

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

# Etude mathématique et numérique d'un modèle de gonflement des sols dans un milieux poreux avec deuxième son

Option : AN-EDP

Par : *khentout Rekaya*

*et*

*Lezghed chaima*

Encadré par : KHOCHEMANE Housseem Eddine

M.C.A ENSET. AZZABA

Devant le jury :

Président : BOUZETTOUTA Lamine

M.C.A

U. SKIKDA

Examineur 1 : LALLOUCHE Abdallah

M.C.B

U. SKIKDA

# Remerciements

Nous remercions en premier lieu, le bon dieu, pour le courage et

La volonté qu'il nous 'a donné pour réaliser ce travail

Nous tenons aussi à exprimer nos sincères remerciements à

**Dr KHOCHEMANE Housseem Eddine**, notre encadreur, d'avoir accepté de nous encadrer

Qui nous 'a soutenu Jusqu'à le dernier moment

Et pour le temps, l'aide, les encouragements et l'attention

Qu'il nous 'a apporté, que Dieu le protège.

Nous tenons aussi à remercier également les membres de jury **Dr. Bouzettouta Lamine** et **Dr. lallouche**

**Abdellah** d'avoir acceptés l'évaluation de notre mémoire de fin d'étude

## *Dédicace*

*Je tiens **dieu** qui m'a bénéficié par cet achèvement, le plus puissant qui  
m'a guider au chemin de réussite*

*La plus chère personne du monde, qui a fait et n'a pas entendue l'appel d'offre à  
**maman chérie** quoique je fasse quoi que je dise je ne saurais point te remercier  
comme il se doit ... merci pour tout le soutien, l'amour et la haute éducation que  
tu m'as fait apprendre depuis mon enfance*

*Je dédie ce modeste travail à l'homme idéal qui nous a quitté trop torque ce  
travail traduit mon respect, la vie nous a séparée mais tu resteras toujours dans  
nos cœurs, à **chère papa**, le tout-puissant l'accueille dans son vaste paradis*

*A mes frères et mes sœurs, source de joies et de bonheur **Imad, Yassine, Samiha,**  
**khaoula, Asma, Rahma***

*À mes deux chères amies **besma et ferial***

*Ames chères amies avec qui je partage des moments de ma vie au fil du temps,  
merci d'être toujours à mes cotés*

*A ma chère **chaima** qui avait un rôle très important pour que ce travail soit  
réalisé*

*Atous ce que j'aime et ceux qui m'aiment*

*Rokaya*



## *Dédicace*

*Je donné mon humble effort*

*A ceux qui m'ont donné la vie et l'espoir, et m'ont élevé avec une passion pour  
L'apprentissage et la connaissance ,et qui m'ont appris a' gravir les échelons de la  
vie avec sagesse et patience*

*Droiture et bonté ,et loyauté envers eux : **mon père**, que dieu ait pitié de lui ,et ma  
**chère mère***

*A qui dieu m'a donné la bénédiction de leur présence dons la vie au nœud fort qui  
m'aide dans mon cheminement pur **mes frères et sœurs***

*A ma chère ami **roqaya***

*A tous ceux qui ont contribué , meme par une lettre ,a' ma vie universitaire **professeur  
khouchemane houssem eddine***

*A tous je dédie ce travail ...*

***Haima***



## Résumé

Dans ce mémoire, on considère un système linéaire unidimensionnel de gonflement des sols poreux élastique sous l'effet thermal avec deuxième son où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo-Maxwell. On établit un résultat d'existence et d'unicité en utilisant la théorie des semi-groupes. Après, on montre que la dissipation donnée uniquement par le deuxième son est suffisante pour assurer la stabilité exponentielle de la solution en utilisant la méthode multiplicative, pour construire une fonctionnelle adéquate dite de Lyapunov équivalente à l'énergie du système. De plus, le résultat obtenu ne dépend pas d'aucun nombre de stabilité. Finalement, on illustre les résultats obtenus par une simulation numérique en effectuant une discrétisation temporelle en utilisant un schéma d'Euler et une discrétisation spatiale en utilisant la méthode des différences finis.

## Abstract

In this document, we consider a one-dimensional linear system of swelling porous-elastic soils with thermal effect and second sound where the heat conduction is given by Cattaneo-Maxwell law. We establish an existence and uniqueness result using the semi-group theory. Then, we show that the dissipation given only by the second sound is strong enough to stabilize exponentially the system based on the energy method by constructing an appropriate Lyapunov functional equivalent to the system's energy using the multipliers method. Furthermore, our result does not depend on any stability number. Finally, we present some numerical simulation to illustrate the theoretical result obtained by carrying out a temporal discretization using Euler scheme and the classical finite difference method for the spatial discretization.

## ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة مشكل خطي أحادي البعد لتضخم التربة المسامية المرنة تحت تأثير الحرارة والصوت الثاني حيث يتم توصيل الحرارة بواسطة قانون كاتانيو-ماكسويل. جرين ونغدي. نثبت وجوداً ووحداً الحل باستخدام نظرية أنصاف الزمر. بعد ذلك، نوضح أن التبديد الناتج عن الصوت الثاني فقط قوي بما يكفي لضمان الاستقرار الآسي للنظام بناءً على طريقة الطاقة من خلال بناء مناسب لدالة ليابونوف مكافئة لطاقة النظام المدروس باستخدام الطريقة الضربية. علاوة على ذلك، لا تعتمد نتيجتنا على أي علاقة بين معاملات النظام. أخيراً، نقدم بعض المحاكاة العددية لتأكيد النتائج النظرية التي حصلنا عليها من خلال إجراء تجزيئ زمني باستخدام مخطط أولر وطريقة الفروق المنتهية للتجزيئ المكاني.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Quelques espaces fonctionnels . . . . .	1
1.2 Quelques inégalités utiles . . . . .	2
1.3 Théorème de Lax Milgram . . . . .	3
1.4 Opérateurs m-dissipatifs . . . . .	4
1.5 Semi groupes d'opérateurs linéaires non bornés . . . . .	5
1.6 Notion de stabilité . . . . .	7
<b>2 Existence et unicité</b>	<b>9</b>
2.1 Espace d'énergie . . . . .	10
2.2 Domaine de l'opérateur . . . . .	11
2.3 Résultat de l'existence et l'unicité . . . . .	12
<b>3 Stabilité exponentielle</b>	<b>21</b>
3.1 Décroissance de L'énergie . . . . .	21
3.2 Fonctionnelle de Lyapunov . . . . .	23
3.3 Propriétés de la fonctionnelle de Lyapunov . . . . .	35
3.4 Résultat principal de la stabilité . . . . .	39
<b>4 Test numérique</b>	<b>41</b>
4.1 Discrétisation du problème . . . . .	41
4.2 Energie discrète et quelques exemples numériques . . . . .	43
<b>Conclusion</b>	<b>i</b>

# Introduction

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux milieux poreux gonflants et cela tient à sa prévalence dans divers domaines tels que la science du sol, l'hydrologie, la géotechnique, la chimie, la génie mécanique et autres domaines de la science. L'étude du comportement asymptotique des sols gonflants, a suscité un grand intérêt chez de nombreux chercheurs et cela dû de nombreux travaux qui ont été réalisés dans ce domaine qui appartient à la théorie des milieux poreux lors de la saturation en fluide. Le gonflement du sol est causé par l'attraction chimique de l'eau, qui provoque l'incrustation des molécules d'eau dans la structure argileuse entre les dalles d'argile séparant et déstabilisant la structure minérale. Les particules d'argile ont également la propriété que les minéraux de silicate d'aluminium et de magnésium hydratés sont combinés dans un réseau pour former des unités (particules). Les particules d'argile sont donc un mélange de plaquettes d'argile et d'eau imbibée (eau vierge). Voir Bedford, Drumheller [1] et Eringen [4] pour une brève description des détails de développement /aperçus historiques liés à la théorie générale des mélanges.

La théorie des sols gonflants dans des milieux poreux élastiques a attiré l'attention de nombreux chercheurs car de nombreux travaux ont été menés



FIG. 1 – Image illustrative des sols gonflants dans un milieu poreux

---

sur le comportement asymptotique de la solution du modèle mathématique qui décrit cette théorie. Le modèle en question a été modélisé la première fois par Ieşan [7] comme suit

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - \alpha_1 z_{xx} - \alpha_2 u_{xx} = 0, & \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - \alpha_3 u_{xx} - \alpha_2 z_{xx} = 0, & \text{in } (0, L) \times (0, \infty). \end{cases}$$

avec  $u$  et  $z$  représentent, respectivement, le déplacement du fluide et le matériau solide élastique. Les paramètres  $\rho_u$  et  $\rho_z$  sont les densités de chaque constituant qui sont supposées des constantes strictement positives. Les autres coefficients sont des constantes positives ayant un sens physique définissant le couplage entre les différents composants des matériaux. On note par  $\chi$  la quantité suivante qu'on a besoin par la suite

$$\chi = \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}. \quad (1)$$

Dans le présent mémoire, on s'intéresse à étudier le système suivant

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} = \alpha_1 z_{xx} + \alpha_2 u_{xx}, & \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} = \alpha_3 u_{xx} + \alpha_2 z_{xx} + \beta \theta_x, & \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ c\theta_t = -q_x + \beta u_{tx}, & \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ \tau_0 q_t = -q - k\theta_x, & \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \theta_x(0, t) = \theta(L, t) = q(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), & x \in (0, L), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2)$$

avec  $\theta$  et  $q$  représentent, respectivement, la température et le flux de la température ou bien le deuxième son. Les autres paramètres  $c, \tau_0, k, \beta$  sont des constantes positives.

