

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) = & -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3}{8} d_0^i r^2 \right) \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} e_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left( \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) \\
& + 3d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+3} \left( \frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) - 3d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+3} \left( \frac{\alpha_{i+2}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} e_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} \right) \\
& - 3d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n a_{2i+1} r^{2i+3} \left( \frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) + 3d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+3} \left( \frac{\alpha_{i+2}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) \\
& - 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} e_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} \right) \\
& - 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) \\
& - 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) \\
& + 9d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+5} \left( \frac{\alpha_{i+2}}{2^{i+4}(i+5)!} \right) - 15d_0^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+5} \left( \frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+4}(i+4)!} \right) \\
& - 15d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_{2j} r^{2j+3} \left( \frac{\alpha_j}{2^{j+3}(j+3)!} \right) - 3d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} r^{2j+3} \left( \frac{\alpha_{j+1}}{2^{j+3}(j+3)!} \right) \\
& - 15d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2j} r^{2j+5} \left( \frac{\alpha_{j+1}}{2^{j+4}(j+4)!} \right) + 9d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_{2j} r^{2j+3} \left( \frac{\alpha_{j+1}}{2^{j+3}(j+3)!} \right) \\
& + 3d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} r^{2j+3} \left( \frac{\alpha_{j+2}}{2^{j+3}(j+3)!} \right) + 9d_0^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2j+1} r^{2j+5} \left( \frac{\alpha_{j+2}}{2^{j+4}(j+4)!} \right)
\end{aligned}$$

pour une expression simplifiée de (3.20), on obtient le polynôme (3.19)

D'après le Lemme 3.1 et le Lemme 3.2, nous avons :

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) &= F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) \\
&= -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} - \frac{3}{8} d_0^1 r^2 \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} A_1 \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} A_2 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} A_3 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+3} A_4 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+3} A_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+5} A_6,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A_1 &= c_{2i+1} b_{2j+1} \left( \frac{(j+1)\alpha_{i+2}}{(2i+3)(2i+j+1)(i+j+3)!} - (i+1) \sum_{\ell=0}^{i+1} \gamma_{i,\ell} C_{i+\ell} + \frac{(i+j)\alpha_{i+j}}{(i+j+3)} \right) \\
A_2 &= a_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{-(j+1)\alpha_{i+1}}{(2i+1)2^{i+j+1}(i+j+3)!} + i \sum_{\ell=0}^{i+1} \gamma_{i,\ell} C_{i+\ell} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} \right), \\
A_3 &= c_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{-(j+1)(10i+4j+15)\alpha_{i+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+1}(i+j+3)!} - \sum_{\ell=0}^{i+1} \gamma_{i,\ell} C_{i+\ell} - \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
A_4 &= c_{2i} d'_0 (2i+1) \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+4}(i+3)!} - \frac{2K_{2i+1,2} - K_{2i+1,2}}{16} - \frac{6(i+2)\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} \right), \\
A_5 &= a_{2i+1} d'_0 (2i+1) \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} - \frac{K_{2i+1,2} - 2K_{2i+1,2}}{16} + \frac{(6i+6)\alpha_{i+1}}{2^{i+2}(i+3)!} \right), \\
A_6 &= c_{2i+1} d'_0 \left( \frac{(90i+45)\alpha_i}{2^{i+4}(i+4)!} - \frac{K_{2i+1,2} - 2K_{2i+1,2}}{16} + \frac{(6i+8+12)\alpha_i}{2^{i+3}(i+4)!} \right).
\end{aligned}$$

Donc le polynôme  $F_{20}(r)$  possède au plus

$$\lambda_2 = \max \left\{ 1, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor \right\}$$

racines réelles positives, alors le système **(3.8)** a  $\lambda_2$  cycles limites. Par conséquent, **le Théorème 3.2** est démontré

### Exemple 3.2

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y + yx^2) + \varepsilon^2(yx + yx^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-1 + x + x^2 + 3yx + 3yx^2 - y^2 - 2y^2x - 15y^2x^2 - y^3) \\ \quad + \varepsilon^2(-x - x^2 + y - 21yx^2 - y^2x^2 - y^3), \end{cases} \quad (3.22)$$

L'équation moyennée du deuxième ordre est

$$F_{10}(r) = r(-3r^2 + 2 + r^4), \quad (3.23)$$

qui a exactement deux racines positives  $r_1 = \sqrt{2}$ ,  $r_2 = 1$ . Nous concluons donc que le système (3.22) a deux cycles limites.

