

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : COSD

Thème

Contrôle Optimal des Systèmes Linéaires Autonomes : Contrôle Bang-Bang

Présenté par :
Khattab Imane

Soutenu publiquement le : 02/07/2025

Devant le jury composé de :

N.Nasri	M.C.A	Université de Skikda	Présidente
L.Bouzettouta	M.C.A	Université de Skikda	Examineur
G.Khenniche	M.C.A	Université de Skikda	Encadreuse

Année universitaire : 2024/2025

Dédicaces

À ceux qui sont restés debout pour moi et ont supporté mes faiblesses, ceux qui m'aiment inconditionnellement, source de ma force et de ma fierté : ***Mon chère papa et ma chère maman...***

À ceux dont l'amour, et les rires ont été une chaleur indescriptible, mes frères et ma soeur, mon soutien et mon compagnon dans la détresse : ***Zaki, Taki, Salmoucha***

Et à ceux avec qui j'ai ressenti le sens de la véritable amitié, les compagnons de mon cœur et de mon âme : ***Assila, Hadil, chaima***. Vous étiez la lumière dans l'obscurité des jours et le rire dans les moments de fatigue.

À tous les cœurs sincères qui ont croisé mon chemin et ont laissé un impact beau et inoubliable...

Je dédie cet humble travail, par gratitude, reconnaissance et amour qui est incommensurable.

Remerciement

Je rends grâce à Allah, par Sa grâce et Sa miséricorde, de m'avoir guidé sur cette voie. Sans Sa bienveillance, je n'aurais pu accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à **Dr Ghania Khenniche**, dont l'expertise, la bienveillance et les précieux conseils ont été d'une aide inestimable tout au long de la réalisation de ce mémoire. Qu'Allah la récompense abondamment pour son soutien et son engagement.

Je souhaite également remercier chaleureusement les membres du comité d'évaluation, **Dr N. Nasri** et **Dr L. Bouzatouta**, pour avoir accepté de juger ce travail et pour leurs précieuses remarques. Leur disponibilité et leur bienveillance m'ont été d'un grand réconfort.

Une pensée reconnaissante va également à mes chers collègues, dont l'esprit d'entraide et la solidarité ont rendu ce parcours plus enrichissant. Leurs encouragements et leur collaboration ont été essentiels à l'aboutissement de ce projet.

Enfin, je n'oublie pas toutes les personnes, de près ou de loin, qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Qu'Allah récompense chacun d'entre vous au-delà de ses espérances.

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude de la commande optimale, en analysant deux approches fondamentales : les problèmes de commande optimale sans contraintes et ceux soumis à des contraintes sur la commande. Dans le cas sans contrainte, le problème consiste à minimiser une fonctionnelle coût sous un système dynamique d'état donné. La résolution s'appuie sur le Principe du Minimum de Pontryagin (PMP) et la méthode de Riccati, permettant de fournir des conditions nécessaires d'optimalité. Lorsque des contraintes sont imposées sur la commande des stratégies spécifiques sont prises. L'une de ces stratégies est le contrôle Bang-Bang, ce dernier caractérise des problèmes de temps minimal, où la commande alterne entre ses valeurs extrêmes pour atteindre l'état final dans un temps optimal. Des applications concrètes illustrent ces résultats, notamment dans la gestion optimale de l'irrigation et l'alunissage d'un vaisseau spatial.

Mots clés: commande optimale, contraintes, principe du minimum de pontryaguin, méthode de riccati, contrôle Bang-Bang, temps minimal.

Abstract

This memory is part of the study of optimal control, analyzing two fundamental approaches: unconstrained and constrained optimal control problems. In the unconstrained case, the problem consists in minimizing a cost functional under a dynamic system of given state. The solution is based on the Pontryagin Minimum Principle (PMP) and Reccati's method, providing optimality's necessary conditions . When constraints are imposed on the control, specific strategies are adopted. One such strategy is Bang-Bang control, which characterizes minimum-time problems, where control moves from one extreme value to another to reach the final state in optimal time. Concrete applications illustrate these results, including optimal irrigation management and lunar landing of a space network.

key words: Optimal control, constrained, pontryagin's minimum principle, Reccati's method, Bang-Bang control, minimum time

ملخص

تندرج هذه المذكرة في إطار دراسة التحكم الأمثل، وتحلل نهجين أساسيين : مشاكل التحكم الأمثل غير المقيدة والمقيدة. في الحالة غير المقيدة، تنتقل المشكلة في تقليل دالة التكلفة في ظل نظام ديناميكي لحالة معينة ويعتمد الحل على مبدأ الحد الأدنى لبونترياغين وطريقة ريكاتي، مما يوفر الشروط الضرورية لتحقيق الأمثلية. عند فرض قيود على التحكم، يتم اعتماد استراتيجيات محددة. إحدى هذه الاستراتيجيات هي استراتيجية التحكم بانغ-بانغ، والتي تميز مشاكل الحد الأدنى للزمن، وتنتقل التحكم من قيمة قصوى إلى أخرى للوصول إلى الحالة النهائية في الوقت الأمثل. توضح التطبيقات الملموسة هذه النتائج، بما في ذلك الإدارة المثلى للري و الهبوط على سطح القمر لشبكة فضائية.

الكلمات المفتاحية : التحكم الامثل ، مقيدة ، مبدأ الحد الأدنى لبونترياغين ، نظرية ريكاتي ، تحكم بانج بانج ، الحد الأدنى من الوقت.

Contents

0.1	Introduction	7
1	Rappels mathématiques	8
2	Problème de commande optimale sans contrainte	12
2.1	Exemples et Objectifs	12
2.2	Position du problème	13
2.3	Différents types de problème de la commande optimale :	13
2.3.1	Problème de Lagrange	13
2.3.2	Problème de Mayer	14
2.3.3	Problème de Bolza	14
2.4	Problème de Commande optimale sans contraintes	16
2.4.1	Principe du Minimum de Pontriaguine (PMP)	16
2.4.2	Différents cas de transversalité :	17
2.5	Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ)	19
2.5.1	Commande régulateur linéaire quadratique à temps fini	19
2.5.2	Conditions Nécessaires d'optimalité (C.N.O)	19
2.5.3	Méthode de Riccati	21
2.5.4	Commande régulateur linéaire quadratique à temps infini	22
2.5.5	Exemple	25
3	Problème du contrôle optimal sous contraintes	27
3.1	Problème en temps minimum	27
3.1.1	Position du problème	27
3.2	Exemples et applications	37

0.1 Introduction

Le contrôle optimal est un élément clé de la théorie du contrôle, visant à définir les règles de contrôle nécessaires pour faire évoluer un système dynamique d'un état initial à un état final, tout en cherchant à minimiser (ou maximiser) un critère de performance spécifique. En d'autres termes, cela revient à gérer un système afin d'atteindre la performance optimale en fonction d'un but établi. Ce domaine d'étude a de multiples applications dans divers secteurs tels que l'ingénierie, l'économie, la robotique, l'aéronautique et les systèmes énergétiques. L'objectif principal est l'optimisation des ressources, du temps ou des performances globales.

Ce travail est consacré à l'étude du contrôle optimal des systèmes, c-à-d des systèmes dynamiques dont la progression est uniquement influencée par l'état et le contrôle, sans aucune dépendance temporelle explicite. On accorde une attention spécifique aux contrôles bang-bang, qui sont des contrôles adoptant des valeurs extrêmes de façon discontinue. Ces derniers sont souvent présentes dans les problèmes où le contrôle est assujéti à des restrictions de type « tout ou rien », comme c'est le cas pour les moteurs électriques fonctionnant à pleine puissance ou arrêtés.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres, Dans le premier chapitre on donne toutes les définitions, lemmes, et théorèmes nécessaires pour développer le reste du travail. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème de contrôle optimal sans contraintes. On a défini différents types de problème d'optimisation; problème de Lagrange, Mayer et Bolza. Nous donnons deux approches pour déterminer les conditions nécessaires d'optimalité, le Principe du Minimum de Pontriaguine (PMP) et méthode de Riccati. Dans le chapitre trois, Nous étudions le problème de contrôle optimale avec contraintes, plus particulièrement le problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques autonomes Bang-Bang. Afin d'illustrer les notions théoriques, Nous donnons deux exemples pratiques, le premier dans le domaine de l'irrigation et le second dans l'Astronomie.

Chapter 1

Rappels mathématiques

Définition 1.1 Problème de Cauchy

Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, t) & , \quad t \in [a, b] \\ x(t_0) = x_0 & , \quad t_0 \in [a, b] \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ce problème est appelé *problème de Cauchy* et (t_0, x_0) est appelée condition initiale

Définition 1.2 Extremum(minimum,maximum)

1. x^* réalise un maximum pour la fonctionnelle J (ou $J(x^*)$ est une valeur maximale de J) : Si $\forall \epsilon \geq 0; \forall x \in \Omega; |x - x^*| \leq \epsilon$; alors : $J(x) \leq J(x^*)$
2. x^* réalise un minimum pour la fonctionnelle J (ou $J(x^*)$ est une valeur minimale de J) : Si $\forall \epsilon \geq 0; \forall x \in \Omega; |x - x^*| \leq \epsilon$; alors : $J(x^*) \leq J(x)$

Définition 1.3 Variation d'une fonctionnelle

lorsque J est une fonctionnelle définie sur un ouvert Ω d'un espace normé E , On appelle variation de la fonctionnelle J en x dans directions $y \in E$, la limite si elle existe suivant :

$$\delta J(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(x + \epsilon y) - J(x)}{\epsilon}$$

Définition 1.4 Accroissement d'une fonctionnelle

Accroissement d'une fonctionnelle notée ΔJ est définie par :

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t))$$

ou $\delta x(t)$ est la variation de la fonction $x(t)$. Ainsi l'accroissement $\Delta J(x(t), \delta x(t))$ de la fonctionnelle dépend de la fonction $x(t)$ et de sa variation $\delta x(t)$.

Théorème 1.1 Théorème de Taylor à deux variables [2]

On suppose que $f(x, y)$ et toutes ses dérivées d'ordres inférieur à $(n + 1)$ sont continues dans

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\} \quad (c..d \quad f(x, y) \in \mathbb{C})$$

Soit $(x_0, y_0) \in D$; il existe ϵ compris entre x et x_0 et η compris entre y et y_0 avec :

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$$

où :

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \dots + \\ &\dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n C_n^j (x - x_0)^{n+j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Pour $j = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \dots + \\ &\dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0) \\ R_n(x, y) &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j (x - x_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(\varepsilon, \eta) \end{aligned}$$

Définition 1.5.

Considérons l'accroissement de la fonctionnelle J :

$$\Delta J = J(y(t) + \delta y(t)) - J(y(t))$$

Nous utilisons la série de Taylor autour de $y(t) + \partial y(t)$ pour $J(y(t) + \delta y(t))$; alors :

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(y(t)) + \frac{\partial J}{\partial y(t)} \delta y(t) + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2(t)} \delta^2 y(t) + \dots - J(y(t)) \\ &= \frac{\partial J}{\partial y} \delta y(t) + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2(t)} \delta^2 y(t) + \dots \\ &= \delta J + \delta^2 J + \delta^3 J + \dots \end{aligned}$$

Où $\delta J = \frac{\partial J}{\partial y(t)} \delta y(t)$ et $\delta^2 J = \frac{\partial^2 J}{\partial y^2(t)} \delta^2 y(t)$ sont respectivement la première et la deuxième variation.