On a présenté et prouvé, d'une part, l'existence et l'unicité de la solution régulière du problème (2) en se basant sur la théorie des semi-groupes et plus précésemment le théorème de Lumer-Phillips. D'autre part, on a établi un résultat de stabilité exponentielle de la solution en utilisant la méthode d'énergie qui consiste à construire une fonctionnelle dite de Lyapunov par la méthode multiplicative équivalente à l'énergie du système, puis, on déduit une estimation de l'énergie. Finalement, on a effectué une discrétisation spatiale et temporelle par la méthode des différences finis le problème (2) puis on a résolu le problème discrétisé à chaque pas de temps par un algorithme de point fixe. Les expériences numériques ont été faites en utilisant le langage de programmation MATLAB.

Le présent mémoire est organisé et structuré comme suit :

- Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires qu'on a besoin pour atteindre notre objectif.
- Dans le deuxième chapitre, on a établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2).
- Dans le troisième chapitre, on a prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie.
- Dans le quatrième chapitre, on a illustré numériquement les résultats théoriques obtenus.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Quelques espaces fonctionnels

Dans ce chapitre, on présente les notions mathématiques nécessaires qu'on a besoin par la suite pour achever les résultats d'existence, d'unicité et de la stabilité

#### Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel muni du produit scalaire  $\langle u, v \rangle$ , et qui est complet pour la norme

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

#### Espace $L^p(\Omega)$

**Définition 1.1.1** ([5]) Soit  $1 \leq p < \infty$  et soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . On appelle l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ , l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}.$$

De plus, pour toute fonction  $f \in L^p(\Omega)$ , on note par

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

la norme de  $L^p(\Omega)$ .

## Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

**Définition 1.1.2** ([7]) Pour tout entier positif  $m$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour } 1 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

On note par

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

la norme de l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$ .

**Théorème 1.1.1** ([2]) Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial(\Omega)$ , où  $\partial(\Omega)$  est la frontière de  $\Omega$ .

## Dérivée faible

**Définition 1.1.3** ([2]) Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert borné et  $u \in L^2(I)$ . On dit que  $g$  est une dérivée faible de  $u$  dans  $L^2(I)$  si

$$\text{pour toute fonction test } \varphi \in C_c^\infty(I), \text{ on a } \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = - \int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

Si une telle dérivée faible existe, elle est unique (au sens presque partout) et on la note  $\partial_x u$ .

## 1.2 Quelques inégalités utiles

### L'inégalité de Young

Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+$  et  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Spécialement si  $u, v \in L^2(\Omega)$ , alors

$$\int_\Omega |uv| \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

### L'inégalité de Hölder

Soit  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ . Alors  $f.g \in L^1(\Omega)$  et

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

si  $p = q = 2$ , on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\Omega} |f.g| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### L'inégalité de Poincaré

Soit  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $u'_{\partial(\Omega)} = 0$ , alors

$$\int_{\Omega} |f|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx.$$

## 1.3 Théorème de Lax Milgram

**Théorème 1.3.1** ([2]) Soit  $H$  un espace de Hilbert réel,  $a$  une forme bilinéaire sur  $H$ ,  $\mathcal{L}$  une forme linéaire

sur  $H$ . On suppose que

1/  $a$  est continue

$$\forall u, v \in H, |a(u, v)| \leq \eta_1 \|u\|_H \|v\|_H, \quad \eta_1 > 0.$$

2/  $a$  est coercive : il existe  $\eta_2 > 0$  tel que

$$\forall u \in H, a(u, u) \geq \eta_2 \|u\|_H^2.$$

3/  $\mathcal{L}$  est continue :

$$\forall u \in H, |\mathcal{L}(u)| \leq \eta_3 \|u\|_H, \quad \eta_3 > 0.$$

Alors, il existe un unique  $u$  dans  $H$  qui vérifie

$$\forall v \in H, a(u, v) = \mathcal{L}(v).$$

## 1.4 Opérateurs m-dissipatifs

**Définition 1.4.1** ([10]) *Un opérateur linéaire non borné dans  $X$  est un couple  $(A, D(A))$  où  $D(A)$  un sous espace vectoriel de  $X$  et  $A$  une application linéaire de  $D(A)$  dans  $X$ . Le sous espace  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .*

De manière analogue, un opérateur linéaire non borné de  $X$  dans  $Y$  est un couple  $(A, D(A))$  où  $D(A)$  un sous espace vectoriel de  $X$  et  $A$  une application linéaire de  $D(A)$  de  $X$  dans  $Y$ .

**Définition 1.4.2** ([10]) *Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné dans  $X$ , est fermé si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \text{ est fermé dans } X \times Y.$$

**Définition 1.4.3** ([6]) *Soit  $(A, D(A))$  un opérateur linéaire non borné dans  $X$ . Lorsque  $D(A)$  est dense dans  $X$ , on dit que  $(A, D(A))$  est de domaine dense dans  $X$ .*

**Définition 1.4.4** ([10]) *Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné dans  $X$ , est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

**Définition 1.4.5** ([10]) *Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné dans  $X$ , est m-dissipatif si  $A$  est dissipatif et*

$$\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A) \text{ tel que } \lambda x - Ax = f.$$

**Théorème 1.4.1** ([10]) *Si  $A$  est m-dissipatif alors, pour tous  $\lambda > 0$ , l'opérateur  $(\lambda I - A)$  admet un inverse,  $(\lambda I - A)^{-1}f$  appartient à  $D(A)$  pour tous  $f \in X$ , et  $(\lambda I - A)^{-1}$  est un opérateur linéaire borné vérifiant*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**Théorème 1.4.2** ([6]) *Soit  $(A, D(A))$  un opérateur linéaire non borné dissipatif dans  $X$ . L'opérateur  $A$  est m-dissipatif si et seulement si*

$$\exists \lambda_0 \text{ tel que } \forall f \in X, \exists x \in D(A) \text{ vérifiant } \lambda_0 x - Ax = f.$$

## 1.5. SEMI GROUPE D'OPÉRATEURS LINÉAIRES NON BORNÉS

**Théorème 1.4.3** ([10]) Soit  $(A, D(A))$  un opérateur linéaire non borné dans  $X$ . S'il existe  $\lambda_0 > 0$  pour lequel l'opérateur  $\lambda_0 I - A$  est une bijection de  $D(A)$  sur  $X$ , et si  $(\lambda_0 I - A)^{-1}$  est un opérateur borné sur  $X$  alors  $A$  est fermé.

En particulier, si  $A$  est  $m$ -dissipatif alors  $A$  est fermé.

**Théorème 1.4.4** ([10]) Soit  $A$  dissipatif et  $R(I - A) = X$ , si  $X$  est réflexif, alors

$$\overline{D(A)} = X.$$

### Opérateurs $m$ -dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que  $X$  est un espace de Hilbert.

**Théorème 1.4.5** ([10]) Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné dans  $X$ , est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(A), (Ax, x) \leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A), \operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0.$$

**Théorème 1.4.6** ([10]) Si  $A$  est  $m$ -dissipatif alors  $D(A)$  est dense dans  $X$ .

## 1.5 Semi groupes d'opérateurs linéaires non bornés

Soit  $X$  un espace de Banach sur la corps  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ , et soit  $B(X)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires non bornés de  $X$  dans  $X$ .

**Définition 1.5.1** ([6]) Une famille  $(T(t))_{t>0} \subset B(X)$  est appelée semi groupe si on a les propriétés suivantes

$$T(0) = I \quad (\text{où } I \text{ l'opérateur identité de } X),$$

$$T(s + t) = T(s)T(t) \quad \forall t, s \geq 0.$$

**Définition 1.5.2** ([8]) Une famille d'opérateurs  $(S(t))_{t \geq 0}$  de  $(X)$  est un semi groupe fortement continué dans  $X$  lorsque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0 \text{ pour tout } x \in X.$$

**Théorème 1.5.1** ([8]) Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un semi groupe fortement continué sur  $X$  et  $(A, D(A))$  sont générateur infinitésimal les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) Pour tout  $x \in X$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x.$$

ii) Pour tout  $x \in X$ , et tout  $t > 0$ ,

$$\int_0^t S(s)x ds,$$

appartient à  $D(A)$  et

$$A \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x.$$

iii) Si  $x \in D(A)$  alors  $S(t)x \in D(A)$  et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

iv) Si  $x \in D(A)$  alors

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t As(\tau)x d\tau.$$

### Théorème de Hille-Yosida

**Théorème 1.5.2** ([8])(Hille-Yosida 1) Un opérateur linéaire non borné  $(A, D(A))$  dans  $X$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continué de contraction sur  $X$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $A$  est fermé.  
 ii)  $D(A)$  dense dans  $X$ .  
 iii) Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(\lambda I - A)$  est une application bijective de  $D(A)$  sur  $X$  et  $(\lambda I - A)^{-1}$  est un opérateur borné sur  $X$  vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**Théorème 1.5.3** ([3]) (Hille-Yosida 2) un opérateur linéaire non borné  $(A, D(A))$  dans  $X$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continué de contraction sur  $X$  si et seulement si  $A$  est  $m$ -dissipatif et de domaine dense dans  $X$ .