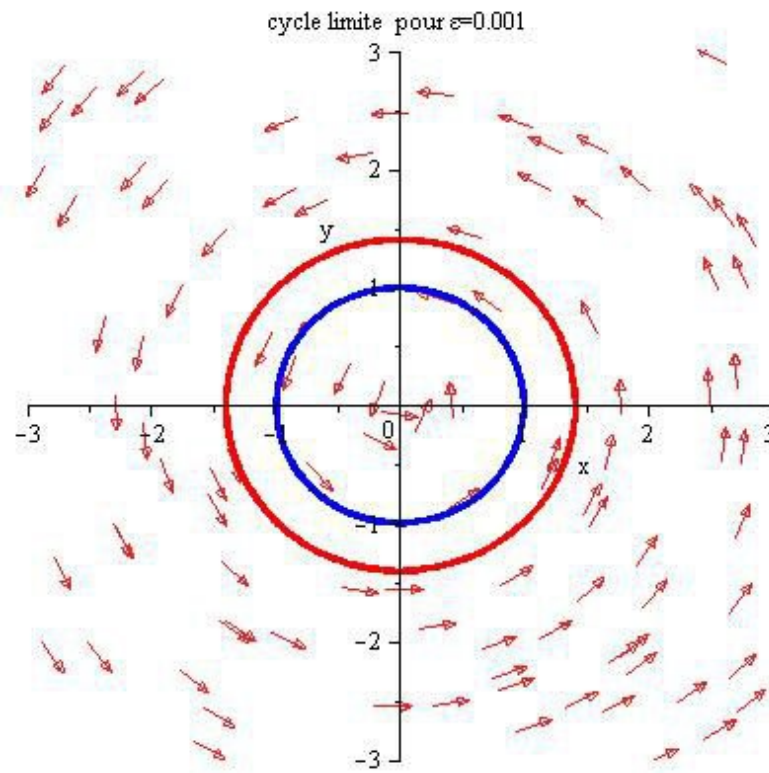


FIGURE 3.2 – Cycle limite pour  $\varepsilon = 0.001$

# Chapitre 4

## Analyse du nombre de cycles limites dans une classe généralisée de systèmes de kukles

### 4.1 Présentation du problème et résultats principaux

Dans l'article [9], les chercheurs ont exploré un système différentiel du type suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x), \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - dy^3, \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $l(x) = \varepsilon l_1(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x)$  et  $d = \varepsilon d_1$  sont des polynômes de degrés  $m, n_1, n_2, n_3$ ,  $d_1 \neq 0$  est un nombre réel et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Selon leur travaux, ce système (4.1) peut produire au plus  $\lambda = \max \left\{ 1, \left[ \frac{m-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] \right\}$  cycles limites via la théorie de moyennisation du premier ordre.

Dans ce chapitre, nous appliquons le Théorème (2.1) introduit dans le deuxième chapitre, pour examiner le nombre maximal de cycles limites que peut générer une pour une classe èlarge de systèmes différentiels donnèes par

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l_1(x, y), \\ \dot{y} = x - f_1(x, y) - g_1(x, y)y - h_1(x, y)y^2 - d_1y^3, \end{cases} \quad (4.2)$$

Où  $l(x, y) = \varepsilon l_1(x, y)$ ,  $f(x, y) = \varepsilon f_1(x, y)$ ,  $g(x, y) = \varepsilon g_1(x, y)$ ,  $h(x, y) = \varepsilon h_1(x, y)$  et  $d = \varepsilon d_1$  sont des polynômes de degré  $n$  de variable  $x$  et  $y$ .  $d_1 \neq 0$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Le résultat fondamental de cette étude est présenté ci-après

### Théorème 4.1

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.2) qui bifurquent d'un centre linéaire  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$  en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est :

$$\lambda_3 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, 1 \right\}$$

### 4.2 Preuve du Théorème 4.1

Pour démontrer **le Théorème 4.1**, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre. Nous écrivons le système (4.2) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où :  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $r > 0$ .

On écrit les polynômes  $l_1(x, y)$ ,  $f_1(x, y)$ ,  $g_1(x, y)$ ,  $h_1(x, y)$  apparaissant dans (4.2) comme :

$$\begin{aligned} l_1(x, y) &= \sum_{i+j=0}^n e_{ij} x^i y^j, & g_1(x, y) &= \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j \\ f_1(x, y) &= \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, & h_1(x, y) &= \sum_{i+j=0}^n c_{ij} x^i y^j \end{aligned}$$