Théorème 1.2 (Théorème fondamental) [10]

Soit $y^*(t)$ un extremum, la première variation de J doit être nulle en y^* , i.e. $\delta J(y^*(t), y(t)) = 0$ pour toute variation admissible $\delta y(t)$.

Lemme 1.1 (Lemme fondamental) [10]

Si l'intégrale $\int_a^b f(y)\eta(y)dy$, où $f(\cdot)$ est une fonction continue par morceaux dans l'intervalle $[a, b]$, s'annulant pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^1([a; b])$ telle que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, alors $f(\cdot)$ est identiquement nulle dans $[a, b]$.

Définition 1.6. Ensemble accessible

Considérons le système contrôlé

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \tag{1.2}$$

avec $x(0) = x_0$.

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par

$$\text{Acc}(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)\} \quad (1.3)$$

où $x_u(t)$ est la solution du système (1.2) associée au commande u .

Autrement dit $\text{Acc}(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.2) au temps T , lorsqu'on fait varier la commande u , on pose $\text{Acc}(x_0, 0) = \{x_0\}$. ,voir figure (1)

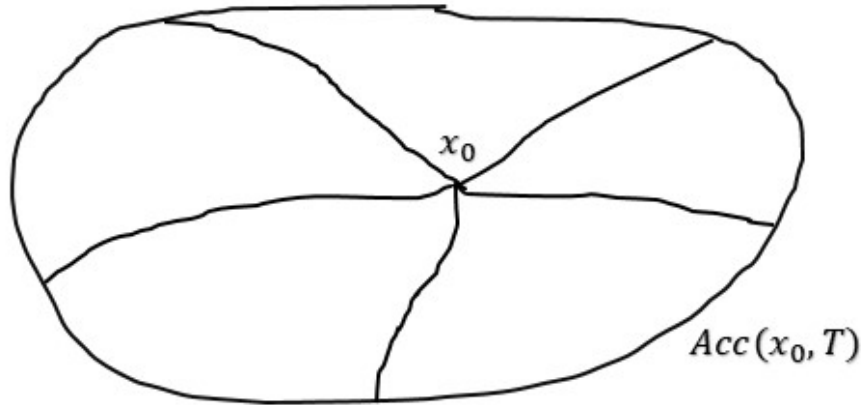


Figure 1.1: Ensemble accessible

Définition 1.7. Contrôlabilité du système

Le système contrôlé : (1.2) est dit contrôlable en temps T si $\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$, *i.e.*, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T .

Définition 1.8. Commande optimale

La commande optimale consiste à chercher une commande admissible $u^*(t)$ qui permet de transférer le système d'un état initial à l'état final tout en respectant des contraintes physiques et en minimisant des fonctions objectifs (critères ou indices de performances).

Le problème de la commande optimale est formulé en précisant les éléments suivants :

- Modèle du système à commander, sous forme :

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt$$

tel que

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \quad , \quad t \in [t_0, t_f]$$

et les Conditions aux limites (états initiales et états finaux) sont sous l'une des forme suivants :

$$\begin{cases} x(t_0), x(t_f) \text{ fixe, et } t_0, t_f \text{ fixe.} \\ x(t_0), x(t_f) \text{ fixe, et } t_0, t_f \text{ libre.} \\ x(t_0), x(t_f) \text{ libre, et } t_0, t_f \text{ fixe.} \\ x(t_0), x(t_f) \text{ libre, et } t_0, t_f \text{ libre.} \end{cases} \quad (1.4)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{U}$, $\forall t \in I$ est un intervalle de \mathbb{R} qui contient l'intervalle $[t_0, t_f]$ et \mathbb{U} est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n .

S , F et g sont des fonctions vectorielles réelles suffisamment régulières par rapport à leurs arguments.

- Contraintes.
- Critère de performance à optimiser (minimiser ou maximiser).

Pour un système dynamique, on cherche une commande permettant de transférer le système d'un état initial vers un état final.

La commande optimale est en général soumise à diverses contraintes liées à sa réalisation (accélération limitée, vitesse de montée en puissance bornée)

Définition 1.9. Commande admissible

On appelle commande admissible toute fonction continue par morceau $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ a valeur dans V (espace vectorielle)

Définition 1.10. Calcule des variations [8]

Soit $[t_1, t_f]$ un intervalle de R et soit E l'ensemble des applications de classe C^1 définies sur $[t_1, t_f]$ à valeurs dans R . Le problème consiste à déterminer l'extremum d'une fonctionnelle définie sur E . Par exemple, si $E = C^1([t_1, t_f], R)$ et

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1.5)$$

et si, en outre, $F(y(t), \dot{x}(t), t)$ est de classe C^2 et $y(t)$ de classe C^1 avec

$$x(t_1) = A, \quad x(t_2) = B \quad (1.6)$$

L'objectif de problème de calcul des variations est de minimiser $J(x)$ tel que $x \in E$ et vérifiant les conditions aux limites (1.6), en utilisons l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Définition 1.11. Matrice symétrique et propriétés

Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique positive** si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$X^T A X \geq 0.$$

Elle est dite **symétrique définie positive** si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a

$$X^T A X > 0.$$

Chapter 2

Problème de commande optimale sans contrainte

2.1 Exemples et Objectifs

Pour introduire la notion de la commande optimale, considérons l'exemple suivant: Pour arrêter la rotation d'un rotor tournant à une vitesse constante, on peut lui appliquer une charge extérieure $C(t)$ perpendiculaire à son axe de rotation. Il s'agit alors de déterminer la commande $C(t)$ qui permet d'amener la vitesse de rotation du système de $\nu = \nu_0$ à $\nu = 0$

Cette détermination répond souvent à un objectif tel que, l'arrêt du système en un temps minimum. Trouver $C(t)$ qui répond à cet objectif, est l'objet de la théorie de la commande optimale. Le problème de détermination d'une commande optimale d'un processus peut s'énoncer comme suit:

Un processus dynamique étant donné et défini par son modèle (représentation d'état, matrice de transfert, équations aux différences,...), trouver parmi les commandes admissibles celles qui permet à la fois:

- de vérifier des conditions initiales et finales données.
- de satisfaire diverses contraintes imposées
- d'optimiser un critère choisi.

La théorie de la commande optimale à un champ d'application extrêmement vaste:

- Régulation de la température d'une pièce ou d'un four en utilisant le minimum d'énergie.
- Problème de poursuite: on souhaite que la sortie du système suive le mieux possible la consigne désirée ou prévue. Il s'agit dans ce cas de déterminer la commande qui minimise l'énergie de poursuite.

D'un point de vue formel, le problème de commande optimale est un problème de minimisation ou de maximisation d'une fonctionnelle; c'est-à-dire, un problème de calcul des variations.

2.2 Position du problème

[1]

Considérons le problème de commande optimale suivant :

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (2.2)$$

$$\text{avec } x(0) = x_0 \in D_0 \quad \text{et} \quad x(t_f) = x_1 \in D_1$$

$$\text{tel que } u \in U, t \in I = [0, t_f]$$

où D_0 ensemble de départ et D_1 ensemble d'arrivée sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 = x(0)$ est l'état initiale du système (2.2), $x(t_f)$ est sa position terminale. En pratique, l'état du système peut représenter la vitesse, la température, etc. $u(\cdot)$ est la commande du système. U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, qui est l'ensemble des commandes admissibles (u_j) d'où on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes, $-1 \leq u_j \leq +1$.

▷ (2.2), est le système dynamique du commande optimale.

▷ $J(u, t_f) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt$ est la fonction coût ou objectif, la fonction coût comporte deux parties :

- $g(x(t_f), t_f)$, est le coût terminal, il a du poids quand le temps final est libre, sinon il est constant.
- $\int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt$ est le coût intégral.

2.3 Différents types de problème de la commande optimale :

2.3.1 Problème de Lagrange

On considérera un système dynamique dont l'évolution est régie par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.3)$$

où les commandes $u(\cdot)$ sont des fonctions définies de $[t_0, t_f]$ dans \mathbb{R} . Etant donné une fonction coût $F : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le problème de minimisation :

$$\text{Min} \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (2.4)$$

tel que $x(t_0) = x_0$ est une condition initiale donnée

Ainsi, la formulation (2.4) est appelée problème de Lagrange. Nous présentons, ci-dessous, deux formulations alternatives.

2.3.2 Problème de Mayer

Ici, le critère à minimiser est différent de celui du problème de Lagrange. Il dépend uniquement de la valeur terminale de l'état commande du système. On considère le système (2.3) et soit la fonction $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le problème d'optimisation par

$$\min S(x(t_f), t_f) \quad (2.5)$$

tel que

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{est une condition initiale donnée}$$

2.3.3 Problème de Bolza

L'avantage du problème de **Bolza** est que c'est un problème qui regroupe deux problèmes de commandes optimales :

d'une part le problème de **Lagrange** (2.4) et d'autre part le problème de **Mayer** (2.5) donné par :

$$\min \left[S(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \right] \quad (2.6)$$

et satisfait la condition initiale

$$x(t_0) = x_0$$

Remarque 1 *Les trois formulations sont équivalentes dans le sens où on peut toujours se ramener de l'une à l'autre.*

Exemple

Dans cet exemple nous allons transformés le problème de Lagrange en problème de Mayer. Considérons le problème suivant:

$$J(u(t)) = \int_0^1 (x(t)^2 + u(t)^2) dt \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0 \quad (2.8)$$

On introduit une nouvelle variable $x_2(t)$ définie par :

$$\dot{x}_2(t) = x(t)^2 + u(t)^2, \quad x_2(0) = 0, \quad (2.9)$$

alors, on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t), & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = x(t)^2 + u(t)^2, & x_2(0) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

du système (2.10) on a :

$$\begin{cases} u(t) = \dot{x}_1(t), & x_1(0) = 0 & \dots(1) \\ x(t)^2 = u(t)^2 - \dot{x}_2(t), & x_2(0) = 0 & \dots(2) \end{cases} \quad (2.11)$$

En substituant (1) et (2) dans (2.7) on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \dot{x}_2(t) - x_1^2(t) + x_1^2(t) \\ &= \int_0^{t_f} \dot{x}_2(t) = [x_2]_0^1 = x_2(1) - x_2(0) = x_2(1) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$J(u(t)) = x_2(1) \tag{2.12}$$

Il s'agit désormais d'un problème de type **Mayer**, car le coût dépend uniquement de l'état final.

Transformation du problème de Mayer au problème de Bolza

Considérons un problème de Mayer :

$$J = x(1)^2 \tag{2.13}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0 \tag{2.14}$$

Nous transformons le problème (2.13)-(2.14) en un problème de Bolza en posant simplement :

$$F(x, u, t) = 0 \tag{2.15}$$

Donc :

$$J = x(1)^2 + \int_0^1 0 \cdot dt$$

Ainsi le problème de Mayer est donc un cas particulier du problème de **Bolza** (ou de Lagrange avec $F = 0$).

Ici nous considérons le problème de Bolza transformé au problème de Mayer

$$J = x(1)^2 + \int_0^1 u(t)^2 dt \tag{2.16}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0 \tag{2.17}$$

On introduit :

$$\dot{x}_2(t) = u(t)^2, \quad x_2(0) = 0$$

Le critère devient alors :

$$J = x_2(1) + x_1(1)^2$$

On a alors un problème de type **Mayer**.