### Théorème de Lumer Phillips

**Théorème 1.5.4** ([2]) Soit  $A$  un opérateur linéaire non borné de  $D(A)$  dans  $X$  de domaine dense.

a) Si  $A$  est dissipatif et s'il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que  $R(\lambda_0 I - A) = X$ , donc  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi groupe fortement continué de contraction dans  $X$ .

b) Si  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi groupe fortement continué de contraction, donc

$$R(\lambda I - A) = X \quad \forall \lambda > 0$$

et

$A$  dissipatif.

## 1.6 Notion de stabilité

**Définition 1.6.1** ([9]) Le semi-groupe  $T(t) = e^{At}$  est dit être exponentiellement stable s'il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $M \geq 1$  telle que

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

**Définition 1.6.2** ([9]) Un semi-groupe fortement continu  $(T(t))_{t \geq 0}$  est dit :

1. Uniformément exponentiellement stable s'il existe  $\varepsilon \geq 0$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0.$$

2. Uniformément stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0.$$

3. Fortement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)x\| = 0.$$

4. faiblement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle T(t)x, \acute{x} \rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad \text{et } \acute{x} \in \acute{X}.$$

# Chapitre 2

## Existence et unicité

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré en se basant sur la théorie des semi-groupes et plus précisément le théorème de Lumer-Phillips. Pour cela, on commence par la transformation du système (2) sous forme d'un problème de Cauchy. En effet, on pose  $v = z_t$ , et  $\psi = u_t$ , ce qui conduit à écrire le système (2) comme suit :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, & t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x) = (z_0, z_1, u_0, u_1, \theta_0, q_0)^T, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $U = (z, v, u, \psi, \theta, q)^T$  et  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur linéaire non borné sur  $\mathcal{H}$  défini par l'expression suivante

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\alpha_1}{\rho_z} z_{xx} + \frac{\alpha_2}{\rho_z} u_{xx} \\ \psi \\ \frac{\alpha_3}{\rho_u} u_{xx} + \frac{\alpha_2}{\rho_u} z_{xx} + \frac{\beta}{\rho_u} \theta_x \\ -\frac{1}{c} q_x + \frac{\beta}{k} \psi_x \\ -\frac{1}{\tau_0} q - \frac{k}{\tau_0} \theta_x \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\rho_z} \partial_{xx}(\cdot) & 0 & \frac{\alpha_2}{\rho_z} \partial_{xx}(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_2}{\rho_u} \partial_{xx}(\cdot) & 0 & \frac{\alpha_3}{\rho_u} \partial_{xx}(\cdot) & 0 & \frac{\beta}{\rho_u} \partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{c} \partial_x(\cdot) & 0 & -\frac{1}{c} \partial_x(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{\tau_0} \partial_x(\cdot) & -\frac{1}{\tau_0} I \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

avec  $\mathcal{H}$  est l'espace d'énergie du système (2) qui est obtenu après le calcul de l'énergie par la méthode multiplicative.

## 2.1 Espace d'énergie

Donc, d'abord on définit l'énergie de notre système comme suit

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\rho_z}{2} \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \left( \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \right) \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^L \theta^2 dx \\ &+ \frac{\tau_0}{2k} \int_0^L q^2 dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

et on va montrer par la suite dans le chapitre 3 comment calculer cette quantité.

Pour définir l'espace  $\mathcal{H}$ , il faut que les conditions suivantes doivent être vérifiées

$$\begin{aligned} \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx < \infty, \quad \int_0^L z_t^2 dx < \infty, \quad \int_0^L u_t^2 dx < \infty, \\ \int_0^L \theta^2 dx < \infty, \quad \int_0^L q^2 dx < \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

- La première condition de (2.4), veut dire que

$$z_x \in L^2(0, L), \quad u_x \in L^2(0, L),$$

d'après l'inégalité de Poincaré, on conclut que

$$z \in L^2(0, L), \quad u \in L^2(0, L),$$

d'où

$$z \in H^1(0, L), \quad u \in H^1(0, L).$$

De plus, puisque

$$z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \in (0, \infty),$$

on introduit l'espace

$$\tilde{H}^1(0, L) = \{f \in H^1(0, L), f(0) = 0\},$$

ce qui nous permet de dire que

$$z \in \tilde{H}^1(0, L), \quad u \in \tilde{H}^1(0, L).$$

- D'autre part, de la deuxième au cinquième conditions de (2.4), on déduit que

$$z_t \in L^2(0, L), \quad u_t \in L^2(0, L), \quad \theta \in L^2(0, L), \quad q \in L^2(0, L).$$

Finalement, on peut écrire

$$\mathcal{H} = \tilde{H}^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \tilde{H}^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L).$$

## 2.2 Domaine de l'opérateur

Maintenant, comme le domaine de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est à valeurs dans  $\mathcal{H}$ , alors, on peut affirmer que :

$$v \in \tilde{H}^1(0, L).$$

- La 3<sup>ème</sup> composante de l'opérateur  $\mathcal{A}$

$$\psi \in \tilde{H}^1(0, L).$$

- La 5<sup>eme</sup> composante de l'opérateur  $\mathcal{A}$ ,  $q_x \in L^2(0, L)$ , et puisque  $q(0, t) = 0$ , alors

$$q \in \tilde{H}^1(0, L).$$

- De la 4<sup>eme</sup> ou la 6<sup>eme</sup> composante de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , on peut dire que  $\theta_x \in L^2(0, L)$  et comme  $\theta(L, t) = 0$ , on est obligé d'introduire l'espace

$$\tilde{H}_*^1(0, L) = \{f \in H^1(0, L), f(L) = 0\},$$

et conclure que

$$\theta \in \tilde{H}_*^1(0, L).$$

- De la 2<sup>eme</sup> composante de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , on conclut que  $z_{xx}, u_{xx} \in L^2(0, L)$  et d'après les conditions aux limites de  $z$  et  $u$ , on introduit l'espace suivant

$$H_*^2(0, L) = \{f \in H^2(0, L), f(0) = f_x(L) = 0\},$$

d'où

$$z, u \in H_*^2(0, L).$$

Alors

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \mid z, u \in H_*^2(0, L); \psi, q, v \in \tilde{H}^1(0, L); \theta \in \tilde{H}_*^1(0, L) \right\}.$$

On muni l'espace  $\mathcal{H}$  du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= \rho_z \int_0^L v \cdot \tilde{v} \, dx + \rho_u \int_0^L \psi \cdot \tilde{\psi} \, dx + \frac{\tau_0}{k} \int_0^L q \cdot \tilde{q} \, dx \\ &+ \left( \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \right) \int_0^L u_x \cdot \tilde{u}_x \, dx + c \int_0^L \theta \cdot \tilde{\theta} \, dx \\ &+ \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} \cdot z_x \right) \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} \tilde{u}_x + \sqrt{\alpha_1} \tilde{z}_x \right) dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec  $\tilde{U} = (\tilde{z}, \tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{q})^T \in \mathcal{H}$  et pour lequel  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert.

## 2.3 Résultat de l'existence et l'unicité

Maintenant, on présente et prouve le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2) dans le théorème suivant.

### 2.3. RÉSULTAT DE L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ

**Théorème 2.3.1** *Soit  $U = (z, v, u, \psi, \theta, q)^T$  une solution du problème (2). Alors, si  $U_0 \in \mathcal{H}$ , il existe une unique solution du problème (2)  $U \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ . De plus, si  $U_0 \in D(\mathcal{A})$  il existe une unique solution du problème (2)*

$$U \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

La démonstration se divise en deux parties. Dans la première, on montre que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est dissipatif et dans la deuxième, on montre que l'opérateur  $I - \mathcal{A}$  est surjectif.

