

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Application de la méthode de la moyennisation de
certaines classes de systèmes différentiels perturbés à
centres linéaires.**

Option : COSD

Par :

Hamza Lekhchine

Encadré par : N. Debz

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : A. Boulfoul
Examineur: N. Boughiout

M.C.A U. SKIKDA
M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie Allah qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Je remercie vivement Nassima Debz pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements aux Amel Boulfoul et N. Boughiout pour leur contribution à ma formation et en acceptant de juger mon travail.

Je voudrais demander mes parents, mes frères, mes sœurs, mes chères amis, aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

Hamza Lekhchine
♡

Résumé

Ce travail de mémoire est consacré à l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement, on étudie deux classes de systèmes différentiels, en utilisant la théorie de moyennisation.

La première classe concerne l'étude des systèmes différentiels polynomiaux généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(k_1(x)y) + \varepsilon^2(k_2(x)y), \\ \dot{y} = x - \varepsilon(g_1(x) + f_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3), \\ \quad -\varepsilon^2(g_2(x) + f_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases}$$

où $g_i(x)$, $f_i(x)$, $h_i(x)$, $p_i(x)$ et $k_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) sont des polynômes de degrés donnés.

La deuxième classe concerne l'étude des systèmes différentiels polynomiaux généralisés de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x, y)y), \end{cases}$$

où $g_{11}(x)$, $f_{11}(x)$, $g_{21}(x)$ et $f_{21}(x)$ sont des polynômes de degrés donnés.

L'étude des deux classes est illustrée par des exemples.

Mots clés :

Système dynamique - cycle limite - théorie de la moyennisation - système polynômial.

abstract

This work is devoted to study the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending of small parameter. Using the averaging theory of first and second order, we study two classes of generalized differential systems.

The first class deals with generalized differential system of the form:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(k_1(x)y) + \varepsilon^2(k_2(x)y), \\ \dot{y} = x - \varepsilon(g_1(x) + f_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3), \\ \quad -\varepsilon^2(g_2(x) + f_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3). \end{cases}$$

Where $g_i(x)$, $f_i(x)$, $h_i(x)$, $p_i(x)$ and $k_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) are polynomials of given degree.

The second class is studied the generalized polynomial differential system of the form :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x, y)y), \end{cases}$$

Where $g_{11}(x)$, $f_{11}(x)$, $g_{21}(x)$ and $f_{21}(x)$ are polynomials of given degree.

Keywords :

Dynamical system - Limit cycle - polynomial differential system - averaging theory.

ملخص

ملخص موضوع هذه المذكرة يركز على دراسة عدد الحلول الدورية الخاصة بالجمل التفاضلية المتعلقة بوسيط صغير. باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الاولى و الثانية نقوم بدراسة نوعين من الجمل التفاضلية المعممة :

القسم الاول هو عبارة عن جمل من المعادلات التفاضلية المعممة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(k_1(x)y) + \varepsilon^2(k_2(x)y) \\ \dot{y} = x - \varepsilon(g_1(x) + f_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3), \\ -\varepsilon^2(g_2(x) + f_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases}$$

حيث $g_i(x)$ ، $f_i(x)$ ، $h_i(x)$ ، $p_i(x)$ و $k_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) كثيرات حدود بدرجة معطاة.

القسم الثاني هو عبارة عن جمل المعادلات التفاضلية كثيرات الحدود المعممة من الشكل :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x,y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x,y)y), \end{cases}$$

حيث $g_{11}(x)$ ، $f_{11}(x)$ ، $g_{21}(x)$ و $f_{21}(x)$ كثيرات حدود بدرجة معطاة.

كلمات مفتاحية:

جمله ديناميكية - حل دوري معزول - جمله معادلات تفاضلية كثيرات حدود - نظرية المتوسط.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	4
1.1 Systèmes dynamiques	4
1.1.1 Flot d'une équation différentielle	5
1.1.2 Points d'équilibre et linéarisation	5
1.1.3 Portrait de phase	6
1.1.4 Nature des points d'équilibre	7
1.1.5 Stabilité des points d'équilibre	7
1.1.6 Orbite périodique et cycle limite	8
2 Théorie de moyennisation	11
2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre	11
2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre	14
3 Cycles limites d'un système différentiel polynômial généralisé	16
3.1 Introduction	16
3.2 Preuves des résultats	17
3.2.1 Preuve du théorème (3.1)	17
3.3 Preuve du théorème (3.2)	19
4 Nombre maximal de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels via la théorie de la moyennisation	32

TABLE DES MATIÈRES

4.1	Introduction	32
4.1.1	Démonstration du théorème 4.1	33
	Conclusion est perspectives	35
	Annexe A. Formules	36
	Bibliographie	38

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques prend une place de plus en plus importante en mathématiques. Généralement un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite donc l'évolution temporelle des systèmes chimiques, physiques, biologiques ou économiques.

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Un des principaux problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles est la détermination des cycles limites. Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques des équations différentielles .

En 1881-1886 Poincaré a défini la notion d'un centre comme étant un point isolé singulier entouré par des orbites périodiques. Alors une façon de produire des cycles limites est de perturber un système qui a un centre.

Il y a cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques ayant un centre.

La première méthode est basée sur l'application de retour de Poincaré.

La deuxième méthode est basée sur l'intégrale de Poincaré Melnikov.

La troisième est basée sur l'intégrale Abélienne.

La quatrième est la méthode du facteur intégrant inverse.

La cinquième est la méthode de la moyennisation. Cette méthode est la base de

TABLE DES MATIÈRES

notre travail.

Les chercheurs ont étudié plusieurs équations différentielles planaires en utilisant les méthodes précédentes pour la détermination des cycles limites.

En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. La méthode de la moyennisation réduit ce problème difficile des systèmes différentiels à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire. Cette méthode est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [27] et Bogoliubov et Mitropolskii (1961) [8]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [49], Sanders et Verhulst [46], Malkin (1956) [44], Roseau (1966) [45], Llibre et Buica (2004) [9]...

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad (\text{i})$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \ll 1$ et f est T -périodique en t , et de déterminer l'équation moyennée associée à cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x), \quad (\text{ii})$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt,$$

et chercher les solutions périodiques de l'équation (i).

Ce mémoire comporte 4 chapitres :

Le chapitre 1, est un rappel de notions générales sur les systèmes dynamique.

Le deuxième chapitre, on expose la théorie de la moyennisation du premier et deuxième ordre.

Nous avons illustré ces méthodes par des exemples.