Telle que

$$\dot{r} = \frac{x(y + \varepsilon l_1(x, y)) + y(x - \varepsilon(f_1(x, y) + g_1(x, y)y + h_1(x, y)y^2)) - d_1 y^3}{r},$$

$$\dot{r} = \frac{-xy + x\varepsilon l_1(x, y) + xy + y\varepsilon(f_1(x, y) - g_1(x, y)y - h_1(x, y)y^2) - d_1 y^3}{r},$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = \varepsilon & \left( \sum_{i+j=0}^n e_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta - \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta - \right. \\ & \left. \sum_{i+j=0}^n b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{i+2} \theta - \sum_{i+j=0}^n c_{ij} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta - d_1 r^3 \sin^4 \theta \right), \end{aligned}$$

et :

$$\dot{\theta} = \frac{(x - \varepsilon(f_1(x,y) - g_1(x,y)y - h_1(x,y)y^2 - d_1y^3))(x) - (-y + \varepsilon l_1(x,y)y)}{r^2},$$

$$\dot{\theta} = \frac{(x^2 - x\varepsilon(f_1(x,y) - g_1(x,y)y - h_1(x,y)y^2 - d_1y^3)) + (y^2 - \varepsilon l_1(x,y)y)}{r^2},$$

$$\dot{\theta} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} - \frac{\varepsilon(x(f_1(x,y) - g_1(x,y)y - h_1(x,y)y^2 - d_1y^3)) + l_1(x,y)y}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & 1 - \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta \cdot f_1(x, y) - \cos \theta \cdot g_1(x, y)y - \cos \theta \cdot h_1(x, y)y^2 - \cos \theta d_1y^3 \\ & + \sin \theta \cdot l_1(x, y)). \end{aligned}$$

Par conséquent, le système (4.2) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{r} = & -\varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^n e_{ij}r^{j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta - \sum_{i+j=0}^n a_{ij}r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ & \left. - \sum_{i+j=0}^n b_{ij}r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta - \sum_{i+j=0}^n c_{ij}r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta - d_1r^3 \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = & 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i+j=0}^n a_{ij}r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta - \sum_{i+j=0}^n b_{ij}r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ & \left. - \sum_{i+j=0}^n c_{ij}r^{i+j+2} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n e_{ij}r^{i+j} \cos^i \theta \sin^j \theta - d_1r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \right) \end{aligned} \right.$$

D'après le développement de Taylor on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2), \quad |x| < 1,$$

où

$$x = \varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^n e_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta - \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta - \sum_{i+j=0}^n b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta - \sum_{i+j=0}^n c_{ij} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta - d_1 r^3 \sin^4 \theta \right),$$

donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \left( \sum_{i+j=0}^n e_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta - \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta - \sum_{i+j=0}^n b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta - \sum_{i+j=0}^n c_{ij} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta - d_1 r^3 \sin^4 \theta \right).$$

Soit  $F_{10}$  l'équation moyennée du premier ordre associée au système (4.2). En utilisant la notation introduite dans le chapitre 2, on calcule  $F_{10}$ ,

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta,$$

Alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i+j=0}^n e_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i+j=0}^n c_{ij} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta - d_1 r^3 \sin^4 \theta \right) d\theta$$

Avec

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta d\theta &= \begin{cases} \pi \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta &= \begin{cases} \pi \delta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta d\theta &= \begin{cases} \pi \gamma_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta d\theta &= \begin{cases} \pi \beta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair, } j \text{ pair}}}^n e_{ij} \alpha_{ij} r^{i+j} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ jpair}}}^n a_{ij} \delta_{ij} r^{i+j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^n b_{ij} \gamma_{ij} r^{i+j+1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^n c_{ij} \beta_{ij} r^{i+j+2} \right). \end{aligned}$$

D'où le polynôme  $F_{10}(r)$  possède au plus

$$\lambda_3 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, 1 \right\}$$

racines réelles positives. Alors le système (4.2) a  $\lambda_3$  cycles limites.

Ceci complète la preuve du **Théorème 4.1**.

### Exemple 4.1

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x + y + xy + y^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-2y^2 - 3y - 11x^2y - 3y^3 - y^2x^2 - y^3x - y^4). \end{cases} \quad (4.3)$$

L'équation moyenne du premier ordre est

$$F_{10}(r) = \frac{1}{4}r(r^2 - 4), \quad (4.4)$$

qui a exactement une seule racine positive  $r_1 = 2$ . Nous concluons donc que le système (4.3) a un seul cycle limite.