#### Dissipativité de l'opérateur

**Lemme 2.3.1** *L'opérateur  $\mathcal{A}$  défini par (2.2) est dissipatif.*

**Preuve.** On montre que

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Pour cela, on utilise la formule (2.5), pour calculer le produit scalaire suivant

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \frac{\alpha_1}{\rho_z} z_{xx} + \frac{\alpha_2}{\rho_z} u_{xx} \\ \psi \\ \frac{\alpha_3}{\rho_u} u_{xx} + \frac{\alpha_2}{\rho_u} z_{xx} + \frac{\beta}{\rho_u} \theta_x \\ -\frac{1}{c} q_x + \frac{\beta}{c} \psi_x \\ \frac{1}{\tau_0} q - \frac{\beta}{\tau_0} \theta_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ v \\ u \\ \psi \\ \theta \\ q \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}},$$

on fait une intégration par partie en prenant en compte les conditions aux

limites, on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_H &= \alpha_1 \int_0^L z_x v_x dx - \alpha_2 \int_0^L u_x v_x dx - \alpha_3 \int_0^L u_x \psi_x dx \\
 &- \alpha_2 \int_0^L z_x \psi_x dx - \beta \int_0^L \theta \psi_x dx + \int_0^L q \theta_x dx + \beta \int_0^L \psi_x \theta dx \\
 &- \frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx - \int_0^L \theta_x q dx - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \int_0^L u_x \psi_x dx + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \int_0^L u_x \psi_x dx \\
 &+ \alpha_2 \int_0^L u_x v_x dx + \alpha_3 \int_0^L u_x \psi_x dx + \alpha_2 \int_0^L z_x \psi_x dx + \alpha_1 \int_0^L z_x v_x dx.
 \end{aligned}$$

Finalement, on arrive à

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx \leq 0.$$

Alors  $\mathcal{A}$  est un opérateur dissipatif. ■

### Surjectivité de l'opérateur

**Lemme 2.3.2** *L'opérateur  $I - \mathcal{A}$  est surjectif.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $\mathcal{A}$  est maximal :

$\mathcal{A}$  maximale  $\Leftrightarrow \text{Im}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H} \Leftrightarrow \forall G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)^T \in \mathcal{H}$ ,  
 $\exists U = (z, v, u, \psi, \theta, q) \in D(\mathcal{A})$  tel que

$$(I - \mathcal{A})U = G, \tag{2.6}$$

on peut écrire (2.6) comme suit

$$\begin{cases}
 z - v = g_1 \in \tilde{H}_1(0, L), \\
 \rho_z v - \alpha_1 z_{xx} - \alpha_2 u_{xx} = \rho_z g_2 \in L^2(0, L), \\
 u - \psi = g_3 \in \tilde{H}_1(0, L), \\
 \rho_u \psi - \alpha_3 u_{xx} - \alpha_2 z_{xx} - \beta \theta_x = \rho_u g_4 \in L^2(0, L), \\
 c\theta + q_x - \beta \psi_x = c g_5 \in L^2(0, L), \\
 (\tau_0 + 1)q + k\theta_x = \tau_0 g_6 \in L^2(0, L),
 \end{cases} \tag{2.7}$$

### 2.3. RÉSULTAT DE L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ

D'après (2.7)<sub>6</sub>, on peut écrire

$$\theta_x = -\frac{1 - \tau_0}{k}q + \frac{\tau_0}{k}g_6. \quad (2.8)$$

Intégrant (2.8), on obtient

$$\theta(x, t) = \frac{1 + \tau_0}{k} \int_x^L q(y)dy - \frac{\tau_0}{k} \int_x^L g_6(y)dy. \quad (2.9)$$

En remplaçant (2.7)<sub>1</sub>, (2.7)<sub>3</sub>, (2.9) dans (2.7)<sub>2</sub>, (2.7)<sub>4</sub>, (2.7)<sub>5</sub>, on trouve

$$\begin{cases} \rho_z z - \alpha_1 z_{xx} - \alpha_2 u_{xx} = \mu_1 \in L^2(0, L), \\ \rho_u u - \alpha_3 u_{xx} - \alpha_2 z_{xx} + \beta \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) q = \mu_2 \in L^2(0, L), \\ c \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \int_x^L q(y)dy + q_x - \beta u_x = \mu_3 \in L^2(0, L), \end{cases} \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \rho_z g_2 + \rho_z g_1, \\ \mu_2 &= \rho_u g_4 + \rho_u g_3 + \frac{\tau_0}{k} g_6, \\ \mu_3 &= c g_5 - \beta g_{3x} + c \frac{\tau_0}{k} \int_x^L g_6(y)dy. \end{aligned}$$

Pour montrer que le système (2.10) admet une solution unique, on considère la formulation variationnelle suivante

$$B((z, u, q), (\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q})) = \mathcal{G}(\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q}), \quad (2.11)$$

telle que  $B : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire et  $\mathcal{G} : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire où

$$V = \tilde{H}^1(0, L) \times \tilde{H}^1(0, L) \times L^2(0, L).$$

Pour obtenir  $B$  et  $\mathcal{G}$ , en multipliant (2.10)<sub>1</sub>, (2.10)<sub>2</sub>, (2.10)<sub>3</sub>, respectivement,

par  $\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q}$  et en intégrant par partie sur  $(0, L)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & B((z, u, q), (\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q})) \\
 &= \rho_z \int_0^L z z_x dx + \alpha_1 \int_0^L z_x \tilde{z}_x dx + \alpha_2 \int_0^L u_x \tilde{z}_x dx + \rho_u \int_0^L u \tilde{u} dx \\
 &+ \alpha_3 \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \alpha_2 \int_0^L z_x \tilde{u}_x dx + \beta \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \int_0^L q \tilde{u} dx \\
 &+ c \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right)^2 \int_0^L \left( \int_x^L q(y) dy \right) \left( \int_x^L \tilde{q}(y) dy \right) dx \\
 &+ \frac{1 + \tau_0}{k} \int_0^L q \tilde{q} dx - \beta \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \int_0^L u \tilde{q} dx, \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G}(\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q}) = \int_0^L \mu_1 \tilde{z} dx + \int_0^L \mu_2 \tilde{u} dx + \frac{1 + \tau_0}{k} \int_0^L \mu_3 \left( \int_x^L \tilde{q}(y) dy \right) dx. \tag{2.13}$$

Maintenant, on muni l'espace  $V$  de la norme suivante

$$\| (z, u, q) \|_V^2 = \| z \|_2^2 + \| u_x \|_2^2 + \left\| \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right\|_2^2 + \| u \|_2^2 + \| q \|_2^2,$$

et on montre que  $B$  est coercive. Pour cela, on utilise (2.12)

$$\begin{aligned}
 & B((z, u, q); (z, u, q)) \\
 &= \rho_z \int_0^L z^2 dx + \alpha_1 \int_0^L z_x^2 dx + 2\alpha_2 \int_0^L u_x z_x dx + \rho_u \int_0^L u^2 dx + \alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx \\
 &+ \beta \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \int_0^L q u dx + c \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right)^2 \int_0^L \left( \int_x^L q(y) dy \right)^2 dx \\
 &+ \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \int_0^L q^2 dx - \beta \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \int_0^L u q dx. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

et le fait que

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \int_0^L z_x^2 dx + 2\alpha_2 \int_0^L u_x z_x dx + \alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx \\ &= (\alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}) \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L (\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x)^2 dx, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & B((z, u, q); (z, u, q)) \\ &= \rho_z \int_0^L z^2 dx + (\alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}) \int_0^L u_x^2 dx + \rho_u \int_0^L u^2 dx \\ &+ c(\frac{1 + \tau_0}{k})^2 \int_0^L (\int_x^L q(y) dy)^2 dx + \frac{1 + \tau_0}{k} \int_0^L q^2 dx. \end{aligned}$$

On pose  $M_0 = \min \left\{ \rho_z, \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}, \rho_u, \frac{1 + \tau_0}{k}, 1 \right\}$ , alors

$$\rho_z \geq M_0 \implies \rho_z \int_0^L z^2 dx \geq M_0 \int_0^L z^2 dx,$$

$$\alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \geq M_0 \implies (\alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}) \int_0^L u_x^2 dx \geq M_0 \int_0^L u_x^2 dx,$$

$$\rho_u \geq M_0 \implies \rho_u \int_0^L u^2 dx \geq M_0 \int_0^L u^2 dx,$$

$$\frac{1 + \tau_0}{k} \geq M_0 \implies (\frac{1 + \tau_0}{k}) \int_0^L q^2 dx \geq M_0 \int_0^L q^2 dx,$$

$$1 \geq M_0 \implies \int_0^L (\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x)^2 dx \geq M_0 \int_0^L (\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x)^2 dx.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 & |B((z, u, q); (z, u, q))| \\
 & \geq M_0 \|(z, u, q)\|_V^2 + c\left(\frac{1 + \tau_0}{k}\right)^2 \int_0^L \left(\int_x^L q(y) dy\right)^2 dx \\
 & \geq M_0 \|(z, u, q)\|_V^2,
 \end{aligned}$$

alors

$$|B((z, u, q); (z, u, q))| \geq M_0 \|(z, u, q)\|_V^2,$$

donc  $B$  est coercive.

Pour montrer que  $B$  est continue, il suffit de prouver que  $B$  est bornée sur  $V^2$ . Cela due du fait que  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in L^2(0, L)$  et  $z, u, q, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q} \in V$ , puis une simple application de l'inégalité de Young conduite au résultat désiré. On peut établir que  $\mathcal{G}$  est bornée sur  $V$  par le fait que  $z, u, q \in V$ .