Le troisième chapitre, nous avons étudié le nombre de cycles limites d'une classe de systèmes différentiel, planaires généralisée de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(k_1(x)y) + \varepsilon^2(k_2(x)y), \\ \dot{y} = x - \varepsilon(g_1(x) + f_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3) \\ \quad - \varepsilon^2(g_2(x) + f_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases}$$

TABLE DES MATIÈRES

où $g_i(x), f_i(x), h_i(x), p_i(x)$ et $k_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) sont des polynômes de degrés n_1, n_2, n_3, k . ε est un paramètre réel supposé petit.

Dans le **chapitre 4** nous avons étudié les cycles limites d'une classe de systèmes différentiels plus généralisée de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x, y)y), \end{cases} \quad (1)$$

où $g_{11}(x), f_{11}(x), g_{21}(x)$ et $f_{21}(x)$ sont des polynômes de degré k, l, m et n , respectivement, et ε est un petit paramètre. On y trouvera un exemple pour chaque méthode.

Nous utilisons le logiciel Maple 13 pour effectuer les calculs.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notions de base sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie et continue sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que

- i) $U(0, x) = x$
- ii) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est linéaire si

$$\varphi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(t, x) + \beta \varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1. Soit le système

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.1) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

le système (1.1) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ U(t, x) = e^{tA}x.$$

1.1 Systèmes dynamiques

1.1.1 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.2. Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = F(x), \tag{1.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $F(x) \in \mathbb{R}^n$. On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

où $\phi(t, x_0)$ est la solution de (1.2) telle que $\phi(0, x_0) = x_0$

Remarque 1.1. *Le flot est dit autonome si F ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.*

1.1.2 Points d'équilibre et linéarisation

Points d'équilibre

Définition 1.3. On appelle point d'équilibre ou point critique du système (1.2) tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que, $F(x_0) = 0$.

Linéarisation

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point d'équilibre, consiste à se ramener au système linéaire associé, puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes.

Définition 1.4. On appelle système linéarisé du système (1.2) au voisinage du point d'équilibre x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

où $A = DF(x_0)$ est la matrice jacobienne de F au point x_0 :

$$DF(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \tag{1.4}$$

1.1 Systèmes dynamiques

Exemple 1.2. Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y + x^3. \end{cases} \quad (1.5)$$

L'origine est le seul point d'équilibre de ce système. La matrice jacobienne associée à (1.5) calculée en $(0, 0)$ est

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad (1.6)$$

Définition 1.5. Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

Remarque 1.2. La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.

1.1.3 Portrait de phase

Soit le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système ci dessus représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.

Définition 1.6. Les points critiques du système (1.7) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites du système, ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase. Le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.1 Systèmes dynamiques

1.1.4 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibres.

Définition 1.7. Soit le système différentiel linéaire (1.3), où A est une matrice d'ordre 2. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

- (i) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable.
- (ii) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :
 - (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable.
 - (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable
 - (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.
- (iii) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$.
- (iv) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$ et $Re(\lambda_{1,2}) = 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un centre et il est stable mais pas asymptotiquement stable.

1.1.5 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 1.8. Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.8). On dit qu'un point d'équilibre p est stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que

$$\|\phi(t) - p\| \leq \delta \implies \|\phi(t) - p\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.9. On dit qu'un point d'équilibre p est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = p$.

Théorème 1.1. Soit le système linéaire (1.3). Le point $x = x_0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives.

Si A a au moins une valeur propre avec la partie réelle strictement positive, alors le point $x = x_0$ est instable.

1.1.6 Orbite périodique et cycle limite

Définition 1.10. On appelle solution périodique toute solution $x = \phi(t)$ du système (1.2) telle qu'il existe un nombre $T > 0$ vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t). \quad (1.9)$$

- Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.9) est appelé période.
- A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phase.

Exemple 1.3. L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ qui équivaut au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y. \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$ ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C.$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan de phase par des ellipses.

Définition 1.11. Un cycle limite C du système (1.2) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace des phases. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

1.1 Systèmes dynamiques

Remarque 1.3. *Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite C lorsque $t \rightarrow +\infty$, il est dit stable ou attractif. Si en revanche toutes les trajectoires voisines s'éloignent du cycle limite C lorsque $t \rightarrow +\infty$, il est dit instable ou non attractif.*

Définition 1.12. L'amplitude d'un cycle limite C est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite

Exemple 1.4. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

$r = 1$ correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombre des orbites périodiques et il n'ya pas des cycles limites. (**Voir figures (1.1), (1.2) et (1.3)**).

Remarque 1.4. *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

1.1 Systèmes dynamiques

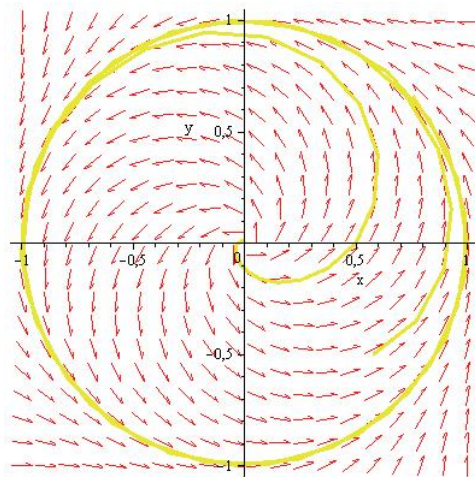


FIGURE 1.1 – Cycle limite stable pour $\alpha = 1$.

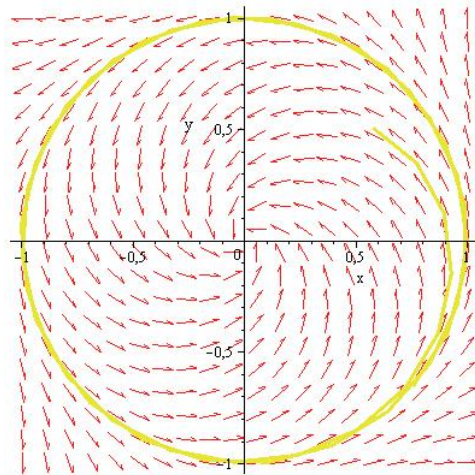


FIGURE 1.2 – Cycle limite instable pour $\alpha = -1$.

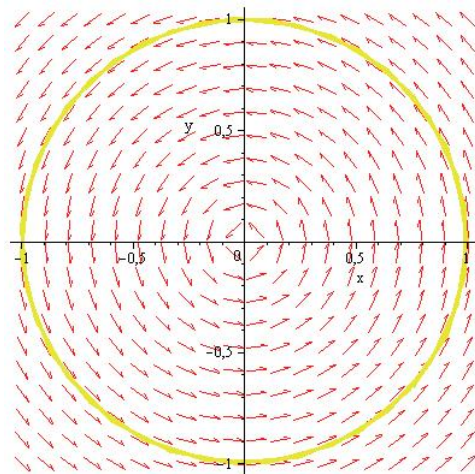


FIGURE 1.3 – Centre pour $\alpha = 0$.

