وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/2021/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Application du théorème de projection orthogonale sur un problème de controle optimale

Option : COSD

Par :

***1.* Boulainine Hanane**

Encadré par : A . Bouadi **MCB** U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : C.Benatmane MCB U. SKIKDA
Examinateur: S.Boudjema MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

الإهداء

۞ إلى خالد الذكر الذي وفاته المنية مند تقريب ثلاثة سنوات وكان خير مثال لرب الأسرة (أبي الغالي صالح)

۞ إلى من وضع المولى سبحانه وتعالى الجنة تحت قدميها ووقرها في كتابه العزيز (أمي الحبيبة جميلة)

۞إلى من أعتمد عليه في كل كبيرة وصغيرة (أخي المحترم رمزي)

۞ إلى أخواتي الغاليات (عبير و ابتسام ووئام وبشرى و بسمة)

۞ إلى أغلى الناس (خالي عزوز)

۞ إلى أصدقائي ومعارفي أجلهم وأحترمهم (خديجة وبسمة وخالاتي الغاليات)

۞ إلى رفيق دربي (زوجي ياسر)

۞ إلى كل أساتذتي في كلية الرياضيات

۞ إلى كل أساتذتي في الطور الإبتدائي (على رأسهم المعلمة حورية) والمتوسط والثانوي

۞ وفي الأخير أهديكم هذا العمل المتواضع راجية من المولى عزوجل أن يجد القبول والنجاح.

حنان بوالعينين

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la volonté, la patience et surtout la santé durant toute mes années d'études.

Je remercie aussi mes parents pour m'avoir facilité la vie et donner tout ce que j'en avais besoin pour réussir dans mes études.

Je remercie mon encadreur Monsieur Bouadi Abdelkader, pour son aide, sa patience, et pour la qualité de son encadrement exceptionnel.

Je remercie de jury :C.Benatmane et S.Boudjema

A tous mes enseignants de l'institué de mathématique et Aussi , à tous ceux qui ont de loin ou de près renseignés à élaborer mon humble travail.

Abstract

The aim of this work is to find a periodic solutions for non periodic-infinite horison minimisation prblems.

In first stop we give the functional spaces essential for our work, after that, we define the two importantes operators : average operator M, and extension operator V.

Finally, and using the orthogonal projection theorem on a closed convex sef, we give a solution for an optimal control problem in the Hilbert space L^2.

Résumé

Le but de ce travail est la recherche des trajectoires périodiques optimales pour un modèle qui n'est pas périodique.

On a commencé par un rappel des outils indispensables, en particulier l'introduction des deux opérateurs oxiliaires : Opérateur de la moyenne M et opérateur de prolongement V, qui vont nous servir à expliciter la solution de notre problème.

En fin, on traite un problème de contrôle optimale sur l'espace Hilbertien $L^2(R^+)$, en utilisant **le théorème de la projection orthogonale sur un convexe fermé.**

الملخص

الهدف من هذا العمل هو البحث عن المسارات الدورية المثلى لنموذج غير دوري.

نبدأ بتذكير بعض المفاهيم الأساسية لعملنا وذلك بتقديم على الخصوص مؤثرين

أحدهما M و مؤثر تمديد V واللذان نكتب بهما صيغة الحل لنموذجنا.

في الأخير ندرس نموذج قيادة مثلى في الفضاء الهيلبرتي L^2 وذلك بإستعمال

نظرية الإسقاط العمودي على جزء محدب ومغلق.

Table des matières

Introduction générale

Prévoir l'avenir proche était toujours le souscis principal d'un économiste, et cela afin de minimiser ces couts et ainsi maximiser le mieux ces bénifices, il faut savoir alors sur quoi s'appuyer au juste pour prendre une décision optimal. Pour cela, la construction d'un modèle mathématique représentatif fiable est nécessaire. Dans ce mémoire, on veut justment prévoir le prix optimal qu'on proposera pour un produit qui subbit une fluctuation périodique (variation saisonnièrre dans le langage économique). La réponse à cette question passe par l'etude du modéle de control optimal suivant

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-rt}|x(t)-p(t)-ta|^2 dt \\ \\ \text{pour} & p\, T-\text{périodique},\ a\in\mathbb{R}^n \end{array}\right\}, \tag{0.1}$$

où le prix cherché est représenté par $(p(t))$, qui est ***une fonction périodiques par rapport au temps***. Remarquons que ce problème de minimisation dépend aussi de quelques conditions irrégulièrres ou alátoires, représentées par x(t), avec $(x \in L^2(\mathbb{R}^+))$, et aussi par la tendance du marché, donnée par la fonction linéaire $(t \longmapsto a(t).)$
Notons que la présence de la fonction (e^-rt) repésente économiquement un taux d'actualisation ou la préférence du présent $(\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{-t}=0.)$

pour $p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+,\nu;\mathbb{R}^n)$, une solution du problème (0.1) est donné dans un théorème d'existence, dans le chapitre 3, et où .
L'espace $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+,\nu;\mathbb{R}^n)$ est la fermeture de l'espace $P_T^0(\mathbb{R}_+,\nu;\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues et T-périodiques, dans $L^2(\mathbb{R}_+,\nu;\mathbb{R}^n)$.

Les livres de Colonius ([5]) et Kovaleva ([7]) contiennent plusieurs types de tels problèmes, issus de la science physique ou de la chimie, qui motivent la recherche des solutions périodiques pour des problèmes de contrôle optimal.

Plan du mémoire
Nous décrivons maintenant le contenu de ce mémoire :

Dans le chapitre 1 , on présente les notations des espaces fonctionnels indispensables pour notre travail.

Dans le chapitre 2, on étudie les propriétés de l'opérateur V, qui prolonge une fonction définie sur $[0, T[$ en une fonction T-périodique définie sur le domaine $\mathbb{R}^+$, par

$$V[u](t) := u(t - kT) \text{ pour } t \in [kT, (k+1)T[.$$

On introduit aussi l'opérateur M, qui associe a une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$, sa moyenne pondérée définie sur $[0, T[$, par

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n), \quad M_f(s) := (1 - e^{-rT}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} f(s + kT).$$

Dans le chapitre 3, on va se servir des opérateurs V et M pour expliciter la projection orthogonale d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ sur l'espace de Lebesgue des fonctions T-périodiques $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$, et établir donc, une forme explicite de solutions du problème (0.1), pour $p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$.