2.4 Problème de Commande optimale sans contraintes

Soit le système d'équation d'état :

$$\dot{x} = g(x, u, t) \quad (2.18)$$

Considérons le problème de commande optimale de type Bolza suivant :

$$J(u) = S(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (2.19)$$

qui satisfait les conditions aux limites sous l'une des forme suivants :

$$x(t_0), x(t_f) \text{ fixe, et } t_0, t_f \text{ fixe.}$$

$$x(t_0), x(t_f) \text{ fixe, et } t_0, t_f \text{ libre.}$$

$$x(t_0), x(t_f) \text{ libre, et } t_0, t_f \text{ fixe.}$$

$$x(t_0), x(t_f) \text{ libre, et } t_0, t_f \text{ libre.}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{U}$, $\forall t \in I$ est un intervalle de \mathbb{R} qui contient l'intervalle $[t_0, t_f]$ et \mathbb{U} est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n . S , F et g sont des fonctions vectorielles réelles suffisamment régulières par rapport à leurs arguments.

Notre objective est de déterminer les conditions nécessaires d'optimalité du problème de commande optimale (2.18)-(2.19), pour cela nous allons utilisées deux approches ; Le Principe du Minimum de Pontriaguine(PMP) et la méthode de Riccati .

2.4.1 Principe du Minimum de Pontriaguine (PMP)

[4]

Considérons le problème de commande optimale de type Bolza (2.18)-(2.19)

On définit l''hamiltonien par :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \lambda^T g(x(t), u(t), t) \quad (2.20)$$

où λ est appelé état-adjoint.

Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'hamiltonien du système. Autrement dit :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}, t) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{\lambda}, t), \quad \forall u \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.21)$$

Le long de la trajectoire optimale, on dispose d''un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont généralement établies en utilisant le calcul des variations.

L'extrémalité de la solution conduit à un jeu d'équations, appelées équations canoniques de Hamilton, qui régissent les dynamiques de l'état d''une part et de l'état adjoint d''autre part :

- l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda(t)} \Rightarrow \dot{x}(t) = g(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (2.22)$$

- état adjoint

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial g}{\partial x(t)} - \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial x(t)} \quad (2.23)$$

- si aucune contrainte n'est imposée sur u , alors on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u(t)} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial u(t)} = 0. \quad (2.24)$$

Selon la nature du problème, on aura encore certaines relations additionnelles, ces relations provenant des conditions, en t_0 d'une part et en t_f d'autre part, sont appelées équations de transversalité :

Conditions de transversalité :

- **À l'état initial :**

$$\left(-H(t_0) + \frac{\partial S}{\partial t_0}\right) \delta t_0 + \left(\lambda(t_0) + \frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^T \delta x_0 = 0. \quad (2.25)$$

- **À l'état final :**

$$\left(H(t_f) + \frac{\partial S}{\partial t_f}\right) \delta t_f + \left(-\lambda(t_f) + \frac{\partial S}{\partial x_f}\right)^T \delta x_f = 0. \quad (2.26)$$

Les relations (2.25) et (2.26) donnent les conditions supplémentaires qui servent à résoudre l'ensemble des équations (2.22)-(2.24)

2.4.2 Différents cas de transversalité :

La relation (2.25) et (2.26) respectivement nous permet de distinguer quatre types de conditions de transversalité différents selon que l'on considère t_f, t_0 et/ou $x(t_f), x(t_0)$ libres ou fixes.

État initial :

Type (1): t_0 fixe, $x(t_0)$ fixe.

Puisque t_0 et $x(t_0)$ sont fixes, δt_0 et δx_{t_0} sont nuls dans la condition de transversalité (2.26).

Il n'y a aucune condition supplémentaire à part celles imposées par la formulation du problème.

Type (2) : t_0 libre, $x(t_0)$ fixe.

Le temps final t_0 est libre et $x(t_0)$ est fixe, alors δt_0 est arbitraire et comme $x(t_0)$ est fixe δx_{t_0} est nul donc le coefficient de δt_0 dans la condition est nul :

$$\left[-H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_0} = 0 \quad (2.27)$$

Type (3) : t_0 fixe, $x(t_0)$ libre.

t_0 est fixe et $x(t_0)$ est libre, alors δx_{t_0} est arbitraire et comme t_0 est fixe δt_0 est nul le coefficient de δx_{t_0} dans la condition (2.26) est nul :

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \lambda^*(t) \right]_{t_0} = 0 \quad (2.28)$$

Type (4) : t_0 libre, $x(t_0)$ libre.

t_0 et $x(t_0)$ sont libres alors δx_{t_0} et δt_0 sont arbitraires donc les coefficients des δt_0 et δx_{t_0} (2.31) et (2.32) dans la condition (2.26) sont nuls :

$$- \left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_0} = 0 \quad (2.29)$$

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \lambda^*(t) \right]_{t_0} = 0 \quad (2.30)$$

État final :

Type (1) : t_f fixe, $x(t_f)$ fixe.

Puisque t_f et $x(t_f)$ sont fixes, δt_f et δx_{t_f} sont nuls dans la condition de transversalité (2.26).

Il n'y a aucune condition supplémentaire à part celles imposées par la formulation du problème.

Type (2) : t_f libre, $x(t_f)$ fixe.

Le temps final t_f est libre et $x(t_f)$ est fixe, alors δt_f est arbitraire et comme $x(t_f)$ est fixe δx_{t_f} est nul donc le coefficient de δt_f dans la condition est nul :

$$\left[-H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} = 0 \quad (2.31)$$

Type (3) : t_f fixe, $x(t_f)$ libre.

t_f est fixe et $x(t_f)$ est libre, alors δx_{t_f} est arbitraire et comme t_f est fixe δt_f est nul le coefficient de δx_{t_f} dans la condition (2.26) est nul :

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \lambda^*(t) \right]_{t_f} = 0 \quad (2.32)$$

Type (4) : t_f libre, $x(t_f)$ libre.

t_f et $x(t_f)$ sont libres alors δx_{t_f} et δt_f sont arbitraires donc les coefficients de les δt_f et δx_{t_f} (2.31) et (2.32) dans la condition (2.26) sont nuls :

$$- \left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} = 0 \quad (2.33)$$

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \lambda^*(t) \right]_{t_f} = 0 \quad (2.34)$$

En générale les équations différentielle obtenue par PMP sont difficiles voir impossible à résoudre analytiquement d'où la simplification obtenu considérant un problème que nous appellerons problème linéaire quadratique (LQ)

2.5 Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ)

Le problème de commande linéaire quadratique (LQ) figure dans plusieurs domaine économie automatique et ingénieur. Il est formulé d'un système dynamique linéaire et une fonction coût quadratique .

On distingue plusieurs types de problèmes LQ; linéaire-quadratique Gaussien (LQG), linéaire quadratique avec trajectoire de référence (LQT), linéaire quadratique avec contraintes, LQ différé (retarder), LQ discret (temps discret). Dans ce travaux on s'intéresse au régulateur linéaire quadratique (LQR) dont on distingue deux approches, les LQR à temps fini et temps infini ($t \rightarrow \infty$)

2.5.1 Commande régulateur linéaire quadratique à temps fini

Considérons le problème commande optimale (2.18)-(2.19) mais en prenant $g = A(t)x + Bu$ et $S = \frac{1}{2} x(t_f) g x(t_f)$ et $F(.) = \frac{1}{2}(x'Qx + u'Bu)$. Nous reformulons le problème précédent de la manière suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + R(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.35)$$

muni d'un coût quadratique de type Bolza :

$$J(u) = \frac{1}{2}x(t_f)gx(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\dot{x}(t)Qx(t) + u'(t)Ru'(t))dt \quad (2.36)$$

tel que le point initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant fixé , $x(t_f)$ est libre , t_f est fixe, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ définie continue par morceau et $R, Q, g \in M_n$ sont des matrices symétriques définies positives.

2.5.2 Conditions Nécessaires d'optimalité (C.N.O)

Nous allons déterminer les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange ou le système dynamique (2.35) est considéré comme une contrainte différentielle d'égalité en utilisant la théorie du calcul des variation [8].

En effet, soit $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ et la fonctionnelle augmentée est donné par

$$J_2(u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2}x'(t_f)gx(t_f) + \int_0^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}x'Qx + \frac{1}{2}u'Ru + \lambda(Ax + Bu - \dot{x}(t)) \right\} dt \quad (2.37)$$

On note par x et u la trajectoire optimale et la commande optimale. Considérons alors des perturbations sur la commande u dans $L^2([0, t_f], \mathbb{R}^n)$ du type

$$u_{per} = u(t) + \delta u(t) \quad (2.38)$$

engendrant les trajectoires :

$$x_{per}(t) = x(t) + \delta x(t) \quad (2.39)$$

avec $\delta x(t) = 0$ au points $t = 0$.

Soit le système dynamique suivant

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu,$$

tel que il vérifie la variation suivante:

$$\delta\dot{x}(t) = A.\delta x + B.\delta u$$

En substituant (2.38) et (2.39) dans (2.37), on obtient :

$$\begin{aligned} J_2 &= \Delta J = J(u_{per}, x_{per}, t) - J(u, x, t) \\ J_2(u, \lambda) &= \frac{1}{2}((x(t_f) + \delta x(t_f))'g(x(t_f) + \delta x(t_f)) + \delta x(t_f)' + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x(t) + \delta x(t))'q(x(t) + \delta x(t)) + \\ &\quad (u + \delta u)'R(u + \delta u) - (\dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t))) \\ &= \frac{1}{2}(\delta x'(t_f) + x'(t_f))g(x(t_f) + \delta x(t_f)) + \int_0^{t_f} \frac{1}{2}[\delta x' + x']Q(x + \delta x) \quad (2.40) \\ &\quad + (\delta u' + u')R(u + \delta u) + \lambda[A(x + \delta x) + B(u + \delta u)] - (x' + \delta x') \\ J(u, \lambda) &= \frac{1}{2}(\dot{x}(t_f)g(\dot{x}(t_f))) + 2x'(t_f)g\delta x(t_f) + \delta x'(t_f)g\delta x(t_f) + \\ &\quad \int_0^{t_f} \frac{1}{2}(x'qx + 2\delta x'q\delta x + u'Ru + 2\delta u'Ru + \delta u'R\delta u) + \\ &\quad \int_0^{t_f} \lambda'(Ax + Bu - x') + \lambda'(A\delta x + B\delta u - \delta x')dt \end{aligned}$$

D'ou

$$J_2(u, \lambda) = J_1 + \delta J_2(u, \lambda) + \delta^2 J(u, \lambda)$$

où :

$$J_1 = x'(t_f)g(x(t_f)) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x'Qx + u'Ru)dt$$

$$\delta J_2(u, \lambda) = \delta x'(t_f)g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} \delta xqx + \delta uqu + \lambda(A\delta x + B\delta u - \delta\dot{x})dt$$

$$\delta^2 J_2(u, \lambda) = \frac{1}{2}\delta x(t_f)g\delta\dot{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\delta x'q\delta x + \delta uq\delta u)dt.$$

D'après les prépriorités de g , Q et R on a : $\delta J \geq 0$. Il est nécessaire que $\delta J = 0$ sinon veut obtenir $J_2 \geq J_1$.