Théorie de moyennisation

La théorie de la moyennisation est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires, et en particulier, de leurs orbites périodiques. Dans ce chapitre nous allons introduire les résultats principaux sur la théorie de la moyennisation utilisés pour accomplir les travaux de ce mémoire.

Notation

$D_x F$: La matrice jacobienne de la fonction F par rapport à x ;
où $F : D \rightarrow \mathbb{R}, D$ est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

$D_x^2 F$: Matrice dont les composantes sont les dérivées de deuxième ordre ou la matrice Hessienne.

$J_F(a)$: Le jacobien de F calculé en (a) .

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

Ce théorème donne une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques des systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.1. *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon). \quad (2.1)$$

Où $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable et D est un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous définissons

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

$F_{10} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds. \quad (2.2)$$

Supposons que :

(i) F_1 et R sont localement lipschitziennes par rapport à x .

(ii) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}}(a) \neq 0$

Où $D_x F_{10}$ désigne la matrice jacobienne de F_{10} par rapport à x .

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.1)

T -périodique isolée telle que $\varphi(0, \varepsilon) \longrightarrow a$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Les hypothèses de ce théorème sont plus faibles que celui dans le théorème (11.5) de **Verhulst** [12], où à la place de (i) il suppose que :

(j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

À la place de (ii) il suppose que :

(jj) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}}(a) \neq 0$.

Preuve du théorème 2.1 Voir [12]

Exemple 2.1. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^3 - y). \end{cases} \quad (2.3)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, Le système perturbé (2.3) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (-1 + r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon (\cos \theta \sin \theta - r^2 (\cos \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \sin \theta)) \end{cases} \quad (2.4)$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \text{ si } |x| < 1 \quad (2.5)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

De (2.2) on obtient

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) d\theta \\ &= \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4) \end{aligned}$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.3) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4) = 0. \quad (2.7)$$

On a $F_{10}(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 0$

et $F'_{10}(r) = \frac{-9}{8}r^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow F'_{10}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -1 \neq 0.$

D'après le théorème (2.1) le système (2.3) possède un seul cycle limite, pour, $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit.

Exemple 2.2. On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon (-2 + x - xy + x^2 + y^2) y. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En coordonnées polaires, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r \sin^2(\theta) (2r^2 - 2 + r \cos(\theta) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon (r^2 (2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) \\ \quad + r \sin(\theta) \cos^2(\theta)) - 2 \sin(\theta) \cos(\theta)), \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2(\theta) (2r^2 - 2 + r \cos(\theta) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - r^2 \cos^2(\theta) + O(\varepsilon^2)).$$

On trouve

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \left(-2r\pi + \frac{7}{4}r^3\pi \right) = 0,$$

cette équation admet une seule racine positive $r = \frac{2}{7}\sqrt{14}$, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit le système (2.8) admet un seul cycle limite.

2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions d'un certain systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.2. *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon). \quad (2.9)$$

Où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t . D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On définit $F_{10}, F_{20} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.10)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, s) dt + F_2(s, z)] dz. \quad (2.11)$$

Supposons que :

(i) Pour tout $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_1 \in C^1$, F_1, F_2, R et $D_x F_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à x . R est différentiable par rapport à ε .

(ii) Pour $V \subset D$, un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n , et $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que : $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$, et $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon, V, 0)) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.9) T -périodique isolée telle que $\varphi(0, \varepsilon) \longrightarrow a$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

(j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

(jj) $F_{10}(z) = 0, \forall z \in D$ et pour $a \in D$ avec $F_{20}(a) = 0$, on a $J_{F_{20}}(a) \neq 0$.

Preuve du théorème 2.2 Voir [12]

Exemple 2.3. *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax, \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \quad (2.12)$$

En coordonnées polaires, le système (2.12) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta, \end{cases}$$

2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos^3 \theta},$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \varepsilon + r (-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta \\ & + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta \\ & + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.9) avec

$$F_1(\theta, r) = -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5).$$

$$\begin{aligned} F_2(\theta, r) = & r (-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ & + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a). \end{aligned}$$

$$F_3(\theta, r, \varepsilon) = O(\varepsilon^3).$$

Donc nous allons appliquer le théorème précédent

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5), \\ \int_0^\theta F_1(s, r) ds &= \frac{r^2}{3} (8 - 8 \cos^3 \theta - 7 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} f^{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) \int_0^\theta F_1(s, r) ds + F_2(\theta, r) \right] d\theta \\ &= r(a - r^2). \end{aligned}$$

1. Si $a > 0$, alors le système différentiel (2.12) a un cycle limite stable d'amplitude $r = \sqrt{a}$ car $\frac{d}{dr} f^{20}(\sqrt{a}) = -2a < 0$.
2. Si $a \leq 0$, alors l'équation $f^{20}(r) = 0$ n'a pas de racines donc le système différentiel (2.12) n'a pas de cycles limites.

Cycles limites d'un système différentiel polynômial généralisé

3.1 Introduction

Dans l'article [4], les auteurs ont étudié le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(g_1(x) + f_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3) \\ \quad - \varepsilon^2(g_2(x) + f_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases}$$

où $g_i(x), f_i(x), h_i(x), p_i(x)$ et $(1 \leq i \leq 2)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et ε est un paramètre réel supposé petit.

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de la moyennisation du premier et du deuxième ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire d'une classe de systèmes différentiels généralisée de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(k_1(x)y) + \varepsilon^2(k_2(x)y), \\ \dot{y} = x - \varepsilon(g_1(x) + f_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3), \\ \quad - \varepsilon^2(g_2(x) + f_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $g_i(x), f_i(x), h_i(x), p_i(x)$ et $k_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3, k et ε est un paramètre réel supposé petit.

Nos principaux résultats sont les deux théorèmes suivants :

3.2 Preuves des résultats

Théorème 3.1. *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ du système (3.1), en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est*

$$\lambda_1 = \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor + 1.$$

Théorème 3.2. *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ du système (3.1), en utilisant la méthode de la moyennisation du deuxième ordre est*

$$\lambda_2 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_3 - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor \right\}.$$

3.2 Preuves des résultats

3.2.1 Preuve du théorème (3.1)

Pour appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, on écrit le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i, & f_1(x) &= \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i, & h_1(x) &= \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i \quad \text{et} & p_1(x) &= \sum_{i=0}^{n_2} c_i x^i, \\ k_1(x) &= \sum_{i=0}^k d_i x^i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right). \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 Preuves des résultats

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante le système (3.3) s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + o(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) = & \sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\ & - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer l'expression exacte de $F_{10}(r)$, nous utilisons les expressions des intégrales de l'annexe A. Nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \left(- \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) d\theta \\ &= - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \left(\frac{b_{2i}}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3f_{2i}}{2^{i+2}(i+2)!} r^2 \right) \right) \alpha_i r^{2i+1}, \end{aligned}$$

où $\alpha_i = 3.5 \dots (2i - 1)$.