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique  $(z, u, q) \in \tilde{H}_1(0, L) \times \tilde{H}_1(0, L) \times L^2(0, L)$  satisfait

$$B((z, u, q), (\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q})) = \mathcal{G}(\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q}), \quad \forall (\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{q}) \in V.$$

Remplaçant  $z, u, q$  dans (2.7)<sub>1</sub>, (2.7)<sub>3</sub> et (2.8), respectivement, on conclut

$$v \in \tilde{H}_1(0, L), \quad \psi \in \tilde{H}_1(0, L), \quad \theta \in \tilde{H}_*^1(0, L).$$

Si on prend  $(\tilde{u}, \tilde{q}) \equiv (0, 0) \in \tilde{H}_1(0, L) \times L^2(0, L)$ , alors (2.11) devenue

$$\rho_z \int_0^L z \tilde{z} dx + \alpha_1 \int_0^L z_x \tilde{z}_x dx + \alpha_2 \int_0^L u_x \tilde{z}_x dx = \int_0^L \mu_1 \tilde{z} dx, \quad \forall \tilde{z} \in \tilde{H}_1(0, L),$$

ou encore

$$\int_0^L (\alpha_1 z_x + \alpha_2 u_x) \tilde{z}_x = - \int_0^L (\rho_z z - \mu_1) \tilde{z} dx, \quad \forall \tilde{z} \in \tilde{H}_1(0, L). \quad (2.15)$$

Cette dernière est aussi vraie pour toute fonction  $\tilde{z}_1 \in C^1(0, L)$ ,  $\tilde{z}_1(0) = 0$  qui est dans  $\tilde{H}_1(0, L)$ , alors

$$\alpha_1 z_{xx} + \alpha_2 u_{xx} = \rho_z z - \mu_1 \in L^2(0, L). \quad (2.16)$$

Si on prend  $(\tilde{z}, \tilde{q}) \equiv (0, 0) \in \tilde{H}_1(0, L) \times L^2(0, L)$ , on obtient de (2.11)

$$\begin{aligned} & \rho_u \int_0^L u \tilde{u} dx + \alpha_3 \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \alpha_2 \int_0^L z_x \tilde{u}_x dx \\ & + \frac{\beta(1 + \tau_0)}{k} \int_0^L q \tilde{u} dx = \int_0^L \mu_2 \tilde{u} dx, \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{H}_1(0, L), \end{aligned}$$

ou bien

$$\int_0^L (\alpha_3 u_x + \alpha_2 z_x) \tilde{u}_x = - \int_0^L (\rho_u u + \frac{\beta(1 + \tau_0)}{k} q - \mu_2) \tilde{u} dx, \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{H}_1(0, L), \quad (2.17)$$

cette dernière est vraie pour toute  $\tilde{u}_1 \in C^1(0, L)$ ,  $\tilde{u}_1(0) \equiv 0$ , qui est dans  $\tilde{H}_1(0, L)$ , cela conduit à

$$\alpha_3 u_{xx} + \alpha_2 z_{xx} = \rho_u u + \frac{\beta(1 + \tau_0)}{k} q - \mu_2 \in L^2(0, L). \quad (2.18)$$

En combinant (2.16)+(2.18) et utilisant le fait que  $\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 \neq 0$ , on obtient  $z, u \in \tilde{H}_2(0, L)$ .

En suite (2.15) et (2.17) sont aussi juste pour toute

$$\phi \in K = \{f \in C^1(0, L); f(0) = 0\}.$$

En utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{cases} (\alpha_1 z_x + \alpha_2 u_x)(1) \phi(1) = 0 \\ (\alpha_3 u_x + \alpha_2 z_x)(1) \phi(1) = 0 \end{cases}, \quad \forall \phi \in K$$

Alors

$$(z_x)(1) = u_x(1) = 0.$$

Finalement, on a prouvé que  $z, u \in H_*^2$ .

Si on prend  $(\tilde{z}, \tilde{u}) \equiv (0, 0) \in \tilde{H}_1(0, L) \times \tilde{H}_1(0, L)$ , l'équation (2.11) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \tau_0}{k} \int_0^L (q - \beta u) \tilde{q} dx \\ & = - \int_0^L \left[ c \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right)^2 \left( \int_x^L q(y) dy \right) - \frac{1 + \tau_0}{k} \mu_3 \right] \left( \int_x^L \tilde{q}(y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{1 + \tau_0}{k}(-q_x + \beta u_x) = c \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right)^2 \left( \int_x^L q(y) dy \right) - \frac{1 + \tau_0}{k} \mu_3,$$

d'où

$$q_x = \beta u_x - c \left( \frac{1 + \tau_0}{k} \right) \left( \int_x^L q(y) dy \right) + \mu_3 \in L^2(0, L)$$

Ceci équivaut à dire que

$$q \in H_*^1.$$

De la relation (2.8) on conclut que

$$\theta \in \tilde{H}_*^1.$$

Enfin, on a montré qu'il existe un unique  $U \in D(\mathcal{A})$  tel que (2.6) est satisfait. Par conséquent, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est maximal dissipatif et d'après le théorème de Lumer-Phillips l'opérateur  $\mathcal{A}$  est générateur d'un semi-groupe fortement continu de contraction. Le résultat du théorème suit du théorème (1.5.1) ■

# Chapitre 3

## Stabilité exponentielle

Dans ce chapitre, on présente un résultat de stabilité exponentielle de la solution du problème considéré en utilisant la méthode d'énergie. Pour cela, on a besoin de quelques résultats nécessaires qui nous aident par la suite pour atteindre notre objectif.

### 3.1 Décroissance de L'énergie

**Lemme 3.1.1** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  est une solution du problème (2). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (2.3) satisfait*

$$E'(t) = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx \leq 0. \quad (3.1)$$

**Preuve.** En multipliant (2)<sub>1</sub>, (2)<sub>2</sub>, (2)<sub>3</sub> et (2)<sub>4</sub>, respectivement, par  $z_t$ ,  $u_t$ ,  $\theta$  et  $\frac{1}{k}q$ . Puis, on intègre sur l'intervalle  $(0, L)$ , on obtient

$$\begin{cases} \rho_z \int_0^L z_{tt} z_t dx = \alpha_1 \int_0^L z_{xx} z_t dx + \alpha_2 \int_0^L u_{xx} z_t dx, \\ \rho_u \int_0^L u_{tt} u_t dx = \alpha_3 \int_0^L u_{xx} u_t dx + \alpha_2 \int_0^L z_{xx} u_t dx + \beta \int_0^L \theta_x u_t dx, \\ c \int_0^L \theta_t \theta dx = - \int_0^L q_x \theta dx + \beta \int_0^L u_{tx} \theta dx, \\ \frac{\tau_0}{k} \int_0^L q_t q dx = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx - \int_0^L \theta_x q dx, \end{cases}$$

intégrant par partie et exploitant les conditions aux limites, on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_z \frac{d}{2dt} \int_0^L z_t^2 dx = -\alpha_1 \int_0^L z_x z_{tx} dx - \alpha_2 \int_0^L u_x z_{tx} dx, \\ \rho_u \frac{d}{2dt} \int_0^L u_t^2 dx = -\alpha_3 \int_0^L u_x u_{tx} dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_{tx} dx + \beta \int_0^L \theta_x u_t dx, \\ c \frac{d}{2dt} \int_0^L \theta^2 dx = -\int_0^L q_x \theta dx - \beta \int_0^L u_t \theta_x dx, \\ \frac{\tau_0}{k} \frac{d}{2dt} \int_0^L q^2 dx = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx + \int_0^L \theta q_x dx, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_z \frac{d}{2dt} \int_0^L z_t^2 dx = -\alpha_1 \frac{d}{2dt} \int_0^L z_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L u_x z_{tx} dx, \\ \rho_u \frac{d}{2dt} \int_0^L u_t^2 dx = -\alpha_3 \frac{d}{2dt} \int_0^L u_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_{tx} dx + \beta \int_0^L \theta_x u_t dx, \\ c \frac{d}{2dt} \int_0^L \theta^2 dx = -\int_0^L q_x \theta dx - \beta \int_0^L u_t \theta_x dx, \\ \frac{\tau_0}{k} \frac{d}{2dt} \int_0^L q^2 dx = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx + \int_0^L \theta q_x dx, \end{array} \right.$$

on fait la somme des quatres équations du système ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt} \int_0^L \left( \rho_z z_t^2 + \rho_u u_t^2 + c\theta^2 + \frac{\tau_0}{k} q^2 + \alpha_1 z_x^2 + \alpha_3 u_x^2 \right) dx \\ & + \alpha_2 \int_0^L (u_x z_{tx} + z_x u_{tx}) dx = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx. \end{aligned}$$

Note que

$$\alpha_2 \int_0^L (u_x z_{tx} + z_x u_{tx}) dx = 2\alpha_2 \frac{d}{2dt} \int_0^L u_x z_x dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt} \int_0^L \left( \rho_z z_t^2 + \rho_u u_t^2 + c\theta^2 + \frac{\tau_0}{k} q^2 + \alpha_1 z_x^2 + \alpha_3 u_x^2 + 2\alpha_2 u_x z_x \right) dx \quad (3.3) \\ & = -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} & \alpha_3 u_x^2 + \alpha_1 z_x^2 + 2\alpha_2 z_x u_x \\ &= \chi u_x^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Insertant (3.4) dans (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt} \int_0^L \left( \rho_z z_t^2 + \rho_u u_t^2 + c\theta^2 + \frac{\tau_0}{k} q^2 + \chi u_x^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 \right) dx \\ &= -\frac{1}{k} \int_0^L q^2 dx \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. ■