Considérons δJ_2 puis intégrant par parties le terme :

$$\int_0^{t_f} \lambda(t)\delta\dot{x}(t)dx$$

$$\begin{aligned} \delta J_2(\lambda, u) &= \int_0^{t_f} (\delta xqx + \delta uRu + \delta x'A'\lambda + \delta'uB'\lambda + \delta'x\lambda')dt \\ &\quad + \delta x'(t_f)g(x(t_f)) - \lambda'(t_f)\delta x(t_f) + \lambda(0).\delta x(0) = 0 \end{aligned}$$

d'où : $\delta x(0) = 0$, et :

$$\delta J(u, \lambda) = \int_0^{t_f} [\delta x(Qu + A'\lambda + \lambda') + \delta u(Ru + B'\lambda)]dt + \delta x'(t_f)[gx(t_f) - \lambda(t_f)] = 0$$

Alors, on choisit $\lambda(t)$ tel que

$$\lambda' = -Qx - Ru$$

avec une condition finale par rapport

$$\lambda(t_f) = g_x(t_f)$$

Donc il reste :

$$\delta J_2 = \int_0^{t_f} \delta u'(Ru + B'\lambda)dt = 0$$

D'après le lemme fondamental , on a :

$$Ru + B'\lambda = 0$$

ou encore :

$$u = -R^{-1}B'\lambda \tag{2.41}$$

On résume :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \quad \text{état} \\ \dot{\lambda} = -Qx - A^\top \lambda \text{co-état} \\ u = -R^{-1}B^\top \lambda \text{commande} \end{array} \right. \tag{2.42}$$

avec $x(0) = x_0$ et, $\lambda(t_f) = gx(t_f)$

En substituant $u = -R^{-1}B^\top \lambda$ dans l'équation (2.42)₁ du système (2.42) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^\top \lambda \\ \dot{\lambda}(t) = -Qx(t) - A^\top \lambda(t) \\ x(0) = x_0 \\ \lambda(t_f) = gx(t_f) \end{array} \right. \tag{2.43}$$

Le système obtenu (2.43) est un problème aux limites. Le système a $2n$ inconnues généralement et est difficile à résoudre. Pour cela on propose la méthode de Riccati pour obtenir la solution

2.5.3 Méthode de Riccati

Parmi les techniques qui permettent de trouver la solution du système d'équations différentielles (2.43) on propose la méthode de Riccati, on cherche la solution sous forme:

$$\lambda(t) = K(t)x(t) \tag{2.44}$$

où $K(t)$ est une matrice carrée $n \times n$.

Alors , en substituant (2.44) dans (2.41)

$$u = -R^{-1}B^\top K(t)x(t)$$

Par différenciation de (2.44) on a

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t).\dot{x}(t) \quad (2.45)$$

et on substituant (2.35) dans (2.45) on a

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{K}(t)x(t) + K(t)Ax(t) - K(t)BR^{-1}B'K(t)x(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= \left[\dot{K}(t) + K(t)A - K(t)BR^{-1}B'K(t) \right] x(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

D'une autre part, on a :

$$\dot{\lambda}(t) = -Qx(t) - A^\top \lambda(t) \quad (2.47)$$

De la relation (2.46) et (2.47) on a

$$-Qx(t) - A^\top K(t)x(t) = \left[\dot{K}(t) + K(t)A - K(t)BR^{-1}B'K(t) \right] x(t)$$

Alors on abouti à l'équation de Riccati est :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) + K(t)A - K(t)BR^{-1}B'K(t) + A^\top K(t) + Q = 0 \\ K(t_f) = g \end{cases} \quad (2.48)$$

On a n^2 équations différentielles non linéaires pour calculer la matrice $K(t)$ et n^2 conditions finales en $t = t_f$. $K(t)$ peut être déterminée de façon unique.

2.5.4 Commande régulateur linéaire quadratique à temps infini

Nous nous intéressons ici au problème des régulateur linéaire quadratique à temps infini $t_f \rightarrow \infty$ donne par le système dynamique (2.35) et le cout :

$$(si \ g = 0) \quad J(u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt. \quad (2.49)$$

et le système

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.50)$$

Où A, B, φ, R sont des constantes de \mathbb{R} , et φ, R sont deux matrices définies positives .

Le système (2.50) est contrôlable, alors la matrice de Riccati $K(t) \rightarrow K$, est une matrice constante lorsque $t_f \rightarrow \infty$.

On obtient alors l'équation de Riccati stationnaire :

Lorsque $t_f = \infty$

$$\begin{aligned} K' &= -KA - A'K - Q + KBR^{-1}B'K \\ 0 &= -KA - A'K - Q + KBR^{-1}B'K \end{aligned} \quad (2.51)$$

L'équation (2.51) est une équation matricielle, non pas une EDP.

La commande optimal est donné par :

$$U(t) = -R^{-1}B'Kx(t)$$

U vérifie :

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B'Kx(t)$$

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B'K)x$$

$$\dot{x} = Ax$$

Remarque 2 Si on prend $g = 0$ et $t_f \rightarrow \infty$ le problème LQR (2.35)-(2.36) est équivalent au problème LQR à temps infini.

Propriétés de la Matrice $K(t)$:

1. $K(t)$ est une matrice symétrique.
2. $K(t)$ est semi définie positive.
3. $J(u) = \frac{1}{2}(x'(0)k(0)x(0))$

1) $K(t)$ est symétrique :

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}$$

Remarque : Puisque K est symétrique, il y a seulement $\frac{1}{2}n(n+1)$ équations différentielles à résoudre.

2) $K(t)$ semi définie positive $\Rightarrow K \geq 0$

Considérons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\lambda'(t)x(t)] &= \lambda'(t)\dot{x}(t) + \dot{\lambda}'(t)x(t) \\ &= x'(t) (-A'\lambda - \varphi u) + \lambda' (Ax + Bu) \\ &= -\dot{x}'\lambda - x'\varphi u + x'A'\lambda + \lambda'Bu \end{aligned}$$

D'autre part :

$$u = -R^{-1}B'\lambda$$

$$Ru = -RR^{-1}B'\lambda$$

$$Ru = -B'\lambda$$

$$\dot{u}'R = -\dot{\lambda}'B \Rightarrow \dot{\lambda}'B = -\dot{u}'R$$

$$u = -R^{-1}B'\lambda$$

$$Ru = -RR^{-1}B'\lambda \quad (\text{Id}) \Rightarrow Ru = -B'\lambda$$

$$\dot{u}'R = -\dot{\lambda}'B \Rightarrow \dot{\lambda}'B = -\dot{u}'R$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda'(t), u(t)) = -x'Qx - u'Ru$$

Intégrant de t à t_f :

$$\begin{aligned} \int_t^{t_f} \frac{d}{dt}(\lambda'(t), u(t)) &= - \int_t^{t_f} x'Qx + u'Ru \\ &= \lambda'(t_f)x(t_f) \Big|_t \end{aligned}$$

$$\lambda'(t_f)x(t_f) - \lambda'(t)x(t) = - \int_t^{t_f} x'Qx + u'Ru$$

$$\lambda'(t)x(t) = \lambda'(t_f)x(t_f) + \int_t^{t_f} x'Qx + u'Ru$$

$$\lambda'(t)x(t) = \int_t^{t_f} x'Qx + u'Ru + u'(+t_f)gx(t_f)$$

$$x'(t)K(t)x(t) \geq 0$$

Ceci signifie que K est semi définie positive.

$$\mathbf{3)} \quad J = \frac{1}{2}x'(0)K(0)x(0)$$

En effet, si $\dot{x}(t) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left[x'(t)gx(t_f) + \int_t^{t_f} x'Qx + u'Ru dt \right]_{x(t)=x(0)} \\ &= x'(0)K(0)x(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J(u) = x'(0)K(0)x(0) \quad \Rightarrow \quad J(u) = \frac{1}{2}x'(0)K(0)x(0)$$

Donc la valeur optimale de la fonction coût $J(u)$ est donnée par :

$$\frac{1}{2}x'(0)K(0)x(0)$$

2.5.5 Exemple

On considère un système linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 2\omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

L'objectif est de minimiser le coût quadratique donné par la fonctionnelle suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(T)gx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \left(x^T(t) \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + r u^2(t) \right) dt$$

Alors le système d'équations obtenu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 2\omega \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, R = r, g = g$$

On détermine la commande optimale :

$$U(t) = -R^{-1}B'Kx(t) \quad (2.52)$$

$$U(t) = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Maintenant on va Établir l'équation différentielle de Riccati que doit satisfaire la matrice symétrique $K(t)$

$$\dot{K}(t) + KA - KBR^{-1}B^TK + Q + A^TK = 0 \quad (2.54)$$

tel que

$$\dot{K} = \begin{bmatrix} \dot{K}_{11} & \dot{K}_{12} \\ \dot{K}_{12} & \dot{K}_{22} \end{bmatrix}$$

d'après la remplacement chacun des valeurs des paramètres K, \dot{K}, A, B, Q, R dans l'équation (2.54) , On trouve :

$$\begin{cases} \dot{K}_{11} - 2\omega K_{12} - \frac{b^2}{r} K_{12}^2 + \alpha_1 = 0 \\ \dot{K}_{12} + K_{11} + 2\omega K_{12} - \omega K_{22} - \frac{b^2}{r} K_{12} K_{22} = 0 \\ \dot{K}_{22} + 2K_{12} + 4\omega K_{22} - \frac{b^2}{r} K_{22}^2 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Quand $t \rightarrow \infty$ on suppose que $K(t) = 0$

On obtient donc l'équation algébrique de Riccati Système stationnaire obtenu :

$$\begin{cases} 2\omega K_{12} - \frac{b^2}{r} K_{12}^2 + \alpha_1 = 0 & (1) \\ K_{11} + 2\omega K_{12} - \omega K_{22} - \frac{b^2}{r} K_{12} K_{22} = 0 & (2) \\ 2K_{12} + 4\omega K_{22} - \frac{b^2}{r} K_{22}^2 + \alpha_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Calculons maintenant implicitement la matrice $K(\infty) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$

On résout (1) comme une équation quadratique en K_{12} on trouve :

$$\frac{b^2}{r}K_{12}^2 - 2\omega K_{12} - \alpha_1 = 0 \Rightarrow K_{12} = \frac{r}{2b^2} \left(2\omega \pm \sqrt{4\omega^2 + \frac{4b^2}{r}\alpha_1} \right)$$

En remplaçant K_{12} dans (3), on obtient une équation quadratique en K_{22} :

$$2K_{12} + 4\omega K_{22} - \frac{b^2}{r}K_{22}^2 + \alpha_2 = 0$$

Une fois K_{12}, K_{22} connus, on calcule K_{11} depuis (2) :

$$K_{11} = \omega K_{22} + \frac{b^2}{r}K_{12}K_{22} - 2\omega K_{12}$$

Alors La matrice stationnaire $K(\infty)$ est définie implicitement comme suit :

$$K(\infty) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \quad \text{où } K_{12}, K_{22}, K_{11} \text{ sont déterminés par les équations (1), (3), (2)}$$

finalement en remplace les valeurs de la matrice $K(\infty)$ dans l'équation (2.52) pour trouver la commande optimale.

Chapter 3

Problème du contrôle optimal sous contraintes

Dans ce chapitre, nous aborderons des problèmes de contrôle optimal inaccessibles aux méthodes classiques. Nous expliquerons comment le Principe du Minimum de Pontriaguine (PMP) permet de résoudre certains cas de contrôle en temps minimal.

3.1 Problème en temps minimum

3.1.1 Position du problème

Le but du problème s'agit de trouver le contrôle optimal $u^*(t) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait la contrainte :

$$|u_j| \leq 1 \quad (3.1)$$

pour tout $t \geq 0$ et $1 \leq j \leq n$ qui fait évoluer le système dynamique linéaire :

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu \quad (3.2)$$

(ou : $y \in \mathbb{R}^n$, A matrice $n \times n$ constante, $B \in \mathbb{R}^n$ vecteur constant)

d'un état initial $y(t_0) = y_0$ en un autre état final (origine) $y(t_f) = 0$ en temps minimum.