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ possède au plus $\lambda_1 = \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor + 1$ racines réelles positives, alors Le système (3.1) a au plus $\lambda_1 = \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor + 1$ cycles limites.

Exemple 3.1. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(yx^2 + y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(1 - x + 12y - 37yx^2 - y^2 - y^2x + y^2x^2 - y^3 + 16y^3x^2). \end{cases} \quad (3.4)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0.$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Ce système (3.4) devient de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \left(r^4 \sin t \cos t^2 - r^4 \sin t \cos t^4 + r^2 \sin t \cos t^2 - r^3 \sin t \cos t - r^2 \sin t \right. \\ \quad \left. + 2r^3 \sin t \cos t^3 + \sin t - 16r^5 \sin t^2 \cos t^4 + 16r^4 \sin t^2 \cos t^2 - 36r^3 \sin t^2 \cos t^2 \right. \\ \quad \left. - r^3 \sin t^2 + 12r \sin t^2 \right), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \left(-36r^2 \sin t \cos t^3 + 16r^4 \sin t \cos t^3 - r^2 \sin t \cos t + 12 \sin t \cos t \right. \\ \quad \left. - 16r^4 \sin t \cos t^5 - 2r^2 \cos t^2 + \frac{\cos t}{r} + r^3 \cos t^3 + 2r^2 \cos t^4 - r \cos t + r \cos t^3 \right. \\ \quad \left. - r^3 \cos t^5 - 1 \right). \end{array} \right.$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{10}(r) = r^4 - 5r^2 + 6. \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) possède deux racines positives $r = \sqrt{2}, r = \sqrt{3}$.

D'après le théorème (2.1) le système (3.4) a exactement deux cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$.

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Nous utilisons la méthode de la moyennisation du second ordre on écrit le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0.$$

Tenant compte de (3.2) et en posant

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \sum_{i=0}^{n_1} p_i x^i, & f_2(x) &= \sum_{i=0}^{n_2} q_i x^i, & h_2(x) &= \sum_{i=0}^{n_3} s_i x^i, \\ P_2(x) &= \sum_{i=0}^{n_2} w_i x^i, & k_2(x) &= \sum_{i=0}^k h_i x^i. \end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Le système (3.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \left. \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{i=0}^k h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\ \quad - \sum_{i=0}^{n_1} P_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_3} S_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^{n_2} w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad + \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^K d_i r^i \cos^i \theta \sin^2 \theta \left. \right) - \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ \quad + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_2} w_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^k h_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.6) s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + o(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+2} \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
F_2(\theta, r) = & \sum_{i=0}^k h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\
& - \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta + \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\
& - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
& \left. - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) \times \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta \right). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Déterminant la fonction $F_{20}(r)$ correspondante. Pour cela, posons $F_{10} \equiv 0$ qui est équivalente à

$$\begin{cases} b_0 = 0, & i = 0, \\ b_{2i} = \frac{-3}{2i-1} f_{2i-2}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n_2}{2} \right], \\ b_{2i} = f_{2i-2} = 0, & i = \left[\frac{n_2}{2} \right] + 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

En remplaçant l'expression (3.9) dans (3.7), nous avons

$$\begin{aligned}
F_1(\theta, r) = & \sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2} \right]} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \\
& - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2} \right]} f_{2i+1} r^{2i+4} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2} \right]} r^{2i+1} f_{2i-2} \left(\cos^{2i-2} \theta \right. \\
& \left. - \frac{4i+1}{2i-1} \cos^{2i} \theta + \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} F_1(\theta, r) = & \sum_{i=0}^k (i+1) d_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2} \right]} (2i+2) \\
& b_{2i+1} r^{2i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2} \right]} (2i+4) \\
& f_{2i+1} r^{2i+3} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2} \right]} (2i+1) r^{2i} f_{2i-2} \left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{4i+1}{2i-1} \cos^{2i} \theta \right. \\
& \left. + \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Et

$$\begin{aligned}
y_1(\theta, r) &= \int_0^\theta F_1(\psi, r) d\psi \\
&= \int_0^\theta \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \psi \sin \psi - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \psi \sin \psi - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \psi \sin^2 \psi \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \psi \sin^3 \psi - \sum_{i=0}^{n_2} f_i r^{i+3} \cos^i \psi \sin^4 \psi \right) d\psi.
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales de l'annexe, on trouve

$$\begin{aligned}
y_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} \\
&\quad r^{2i+2} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \left(\frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{\cos^{i+1} \theta}{i+1} + \frac{\cos^{i+3} \theta}{i+3} \right) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} f_{2i+1} r^{2i+4} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} f_{2i-2} r^{2i+1} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin 2l\theta,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,i+1}, & l = i+1. \end{cases}, \quad \tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - 2\gamma_{i+1,l} + \gamma_{i+2,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -2\gamma_{i+1,i+1} + \gamma_{i+2,i+1}, & l = i+1, \\ \gamma_{i+2,i+2}, & l = i+2. \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_{i,l} = \begin{cases} \beta_{i-1,l} - \frac{4i+1}{2i-1} \beta_{i,l} + \frac{2i+2}{2i-1} \beta_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i-1, \\ -\frac{4i+1}{2i-1} \beta_{i,l} + \frac{2i+2}{2i-1} \beta_{i+1,l}, & l = i, \\ \frac{2i+2}{2i-1} \beta_{i+1,i+1} & l = i+1. \end{cases}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r),$$

avec

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(\theta, r) y_1(\theta, r) d\theta. \\
F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta.
\end{aligned}$$

Dans les lemmes qui suivent, nous calculons les intégrales $F_{20}^1(r)$ et $F_{20}^2(r)$.