Chapitre 1

Notation et préliminaire

1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, on appelle* ***norme sur*** *E une fonction notée $x \to \|x\|$ telle que*

1. $\|x\| \geqslant 0$ *et* $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(E, \|...\|)$ est un ***espace vectoriel normé*** .
On déduit de (3) la propriété (souvent utile !)

$$\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$$

.

2 Espaces de Banach

Définition 1.2 *Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace normé E est dite* ***suite de Cauchy*** *si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\epsilon \geqslant 1)\ \forall k, \ \ l \geqslant N_\epsilon : \ \ \|x_k - x_l\| \leqslant \varepsilon.$$

Corollaire 1.1 *Tout suite convergente d'un espace vectoriel normé est de Cauchy.*

Définition 1.3 *On dit qu'un espace vectoriel normé E est un* ***espace complet*** *si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .*
Dans ce cas E est appeller ***espace de Banach****.*

Exemple 1.1 *Soit* $E =]0,1]$.
Pour $\mathbb{R}$ *munit de la topologie usuelle,* $(]0.1], |.|)$ *n'est pas un sous-espace de Banach car il existe la suite*

$$(x_n); x_n = \frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}^*$$

avec (x_n) *de Cauchy mais*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin]0,1]$$

c-à-d

$$0 \notin E$$

3 Espaces de Hilbert

Définition 1.4 *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *Une application*
a de $E \times E$ *vers* $\mathbb{K}$, $(x,y) \longmapsto a(x,y)$,
est dite ***bilinéaire*** *lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire :*
— *pour* $y \in E$ *fixé, l'application* $x \to a(x,y)$ *est linéaire.*
— *pour* $x \in E$ *fixé, l'application* $y \to a(x,y)$ *est lin'eaire.*
Autrement dit , pour tout $x, y, z \in E$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *:*

$$a(\lambda x + \mu y, z) = \lambda a(x,z) + \mu a(y,z)$$

.

$$a(x, \lambda y + \mu z) = \lambda a(x,y) + \mu a(x,z).$$

Définition 1.5 *Soit* E *un espace vectoriel* ***réel***. *Une application*

$$\begin{array}{cccc} \langle .,. \rangle & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle x,y \rangle \end{array}$$

est appelée ***produit scalaire*** *si elle possède les propriétés suivantes :*

1. *Elle est bilinéaire.*
2. *Elle est symétrique, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in E, \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle.$$

3. *Elle est positive c'est-à-dire*

$$\forall x \in E, \langle x,x \rangle \geqslant 0.$$

4. *Elle est définie c'est-à-dire*

$$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

C-à-d Un produit scalaire sue E est une forme bilinéaire symétrique définie positive et on a

$$\|x\|_E = \langle x, x\rangle^{1/2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Exemple 1.2 *Dans $\mathbb{R}^2$, l'application*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

définit bien un produit scalaire.

Définition 1.6 *On appelle espace préhilbertienne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$.*

Définition 1.7 *Un espace de Hilbert (ou hilbertienn) est un espace préhilbertienn complet.*

Proposition 1.1 *Un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert $(H, \langle ., .\rangle)$, muni du produit scalaire restreint à F, est un espace de Hilbert si et seulement si il est fermé dans H.*
Ainsi les sous-espaces de Hilbert sont les sous-espaces vectoriels fermés.

Remarque 1.1 *En dimension finie, tout espace préhilbertien est un espace de Hilbert et tout sous-espace vectoriel est femré.Cela n'est plus vrai en dimension infinie*

4 Projection Orthogonale

Définition 1.8 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A une partie de E , A est convexe si*

$$\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \alpha + \beta = 1, \quad on\ a\ \ \alpha.x + \beta.y \in A.$$

Remarque 1.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors tout sous espace vectoriel de E est une partie convexe de E.*

Théorme 1.1 *Si C est un sous- ensemble convexe et fermé d'un espace de Hilbert H, on a alors les résultats suivants :*

1. *Pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_c \in C$ tel que*

$$\|x - x_c\| = \underset{y \in C}{inf} \|x - y\|$$

*. On appelle x_c **projection** de x sur C et on note $x_c = P_c(x)$.*

2. *Le point $x_c = P_c(x)$ est caractérisé par*

$$\forall y \in C, \mathbb{R}e\langle x - x_c, y - x_c\rangle \leqslant 0$$

.

3. *Si C est un sous- espace vectoriel fermé de H, la caractérisation s'écrit*

$$\forall y \in C, \langle x - x_c, y\rangle = 0 \ (x - x_c \text{ orthogonal à } C)$$

.

4. *La projection P_c est contraction $H \to C$*

$$\forall x, y \in H, \|P_c(y) - P_c(x)\| \leqslant \|x - y\|$$

.

5 Rappel sur la théorie de mesure

Définition 1.9 *Soit X un ensemble. On appelle tribu ou $\gamma-$ algèbre sur X, une famille Π de parties X possédant les propriétés suivantes :*

1. *$X \in \Pi$.*
2. *si $A \in \Pi$ alors $A^c = X/A \in \Pi$.*
   ($A^c = X \setminus A$est le complémentaire de A dans X).
3. *si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Pi$ alors $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n \in \Pi$*

*Les éléments de Π sont appelés les **parties mesurables** de X .On dit que (X,Π) est un **espace mesurable.***

Conséquences

1. $\Phi \in \Pi$ car $X \in \Pi$
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Pi$ alors $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} A_n \in \Pi$ car

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c \ \text{ et } \ \cup_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \mathrm{A_n} \in \Pi$$

3. Evidament tout ensemble X pssède au moins une tribu, par exemple
   a $Pi = \{\phi, \ X\}$ la plus petite.
   b $\mathcal{P}(X)$ la plus grande.