Notre objectif est de trouver un contrôle optimal $u^*(t)$ qui amène l'état à une cible donnée en temps minimum. Nous donnons le détail ci-dessous

1) Indice de performance

L'indice de performance associé à la formulation du système en temps minimal, décrit par le système (3.2) et le contrôle (3.1) s'écrit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), u(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 \quad (3.3)$$

où t_0 est fixé et t_f est libre. Cependant, il convient de noter que si t_f est fixé, la quantité $t_f - t_0$ devient une constante, rendant alors la minimisation sans objet. Il est donc essentiel que t_f soit effectivement une variable libre.

2) Hamiltonien

Nous définissons le Hamiltonien H pour le problème décrit par le système (3.2) et l'indice de performance (3.3) par

$$H(y(t), \lambda(t), u(t)) = 1 + \lambda^T [Ay(t) + Bu(t)] \quad (3.4)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^n$ est l'état adjoint.

3) Équation d'état et équation adjointe

Soient $u^*(t)$, $y^*(t)$ et $\lambda^*(t)$ les valeurs optimales alors, $y^*(t)$ et l'état adjoint $\lambda(t)$ sont donnés par les relations suivantes :

$$\dot{y}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* = Ay^*(t) + Bu^*(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_* = -A^T \lambda^*(t) \quad (3.6)$$

avec les conditions aux limites

$$y^*(t_0) = y_0 \quad , \quad y^*(t_f) = 0 \quad (3.7)$$

4) Condition d'optimalité

Faisant appel au principe de Minimum de Pontryagin et la condition (3.3), pour le contrôle optimal en fonction du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H(y^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) &= 1 + [Ay^*(t)]^T \lambda^*(t) + (u^*(t))^T B^T \lambda^*(t) \\ &\leq 1 + [Ay^*(t)]^T \lambda^*(t) + (u(t))^T B^T \lambda^*(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou encore sous forme plus compacte :

$$\begin{aligned} [u^*(t)]^T B^T \lambda^*(t) &\leq [u(t)]^T B^T \lambda^*(t) \\ [u^*(t)]^T q^*(t) &\leq [u(t)]^T q^*(t) \\ &= \text{Min}_{|u(t)| \leq 1} \{ [u(t)]^T q^*(t) \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou $q^*(t) = B^T \lambda^*(t)$.

5) Commande optimale

Nous obtenons le contrôle optimal $u^*(t)$ à partir de (3.8). Si :

- $q^*(t)$ est positive, la commande $u^*(t)$ doit être la plus petite valeur de la commande admissible (-1) de sorte que :

$$\text{Min}_{|u(t)| \leq 1} \{ [u^*(t)]^T q^*(t) \} = -q^*(t) = -|q^*(t)| \quad , \quad |u(t)| \leq 1 \quad (3.10)$$

- $q^*(t)$ est négative, le contrôle $u^*(t)$ doit être la plus grand valeur de la commande admissible (+1) de sorte que :

$$\text{Min}_{|u(t)| \leq 1} \{ [u(t)]^T q^*(t) \} = +q^*(t) = -|q^*(t)| \quad , \quad |u(t)| \leq 1 \quad (3.11)$$

Ainsi, de (3.10) et (3.11), le contrôle optimale $v^*(t)$ est

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } q^*(t) < 0 \\ -1 & \text{si } q^*(t) > 0 \\ \text{indétermination} & \text{si } q^*(t) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

De ce fait, nous pouvons écrire le contrôle (3.12) sous la forme

$$u^*(t) = -\text{Sgn} q^*(t) \quad (3.13)$$

où la fonction de signe est définie par $g = \text{Sgn} g_i$ et

$$\text{Sgn}(g) = \begin{cases} +1 & g_i < 0 \\ -1 & g_i > 0 \\ \text{indtermination} & g_i = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

6) Loi de contrôle bang-bang

Pour un système de contrôle en temps minimum soit normal, le contrôle optimal est donné par (3.13).

$$u^*(t) = -\text{Sgn} \{ q^*(t) \} = -\text{Sgn} \{ B^T \lambda^*(t) \} \quad (3.15)$$

pour $t \in [t_0, t_f^*]$.

7) Condition pour que le système de contrôle en temps minimum soit normal

Nous déterminons les conditions nécessaires pour que le système ne soit pas singulier.

De ce fait, nous obtenons les conditions pour que le système soit normal. Ainsi, la solution de l'équation adjointe (3.6) est le contrôle optimal est donnée par (3.6) est:

$$\lambda^*(t) = \exp(-A^T t) \lambda^*(0) \quad (3.16)$$

En supposant que la condition initiale $\lambda^*(0)$ est un vecteur non nul, tenant compte de la relation (3.16), la loi de contrôle (3.15) devient :

$$u^*(t) = -\text{Sgn} (g^T \exp(-A^T t) \lambda^*(0)) \quad (3.17)$$

ou par composantes.

$$u_j^*(t) = -\text{Sgn} [b_j^T \exp(-A^T t) \lambda^*(0)] \quad (3.18)$$

supposons qu'il existe un intervalle de temps $[T_1, T_2]$ où la fonction $q^*(t)$ est nulle.

Alors, nécessairement toutes ses dérivés sont nulles dans cet intervalle.

C'est à dire :

$$q_j^*(t) = b^T e^{-A^T t} \lambda^*(0) = 0 \quad (3.19)$$

$$\ddot{q}_j(t) = b^T A^T e^{-A^T t} \lambda^*(0) = 0 \tag{3.20}$$

⋮

$$q^{n+1} *_j (t) = b_j^T A^{T(n-1)} e^{-A^T t} \lambda^*(0) = 0 \tag{3.21}$$

tel que $t \in [T_1, T_2]$ Ou sous forme compacte

$$G_j^T \exp(-A^T t) A^*(0) = 0$$

Ou

$$G_J = [b_j \quad Ab_j \quad A^2bj \quad \dots A^{(n-1)}b_j]$$

La matrice G doit être **non singulière**. Dans la condition (3.21), la matrice $\exp(e^{-A^T} t)$ est définie et à $\lambda^*(0) \neq 0$, alors la matrice G_j est singulière. Ainsi, pour le système de contrôle de temps minimum, pour éviter un comportement singulier, la matrice \mathcal{G} doit être non singulière.

8) Unicité du contrôle optimal

Si le système de contrôle en temps minimum est normal, alors le contrôle est unique.

9) Nombre de commutations

Le résultat est s'inscris sous le théorème suivant :

Théorème [3]

Si le problème original (3.2) est normal , et si toutes les valeurs propres du système sont réelles alors le contrôle optimale $u^*(t)$ peut sauter au plus $(n - 1)$ fois de : $(+1)$ à (-1) ou l'inverse.

Exemple 3.1.1

Le contrôle en temps minimum d'un système harmonique

Position du problème

Soit le mouvement simple sans frottement d'une masse. Le mouvement est décrit par

$$m\ddot{y}(t) = f(t) \tag{3.22}$$

où m est la masse, $y(t)$, $\dot{y}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ sont respectivement la position, la vitesse, l'accélération et $f(t)$ est la force externe appliquée au système.

Posons

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t) \tag{3.23}$$

Par conséquent, (3.22) s'écrit sous forme d'un système d'équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \tag{3.24}$$

où $u(t) = \frac{f(t)}{m}$.

On suppose que le contrôle $u(t)$ vérifie

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3.25)$$

La contrainte est due aux limitations physiques telles que le courant dans un circuit ou la force maximale exercée par un moteur.

L'objectif est de transférer le système (3.22) et (3.24) d'un état initial en un état final en un temps minimum.

Solution du problème

1. L'indice de performance

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (3.26)$$

où t_0 est fixé et t_f est libre.

2. Hamiltonien

Nous formons le hamiltonien H pour le problème décrit par le système (3.24) et l'indice de performance (3.3) :

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \quad (3.27)$$

3. Minimisation du Hamiltonien

D'après le principe du Minimum de Pontriaguine , on a

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \leq H(x^*(t), \lambda^*(t), u(t)) \quad \text{pour } |u| \leq 1 \quad (3.28)$$

En substituant (3.27) dans la condition (3.28), nous avons alors

$$1 + \lambda_1^*(t)x_2^*(t) + \lambda_2^*(t)u^*(t) \leq 1 + \lambda_1^*(t)x_2^*(t) + \lambda_2^*(t)u(t) \quad (3.29)$$

D'après le résultat de la section précédente , le contrôle optimale (3.14) est donnée en terme de la fonction signe :

$$u^*(t) = -\text{sgn}(\lambda_2^*(t)) \quad (3.30)$$

4) Équations adjointes

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1^*} \\ \dot{\lambda}_2^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2^*} \end{cases} \quad (3.31)$$

(3.31) est un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1. D'où la solution :

$$\begin{cases} \lambda_1^*(t) = \lambda_1^*(0) \\ \lambda_2^*(t) = \lambda_2^*(0) - \lambda_1^*(0)t \end{cases} \quad (3.32)$$

5) Contrôle en temps minimum

D'après la solution (3.32), nous constatons que la solution de l'équation adjointe $\lambda_2^*(t)$ est une droite, et qu'il y a quatre solutions possibles comme le montre la figure (3.1). Le contrôle optimal possède au plus un saut. Donc, le contrôle optimal $u(t)$ doit avoir une des quatre formes :

$$u(t) = \begin{cases} +1 & \text{quand } t \in [0, t_f] \text{ pas de saut} \\ -1 & \text{quand } t \in [0, t_f] \text{ pas de saut} \\ +1 & \text{quand } t \in [0, t_s], e = -1, \quad t \in [t_s, t_f] \\ -1 & \text{quand } t \in [0, t_s], e = +1, \quad t \in [t_s, t_f] \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainsi, les quatre séquences de commande possibles sont :