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Lemme 3.1. *L'intégrale $F_{20}^1(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \tilde{N}_1 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{N}_2 \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{N}_3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{N}_4 \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \tilde{N}_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+5} \tilde{N}_6 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \tilde{N}_7
\end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1 &= d_{2i+1} \left[b_{2j+1} \left((i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i+1,l} + \frac{(j+1)}{2i+3} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+2}(i+j+2)} \right) - r^2 f_{2j+1} \right. \\
&\times \left. \left((i+1) \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i+1,l} + \frac{j+2}{2i+3} \frac{3\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} \right) \right], \\
\tilde{N}_2 &= d_{2i} f_{2j-2} \frac{1}{2} \left((2i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} K_{i+1,l} + \frac{1}{i+2} \left[\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2^{i-2}(i-1)!} - \frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j-1}(i+j)!} \right) \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{4i+1}{2i-1} \left(\frac{\alpha_i}{2^{i-1}(i)!} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j}(i+j+1)!} \right) + \frac{2i+2}{2i-1} \left(\frac{\alpha_{i+1}}{2^i(i+1)!} - \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \right] \right), \\
\tilde{N}_3 &= a_{2i} b_{2j+1} \left(i \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,l} + \frac{j+1}{2i+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) + r^2 a_{2i} f_{2j+1} \\
&\times \left(i \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,l} + \frac{j+2}{2i+1} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
\tilde{N}_4 &= a_{2i+1} f_{2j-2} \left(\frac{(2i+1)}{2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} K_{i,l} + \frac{3(2j+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j-1)(i+j+2)!} \right), \\
\tilde{N}_5 &= b_{2i+1} c_{2j} \left(\frac{-(i+1)(4i+10j+15)\alpha_{i+j+1}}{(2j+1)(2j+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (j+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \tilde{C}_{i,l} \right), \\
\tilde{N}_6 &= c_{2i} f_{2j+1} \left((i+1) \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \tilde{C}_{i,l} - \frac{3(j+2)(4j+14i+21)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(2i+1)(2i+3)(i+j+4)!} \right), \\
\tilde{N}_7 &= c_{2i+1} f_{2j-2} \left(\frac{(2i+3)}{2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} \tilde{K}_{i,l} + \frac{15(2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right).
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Preuve. Des expressions (3.10) et (3.11) nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(\theta, r) y_1(\theta, r) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(- \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (i+1) d_i b_{2j+1} r^{i+2j+2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \sin(2l+1)\theta d\theta \right. \\
&\quad - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} (i+1) d_i f_{2j-2} r^{i+2j+1} \sum_{l=1}^{j+2} \tilde{\beta}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \sin(2l)\theta d\theta + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \\
&\quad (i+1) d_i f_{2j+1} r^{i+2j+4} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \sin(2l+1)\theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} i a_i b_{2j+1} \\
&\quad r^{i+2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \sin(2l+1)\theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} i a_i f_{2j+1} r^{i+2j+3} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \\
&\quad \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \sin(2l+1)\theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} i a_i f_{2j-2} r^{i+2j} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \\
&\quad \sin(2l)\theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k b_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+j+2} \frac{2i+2}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta (1 - \cos^{j+2} \theta) d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} b_{2i+1} a_j r^{2i+j+1} \frac{2i+2}{j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta (1 - \cos^{j+1} \theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} b_{2i+1} c_j \\
&\quad r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} - \frac{\cos^{j+1} \theta}{j+1} - \frac{\cos^{j+3} \theta}{j+3} \right) d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \\
&\quad (i+2) r^{2i+2j+3} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \sin(2l+1)\theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i f_{2j+1} (i+2) r^{2i+2j+5} \\
&\quad \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \sin(2l+1)\theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} c_i f_{2j-2} (i+2) r^{i+2j+2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} \\
&\quad \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \sin(2l)\theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k f_{2i+1} d_j r^{2i+j+4} \frac{2i+4}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta \\
&\quad \times (1 - \cos^{j+2} \theta) d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} f_{2i+1} a_j r^{2i+j+3} \frac{2i+4}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta (1 - \cos^{j+1} \theta) d\theta
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k f_{2i-2} d_j r^{2i+j+1} \frac{2i+1}{j+2} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{(4i+1) \cos^{2i} \theta}{2i-1} + \frac{(2i+2) \cos^{2i+2} \theta}{2i-1} \right) \\
& (1 - \cos^{j+2} \theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} f_{2i-2} a_j r^{2i+j} \frac{2i+1}{j+1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{(4i+1) \cos^{2i} \theta}{2i-1} \right. \\
& \left. + \frac{(2i+2) \cos^{2i+2} \theta}{2i-1} \right) (1 - \cos^{j+1} \theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} f_{2i-2} c_j r^{2i+j+2} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta \right. \\
& \left. - \frac{(4i+1) \cos^{2i} \theta}{2i-1} + \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right) \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} - \frac{\cos^{j+1} \theta}{j+1} - \frac{\cos^{j+3} \theta}{j+3} d\theta \right)
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales de l'annexe A on a

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) & = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} (i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i+1,l} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} d_{2i} f_{2j-2} r^{2i+2j+1} \\
& (i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} K_{i+1,l} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} f_{2j+1} r^{2i+2j+5} (i+1) \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i+1,l} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \\
& \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} i \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,l} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} f_{2j+1} i r^{2i+2j+3} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,l} \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} a_{2i+1} f_{2j-2} r^{2i+2j+1} \frac{(2i+1)}{2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} K_{i,l} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+3} \\
& \frac{(i+1)}{2j+3} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+2} (i+j+2)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \frac{i+1}{2j+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1} (i+j+2)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} \left(\frac{-(i+1) \alpha_{i+j+1}}{(2j+1) 2^{i+j+1} (i+j+2)!} - \frac{(i+1) \alpha_{i+j+2}}{(2j+3) 2^{i+j+2} (i+j+3)!} \right) \\
& + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} (i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \tilde{C}_{i,l} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} f_{2j+1} r^{2i+2j+5} (i+1) \\
& \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \tilde{C}_{i,l} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} c_{2i+1} f_{2j-2} \frac{2i+3}{2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} \tilde{K}_{i,l} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} f_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+5} \\
& \frac{i+2}{2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3} (i+j+4)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} f_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+3} + \frac{i+2}{2j+1} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2} (i+j+3)!} \\
& + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} f_{2i+1} c_{2j} (i+2) r^{2i+2j+5} \left(\frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2} (i+j+3)!} + \frac{3\alpha_{i+j+2}}{(2j+3) 2^{i+j+3} (i+j+1)!} \right)
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} f_{2j-2} d_{2i} r^{2i+2j+1} \frac{(2i+1)}{4j+4} \left[\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2^{i-2}(i-1)!} - \frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j-1}!(i+j)!} \right) - \frac{4i+1}{2i-1} \left(\frac{\alpha_i}{2^{i-1}(i)!} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j}(i+j+1)!} \right) + \frac{2i+2}{2i-1} \left(\frac{\alpha_{i+1}}{2^i(i+1)!} - \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \right] - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} f_{2i-2} a_{2j+1} \\
& r^{2i+2j+3} - \frac{3(j+2)(4j+14i+21)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(2i+1)(2i+3)(i+j+4)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} f_{2i-2} c_{2j+1} r^{2i+2j+3} \\
& \left(- \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} \frac{3(j+2)(4j+14i+21)}{(2i+1)(2i+3)} \right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour une expression simplifiée de (3.3), on obtient le polynôme (3.12).