## 3.2 Fonctionnelle de Lyapunov

Afin de construire la fonctionnelle de Lyapunov pour atteindre notre objectif, on a besoin des lemmes suivants

**Lemme 3.2.1** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, la fonctionnelle  $I_1(t)$  définie par*

$$I_1(t) = \rho_u \int_0^L u u_t dx - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u dx \quad (3.5)$$

satisfait pour  $\varepsilon_1 > 0$ , l'estimation suivante

$$\begin{aligned} I_1'(t) &\leq -\frac{1}{2} \chi \int_0^L u_x^2 dx + \left( \rho_u + \frac{\alpha_2^2 \rho_z^2}{u \alpha_1^2 \varepsilon_1} \right) \int_0^L u_t^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_1 \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2\chi} \int_0^L \theta^2 dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Preuve.** Multipliant (2)<sub>2</sub> par  $u$  et intégrant par partie sur  $(0, L)$ , on obtient

$$\rho_u \int_0^L u_{tt} u dx = -\alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx - \beta \int_0^L \theta u_x dx,$$

cette dernière est équivalente à

$$\begin{aligned} & \rho_u \int_0^L u_{tt} u dx + \rho_u \int_0^L u_t^2 dx - \rho_u \int_0^L u_t^2 dx \\ &= -\alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx - \beta \int_0^L \theta u_x dx, \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho_u \frac{d}{dt} \int_0^L u u_t dx = \rho_u \int_0^L u_t^2 dx - \alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx - \beta \int_0^L \theta u_x dx. \quad (3.7)$$

Multipliant (2)<sub>1</sub> par  $\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} u$  et intégrant sur  $(0, L)$ , on arrive à

$$\begin{aligned} & \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_{tt} u dx - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx \\ &= -\alpha_2 \int_0^L z_{xx} u dx - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \int_0^L u_{xx} u dx, \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \frac{d}{dt} \left( \int_0^L z_t u dx \right) = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \left( \int_0^L z_t u_t dx \right) - \alpha_2 \int_0^L z_{xx} u dx - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \int_0^L u_{xx} u dx,$$

Intégrant par partie, on peut écrire

$$\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \frac{d}{dt} \int_0^L z_t u dx = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx + \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \int_0^L u_x^2 dx. \quad (3.8)$$

On fait la somme de (3.7) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[ \rho_u \int_0^L uu_t dx - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u dx \right] \\
 &= - \left( \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \right) \int_0^L u_x^2 dx + \rho_u \int_0^L u_t^2 dx \\
 & \quad - \beta \int_0^L \theta u_x dx - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx \leq \varepsilon_1 \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\alpha_2^2 \rho_z^2}{4\alpha_1^2 \varepsilon_1} \int_0^L u_t^2 dx, \tag{3.10}$$

$$-\beta \int_0^L \theta u_x dx \leq \frac{\beta^2}{2\chi} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{1}{2}\chi \int_0^L u_x^2 dx. \tag{3.11}$$

Insertant (3.10) et (3.11) dans (3.9), on arrive à

$$\begin{aligned}
 I_1'(t) &\leq -\frac{1}{2}\chi \int_0^L u_x^2 dx + \left( \rho_u + \frac{\alpha_2^2 \rho_z^2}{u\alpha_1^2 \varepsilon_1} \right) \int_0^L u_t^2 dx \\
 & \quad + \varepsilon_1 \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2\chi} \int_0^L \theta^2 dx.
 \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.2.2** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, la fonctionnelle  $I_2(t)$  définie par*

$$I_2(t) = \rho_u \alpha_2 \int_0^L u_t \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u + \sqrt{\alpha_1} z \right) dx - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u + \sqrt{\alpha_1} z \right) dx$$

satisfait pour  $\varepsilon_2 > 0$ , l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 I'_2(t) &\leq -\frac{\alpha_2^2 \rho_z}{2\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_t^2 dx + \left( \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2\alpha_2^2 \rho_z} \xi^2 + \frac{\alpha_2^2 \rho_u}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\alpha_2^2 \beta^2}{2\varepsilon_2} \int_0^L \theta^2 dx \\
 &\quad + \frac{\alpha_2^2 \chi^2}{2\varepsilon_2} \int_0^L u_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx, \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

où  $\xi = \alpha_2(\rho_u \sqrt{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1}} \rho_z)$ .

**Preuve.** multipliant (2)<sub>1</sub> par  $\frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u$  et intégrant par partie sur  $(0, L)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 &\rho_u \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_{tt} u dx + \rho_u \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_t^2 dx - \rho_u \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_t^2 dx \\
 &= -\alpha_3 \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_x^2 dx - \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_x u_x dx - \beta \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L \theta u_x dx,
 \end{aligned}$$

cette dernière peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \rho_u \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_t u dx \right] &= \rho_u \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_t^2 dx - \alpha_3 \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_x^2 dx \\
 &\quad - \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_x u_x dx - \beta \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L \theta u_x dx. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Multipliant (2)<sub>2</sub> par  $\sqrt{\alpha_1} \alpha_2 z$  et on intègre par partie sur  $(0, L)$ , on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \rho_u \sqrt{\alpha_1} \alpha_2 \int_0^L u_t z \right] dx &= \rho_u \sqrt{\alpha_1} \alpha_2 \int_0^L z_t u_t dx - \alpha_3 \sqrt{\alpha_1} \alpha_2 \int_0^L u_x z_x dx \\
 &\quad - \alpha_2^2 \sqrt{\alpha_1} \int_0^L z_x^2 dx - \beta \sqrt{\alpha_1} \alpha_2 \int_0^L \theta z_x dx. \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Multipliant (2)<sub>1</sub> par  $-\frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1}u$  et en intégrant par partie sur  $(0, L)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1}\rho_z \int_0^L z_{tt}u dx - \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1}\rho_z \int_0^L z_t u_t dx + \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1}\rho_z \int_0^L z_t u_t dx \\ & = \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_x u_x dx + \frac{\alpha_2^4}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1} \int_0^L u_x^2 dx, \end{aligned}$$

ceci équivalent à

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\rho_z \int_0^L z_t \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}}u \right) dx \\ & = -\frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1}\rho_z \int_0^L z_t u_t dx + \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_x u_x dx + \frac{\alpha_2^4}{\sqrt{\alpha_1}\alpha_1} \int_0^L u_x^2 dx. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Multipliant (2)<sub>1</sub> par  $-\frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}}z$  et en intégrant par partie sur  $(0, L)$ , , on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}}\rho_z \int_0^L z_{tt}z dx - \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}}\rho_z \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}}\rho_z \int_0^L z_t^2 dx \\ & = \alpha_2^2\sqrt{\alpha_1} \int_0^L z_x^2 dx + \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_x z_x dx, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\rho_z \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{\alpha_1} \int_0^L z_t z dx \right] \\ & = -\frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}}\rho_z \int_0^L z_t^2 dx - \alpha_2^2\sqrt{\alpha_1} \int_0^L z_x^2 dx + \frac{\alpha_2^3}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L u_x z_x dx. \quad (3.16) \end{aligned}$$

On fait la somme de (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[ \rho_u \alpha_2 \int_0^L u_t \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u + \sqrt{\alpha_1} z \right) dx - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L z_t \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u + \sqrt{\alpha_1} z \right) dx \right] \\
 &= -\frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \rho_z \int_0^L z_t^2 dx + \alpha_2 (\rho_u \sqrt{\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1}} \rho_z) \int_0^L u_t z_t dx \\
 &\quad - \alpha_2 \chi \int_0^L u_x \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx \\
 &\quad + \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \rho_u \int_0^L u_t^2 dx - \alpha_2 \beta \int_0^L \theta \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
 \xi \int_0^L u_t z_t dx &= \int_0^L \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2 \sqrt{\rho_z}} |\xi| |u_t| \frac{\alpha_2 \sqrt{\rho_z}}{\sqrt{\alpha_1}} |z_t| dx \\
 &\leq \frac{\alpha_2^2 \rho_z}{2\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2\alpha_2^2 \rho_z} \xi^2 \int_0^L u_t^2 dx, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \alpha_2 \chi \int_0^L u_x \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx \\
 & \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx + \frac{\alpha_2^2 \chi^2}{2\varepsilon_2} \int_0^L u_x^2 dx \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \alpha_2 \beta \int_0^L \theta \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx \\
 & \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx + \frac{\alpha_2^2 \beta^2}{2\varepsilon_2} \int_0^L \theta^2 dx. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Remplaçant (3.18)-(3.20) dans (3.17), on obtient

$$\begin{aligned}
 I_2'(t) \leq & -\frac{\alpha_2^2 \rho_z}{2\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L z_t^2 dx + \left( \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2\alpha_2^2 \rho_z} \xi^2 + \frac{\alpha_2^2 \rho_u}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\alpha_2^2 \beta^2}{2\varepsilon_2} \int_0^L \theta^2 dx \\
 & + \frac{\alpha_2^2 \chi^2}{2\varepsilon_2} \int_0^L u_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx.
 \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.2.3** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, la fonctionnelle  $I_3(t)$  définie par*

$$I_3(t) = \rho_z \int_0^L u_t u dx + \rho_z \int_0^L z_t z dx,$$

satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 I_3'(t) \leq & -\int_0^L \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx - \frac{1}{2} \chi \int_0^L u_x^2 dx \\
 & + \rho_u \int_0^L u_t^2 dx + \rho_z \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2\chi} \int_0^L \theta^2 dx. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