$$\{+1\}, \quad \{-1\}, \quad \{+1, -1\}, \quad \{-1, +1\}$$

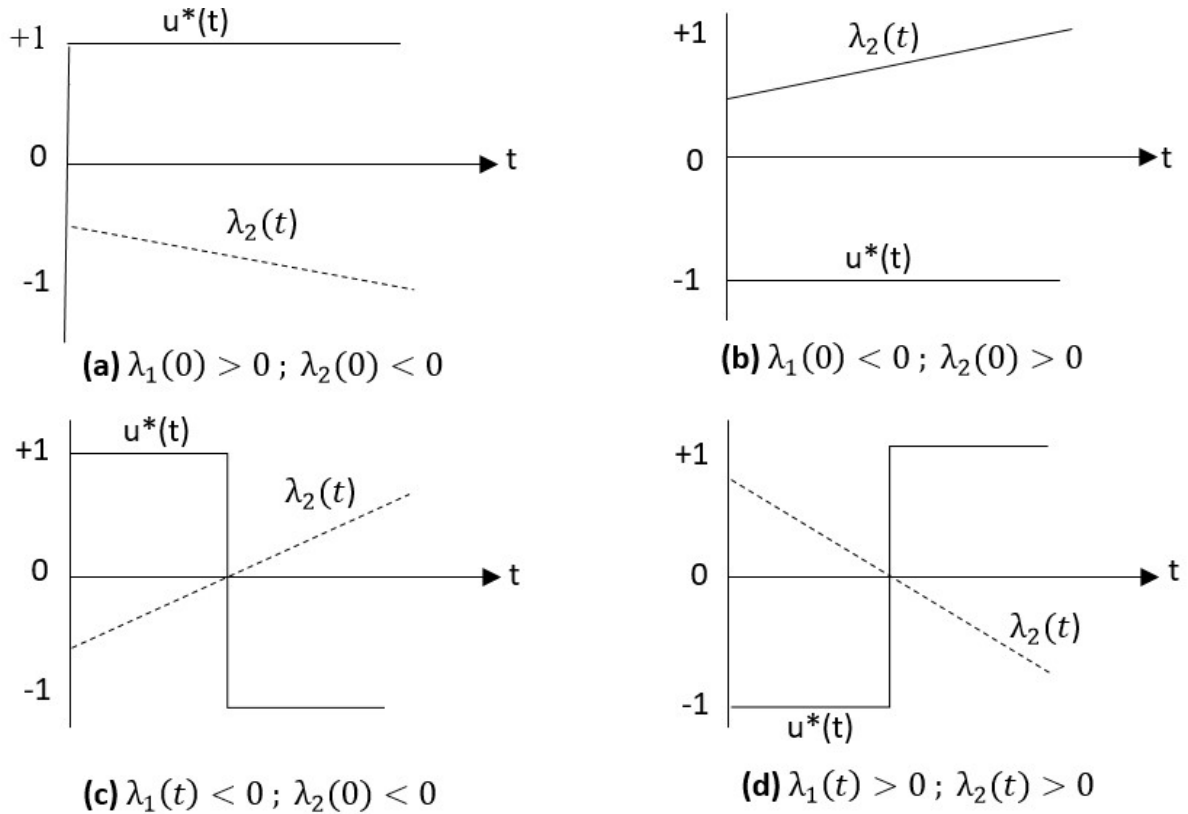


Figure 3.1: Les équations adjointes et les contrôles correspondants

6) Trajectoires optimales (courbes paramétriques)

La résolution du système différentiel (3.24) donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(0) + x_2^*(0)t + \frac{1}{2}u^*t^2 \\ \dot{x}_2^*(t) = x_2^*(0) + u^*t \end{cases} \quad (3.34)$$

où $u^*(t) = \pm 1$. Afin de représenter les équations d'état dans le plan de phase, nous éliminons le temps t de (3.34).

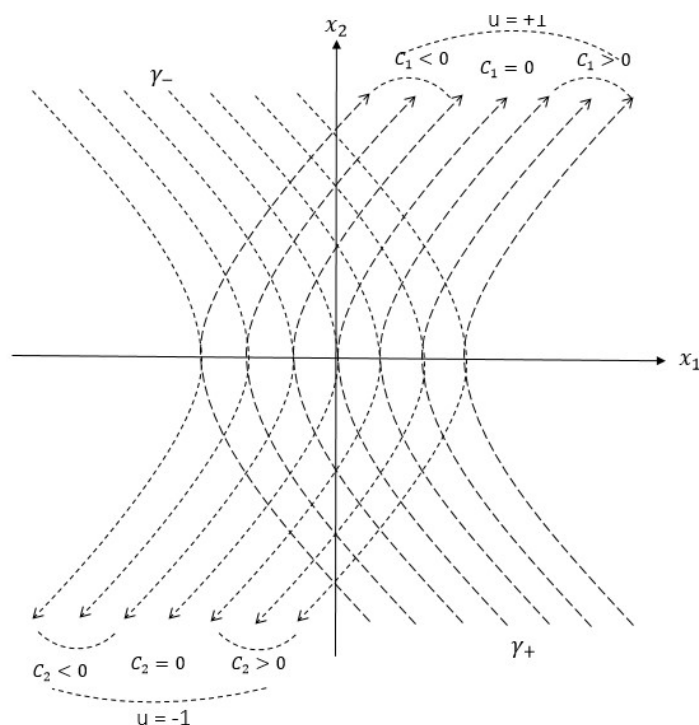


Figure 3.2: Trajectoires de phase planes pour $u=+1$ (ligne discontinue) et $u=-1$ (ligne en pointillé)

D'où

$$t = \frac{x_2(t) - x_2(0)}{u^*} \quad (3.35)$$

Pour des raisons de simplicité, on écrit $x(t)$ au lieu de $x^*(t)$ et $x(0) = x_0$. Substituons (3.35) dans l'équation n°1 du système (3.34), on a :

$$x_1(t) = x_0 + \frac{1}{2u_0}(x_2^2(t) - x_2^2(0)) \quad (3.36)$$

où nous utilisons $u^* = \pm 1$.

Si

$$u = u^* = +1 \begin{cases} t = x_2(t) - x_2(0) \\ x_1(t) = x_0 - \frac{1}{2}(x_2^2(t) + x_2^2(0)) = C_1 + \frac{1}{2}x_2^2(t) \end{cases} \quad (3.37)$$

mais si

$$u = u^* = -1 \begin{cases} t = x_2(0) - x_2(t) \\ x_1(t) = x_0 + \frac{1}{2}(x_2^2(0) - x_2^2(t)) = C_1 + \frac{1}{2}x_2^2(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

où $C_1 = x_0 - \frac{1}{2}x_2^2(0)$ et $C_1 = x_0 + \frac{1}{2}x_2^2(0)$ sont des constantes.

Ainsi, on constate que les relations (3.37) et (3.38) représentent une famille des paraboles dans le plan de phase (x_1, x_2) comme le montre la figure (3.2). En remplaçant dans (3.36) t par t_f , on obtient :

$$x(t = t_f) = 0, \quad x_2(t = t_f) = 0 \quad (3.39)$$

D'où

$$\Rightarrow 0 = x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad x_{10} = \frac{1}{2}Ux_{20}^2 \quad (3.40)$$

Récrivant ceci pour n'importe quel état initial $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, nous savons :

$$x_1 = \frac{1}{2}ux_2^2 \quad (3.41)$$

7) La courbe de commutation

D'après la figure (3.2), il y a deux courbes γ_- et γ_+ qui transfèrent n'importe quel état initial (x_1, x_2) en origine $(0, 0)$.

- La courbe γ_+ est le lieu géométrique de tous les points (x_1, x_2) qui peuvent être transférés au point origine $(0, 0)$ par la commande $u = +1$:

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, \quad x_2 \leq 0 \right\} \quad (3.42)$$

- La courbe γ_- est le lieu géométrique de tous les points (x_1, x_2) qui peuvent être transférés au point origine $(0, 0)$ par la commande $u = -1$:

$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, \quad x_2 \geq 0 \right\} \quad (3.43)$$

La courbe de commutation complète γ est définie par :

$$\gamma = (x_1, x_2) : \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \quad \gamma = \gamma_- \cup \gamma_+ \quad (3.44)$$

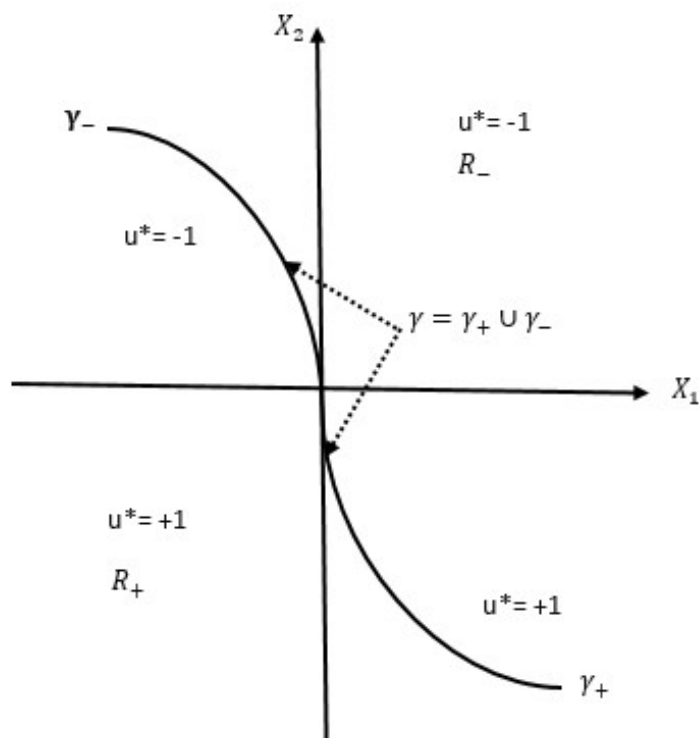


Figure 3.3: la courbe de commutation pour le contrôle en temps minimum d'un système harmonique

8) Régions dans le plan de phase

Définissons les régions dans lesquelles nous devons appliquer la commande $u^* = +1$ ou $u^* = -1$.

Soit R_- la région des points à gauche de la courbe de commutation γ , qui définit la région des points tels que :

$$R_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2}x_2 |x_2| \right\} \quad (3.45)$$

Soit R_+ la région des points à droite de la courbe de commutation γ , qui définit la région des points tels que :

$$R_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2}x_2 |x_2| \right\} \quad (3.46)$$

qui définit la région des points à droite de la courbe de communication γ

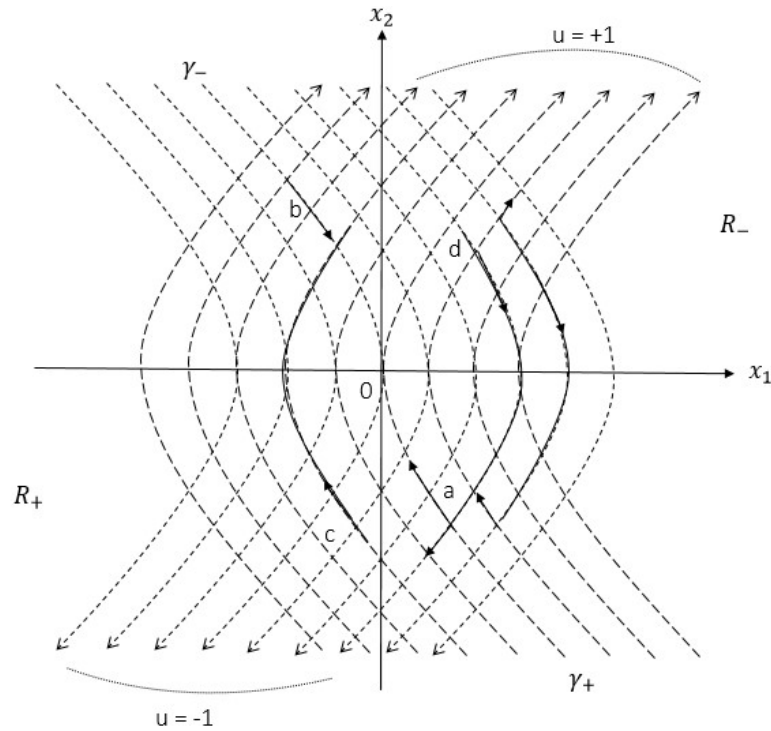


Figure 3.4: Différentes trajectoires produites par quatre ordres d'exécution

9) La loi de commande

La notation “*” indique les valeurs optimales. La commande en temps minimum u^* , une fonction de l'état (x_1, x_2) , sera donnée par :

$$\begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 && \text{pour } (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+ \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 && \text{pour } (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_- \end{aligned}$$

Indépendamment, définissant $z = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$, nous obtenons :

$$\begin{cases} z > 0 & \Rightarrow & u^* = -1 \\ z < 0 & \Rightarrow & u^* = +1 \end{cases} \quad (3.47)$$

10) Temps minimum

$$t_f = \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_- & \text{où } x_1 > \frac{1}{2}x_2|x_2| \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ & \text{où } x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \\ |x_2| & \text{si } (x_1, x_2) \in \gamma & \text{où } x_1 = \frac{1}{2}x_2|x_2| \end{cases} \quad (3.48)$$

3.2 Exemples et applications

Exemple(1) Automatiser la gestion de l'irrigation

Notre problème consiste à étudier l'automatisation de gestion de l'irrigation dans une petite ferme, un jardin ou un verger.