Lemme 3.2. *L'intégrale $F_{20}^2(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par :*

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+1} S_1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} S_2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+5} S_3 \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} S_4 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} S_5 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} S_6 \\
&- \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} S_7 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+5} S_8 - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} S_9.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où

$$\begin{aligned}
S_1 &= q_{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + r^2 w_{2i} \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!}, \\
S_2 &= d_{2i+1} b_{2j+1} \frac{(2i+2j)\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!}, \\
S_3 &= d_{2i+1} f_{2j+1} \frac{3(2i+2j-12)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+4}(i+j+4)!}, \\
S_4 &= d_{2i} f_{2j-2} \left(\frac{(2i+2j-4)\alpha_{i+j-1}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!} + \frac{(4ij-2i+4j-2)(-2i-2j+5)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!(2j-1)(2i-1)} \right), \\
S_5 &= a_{2i} b_{2j+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} + r^2 a_{2i} f_{2j+1} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!}, \\
S_6 &= a_{2i+1} f_{2j-2} \frac{3(i+1)\alpha_{i+j}}{2^{i+j}(i+j+2)!(2j-1)}, \\
S_7 &= b_{2i+1} c_{2j} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!}, \\
S_8 &= c_{2i} f_{2j+1} \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!}, \\
S_9 &= c_{2i+1} f_{2j-2} \frac{3(3i-2j+4)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+3)!(2j-1)}.
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Preuve. En remplaçant l'expression (3.9) dans (3.8), nous avons

$$\begin{aligned}
F_2(\theta, r) &= \sum_{i=0}^k h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\
&- \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^{n_2} w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta + \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\
&- \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
&- \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} f_{2i+1} r^{2i+4} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+1} f_{2i-2} \left(\cos^{2i-2} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \right. \\
&\left. \sin^2 \theta \right) \times \left(\sum_{i=0}^k d_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\
&\left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} f_{2i+1} r^{2i+4} \cos^{2i+2} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+1} f_{2i-2} \right. \\
&\left. \left(\cos^{2i-1} \theta \sin \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+1} \theta \sin \theta \right) \right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(- \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_2} w_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \right. \\
&d_i b_{2j+1} r^{i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} d_i f_{2j+1} r^{i+2j+5} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \\
&\sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} d_i f_{2j-2} r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \left(\cos^{2j-1} \theta \sin \theta - \frac{2j+2}{2j-1} \right. \\
&\cos^{2j+1} \theta \sin \theta \left. \right) d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_i b_{2j+1} r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \\
&a_i f_{2j+1} r^{i+2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} a_i f_{2j-2} r^{i+2j+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \\
&\left(\cos^{2j-1} \theta \sin \theta - \frac{2j+2}{2j-1} \cos^{2j+1} \theta \sin \theta \right) d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} b_{2i+1} a_j r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \\
&\sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} b_{2i+1} c_j r^{2i+j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k b_{2i+1} d_j r^{2i+j+3}
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+1} \theta \sin^4 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} r^{i+2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i \\
& f_{2j+1} r^{i+2j+6} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^6 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} c_i f_{2j-2} r^{i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
& \left(\cos^{2j-1} \theta \sin \theta - \frac{2j+2}{2j-1} \cos^{2j+1} \theta \sin \theta \right) d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} f_{2i+1} a_j r^{2i+j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \\
& \sin^4 \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} f_{2i+1} c_j r^{2i+j+6} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^6 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k f_{2i+1} d_j r^{2i+j+5} \\
& \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+1} \theta \sin^6 \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} f_{2i-2} a_j r^{2i+j+1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \\
& \cos^{j+1} \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} f_{2i-2} c_j r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \cos^{j+1} \theta \\
& \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k f_{2i-2} d_j r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \cos^j \theta \sin^2 \theta d\theta \Bigg).
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales de l'annexe A, nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i+1} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} w_{2i} r^{2i+3} \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} b_{2j+1} \\
& r^{2i+2j+3} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} d_{2i+1} f_{2j+1} r^{2i+2j+5} \frac{3\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+4}(i+j+4)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} d_{2i} f_{2j-2} r^{2i+2j+1} \left(\frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} f_{2j+1} r^{2i+2j+3} \\
& \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} a_{2i+1} f_{2j-2} r^{2i+2j+1} \left(\frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!} - \frac{i+1}{2i-1} \right. \\
& \left. \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \\
& b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!}
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} f_{2j+1} r^{2i+2j+5} \\
& \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} c_{2i+1} f_{2j-2} r^{2i+2j+3} \left(\frac{3\alpha_{i+j}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} - \frac{i+1}{2i-1} \right. \\
& \left. \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} f_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+3} 3 \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} f_{2i+1} c_{2j} \\
& r^{2i+2j+5} \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+4}(i+j+4)!} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} f_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+5} \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+4}(i+j+4)!} \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} f_{2i-2} a_{2j+1} r^{2i+2j+1} \left(\frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} f_{2i-2} c_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left(\frac{3\alpha_{i+j}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} f_{2i-2} d_{2j} r^{2i+2j+3} \left(\frac{3\alpha_{i+j-1}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{3\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour une expression simplifiée de (3.15), on obtient le polynôme (3.14) .

D'après le lemme 1 et lemme 2, nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) &= F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+1} \widetilde{M}_1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \widetilde{M}_2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \widetilde{M}_3 \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \widetilde{M}_4 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+5} \widetilde{M}_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \widetilde{M}_6 \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \widetilde{M}_7 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \widetilde{M}_8.
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_1 &= q_{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + r^2 w_{2i} \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!}, \\
\widetilde{M}_2 &= a_{2i} b_{2j+2} \left(i \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,l} - \frac{(2i+j+2)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) + r^2 a_{2i} f_{2j+1}
\end{aligned}$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
& \times \left(i \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,l} - \frac{3(2i+j+3)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
\widetilde{M}_3 &= a_{2i} f_{2j+1} \left(\frac{2i+1}{2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} K_{j,l} + \frac{3(4i+2j+3)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+2}(i+j+2)!} \right), \\
\widetilde{M}_4 &= b_{2i+1} c_{2j} \left((j+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \tilde{C}_{j,l} - \frac{(12j^2+4i^2+34j+10ij+19i+24)\alpha_{i+j+1}}{(2j+1)(2j+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
\widetilde{M}_5 &= c_{2i} f_{2j+1} \left((i+1) \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \tilde{C}_{j,l} - \frac{3(20i^2+4j^2+68i+29j+14ij+57)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+4)!} \right), \\
\widetilde{M}_6 &= c_{2i+1} f_{2j-2} \left(\frac{2i+3}{2} \sum_{l=1}^{j+2} \tilde{\beta}_{j,l} \tilde{K}_{i,l} - \frac{3(12i+2j+21)\alpha_{i+j}}{(2i-1)2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right), \\
\widetilde{M}_7 &= d_{2i+1} b_{2j+1} \left((i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i+1,l} + \frac{3(4j^2+4j-4i^2+6-2i)\alpha_{i+j+1}}{(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right), \\
& + r^2 d_{2i+1} f_{2j+1} \left(-\frac{(2i+1)}{2} \sum_{l=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} K_{i+1,l} + \frac{1}{i+2} \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2^{i-2}(i-1)!} - \frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j-1}(i+j)!} \right) \right. \\
& - \frac{4i+1}{2i-1} \frac{\alpha_i}{2^{i-1}i!} + \frac{2i+1}{2i-1} \frac{\alpha_{i+1}}{2^i(i+1)!} + \frac{(8i^2+4j^2+12ij-18j-6i+3+16ij^2+16i^3)\alpha_{i+j-1}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!(2i-1)} \\
& \left. \frac{(-12i^2+16j^2+20i-16i^2j^2+16i^3-16i^3j+56i^2j-18j+16)\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+2}(i+j+1)!(2i-1)(2j-1)} \right). \\
\widetilde{M}_8 &= d_{2i} f_{2j-2} \left(-(i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i+1,l} + \frac{(24i^2-12j^2+12ij-18j-18i-72)\alpha_{i+j+4}}{2^{i+j+4}(i+j+3)!} \right).
\end{aligned}$$