Remarque 1.3 *Une tribu sur X est toute ensemble de parties qui contient l'ensemble X et qui est stable par passage au complément et par réunion dénombrable.*

5.1 Tribu engendrée

Définition 1.10 *Soit F une famille de partie de X. On note*

$$\Gamma(F) = \cap\Pi; \;\; \Pi \text{ est une tribu sur X et } \; \mathrm{F} \subset \Pi),$$

alors $\Gamma(F)$ reste une tribu sur X, appellée la tribu engendrée par F.
[$\Gamma(F)$ est la plus petite tribu sur X qui contient F.]

5.2 Tribu de Borel

Définition 1.11 *Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle* ***tribu de Borel*** *sur X la tribu engendré par les ouverts de X , $\Pi = \Gamma(\tau)$.C'est la plus petit tribu qui contient la topologie τ.*

5.3 Propriétés élémetaires de mesures

Définition 1.12 **a)** *Une* ***mesure*** *est une fonction définie sur une tribu, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et qui poss'éde la propriété de l'additib=vité dénombrable. Ceci signifie que pour toute famille dénombrable d'éléments disjoints de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

b) *Un* **espace mesuré** *est un espace mesurable menu d'une mesure définie sur la tribu de ces ensembles mesurables.*

c) *Une* **mesure complexe** *est une fonction définie sur une tribu, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et qui poss'éde la propriété de l'additib=vité dénombrable.*

6 Les espaces L^p(espace de Lebesgue)

Définition 1.13 *Soit (X, Π, μ) un espace msurable et $p \in [1, +\infty[$, On définit*

$$L^p(X, \Pi, \mu) = \{f : X \longmapsto \mathbb{R} \;\; mesurable : \;\; \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty\}.$$

Pour $f \in L^p(X, \Pi, \mu)$, on note :

$$\|f\|_p = \int_X (|f(x)|^p d\mu)^{1/p},$$

alors $\|f\|_p$ est un norme sur $L^p(X, \Pi, \mu)$.

Théorme 1.2 ***(Théoreme convergence dominée de Lebesgue)***
Soit (f_n) une suite de fonction de L^p.On suppose que

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω*
2. *il existe une fonction $g \in L^p$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ p.p sur Ω (1).*
   Alors
   $$f \in L^p(\Omega) \text{ et } \|\mathrm{f_n - f}\|_{\mathrm{L^p}} \longrightarrow 0$$

Théorme 1.3 ***(Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi)***
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions positives de L^p telle que

$$\sup_n \int f_n < \infty,$$

alors $f_n(x)$ converge p.p sur Ω vers une limite finie notée f(x) ; de plus

$$f \in L^p \text{ et } \|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Théorme 1.4 ***(Inégalité de Shwartz)***
Si f et g sont deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$, alors leur produit $f \cdot g$ est élément de $L^1(\mathbb{R})$ et leur somme $f + g$ est élément de $L^2(\mathbb{R})$. En outre , on a l'inégalité :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx}$$

Définition 1.14 *Soit $\beta(\mathbb{R}_+)$ désigne la tribu de Borel de $\mathbb{R}_+$. Nous définissons la mesure positive finie*

$$\upsilon : \overline{\beta}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

par

$$\upsilon(B) := \int_B e_r d\mu \text{ pour tout } B \in \overline{\beta}(\mathbb{R}_+),$$

e_r est la densité de υ par rapport à μ,[15].
pour $p \in [1, \infty[$, on note par $L^p(\mu)$ l'espace

$$L^p(\mathbb{R}_+, \mu, \mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \mu - \text{mesurabble} : |\mathrm{u^p}| \text{ soit } \mu - \text{intgrable}\},$$

ainsi la norme sur $L^p(\mu)$ est définie par

$$\forall u \in L^p(\mu), \quad \|u\|_{L^p(\mu)} = (\int_{\mathbb{R}_+} |u|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

De même on note pas $L^p(\upsilon)$ l'espace

$$L^p(\mathbb{R}_+, \upsilon, \mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \upsilon - \text{mesurabble} : |\mathrm{u^p}| \text{ soit } \upsilon - \text{intgrable}\},$$

par suite la norme sur $L^p(\upsilon)$ *est définie par*

$$\forall u \in L^p(\upsilon), \quad \|u\|_{L^p(\upsilon)} = (\int_{\mathbb{R}_+} |u|^p)^{\frac{1}{p}}$$

.

Notons que

$$u \in L^1(\mathbb{R}_+, \upsilon, \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow e_r u \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu, \mathbb{R}^n),$$

et

$$\|u\|_{L^1(\upsilon)} = \|e_r u\|_{L^1(\mu)}.$$

L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+, \upsilon, \mathbb{R}^\ltimes)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{L^2(\upsilon)} = \int_{\mathbb{R}_+} e_r u.v d\mu = (\sqrt{e_r u}, \sqrt{e_r v})_{L^2(\mu)}$$

Remarque 1.4 $L^2(\mathbb{R}_+, \upsilon, \mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}_+, \upsilon, \mathbb{R}^n)$ *et on a*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}_+, \upsilon, \mathbb{R}^n), \|u\|_{L^1(\upsilon)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}.\|u\|_{L^2(\upsilon)}$$

En effet, en applicant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^+} d\upsilon = \int_{\mathbb{R}^+} \|f(t)\|_R^n . \chi_{\mathbb{R}^+} d\upsilon$$

$$\leqslant (\int_{\mathbb{R}^+} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\upsilon)^{1/2} . (\int_{\mathbb{R}^+} (\chi_{\mathbb{R}^+})^2)^{1/2},$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^+} \|f(t)_{\mathbb{R}^n}^2\| d\upsilon < \infty.$$

Définition 1.15 *Pour tout* $T \in]0, \infty[$

$P_T^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ *est l'espace des fonctions continues et T-périodiques de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}^n$

Chapitre 2

Opérateur de la moyenne. Opérateur du prolongement

Notre approche pour expliciter l'ecriture de la solution du problème (0.1) est d'introduire deux opérateurs V et M et montrer ainsi que la projection orthogonale d'un élément $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mu; \mathbb{R}^n)$ sur $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \mu; \mathbb{R}^n)$ qui est la solution du problème de minimisation (0.1), s'écrit justement $V(M(f))$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ désigne la tribu de Borel de $\mathbb{R}_+$, $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_+)$ désigne la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\mu : \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_+) \to [0, +\infty[,$$

la mesure de Lebesgue. En utilisant la fonction

$$e_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \text{ telle que } e_r(t) := e^{-rt},$$

nous définissons la mesure positive finie

$$\nu : \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ par } \nu(B) := \int_B e_r d\mu;$$

e_r est la densité de ν par rapport à μ ([1], p.437).