Le problème est que nous avons recours à une pompe pour l'arrosage des plantes lorsque le sol commence à secouer. Toutefois, le dispositif d'irrigation ne donne pas la possibilité de moduler le flux : soit il marche à plein régime (l'eau s'écoule), soit il cesse totalement de fonctionner. Ainsi les détecteurs évaluent le taux d'humidité du sol.

L'idée général est de conserver ce taux d'humidité dans une fourchette optimale (par exemple entre 40% et 60%).

- Si le taux d'humidité du sol tombe sous la barre des 40%, **on active la pompe** ($u = 1$).
- Si l'humidité excède 60%, **on arrête la pompe** ($u = -1$).

c-à-d, le système bascule entre les deux états marche et arrêt selon les valeurs d'humidité.

Formulation Mathématique du problème

Nous formulons le système dynamique comme suit :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + \beta u(t) \quad \text{avec : } \alpha, \beta > 0 \quad (3.49)$$

L'indice de performance

$$J(u) = \int_0^{t_f} 1 dt = t_f$$

Où : $x(t)$: Humidité actuelle du sol, indiquée en pourcentage .

$u(t)$: Contrôle de la pompe, tel que $u(t) \in \{0, 1\}$.

$u(t) = -1$: pompe désactivée (c'est-à-dire irrigation OFF) .

$u(t) = 1$: pompe activée (irrigation ON).

- Lorsque la pompe est en marche, le taux d'humidité croît à un certain niveau constant $\alpha > 0$.
- Quand la pompe est éteinte, l'humidité diminue (évaporation + absorption des plantes) à un taux constant $\beta > 0$.

Le système *bang-bang* devient :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(t) \leq x_{\min} \\ 0 & \text{si } x(t) \geq x_{\max} \end{cases} \quad (3.50)$$

Nous déterminons la solution à travers les étapes ci-dessus :

Hamiltonien

$$H = 1 + \lambda(t)(-\alpha x(t) + \beta u(t)) \quad (3.51)$$

Équations d'état et adjointe

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta u(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha \lambda(t)$$

$$\lambda(t) = C_1 e^{\alpha t}$$

Commande optimale

$$u^*(t) = -\text{Sgn}(\lambda(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } \lambda(t) > 0 \\ +1 & \text{si } \lambda(t) < 0 \end{cases}$$

Détermination de l'état selon les différents cas de la commande optimale $u(t)$

Cas 1 : $u(t) = +1$ (pompe activée)

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha x(t) + \beta \Rightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.52)$$

Cas 2 : $u(t) = -1$ (pompe éteinte)

$$\dot{x}_2(t) = -\alpha x(t) - \beta \Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.53)$$

Loi de commande bang-bang

La commande optimale est donc de type **bang-bang**, et donnée par :

$$u^*(t) = -\text{Sgn}(\beta^t \lambda(t)) = -\text{Sgn}(\lambda(t))$$

D'où :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

Le système dynamique final s'écrit donc sous forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

D'après la condition du minimum, le contrôle optimal est donné par :

$$u^*(t) = -\text{sgn}(\lambda_2(t))$$

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2(t)) = \begin{cases} +1 & \text{si } \lambda_2(t) < 0 \\ -1 & \text{si } \lambda_2(t) > 0 \\ \text{indéfini} & \text{si } \lambda_2(t) = 0 \end{cases}$$

On suppose que le système change de commande à l'instant t_1 :

- Phase 1 : $u(t) = +1$ sur $[0, t_1]$
- Phase 2 : $u(t) = -1$ sur $[t_1, t_f]$

Phase 1 : $u = +1$

La solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}$$

À l'instant de commutation $t = t_1$, on a :

$$x_1 = x(t_1) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t_1} + \frac{\beta}{\alpha} \quad (1)$$

Phase 2 : $u = -1$

On reprend la solution à partir de l'état x_1 , donc :

$$x(t) = \left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha(t-t_1)} - \frac{\beta}{\alpha}$$

À l'instant final $t = t_f$, on a :

$$x_f = x(t_f) = \left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha(t_f-t_1)} - \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Les solutions sont présentées dans les figures suivants :

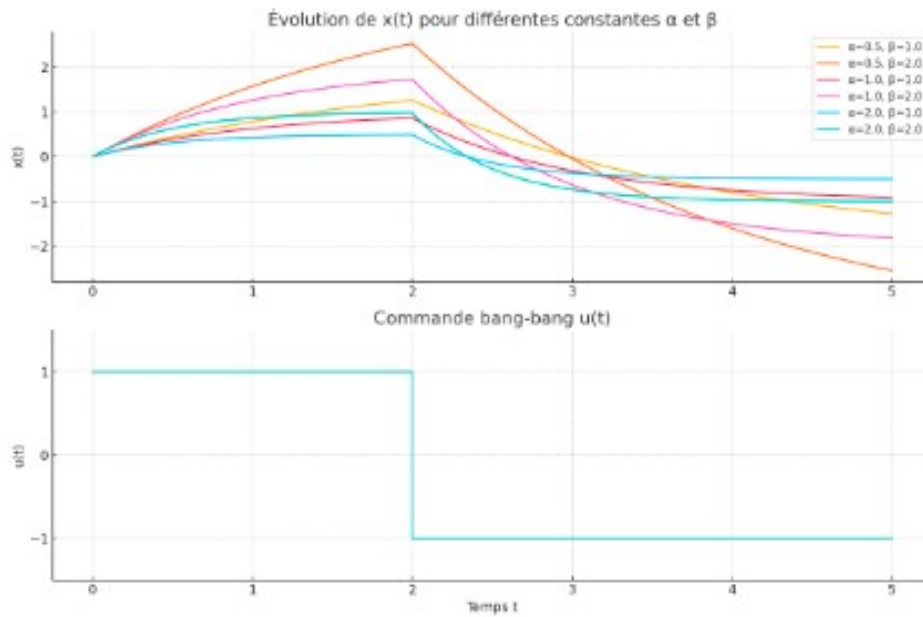


Figure 3.5: Trajectoires de phases pour différents constantes

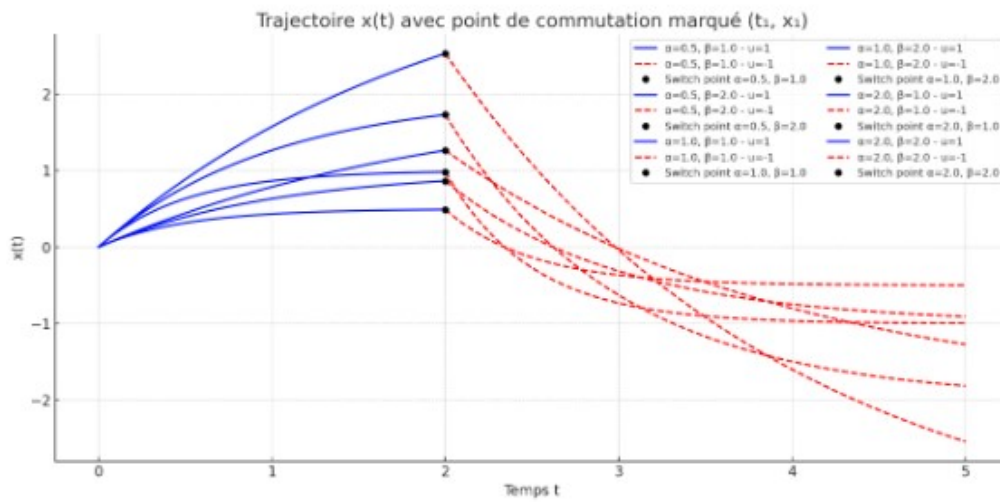


Figure 3.6: Trajectoires avec les points de commutations

Exemple 2

Alunissage d'un vaisseau spatial

Le problème s'agit d'appliquer le principe du minimum de pontryaguine (PMP) pour le problème suivant : L'allunissage d'un vaisseau spatial en identifiant le taux de consommation de carburant idéal $u(t)$ durant la descente . L'objectif est de réduire la consommation du carburant tout en respectant les contraintes nécessaires .

Position du problème

$$\min_{0 \leq u(t) \leq 1} \int_0^{t_f} \sigma u(t) dt \quad (3.54)$$

Vérifiant le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -g + \sigma \alpha \frac{u(t)}{x_3(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= -\sigma u(t) \end{cases} \quad (3.55)$$

Vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} x_1(0) = h_0 \\ x_2(0) = v_0 \\ x_3(0) = M + F \\ x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Où

- α, σ : constantes
- $u(t)$: niveau d'utilisation du carburant
- $x_1(t) = x_2'(t)$
- $x_1(t)$ représente l'altitude verticale du vaisseau, tandis que sa dérivée $x_2(t)$ indique sa vitesse verticale
- L'accélération est donnée par :

$$\dot{x}_2(t) = -g + \sigma \alpha \frac{u(t)}{x_3(t)} \quad (3.57)$$

- x_2 : accélération
- g : accélération gravitationnelle lumière
- $\sigma \alpha \frac{du}{x_3(t)}$: la pousse générée par le moteur (la force populaire produite dépendante du carburant restant $x_3(t)$)
- x_3 : masse restante

L'Objective est de minimiser la fonctionnelle (3.54) et de trouver les condition nécessaires d'optimalités en utilisant le PMP pour cela conduisant le hamiltonien

Alors le hamiltonien est donné par

$$H(x, \lambda, u) = \sigma u(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t) \left(\sigma \alpha \frac{u(t)}{x_3(t)} - g \right) - \sigma \lambda_3(t)u(t) \quad (3.58)$$

Équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = -H_{x_1} = 0 &\Rightarrow \lambda_1(t) = K_1 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -H_{x_2} = -\lambda_1(t) &\Rightarrow \lambda_2(t) = -K_1 t + K_2 \\ \dot{\lambda}_3(t) = -H_{x_3} = \sigma \alpha \frac{\lambda_2(t)u(t)}{x_3^2(t)} &\Rightarrow \dot{\lambda}_3(t) = \sigma \alpha \frac{(-K_1 t + K_2)u(t)}{x_3^2(t)} \end{aligned}$$

Analyse du Hamiltonien comme fonction de u :

$$H(u) = \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)g + \left[\sigma \alpha \frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t) - 1) \right] u(t) \quad (3.59)$$

$H(u)$ est une fonction affine qui est minimale en ses bornes inférieure ou supérieure suivant le signe de $\phi_2(t)$ implique contrôle optimal tout ou rien

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_2(t) < 0 \\ 0 & \text{si } \phi_2(t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha \lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 < \lambda_3(t) \\ \frac{\alpha \lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 > \lambda_3(t) \end{cases} \quad (3.60)$$

Remarque 3 condition de singularité

$$u(t) \text{ est indéterminée si } \phi_2(t) = \frac{\alpha \lambda_2(t)}{x_3(t)} + 1 - \lambda_3(t) = 0 \quad (3.61)$$

Cette condition de singularité ne peut jamais être physiquement satisfaite

Étude du signe de $\phi_2(t) = \left[\sigma \alpha \frac{\lambda_2(t)}{x_3(t)} - \sigma(\lambda_3(t) - 1) \right] :$

$$-\frac{\partial \phi_2(t)}{\partial t} = -\sigma \frac{\lambda_1}{x_3(t)} = -\sigma \frac{K_1}{m(t)} \quad (3.62)$$