Pour trouver les racines positives réelles de $F_{20}(r)$, nous devons trouver les racines d'un polynôme dans r^2 de degré égal au max $\left\{ \left[\frac{n_2}{2} \right] + 1, \left[\frac{n_1}{2} \right] + \left[\frac{n_2-1}{2} \right] + 1, \left[\frac{n_3-1}{2} \right] + \left[\frac{n_2}{2} \right] + 1, \left[\frac{n_3}{2} \right] + \left[\frac{n_2-1}{2} \right] + 2, \left[\frac{n_1-1}{2} \right] + \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{k-1}{2} \right] + \left[\frac{n_2-1}{2} \right] + 2, \left[\frac{k}{2} \right] + \left[\frac{n_2}{2} \right] \right\}$.

Exemple 3.2. On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (y + yx^2) + \varepsilon^2 x^2 y^2 \\ \dot{y} = x - \varepsilon \left(-1 + x + (x - 3x^2) y + (1 + x - x^2) y^2 + \left(1 + \frac{32}{27} x \right) y^3 \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left(x + \left(3 - \frac{34}{3} x^2 \right) y + (1 + x^2) y^2 + (1 + 3x^2) y^3 \right). \end{cases} \quad (3.16)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0.$$

3.3 Preuve du théorème (3.2)

Ce système (3.16) devient de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \left(\sin t + \frac{32}{27}r^4 \sin t^2 \cos t^3 - r^2 \sin t^2 \cos t + 2r^3 \sin t \cos t^3 - \sin tr^3 \cos t \right. \\ \quad \left. - \sin t \cos t^4 r^4 + r^4 \sin t \cos t^2 - \frac{32}{27}r^4 \sin t^2 \cos t + 4r^3 \sin t^2 \cos t^2 - r^3 \sin t^2 \right) \\ \quad + \varepsilon^2 \left(-\sin tr^4 \cos t^2 - \sin tr^2 + \sin t \cot t^4 r^4 - 3 \sin t^2 \cos t^3 + r^5 + \frac{37}{3}r^3 \sin t^2 \cos t^2 \right. \\ \quad \left. + 3 \sin t^2 r^5 \cos t^4 + r^3 \sin t \cos t^3 - r \cos t \sin t - \sin tr^3 - 3r \sin t^2 + \sin tr^2 \cos t^2 \right) \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \left(\frac{\cos t}{r} - 2r^2 \cos t^2 + 4r^2 \sin t \cos t^3 + \frac{32}{27}r^3 \sin t \cos t^4 + r \cos t^3 - r^2 \sin t \cos t \right. \\ \quad \left. - r \cos t + 2r^2 \cos t^4 - 1 - \frac{32}{27}r^3 \sin t \cos t^2 - r^3 \cos t^5 + r^3 \cos t^3 - r \sin t \cos t^2 \right) \\ \quad + \varepsilon^2 \left(-r^2 \sin t \cos t + r^3 \cos t^5 + r \cos t^3 - 3 \sin t \cos t + \frac{37}{3}r^2 \sin t \cos t^3 \right. \\ \quad \left. - 3r^4 \sin t \cos t^3 - r^3 \cos t^3 - \cos t^2 + 3r^4 \sin t \cos t^5 - r^2 \cos t^2 + r^2 \cos t^4 - r \cos t \right). \end{array} \right.$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation :

$$F_{20}(r) = r \left(\frac{1}{36}r^6 - \frac{7}{18}r^4 + \frac{49}{36}r^2 - 1 \right). \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) possède 3 racines positives $r = 1, r = 2, \text{ et } r = 3$.

D'après le théorème (2.2) le système (3.16) à exactement trois cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire.

Nombre maximal de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels via la théorie de la moyennisation

4.1 Introduction

Dans l'article [10], les auteurs ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x)y) , \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x)y) , \end{cases} \quad (4.1)$$

où $g_{11}(x)$, $f_{11}(x)$, $g_{21}(x)$ et $f_{21}(x)$ sont des polynômes de degré k, l, m et n , respectivement, et ε est un petit paramètre.

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème 2.1 du chapitre 2 afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites du système différentiel généralisé de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x, y)y) , \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x, y)y) , \end{cases} \quad (4.2)$$

où $g_{11}(x)$, $g_{21}(x)$ sont des polynômes de degré k, m et $f_{11}(x)$ et $f_{21}(x)$ sont des polynômes de degré l, n en x et y , respectivement, et ε est un paramètre suffisamment petit.

Théorème 4.1. *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer du centre linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ du système (4.2), en*

4.1 Introduction

utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est

$$\lambda_0 = \max \left\{ \left[\frac{l}{2} \right], \left[\frac{k-1}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] \right\}.$$

4.1.1 Démonstration du théorème 4.1

Pour démontrer le théorème 4.1, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre. Nous écrivons le système (4.2) en coordonnées polaires (r, θ)

où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta, r > 0$.

Avec ceci, le système (4.2) se met sous la forme standard pour pouvoir appliquer la méthode de moyennisation

$$f_{11}(x, y) = \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} x^i y^j, f_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} x^i y^j, g_{11}(x) = \sum_{i=0}^k b_{i,1} x^i$$

et $g_{21}(x) = \sum_{i=0}^m b_{i,2} x^i$.