Pour $m \in [1, +\infty[$, $L^m(\mathbb{R}_+, \upsilon; \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des (classes d'équivalences de) fonctions Lebesgue-mesurables $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, telles que $|u|^m$ est υ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La norme usuelle de $L^m(\mathbb{R}_+, \upsilon; \mathbb{R}^n)$ est notée par $\| \cdot \|_{L^m(\pi)}$.

Le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ est noté par

$$(u \mid v)_{L^2(\nu)} := \int_0^{+\infty} e^{-rt} u(t) \cdot v(t) dt,$$

il fournit une structure d'espace de Hilbert à $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$A \text{ est } \mu-\text{négligeable} \Longleftrightarrow (\exists N \in \mathcal{T} \text{ tel que } A \subset N \text{ et } \mu(N) = 0).$$

Remarque 2.1

i) Comme $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_+)$ *est la tribu* $\mu-$*complétée de la tribu de Borel sur* $\mathbb{R}_+$*, elle contient toutes les parties* $\mu-$*négligeables de* $\mathbb{R}_+$.

ii) Soit $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_+)$*, alors*

$$A \ \mu - \text{négligeable} \Longleftrightarrow A \ \nu - \text{négligeable}.$$

Proposition 2.1 *On a*

$$L^2([0,T[, \nu; \mathbb{R}^n) = L^2([0,T[, \mu, \mathbb{R}^n) =: L^2(0,T; \mathbb{R}^n).$$

Démonstration

$$L^2([0,T[, \mu; \mathbb{R}^n) \subset L^2([0,T[, \nu; \mathbb{R}^n),$$

car

$$f \in L^2([0,T[, \mu; \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_0^T \|f(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} d\mu(t) < +\infty,$$

et puisque

$$\forall t \in [0,T], \ e^{-rt} \leq e^0 = 1,$$

alors

$$\int_0^T \|f(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} e^{-rt} d\mu(t) < \int_0^T \|f(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} d\mu(t) < +\infty,$$

d'où

$$f \in L^2([0,T[, \nu; \mathbb{R}^n).$$

Réciproquement, si

$$g \in L^2([0,T[, \nu; \mathbb{R}^n),$$

alors

$$t \longmapsto e^{-rt} \|g(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} \in L^1([0,T[, \mu; \mathbb{R}^n),$$

et comme $\forall t \in [0,T]$,

$$e^{-rT} \|g(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq e^{-rt} \|g(t)\|^2_{\mathbb{R}^n},$$

on a

$$t \longmapsto e^{-rT} \|g(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} \in L^1([0,T[, \mu; \mathbb{R}^n),$$

donc $|g|^2 \in L^1(\mu)$*, et par suite* $g \in L^2(\mu)$

□

1 Opérateur de la moyenne

Proposition 2.2 *Soit $g \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$. Alors les assertions suivantes sont satisfaites.*

i) La fonction

$$s \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT),$$

est dans $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$, et l'égalité suivante

$$\int_0^{+\infty} e^{-rt} g(t)dt = \int_0^T e^{-rs} (\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT))ds,$$

est vérifiée.

ii) De plus, si $g(t+T) = g(t)$ pour μ-p.p. $t \in \mathbb{R}_+$, la formule précédente devient

$$\int_0^{+\infty} e^{-rt} g(t)dt = \frac{1}{1-e^{-rT}} \int_0^T e^{-rs} g(s)ds.$$

Démonstration

En utilisant la σ-additivité des mesures positives avec une densité mesurable positive, on a

$$+\infty > \int_0^{+\infty} e^{-rt} \|g(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{kT+T} e^{-rt} \|g(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt,$$

et en utilisant le théorème du changement de variable ([8], Théorème 8.4.10, p.374) on obtient

$$+\infty > \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-rs} e^{-rkT} \|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds,$$

et en utilisant le théorème de Beppo Levi ([8], Théorème 2.4.5, p.107), on obtient

$$+\infty > \int_0^T e^{-rs} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} \|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, nous avons

$$\begin{aligned}
\| \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} &= \| \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{rkT}{2}} e^{-\frac{rkT}{2}} g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq (\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}).(\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} \|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n}) \\
&= \tfrac{1}{1-e^{-rT}} . \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} \|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_0^T e^{-rs}\|\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds$$

$$\leq \int_0^T e^{-rs}\frac{1}{1-e^{-rT}}.\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}\|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds < +\infty.$$

Et donc on a

$$(s \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT)) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n).$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, et en procédant comme ci-dessus, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\textstyle\sum_{k=0}^m e^{-rkT} g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} &\leq \tfrac{1}{1-e^{-rT}}.\textstyle\sum_{k=0}^m e^{-rkT}\|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \tfrac{1}{1-e^{-rT}}\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}\|g(s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur L^2 *([8], Théorème 4.2.3, p.190)*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-rt} g(t)dt &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\displaystyle\int_{kT}^{kT+T} e^{-rt} g(t)dt \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\displaystyle\int_0^T e^{-rs}e^{-rkT} g(s+kT)ds \\ &= \int_0^T e^{-rs}(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT))ds, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de i)

Puisque g *est* T*-périodique, pour prouver l'assertion ii), il suffit de noter que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} g(s+kT) = \frac{1}{1-e^{-rT}} g(s).$$

Définition 2.2 *Soit* M *l'op'erateur défini par*

$$M : L^2(\mathbb{R}_+,\nu;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$$

$$f \longmapsto M_f,$$

avec

$$M_f(s) := (1-e^{-rT})\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} f(s+kT). \tag{1.1}$$

M_f est une fonction définie sur $[0,T]$, comme une moyenne pondérée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour assurer que l'opérateur M est bien définie, on donne la proposition suivante.