**Preuve.** Multipliant (2)<sub>2</sub> par  $u$  et en intégrant par partie sur  $(0, L)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \rho_u \int_0^L u_t u dx + \rho_u \int_0^L u_t^2 dx - \rho_u \int_0^L u_t^2 dx \\
 & = -\alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx - \beta \int_0^L \theta u_x dx,
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho_u \frac{d}{dt} \int_0^L u_t u dx = \rho_u \int_0^L u_t^2 dx - \alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx - \beta \int_0^L \theta u_x dx. \quad (3.22)$$

Multipliant (2)<sub>1</sub> par  $z$  et en intégrant par partie sur  $(0, L)$ , on obtient

$$\rho_z \int_0^L z_{tt} z dx + \rho_z \int_0^L z_t^2 dx - \rho_z \int_0^L z_t^2 dx = \alpha_1 \int_0^L z_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx,$$

d'où

$$\rho_z \frac{d}{dt} \int_0^L z_t z dx = \rho_z \int_0^L z_t^2 dx - \alpha_1 \int_0^L z_x^2 dx - \alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx. \quad (3.23)$$

On fait la somme de (3.22), (3.23) et utilisant le fait que

$$\begin{aligned} & \alpha_3 u_x^2 + \alpha_1 z_x^2 + 2\alpha_2 z_x u_x \\ &= \chi u_x^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2, \end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \rho_z \int_0^L u_t u dx + \rho_z \int_0^L z_t z dx \right] \\ &= -\alpha_1 \int_0^L z_x^2 dx - 2\alpha_2 \int_0^L z_x u_x dx - \alpha_3 \int_0^L u_x^2 dx - \beta \int_0^L \theta u_x dx \\ &= -\beta \int_0^L \theta u_x dx + \rho_z \int_0^L z_t^2 dx - \int_0^L \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx \\ & \quad - \chi \int_0^L u_x^2 dx + \rho_u \int_0^L u_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Appliquant l'inégalité de Young

$$-\beta \int_0^L \theta u_x dx \leq \frac{\beta^2}{2\chi} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{1}{2}\chi \int_0^L u_x^2 dx. \quad (3.25)$$

Remplaçant (3.25) dans (3.24), on trouve

$$\begin{aligned} I'_3(t) \leq & - \int_0^L \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx - \frac{1}{2} \chi \int_0^L u_x^2 dx \\ & + \rho_u \int_0^L u_t^2 dx + \rho_z \int_0^L z_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2\chi} \int_0^L \theta^2 dx. \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.2.4** Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, la fonctionnelle  $I_4(t)$  définie par

$$I_4(t) = -c\rho_u \int_0^L \theta \left( \int_x^L u_t(y) dy \right) dx,$$

satisfait pour  $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$  l'estimation suivante

$$\begin{aligned} I'_4(t) \leq & -\frac{\beta\rho_u}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L u_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx \\ & + \frac{\rho_u}{2\beta} \int_0^L q^2 dx + \left( \beta c + \frac{c^2 \chi^2}{4\varepsilon_3} + \frac{c^2 \alpha_2^2}{4\alpha_1 \varepsilon_4} \right) \int_0^L \theta^2 dx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

**Preuve.** Multipliant (2)<sub>3</sub> par  $-\rho_u \int_x^L u_t(y) dy$  et on intègre par partie sur  $(0, L)$ , on arrive à

$$\begin{aligned} & -c\rho_u \int_0^L \theta_t \left( \int_x^L u_t(y) dy \right) dx - c\rho_u \int_0^L \theta \left( \int_x^L u_{tt}(y) dy \right) dx + c\rho_u \int_0^L \theta \left( \int_x^L u_{tt}(y) dy \right) dx \\ & = \rho_u \int_0^L q u_t dx - \beta\rho_u \int_0^L u_t^2 dx, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & -c\rho_u \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \left( \int_x^L u_t(y) dy \right) dx \\ & = -\beta\rho_u \int_0^L u_t^2 dx + \rho_u \int_0^L q u_t dx - c \int_0^L \theta \int_x^L [\alpha_3 u_{yy} + \alpha_2 z_{yy} + \beta \theta_y] dy dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 I_4'(t) &= -\beta\rho_u \int_0^L u_t^2 dx + \rho_u \int_0^L qu_t dx - c \int_0^L \theta [-\alpha_3 u_x - \alpha_2 z_x - \beta\theta] dx \\
 &= -\beta\rho_u \int_0^L u_t^2 dx + \rho_u \int_0^L qu_t dx + \alpha_3 c \int_0^L \theta u_x dx + \alpha_2 c \int_0^L \theta z_x dx \\
 &\quad + \beta c \int_0^L \theta^2 dx,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

avec

$$I_4(t) = -c\rho_u \int_0^L \theta \left( \int_x^L u_t(y) dy \right) dx,$$

utilisant la transformation suivante

$$\begin{aligned}
 &\alpha_3 c \int_0^L \theta u_x dx + \alpha_2 c \int_0^L \theta z_x dx \\
 &= c\chi \int_0^L \theta u_x dx + c \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L \theta \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx,
 \end{aligned}$$

alors, on peut écrire (3.27) comme suit

$$\begin{aligned}
 I_4'(t) &= -\beta\rho_u \int_0^L u_t^2 dx + \rho_u \int_0^L qu_t dx + c\chi \int_0^L \theta u_x dx \\
 &\quad + c \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L \theta \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx + \beta c \int_0^L \theta^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Utilisant l'inégalité de Young

$$c\chi \int_0^L \theta u_x dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L u_x^2 dx + \frac{c^2 \chi^2}{4\varepsilon_3} \int_0^L \theta^2 dx, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 & c \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^L \theta \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right) dx \\
 & \leq \varepsilon_4 \int_0^L \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx + \frac{c^2 \alpha_2^2}{4\alpha_1 \varepsilon_4} \int_0^L \theta^2 dx, \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

$$\rho_u \int_0^L q u_t dx \leq \frac{\rho_u}{2\beta} \int_0^L q^2 dx + \frac{\rho_u \beta}{2} \int_0^L u_t^2 dx \tag{3.31}$$

Insertant (3.29), (3.30) et (3.31) dans (3.28), on obtient

$$\begin{aligned}
 I_4'(t) & \leq -\frac{\beta \rho_u}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L u_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^L \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx \\
 & + \frac{\rho_u}{2\beta} \int_0^L q^2 dx + \left( \beta c + \frac{c^2 \chi^2}{4\varepsilon_3} + \frac{c^2 \alpha_2^2}{4\alpha_1 \varepsilon_4} \right) \int_0^L \theta^2 dx.
 \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.2.5** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, la fonctionnelle  $I_5(t)$  définie par*

$$I_5(t) = -c \rho_u \int_0^L \theta \left( \int_x^L u_t(y) dy \right) dx,$$

satisfait pour  $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ , l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 I_5'(t) & \leq -\frac{\beta \rho_u}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L u_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^L \left( \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx \\
 & + \frac{\rho_u}{2\beta} \int_0^L q^2 dx + \left( \beta c + \frac{c^2 \chi^2}{4\varepsilon_3} + \frac{c^2 \alpha_2^2}{4\alpha_1 \varepsilon_4} \right) \int_0^L \theta^2 dx. \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

**Preuve.** Multipliant (2)<sub>3</sub> par  $-\tau_0 \int_x^L q(y) dy$  et intégrant par partie sur

(0, L), on obtient

$$\begin{aligned}
 & -c\tau_0 \int_0^L \theta_t \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx - c\tau_0 \int_0^L \theta \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx \\
 & + c\tau_0 \int_0^L \theta \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx \\
 & = \tau_0 \int_0^L q^2 dx - \tau_0 \beta \int_0^L u_t q dx,
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[ -c\tau_0 \int_0^L \theta \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx \right] \\
 & = \tau_0 \int_0^L q^2 dx - \tau_0 \beta \int_0^L u_t q dx \\
 & - c \int_0^L \theta \left[ \int_x^L (-q(y) - k\theta_y) dy \right] dx,
 \end{aligned}$$

d'où

$$I'_5(t) = \tau_0 \int_0^L q^2 dx - \beta\tau_0 \int_0^L u_t q dx + c \int_0^L \theta \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx - kc \int_0^L \theta^2 dx, \tag{3.33}$$

avec

$$I_5(t) = -c\tau_0 \int_0^L \theta \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx.$$

Appliquant l'inégalité de Young, on arrive à

$$-\beta\tau_0 \int_0^L u_t q dx \leq \varepsilon_5 \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\beta^2\tau_0^2}{4\varepsilon_5} \int_0^L q^2 dx. \tag{3.34}$$

### 3.3. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTIONNELLE DE LYAPUNOV

---

Appliquant l'égalité de Young et celle de Cauchy Schwarz, on obtient

$$c \int_0^L \theta \left( \int_x^L q(y) dy \right) dx \leq \frac{ck}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{c}{2k} \int_0^L q^2 dx. \quad (3.35)$$

Remplaçant (3.35) et (3.34) dans (3.33), on trouve

$$I'_5(t) \leq -\frac{kc}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \left( \tau_0 + \frac{c}{2k} + \frac{\beta^2 \tau_0^2}{4\varepsilon_5} \right) \int_0^L q^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^L u_t^2 dx.$$

Ce qui complète la preuve. ■

Maintenant on définit la fonctionnelle de Lyapunov  $L(t)$  comme suit

$$L(t) = NE(t) + N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + 2I_3(t) + N_3 I_4(t) + N_4 I_5(t) \quad (3.36)$$

où  $N, N_1, N_2, N_3, N_4$  sont des constantes positives.