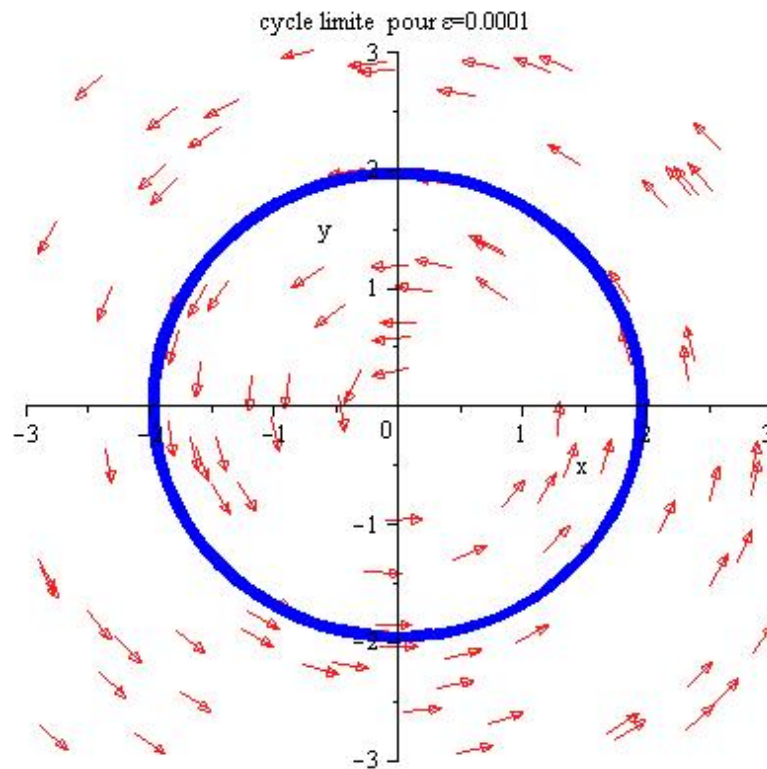


FIGURE 4.1 – Cycle limite pour  $\varepsilon = 0.0001$

# Conclusion et perspectives

Ce mémoire s'est attaché à l'étude des cycles limites au sein de certains systèmes différentiels polynomiaux à deux dimensions, en s'appuyant sur la méthode de moyennisation d'ordre un et deux. Cette approche nous a permis d'estimer le nombre maximal de cycles limites dans les systèmes considérés.

Notre travail s'inscrit dans le cadre du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert, plus précisément dans sa seconde partie, qui visent à déterminer le nombre possible de cycles limites dans des systèmes différentiels plans.

Dans la suite de nos recherches, il est envisagé d'approfondir l'application de la moyennisation d'ordre deux à une nouvelle classe de systèmes différentiels perturbés, définis par un ensemble d'équations générales, comme celui défini par le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x, y), \\ \dot{y} = x - f(x, y) - g(x, y)y - h(x, y)y^2 - d_1 y^3, \end{cases}$$

Où  $l(x, y) = \varepsilon l_1(x, y) + \varepsilon^2 l_2(x, y)$ ,  $f(x, y) = \varepsilon f_1(x, y) + \varepsilon^2 f_2(x, y)$ ,  $g(x, y) = \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)$ ,  $h(x, y) = \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y)$  et  $d_0^i = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$  sont des polynômes de même degré  $n$  de variables  $x$  et  $y$ ,  $d_0^i \neq 0$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Une exploration plus approfondie de ces systèmes pourrait enrichir notre compréhension des comportements des dynamiques complexes qu'ils peuvent engendrer.

# Bibliographie

- [1 ] Abramowitz. M, Stegun. I. *Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC :US Government, Printing Office; 1964.
- [2 ] Bogoliubov. N-N, Mitropolskii YU,A. *Asymtotic methods in the theory of non linear oscillations*. Gordon and Breach, New York,1961.
- [3 ] Bogoliubov. N and Krylov N.M.*Introduction a la mecanique non lineaire, les melodes approchee et asymtotiques*. Vol 1-2 of Ukrainska Akad. Nauk Inst. Mec. Paris, chaires de Phys. Math Annales 1937.
- [4 ] Bulea. A, Llibre. J.*Averaging methods for finding periodic differential systems with a small parameter*. Comm pure Appl.Anal.6 N 1.2007 :103-11.
- [5 ] Debz. N, Boulioul. A and Berkane. A. *Limit cycles of a class of planar polynomial differential systems*. Mathematical Methods in The Applied Sciences 2021 ; pp 1-26.
- [6 ] Hilbert. D, *Mathematische Problems*, Lecture in : Second Internat. Congr. Math. Paris, 1900, Nachr. Ges.Wiss. Gttingen Math. Phys. Ki (1900), 253-297; English transl. Bull. Amer. Soc. 8 (1902), 437-479.
- [7 ] Llibre. J, Mercu. A.C. *Limit cycles for generalized Kukles polynomial differential systems*. Nonlinear Anal.**74**, 1261-1271 (2011).
- [8 ] Malkin I.G. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. (Russian) Gostexizdat,Moscow. 1956.
- [9 ] Mellahi N, Boulfoul A, Makhlof A. *Maximum number of Limit cycles for generalized kukles polynomial differential systems*. Diff. Equ. Dyn. Syst. 2019 ;27(4) :493-514.
- [10 ] Poincare. H. *Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle*. J.Math.Pures, Appl(3) 7 (1881), 375-422.

- [11 ] Roseau. M. *Vibration non lineaire et theorie de la stabilite.* (French) Springer Tractes in natural, Vol 8 Springer verlag, New York, 1966.
- [12 ] Sanders. J-A, Verhulst. F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems.* Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New york ; 1985.
- [13 ] Verhulst. F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems,* Universitex, Springer-Verlag, Berlin, 1996.