Remarque 2.2 *D'aprés la proposition l'opérateur M est bien définie .*

Propriété 2.1 *L'opérateur M est linéaire .*

En effet, puisque $M_{\lambda f} = \lambda M_f$ et $M_{f+g} = M_f + M_g$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour f et g dans $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$.

2 Opérateur de prolongement

Définition 2.3 *Soit $u : [0,T[\longrightarrow \mathbb{R}^n$. L'opérateur de prolongement V est un opérateur qui prolonge la fonction u en une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}_+$*

$$V[u] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

en posant

$$V[u](t) := u(t - kT) \text{ pour } t \in [kT, (k+1)T[. \tag{2.2}$$

Pour assurer que V est bien définie on donne la proposition suivante

Proposition 2.3 *Les assertions suivantes sont satisfaites*

i) $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) : u(t+T) = u(t) \;\; \mu - \text{p.p} \;\; t \in \mathbb{R}_+\}$.

ii) Si $\varphi \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ alors $V[\varphi] \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$.

Démonstration
Dans cette preuve, $\overline{P_T^0}$ désigne $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ et

$$P'_T := \{u \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) : u(t+T) = u(t) \;\; \mu - \textit{presque tout} \;\; t \in \mathbb{R}_+\}.$$

En utilisant l'assertion i) de la Proposition [2] , on sait que $\overline{P_T^0} \subset P'_T$.

Inversement, pour $u \in P'_T$, puisque

$$C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R}^n) \text{ est dense dans } \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{R}^n)([\mathbf{?}], \text{ Corollaire } 4.23, \text{p}.109)$$

$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[, \; \exists \, \varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R}^n) : \int_0^T \|u(t) - \varphi_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt \leq \varepsilon^2.$$

Puisque

$$Supp \varphi_\varepsilon \subset]0,T[$$

on a

$$V[\varphi_\varepsilon] \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n).$$

De plus, en utilisant la Proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \|u(t) - V[\varphi_\varepsilon](t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \displaystyle\int_0^T e^{-rs} e^{-rkT} \|u(s+kT) - V[\varphi_\varepsilon](s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} \displaystyle\int_0^T e^{-rs} \|u(s) - \varphi_\varepsilon(s)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \tfrac{1}{1-e^{-rT}} \int_0^T \|u(s) - \varphi_\varepsilon(s)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \tfrac{1}{1-e^{-rT}} \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc que $u \in \overline{P_T^0}$. *Ceci montre que* $P'_T \subset \overline{P_T^0}$, *et par conséquent l'égalité est prouvée. La preuve de i) est alors terminée.*

Montrons ii)
Pour $\varphi \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, *on a*

$$V[\varphi](t+T) = V[\varphi](t) \text{ pour } \mu - p.p. \ t \in \mathbb{R}_+.$$

En utilisant (i), il suffit de prouver que $V[\varphi] \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$. *Cette dernière condition résulte des relations suivantes.*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} e^{-rt} \|V[\varphi](t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[0,T)} e^{-rs} e^{-rkT} \|V[\varphi](s+kT)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} \int_0^T e^{-rs} \|\varphi(s)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \tfrac{1}{1-e^{-rT}} \int_0^T \|\varphi(s)\|^2_{\mathbb{R}^n} ds < +\infty.
\end{aligned}$$

Propriété 2.2 *L'opérateur* V *est un opérateur linéaire, car* $V[\lambda\varphi] = \lambda V[\varphi]$ *et* $V[\varphi + \psi] = V[\varphi] + V[\psi]$, *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *et pour* φ *et* ψ *des fonctions de* $[0, T[$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2.3 *Soit* $\varphi \in C^0([0, T[, \mathbb{R}^n)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $V[\varphi] \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$

ii) $V[\varphi] \in P_T^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$

iii) $\varphi(0) = \lim\limits_{t \to T-0} \varphi(t)$.

Démonstration
Comme $V[\varphi]$ est T-périodique sur $\mathbb{R}_+$, i) et ii) sont clairement équivalentes. Si i) est vérifiè alors

$$\varphi(0) = V[\varphi](T) = \lim_{t \to T-0} V[\varphi](t) = \lim_{t \to T-0} \varphi(t),$$

ce qui donne iii).
Inversement si iii) est vérifie on a

$$\varphi(0) = \lim_{t \to T-0} \varphi(t),$$

et puisque φ est continue sur $[0, T[$ et

$$V[\varphi](t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [0, T[,$$

alors $V[\varphi]$ est continue sur $[0, T[$. Reste à montrer que $V[\varphi]$ est continue à T inférieurement . On a $V[\varphi](T) = \varphi(T - kT)$, or $T \in [T, 2T[$ et donc $k = 1$. D'où

$$V[\varphi](T) = \varphi(T - T) = \varphi(0) = \lim_{t \to T-0} \varphi(t).$$

Car $t \in [0, T[$, on a donc

$$V[\varphi](T) = \lim_{t \to T-0} \varphi(t) = \lim_{t \to T-0} V[\varphi](t).$$

ce qui implique que $V[\varphi]$ est continue en T. Et donc $V[\varphi]$ est continue en $[0, T]$. En utilisant le même raisonnement, on obtient la continuité de $V[\varphi]$ sur $[kT, kT + T]$. Puisque $([kT, kT + T])_{k \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement fermé de $\mathbb{R}_+$, qui est localement fini, alors $\varpi[\varphi]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ ([9], Point 6 p.19, et Point 3 p.20).