- 1ère commutation au plus en t_c
- Pour $t_0 \rightarrow t_c$ $u^*(t) = 0$ et pour $t_c \rightarrow t_f$ $u^*(t) = 1$

Pour $u = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) &\Rightarrow x_1^*(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 \\ \dot{x}_2^*(t) = -g &\Rightarrow x_2^*(t) = -gt + C_1 = -gt + v_0 \\ \dot{x}_3^*(t) = 0 &\Rightarrow x_3^*(t) = m(0) = M + F \end{aligned}$$

Équation de la trajectoire en chute libre :

$$x_1^*(t) = h_0 + \frac{v_0^2 - x_2^{*2}(t)}{2g} \quad (3.63)$$

Conditions finales au point t_c :

$$\begin{cases} x_{1c}^* = -\frac{gt_c^2}{2} + v_0 t_c + h_0 \\ x_{2c}^* = -gt_c + v_0 \\ x_{3c}^* = M + F \end{cases} \quad (3.64)$$

Étude de l'arc de trajectoire $t_c \rightarrow t_f$, $u = 1$:

$$\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) \Rightarrow$$

$$x_1^*(t) = x_2^{*2}(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1^*(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} \left[1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)} \right] \log \left| 1 - \frac{\sigma(t-t_c)}{m(0)} \right| - 1$$

$$\dot{x}_2^*(t) = -g + \frac{\sigma\alpha}{x_3(t)} \Rightarrow$$

$$x_2^*(t) = -gt + v_0 - \alpha \log \left| \frac{m(0) - \sigma(t-t_c)}{m(0)} \right|$$

$$\dot{x}_3^*(t) = -\sigma \Rightarrow$$

$$x_3^*(t) = -\sigma t + m(0) + \sigma t_c = -\sigma(t-t_c) + m(0)$$

Conditions finales : m_f^*, t_f^*, t_c

$$0 = -\frac{gt_f^{*2}}{2} + v_0 t_f^* + h_0 + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} + \frac{\alpha m(0)}{\sigma} \left[1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c)}{m(0)} \right] \log \left| 1 - \frac{\sigma(t_f^* - t_c)}{m(0)} \right| - 1$$

$$0 = -gt_f^* + v_0 - \alpha \log \left| \frac{m(0) - \sigma(t_f^* - t_c)}{m(0)} \right|$$

$$m_f^* = -\sigma(t_f^* - t_c) + m(0)$$

Équations de la surface de commutation :

$$m(0)/\sigma > \theta^* = t_f^* - t_c^* > 0 \quad (3.65)$$

$$x_{1c}^* = -\frac{g\theta^{*2}}{2} - a\theta^* - \frac{am(0)}{\sigma} \log \left| 1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \right|$$

$$x_{2c}^* = g\theta^* + a \log \left| 1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \right|$$

Remarque 4 • En éliminant θ^* , on obtient la surface de commutation

$$F(x_{1c}^*, x_{2c}^*) = 0.$$

- $-\sigma\theta^*/m(0)$ est la proportion de masse initiale consommée.

Approximation de la surface de commutation : pour $\sigma\theta^*/m(0) \leq 0.25$,

$$\left|1 - \frac{\sigma\theta^*}{m(0)}\right| \sim -\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} - \frac{\sigma^2\theta^{*2}}{2m(0)^2} \quad (3.66)$$

$$x_{2c}^* = \left(g - \frac{a\sigma}{m(0)}\right) \sqrt{\frac{2x_{1c}^*}{a\sigma/m(0)} - \frac{\sigma^2\theta^{*2}}{m(0)^2}} - \frac{a\sigma^2}{m(0)^2} \frac{x_{1c}^*}{g} \quad (3.67)$$

Remarque 5

$$\frac{a\sigma}{m(0)} \geq g \quad \text{et} \quad \theta^* = \sqrt{\frac{2x_{1c}^*}{a\sigma/m(0)}} \sqrt{\frac{\alpha\sigma}{m(0)}} \quad (3.68)$$

Espace réalisable :

$$\frac{\sigma\theta^*}{m(0)} \leq 0.25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x_{1c} \leq 0.25 a \frac{m^2(0)}{\sigma^2} \\ -0.5 a \frac{m(0)}{\sigma} - 0.25 b \frac{m^2(0)}{\sigma^2} \leq x_{2c} \leq 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

où $a = 0.5 \left(\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g\right)$ et $b = \frac{\alpha\sigma^2}{2m^2(0)}$ et la surface de commutation approximée :

$$f(x_{1c}, x_{2c}) = bx_{1c} + 2a^2 \sqrt{\frac{x_{1c}}{a}} + ax_{2c} = 0 \quad (3.70)$$

Données numériques :

- $h_0 = 100$ m
- $m(0) = 1500$ kg
- $g = 1.63$ m/s²
- $\sigma = 50$ kg/s
- $\alpha = 200$ m/s

Remarque 6 la surface de commutation et la trajectoire $(t_c \rightarrow t_f)$ optimale sont distinctes.

Résultats :

$$t_f^* = 12.61 \text{ s}$$

$$t_c^* = 9.68 \text{ s}$$

$$m_f^* = 1353.5 \text{ kg}$$

$$J^* = 146.5 \text{ kg}$$

$$x_{1c}^* = 23.63 \text{ m}$$

$$x_{2c}^* = -15.78 \text{ m/s}$$

Les bornes pour x_{1c} et x_{2c} :

$$0 \leq x_{1c} \leq 141.65 \text{ m} \quad (3.71)$$

$$-44 \text{ m/s} \leq x_{2c} \leq 0 \quad (3.72)$$

Surface de commutation approximée :

$$f(x_{1c}, x_{2c}) = bx_{1c} + 2a^2 \sqrt{\frac{x_{1c}}{a}} + ax_{2c} = 0 \quad (3.73)$$

avec

$$a = 0.5 \left(\frac{\alpha\sigma}{m(0)} - g \right), \quad b = \frac{\alpha\sigma^2}{2m^2(0)} \quad (3.74)$$

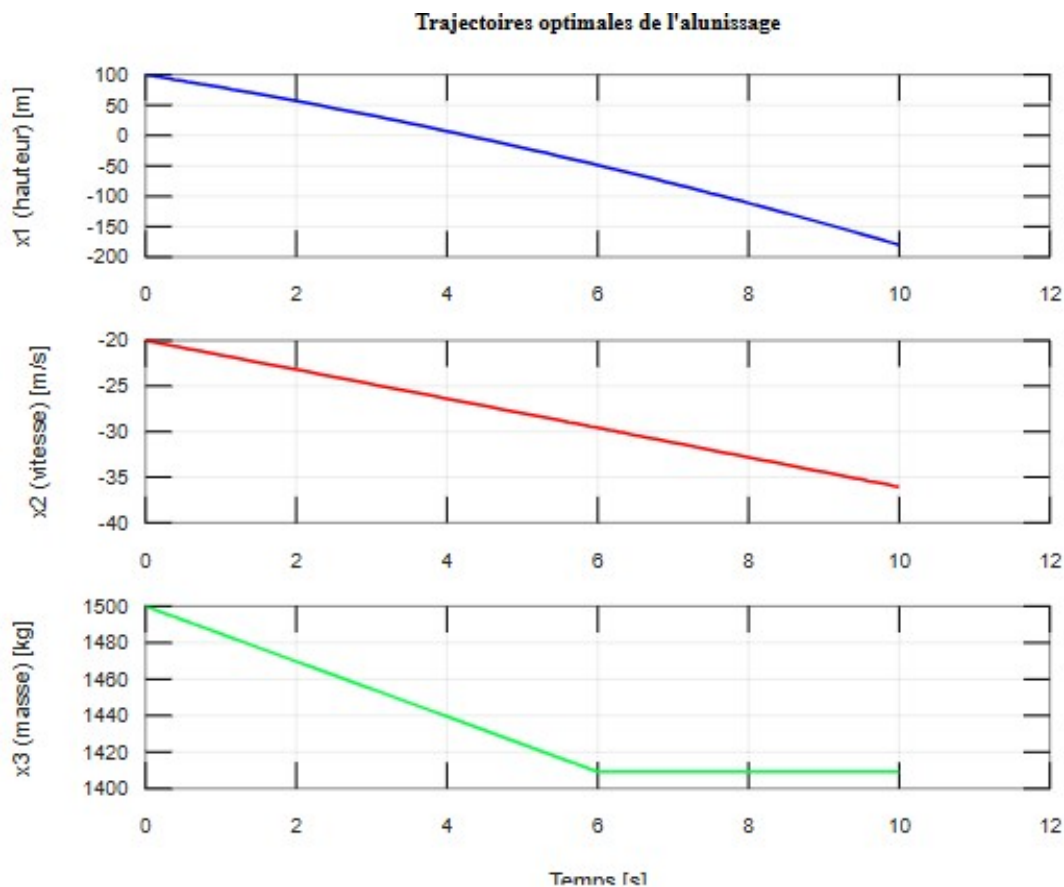


Figure 3.7: Trajectoires optimales de l'alunissage sous contrôle Bang-Bang : évolution de l'altitude, de la vitesse verticale et de la masse au cours du temps.

Cette simulation met en évidence l'efficacité du contrôle Bang-Bang dans le cadre d'un problème de contrôle optimal. Elle permet de satisfaire les contraintes d'atterrissage (position et vitesse nulles).

Conclusion

Le contrôle optimal est une stratégie mathématique visant à atteindre un objectif spécifique de manière optimale, selon un critère de performance défini. Il permet de déterminer la commande qui minimise (ou maximise) une fonction coût tout en respectant les contraintes du système.

Ce mémoire explore les notions, les bases théoriques et les applications pratiques du contrôle optimal des systèmes dynamiques, en mettant la valeur sur son efficacité dans la commande des systèmes autonomes. Cette étude souligne la profondeur théorique et l'efficacité pratique de la théorie du contrôle optimal lorsqu'elle est appliquée aux systèmes autonomes dans la stratégie Bang-Bang

Bibliography

- [1] Bellal Nacera et Boudjedaimi Kahina , " Sur les problèmes de contrôle optimal linéaires-quadratiques" , Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou 2014.
- [2] C F Chan Man Fong,D DE Keep,P N Kaloni "Advanced mathematics for engineering and science" . Tulane university ,USA , University of Windsor, Canada
- [3] D.S. Naidu " Optimal control systems",CRC Press, France, 2003
- [4] Edouard Laroche et Bernard Bayle ,Cour Commande optimale ENS de physique de Strasbourg 3A-Option ISAV -Université Louis Pastère de strasbourg 2007-2008
- [5] Emmanuel Trélat "Contrôle optimal : théorie et applications" , 2013 .
- [6] Issat Kairouan , Cours de Commande optimale ,Mastère professionnelle, 2010-2011
- [7] Jean-Pierre Denailly."Analyse numérique et équations différentielles" .EDP Science.2006
- [8] Khenniche Ghania , "Théorie et Application du calcul des variations en commande optimale",2007
- [9] Laurences;C.Evaus,"Partial Defferential Equation" ,American Mathematical society Providences,Rholde Istaud,2002.
- [10] Leitman.G,"the calculus of variations optimal control",Plemum Press,1981.
- [11] Lawrence C. Evans,"An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory" , University of California, Berkeley , Spring, 2024 version.