Le système (4.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta + \right. \\ \quad \left. \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i \theta \sin \theta \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^{i-1} \cos^{i+1} \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta - \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

On considère maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (4.3) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta + \right. \\ \left. \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i \theta \sin \theta \right) + O(\varepsilon^2),$$

4.1 Introduction

et

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ \left. + \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i \theta \sin \theta \right) d\theta.$$

Pour calculer l'expression exacte de F_{10} on utilise les formules suivantes

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ pair,} \\ \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ pair,} \\ \beta_i & \text{si } i \text{ impair } \theta d\theta, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair,} \\ \gamma_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta d\theta = 0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots$$

d'où

$$F_{10}(r) = \sum_{i+j=2, \text{ si } i \text{ impair et } j \text{ impair}}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \alpha_{ij} + \sum_{i=1, i \text{ impair}}^k b_{i,1} r^i \beta_i \\ + \sum_{i+j=0, i \text{ pair et } j \text{ pair}}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \gamma_{ij}.$$

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $\max \left\{ \left[\frac{l}{2} \right], \left[\frac{k-1}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] \right\}$ racines positives, et de plus on peut choisir les coefficients $a_{i,j,1}$ avec i impair et j impair, $a_{i,j,2}$ avec i pair et j pair et $b_{i,1}$ avec i impair de tel que $F_{10}(r)$ admet exactement $\max \left\{ \left[\frac{l}{2} \right], \left[\frac{k-1}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] \right\}$ racines positives simples. Ceci complète la démonstration du théorème 4.1.

Exemple 4.1. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \left(5x^3y^2 + \frac{56}{9}xy^4 - \frac{8}{9}xy^2 + x^3 + x - \frac{32}{315}x^7 - x^5 \right), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon (y - 10yx^2 - y^3). \end{cases} \quad (4.4)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0.$$

4.1 Introduction

Ce système (4.4) devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left(\frac{98}{9} r^4 \cos t^4 - \frac{32}{315} r^7 \cos t^8 + \frac{2}{9} r^5 \cos t^6 - \frac{67}{9} \cos t^4 - \frac{80}{9} r^3 \cos t^2 \right. \\ \quad \left. + r + \frac{56}{9} r^5 \cos t^2 - r^3 \right), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \left(-\frac{98}{9} r^2 \cos t^3 \sin t + \frac{32}{315} \sin t \cos t^7 r^6 + \frac{67}{9} r^4 \sin t \cos t^3 \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{9} r^2 \sin t \cos t - \frac{56}{9} r^4 \sin t \cos t - \frac{2}{9} r^4 \sin t \cos t^5 \right). \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation :

$$F_{10}(r) = r \left(\frac{1}{36} r^6 - \frac{7}{18} r^4 + \frac{49}{36} r^2 - 1 \right). \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) possède 3 racines positives $r = 1, r = 2, \text{ et } r = 3$.

D'après le théorème 2.2 le système (4.4) à exactement trois cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire.

Conclusion est perspectives

La recherche des solutions périodiques des équations différentielles perturbées par un paramètre suffisamment petit peut être étudiée par la méthode de la moyennisation.

Dans ce travail nous avons étudiés deux classes de systèmes différentiels polynomiaux à centres linéaires. En appliquant la méthode de la moyennisation, on a réussi à faire apparaître un certain nombre de cycles limites, ce qui est considéré comme une contribution de la résolution du 16^{ème} problème de Hilbert.

Notre travail future consistera à l'application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre au système différentiel perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x, y)y) - \varepsilon^2 (g_{12}(x) + f_{12}(x, y)y) , \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x, y)y) - \varepsilon^2 (g_{22}(x) + f_{22}(x, y)y) . \end{cases}$$

Où $g_{11}(x)$, $f_{11}(x)$, $g_{21}(x)$, $g_{12}(x)$, $f_{12}(x)$, $g_{22}(x)$, $f_{22}(x)$ et $f_{21}(x)$ sont des polynômes de degré k , l , m et n , respectivement, et ε est un petit paramètre.

Annexe A. Formules

Dans cette annexe, nous rappelons certaines formules qui seront utilisées au cours de ce travail. Pour $i, j \geq 0$, nous avons

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ pair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair,} \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=0, \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=2, \\ \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=4, \\ \frac{15\pi \alpha_k}{2^{k+2} (k+3)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=6, \end{cases}$$

où $\alpha_k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$, $\alpha_{k+1} = (2k+1)\alpha_k$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ pair et } j \text{ impair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair;} \\ \pi C_{i,l}, & \text{i pair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{C}_{i,l}, & \text{i pair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ impair et } j \text{ pair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ impair;} \\ \pi K_{i,l}, & \text{i impair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{K}_{i,l}, & \text{i impair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

où

$C_{i,l}$, $\tilde{C}_{i,l}$, $K_{i,l}$, $\tilde{K}_{i,l}$ sont des constantes non nulles .

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta).$$

4.1 Introduction

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta.$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i+1} t dt = \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta,$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i} t dt = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta + \sum_{l=0}^i \beta_{i,l} \sin(2l\theta),$$

où

$$\gamma_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1}.$$

Bibliographie

- [1] Abramowitz. M, Stegun I. *Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC :US Government, Printing Office ; 1964.
- [2] Bogoliubov N- N, Mitropolskii Yu.A. *Asymptotic methods in the theory of non linear oscillations*. Gordon and Breach, New York, 1961.
- [3] Bogoliubov N- N, Krylov N. *Introduction à la mécanique non linéaire, les méthodes approchées et asymptotiques*. vol 1-2 of Ukrainiska Akad.Nauk Inst. Mec. Paris, chaires de Phys . Maths Annales 1937.
- [4] Boulfoul A, Makhlof A, Mellahi N. *On the limit cycles for a class of generalized Kukles differential systems*, Journal of Applied Analysis and Computation. 2019 ;36 : 864-883.
- [5] Buicã A, Llibre J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull. Sci. Math. 2004 ; 128 : 7-22.
- [6] Debz N, Boulfoul A and Berkane A. *Limit cycles of a class of planar polynomial differential systems*. Mathematical Methods in The Applied Sciences 2021 ; pp 1-26.
- [7] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. J.Math.Pures, Appl(3) 7 (1881), 375-422.
- [8] Roseau.M. *Vibration non linéaire et théorie de la stabilité*. (French) Springer Tracts in natural, Vol 8 Springer verlag, Berlin, New York, 1966.

BIBLIOGRAPHIE

- [9] Malkin I.G. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. (Russian)Gostexizdat,Moscow. 1956.
- [10] J. Llibre, C. Valls; *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems*, Proc A : R Soc., 2012; 468 : 2347-60.
- [11] Sanders J-A, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New york ; 1985.
- [12] Verhulst. F; *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [13] Viano M, Llibre J, Giacomini H. *Arbitrary order bifurcation for perturbed Hamiltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor*. Bull. Non-linear. Anal. 2002; 48 : 117-136.