Chapitre 3

Problèmes dans des espaces de Lebesgue de fonctions périodiques

Dans ce chapitre, nous proposons d'abord une formule explicite de la projection orthogonale d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ sur l'espace de Lebesgue des fonctions T-périodiques $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$. Nous donnons après une formulation précise du problème (0.1). Nous établissons par la suite un résultat d'existence, en explicitant la solution.

Théorme 3.1 *Soit $f \in L^2(\nu)$. La projection orthogonale de f sur $\overline{P_T^0}(\nu)$ est $V[M_f]$.*

Démonstration
En utilisant la proposition2.2, nous savons que

$$V[M_f] \in \overline{P_T^0}(\nu).$$

Puisque

$\overline{P_T^0}(\nu)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace hilbertien* $L^2(\nu)$,

la projection orthogonale de f sur $\overline{P_T^0}(\nu)$ existe et elle est unique. Si on note par p cette projection, p est caractérisée par la propriété suivante

$$\forall q \in \overline{P_T^0}(\nu; \mathbb{R}^n), (f - p \mid q)_{L^2(\nu)} = 0,$$

c'est à dire

$$\forall q \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu), (f \mid q)_{L^2(\nu)} = (p \mid q)_{L^2(\nu)}. \tag{0.1}$$

Soit $q \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$*, alors en utilisant la proposition 2.2 et la périodicité de* q*, on obtient*

$$(f \mid q)_{L^2(\nu)} = \int_0^T e^{-rs} (\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} f(s+kT)) \cdot q(s) ds.$$

Cette dernière équation implique

$$\forall q \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n), (f \mid q)_{L^2(\nu)} = \frac{1}{1-e^{-rT}} \int_0^T e^{-rs} M_f(s) \cdot q(s) ds. \quad (0.2)$$

En remplaçant f *par* $g \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ *dans les calculs précédents, on obtient*

$$(g \mid q)_{L^2(\nu)} = \int_0^T e^{-rs} \frac{1}{1-e^{-rT}} g(s) \cdot q(s) ds,$$

ce qui implique

$$\forall g, q \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n), (g \mid q)_{L^2(\nu)} = \frac{1}{1-e^{-rT}} \int_0^T e^{-rs} g(s) \cdot q(s) ds. \quad (0.3)$$

Prenant $g = V[M_f]$ *dans (0.3), on obtient*

$$\forall q \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n),\ (V[M_f] \mid q)_{L^2(\nu)} = \frac{1}{1-e^{-rT}} \int_0^T e^{-rs} M_f(s) \cdot q(s) ds.$$

Alors, d'après (0.2), on obtient

$$\forall q \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n),\ (f \mid q)_{L^2(\nu)} = (V[M_f] \mid q)_{L^2(\nu)},$$

en utilisant (0.1), on obtient la conclusion annoncée.

□

Corollaire 3.1 *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) f *est orthogonale à* $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$*.*

ii) Pour p.p. $s \in [0, T[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} f(s+kT) = 0$*.*

Démonstration

L'assertion i) est équivalente à $V[M_f] = 0$*. D'après la définition de* ϖ*, donnée par* (2.2),

$$V[M_f] = 0 \; sur \, \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow M_f = 0 \; sur [0, T[, \quad (0.4)$$

et du Théorème 3.1, l'equation 0.4 est équivalente à l'assertion ii)

□

Remarque 3.1 *Si f est orthogonale à $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$, et si $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, alors, du Corollaire 3.1, on a*

$$f(s + kT) = 0 \text{ pour tout k} \in \mathbb{N} \text{ et p.p.s} \in [0, \mathrm{T}[),$$

ce qui implique que

$$f = 0 \ \mu - p.p. \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

$\square$

Nous considérons maintenant l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\underline{a} := [t \mapsto ta]$$

où $a \in \mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ qui est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, il est donc de dimension finie.

Lemme 3.1 *$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$.*

Démonstration

Notons d'abord que

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) = \{0\}.$$

Puisque pour u dans cette intersection

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathrm{u} = \underline{\mathrm{a}},$$

et d'après la proposition 2.2

$$(t + T)a = Ta \quad \mu - p.p \; t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour t satisfaisant cette égalité, on obtient que

$$Ta = 0,$$

ce qui implique que

$$a = 0, \text{ puisque } \mathrm{T} \neq 0.$$

La somme directe algébrique

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

est donc bien définie.

Puisque $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ est fermé dans $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$ et

$$dim \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) < +\infty,$$

en utilisant le Corollaire 5, p. 228, dans [10], on affirme que

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

est une somme directe topologique. D'ou les projecteurs

$$\pi_1 : \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \to \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$$

définis par

$$\pi_1(p + \underline{a}) = p$$

et

$$\pi_2 : \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n),$$

$$\pi_2(p + \underline{a}) = \underline{a},$$

sont linéaires continus, cf. Théorème T.2, XVII , 1, 3 , p. 228 dans [10].

Montrons, maintenant, que le sous-espace vectoriel

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n),$$

est fermé dans $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$.
Soit $(p_m + \underline{a}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *une suite de*

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n)$$

qui est convergente dans $L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$. *Alors, c'est une suite de Cauchy, et puisque* π_1 *et* π_2 *sont linéaires continus sur un espace normé, ils sont uniformḿent continus. Par conséquent*

$$(p_m)_{m\in\mathbb{N}} = (\pi_1(p_m + \underline{a}_m))_{m\in\mathbb{N}},$$

et

$$(\underline{a}_m)_{m\in\mathbb{N}} = (\pi_2(p_m + \underline{a}_m))_{m\in\mathbb{N}},$$

sont des suites de Cauchy.
Puisque

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \text{ et } \mathcal{L}(\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n)$$

sont complets, il existe

$$p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \text{ et } \underline{a} \in \mathcal{L}\ (\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n)$$

telles que

$$\lim_{m\to+\infty} p_m = p, \text{ et } \lim_{\mathrm{m}\to+\infty} \underline{\mathrm{a}}_{\mathrm{m}} = \underline{\mathrm{a}}.$$

Alors

$$\lim_{m\to+\infty} (p_m + \underline{a})_m = p + \underline{a} \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+\mathbb{R}^n).$$

$\square$

*Nous précisons, maintenant le problème (**??**). On fixe arbitrairement $x \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$, et on considère le problème de minimisation*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & E(p, \underline{a}) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-rt}|x(t) - p(t) - ta|^2 dt \\ \\ \text{pour} & p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n),\ \underline{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n). \end{array}\right\} \tag{0.5}$$

Remarque 3.2 *Le problème (0.5) peut s'écrire*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & E(p, \underline{a}) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-rt}|x(t) - (p(t) + ta)|^2 dt \\ \\ \text{pour} & p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n),\ \underline{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n). \end{array}\right\} \tag{0.6}$$

$$= \text{Minimiser} \parallel \mathrm{x(t) - [p(t) + ta]} \parallel_{\mathrm{L}^2_{(\mathbb{R}^+, \nu, \mathbb{R}^n)}}, \tag{0.7}$$

ce qui signifier :

***Pour** $x \in L^2(\nu)$, **on cherche l'élément** $(p + \underline{a}) \in \overline{P_0^T} + \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, **le plus proche de** x.*

Ce problème se traduit justement par

***la projection orthogonale de l'élément** x **de** $L^2(\nu)$ **sur le sous-espace vectoriel fermé** $\overline{P_0^T} + \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.*

Définition 3.1 *Soit M^1 l'opérateur défini par*

$$M^1 : L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$$

$$x \longmapsto M_x^1,$$

avec

$$M_x^1(s) := \frac{(1 - e^{-rT})^2}{Te^{-rT}} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(kT)x(s + kT). \tag{0.8}$$

Théorme 3.2 *Pour tout* $x \in L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$, *il existe un élément* $(\hat{p}, \underline{\hat{a}}) \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, *solution du problème (0.5).*

De plus, on a

$$\hat{a} = \frac{r}{T} \int_0^T e^{-rs}(M_x^1(s) - M_x(s))ds,$$

avec M_x *défini par (0.8), et où*

$$\hat{p} = V[M_x] - V[M_{\underline{\hat{a}}}].$$

Démonstration

En utilisant le Lemme 3.1, puisque

$$\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$$

est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n).$$

D'après le théorème de la projection orthogonale sur un sous espace fermé d'un espace de Hilbert, la solution du problème (0.5) existe, et elle est unique.

Pour la description de la solution du problème (0.5), on note que

$$\begin{aligned} E(\hat{p}, \underline{\hat{a}}) &= \inf\{E(p, \underline{a}) : p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n), \underline{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)\} \\ &= \inf_{\underline{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)} \Big(\inf_{p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)} E(p, \underline{a}) \Big). \end{aligned}$$

Notons par $p_{\underline{a}}$ *la projection orthogonale de* $x - \underline{a}$ *sur* $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$, *alors*

$$\forall \underline{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \quad \inf_{p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)} E(p, \underline{a}) = E(p_{\underline{a}}, \underline{a}),$$

et par conséquent on obtient

$$E(\hat{p}, \underline{\hat{a}}) = \inf_{\underline{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)} E(p_{\underline{a}}, \underline{a}). \tag{0.9}$$

Puisque

$$E(p_{\underline{\hat{a}}}, \underline{\hat{a}}) = \inf_{p \in \overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)} E(p, \underline{\hat{a}}) \leq E(\hat{p}, \underline{\hat{a}}),$$

et puisque $(p_{\underline{\hat{a}}}, \underline{\hat{a}})$ *est optimal, alors*

$$E(\hat{p}, \underline{\hat{a}}) \leq E(p_{\underline{\hat{a}}}, \underline{\hat{a}}),$$

ce qui implique que

$$E(p_{\underline{\hat{a}}}, \underline{\hat{a}}) = E(\hat{p}, \underline{\hat{a}}),$$

et en utilisant l'unicité de la solution optimale, on trouve

$$\hat{p} = p_{\underline{\hat{a}}}. \tag{0.10}$$

Puisque $p_{\underline{\hat{a}}}$ *est la projection orthogonale de* $x - \underline{\hat{a}}$ *sur* $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$*, en utilisant le théorème 3.1, on obtient*

$$p_{\underline{\hat{a}}} = V[M_{x-\underline{\hat{a}}}] = V[M_x] - V[M_{\underline{\hat{a}}}],$$

et donc, pour tout $s \in [0, T[$

$$\begin{aligned} p_{\underline{\hat{a}}}(s) &= M_x(s) - (1 - e^{-rT}) \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(s + kt)\hat{a} \\ &= M_x(s) - (1 - e^{-rT}) \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT} s\hat{a} - (1 - e^{-rT}) \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(kT)\hat{a} \\ &= M_x(s) - s\hat{a} - (1 - e^{-rT}) \tfrac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2} \hat{a}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\forall s \in [0, T[,\ p_{\underline{\hat{a}}}(s) = M_x(s) - s\hat{a} - \frac{Te^{-rT}}{(1 - e^{-rT})} \hat{a}. \tag{0.11}$$

D'où la dernière formule du théorème est prouvée. Il reste à prouver la formule pour $\hat{a}$*. Introduisons la fonction*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

définie par

$$F(a) := E(p_{\underline{a}}, \underline{a}).$$

En utilisant (0.9) et (0.10), on remarque que

$$F(\hat{a}) = \inf_{a \in \mathbb{R}^n} F(a).$$

En utilisant le Théorème 3.1, et le fait que $p_{\underline{a}}$ *est une projection orthogonale de* $x - \underline{a}$ *sur* $\overline{P_T^0}(\mathbb{R}_+, \nu; \mathbb{R}^n)$

$$p_{\underline{a}} = V[M_x - M_{\underline{a}}].$$

Et donc nous pouvons préciser la forme de la fonction F*. En effet, en utilisant la Proposition 2.3, on obtient*

$$\begin{aligned}
F(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-rt}\|x(t) - V[M_x](s) + V[M_{\underline{a}}](t) - ta\|^2_{\mathbb{R}^n} dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T e^{-rs}e^{-rkT}\|x(s+kT) - V_{M_x}(s+kT) \\
&\quad +V_{M_{\underline{a}}}(s+kT) - (s+kT)a\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T e^{-rs}e^{-rkT}\|x(s+kT) - M_x(s) \\
&\quad +sa + \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})}a - (s+kT)a\|^2_{\mathbb{R}^n} ds \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T e^{-rs}e^{-rkT}\|x(s+kT) - M_x(s) + \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})}a - kTa\|^2_{\mathbb{R}^n} ds,
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule suivante

$$F(a) = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T e^{-rs}e^{-rkT}\|x(s+kT) - M_x(s) + \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})}a - kTa\|^2_{\mathbb{R}^n} ds. \tag{0.12}$$

De cette formule, F est une fonction convexe quadratique, et donc, son point de minimum, $\hat{a}$, est caractérisé par

$$DF(\hat{a}).z = 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}^n.$$

Un calcul simple montre que cette dernière équation est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T e^{-rs}e^{-rkT}\left(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT\right)(x(s+kT) - M_x(s) \\
&\qquad + \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})}\hat{a} - kT\hat{a})ds = 0,
\end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-rs}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}\left(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT\right)(M_x(s) - x(s+kT))ds \\
&\qquad = \left(\int_0^T e^{-rs}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}\left(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT\right)^2 ds\right).\hat{a}
\end{aligned}\right\}. \tag{0.13}$$

Pour simplifier cette dernière formule, nous utilisons les égalités

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(kT) = \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2},$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(kT)^2 = \frac{T^2e^{-rT}(1+e^{-rT})}{(1-e^{-rT})^3},$$

obtenues par la différentiation de la série

$$S(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kz}.$$

Les coefficients de â dans (0.13) sont

$$\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-rs}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT)^2 ds \\
= \quad & \tfrac{1-e^{-rT}}{r}\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(\frac{T^2e^{-rT}e^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2} + (kT)^2 - \frac{2Te^{-rT}kT}{1-e^{-rT}}) \\
= \quad & \tfrac{1-e^{-rT}}{r}(\tfrac{T^2e^{-rT}e^{-rT}}{(1-e^{-T})^3} + \tfrac{T^2e^{-rT}(1+e^{-rT})}{(1-e^{-T})^3} - \tfrac{2Te^{-rT}Te^{-rT}}{(1-e^{-T})^3}) \\
= \quad & \tfrac{T^2e^{-rT}}{r(1-e^{-rT})^2}(e^{-rT} + 1 + e^{-rT} - 2e^{-rT}).
\end{aligned}$$

Ceci implique la formule suivante

$$\int_0^T e^{-rs}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT)^2 ds = \frac{T^2e^{-rT}}{r(1-e^{-rT})^2}. \tag{0.14}$$

Le premier terme de (0.13) est

$$\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-rs}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT)(M_x(s) - x(s+kT))ds \\
= \quad & \int_0^T e^{-rs}(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}M_x(s) - \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}M_x(s) \\
& -\tfrac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}M_x(s) + \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}(kT)x(s+kT))ds \\
= \quad & \tfrac{-Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}\int_0^T e^{-rs}M_x(s)ds + \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}\int_0^T e^{-rs}M_x^1(s)ds
\end{aligned}$$

D'où

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\int_0^T e^{-rs}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-rkT}\Big(\frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})} - kT\Big)(M_x(s) - x(s+kT))ds = \\ \frac{Te^{-rT}}{(1-e^{-rT})^2}\displaystyle\int_0^T e^{-rs}(M_x^1(s) - M_x(s))ds \end{array}\right\}. \quad (0.15)$$

D'après (0.14) et (0.15) dans (0.13), on obtient la formule annoncée de $\hat{a}$.

$\square$

Bibliographie

[1] *Abdelkader BOUADI , Principe variationnels en horizon infini et oscilllations périodiques et presque-périodiques, Thèse de doctorat, Université paris 1 Panthéon-Sorbonne et Laboratoire SAMM EA 4543.*

[2] *J. Blot & A. Bouadi, Infinite-horizon variational principles and almost-periodic oscillations, in Differential and difference equations and applications, S. Pinelas, M. Chipot & Z. Dosla (Editors), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Volume 47, 2013.*

[3] *J. Blot& P. Cartigny, Optimality in infinite-horizon problems under signs conditions, Journal of Optimisation Theory and Applications,* **106***(2), 411-419 (2000).*

[4] *J. Blot, & P. Michel : First-order necessary conditions for the infinite-horizon variational problems, Journal of Optimization Theory and Applications,* **88***(2), 339-364 (1996).*

[5] *F. Colonius, Periodic optimal control, Lecture Notes in Mathematics.* n^o *1313 , Springer-Verlag, Berlin, 1988.*

[6] *F. Colonius & W. Kliemann, Infinite time optimal control and periodicity, Applied Mathematics and Optimisations.* **20***, 113-130, (1989).*

[7] *A. Kovaleva, Optimal control of mechanical oscillations, English edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.*

[8] *C.-M. Marle, Mesures et probabilités, Hermann, Paris, 1974.*

[9] *V.A. Rokhlin & D.B. Fuchs, Premier cours de topologie ; chapitres géométriques, traduit du russe, MIR, Moscow, 1981.*

[10] *L. Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris, 1970.*

[11] *Daniel Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigées ,ellipses .*

[12] *Olivier Glass, Algébre linéaire3 : produit scalaire ,espaces euclidien, formes quadratiques, Université Paris-Dauphine DU MI2E, 2 éme année.*

[13] *THIERRY GALLAY ,Théorie de la mesure et de l'ntégration ,Universit'e Joseph Fourier,Grenoble , 2009.*

[14] Haïm BREZIS ,ANALYSE FONCTIONNELLE Théorie et application ,Université Pierre et Marie Curie et École Polytechnique, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise sous la direction de P.G. CIARLET et J.L. LIONS.

[15] C.D.Aliprantis & K.C.Border :Infinite dimensional analysis, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin ,1999 .