### 3.3 Propriétés de la fonctionnelle de Lyapunov

Avant d'établir le résultat de la stabilité exponentielle, on montre d'abord la relation entre la fonctionnelle de Lyapunov et la fonctionnelle d'énergie.

**Théorème 3.3.1** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, il existe deux constantes positives  $k_1$  et  $k_2$  telles que la fonctionnelle  $L(t)$  satisfait*

$$k_1 E(t) \leq L(t) \leq k_2 E(t) \quad (3.37)$$

et

$$L'(t) \leq -\beta_1 E(t), \quad \beta_1 > 0. \quad (3.38)$$

**Preuve.** De (3.36), on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & |L(t) - NE(t)| \\
 &= N_1 |I_1(t)| + N_2 |I_2(t)| + 2 |I_3(t)| + N_3 |I_4(t)| + N_4 |I_5(t)| \\
 &\leq N_1 \rho_u \int_0^L |u_t| |u| dx + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho_z \int_0^L |z_t| |u| dx \\
 &+ \rho_u \alpha_2 N_2 \int_0^L |u_t| \left| \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u + \sqrt{\alpha_1} z \right| dx \\
 &+ \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \rho_z N_2 \int_0^L |z_t| \left| \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u + \sqrt{\alpha_1} z \right| dx \\
 &+ 2\rho_u \int_0^L |u| |u_t| dx + 2\rho_z \int_0^L |z| |z_t| dx \\
 &+ N_3 c \rho_u \int_0^L |\theta| \left( \int_x^l |u_t(y)| dy \right) dx \\
 &+ N_4 c \tau_0 \int_0^L |\theta| \left( \int_x^l |q(y)| dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy Schwarz

$$|L(t) - NE(t)| \leq \tau E(t), \quad \tau > 0,$$

cela conduit à

$$(N - \tau) E(t) \leq L(t) \leq (N + \tau) E(t).$$

En choisissant  $N$  suffisamment large et dépend des  $N_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , on trouve (3.37).

En dérivant  $L(t)$  et en exploitant (3.1), (3.6), (3.12), (3.21), (3.26) et

### 3.3. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTIONNELLE DE LYAPUNOV

---

(3.32), on obtient

$$\begin{aligned}
 L'(t) \leq & - \left( \frac{\beta \rho_u}{2} N_3 - N_1 \left( \rho_u + \frac{\alpha_2^2 \rho_z^2}{4\alpha_1^2 \varepsilon_1} \right) - \left( \frac{\sqrt{\alpha_1} \xi^2}{2\alpha_2^2 \rho_z} + \frac{\alpha_2^2 \rho_u}{\sqrt{\alpha_1}} \right) N_2 \right. \\
 & - 2\rho_u - N_4 \varepsilon_5 \left. \int_0^L u_t^2 dx \right. \\
 & - \left( \left( 1 + \frac{N_1}{2} \right) \chi - \frac{\alpha_2^2 \chi^2}{2\varepsilon_2} N_2 - N_3 \varepsilon_3 \right) \int_0^L u_x^2 dx \\
 & - \left( N_2 \frac{\alpha_2^2 \rho_z}{2\sqrt{\alpha_1}} - N_1 \varepsilon_1 - 2\rho_z \right) \int_0^L z_t^2 dx \\
 & - (2 - N_2 \varepsilon_2 - N_3 \varepsilon_4) \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx \\
 & - \left( N_4 \frac{kc}{2} - N_1 \frac{\beta^2}{2\chi} - N_2 \frac{\alpha_2^2 \beta^2}{2\varepsilon_2} - \frac{\beta^2}{\chi} - N_3 \frac{c^2 \alpha_2^2}{4\alpha_1 \varepsilon_4} \right) \int_0^L \theta^2 dx \\
 & - \left( \frac{N}{k} - N_3 \frac{\rho_u}{2\beta} - N_4 \left( \tau_0 + \frac{c}{2k} + \frac{\beta^2 \tau_0^2}{4\varepsilon_5} \right) \right) \int_0^L q^2 dx,
 \end{aligned}$$

on prend

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{N_1}; \varepsilon_2 = \frac{1}{2N_2}; \varepsilon_3 = \frac{1}{N_3}; \varepsilon_4 = \frac{1}{2N_3}; \varepsilon_5 = \frac{1}{N_4},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 L'(t) \leq & - \left( \frac{\beta \rho_u}{2} N_3 - N_1 \left( \rho_u + \frac{N_1 \alpha_2^2 \rho_z^2}{4 \alpha_1^2} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\sqrt{\alpha_1} \xi^2}{2 \alpha_2^2 \rho_z} + \frac{\alpha_2^2 \rho_u}{\sqrt{\alpha_1}} \right) N_2 - 2 \rho_u - 1 \int_0^L u_t^2 dx \\
 & - \left( \left( 1 + \frac{N_1}{2} \right) \chi - \alpha_2^2 \chi^2 N_2^2 - 1 \right) \int_0^L u_x^2 dx \\
 & - \left( N_2 \frac{\alpha_2^2 \rho_z}{2 \sqrt{\alpha_1}} - 1 - 2 \rho_z \right) \int_0^L z_t^2 dx \\
 & - \int_0^L \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 dx \\
 & - \left( \left( N_4 \frac{kc}{2} - N_1 \frac{\beta^2}{2 \chi} - N_2^2 \alpha_2^2 \beta^2 - \frac{\beta^2}{\chi} - N_3^2 \frac{c^2 \alpha_2^2}{2 \alpha_1} \right) \int_0^L \theta^2 dx \right. \\
 & \left. - \left( \frac{N}{k} - N_3 \frac{\rho_u}{2 \beta} - N_4 \left( \tau_0 + \frac{c}{2k} + N_4 \frac{\beta^2 \tau_0^2}{4} \right) \right) \int_0^L q^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

On choisit  $N_2$  suffisamment large pour que

$$\xi_1 = N_2 \frac{\alpha_2^2 \rho_z}{2 \sqrt{\alpha_1}} - 1 - 2 \rho_z > 0.$$

On fixe  $N_1$  de sorte que

$$\xi_2 = \left( 1 + \frac{N_1}{2} \right) \chi - \alpha_2^2 \chi^2 N_2^2 - 1 > 0.$$

On prend  $N_3$  large pour que

$$\xi_3 = \frac{\beta \rho_u}{2} N_3 - N_1 \left( \rho_u + \frac{N_1 \alpha_2^2 \rho_z^2}{4 \alpha_1^2} \right) - \left( \frac{\sqrt{\alpha_1} \xi^2}{2 \alpha_2^2 \rho_z} + \frac{\alpha_2^2 \rho_u}{\sqrt{\alpha_1}} \right) N_2 - 2 \rho_u - 1 > 0.$$

On prend  $N_4$  large pour que

$$\xi_4 = N_4 \frac{kc}{2} - N_1 \frac{\beta^2}{2 \chi} - N_2^2 \alpha_2^2 \beta^2 - \frac{\beta^2}{\chi} - N_3^2 \frac{c^2 \alpha_2^2}{2 \alpha_1} > 0.$$

### 3.4. RÉSULTAT PRINCIPAL DE LA STABILITÉ

Finalement, on choisit  $N$  large ((3.37) reste valide) de sorte que

$$\xi_5 = \frac{N}{k} - N_3 \frac{\rho_u}{2\beta} - N_4 \left( \tau_0 + \frac{c}{2k} + \frac{\beta^2 \tau_0^2}{4\varepsilon_5} \right) > 0.$$

On arrive à

$$'(t) \leq -\zeta_1 \int_0^L \left( z_t^2 + u_x^2 + u_t^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 + \theta^2 + q^2 \right) dx, \quad (3.39)$$

où  $\zeta_1 = \min \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5 \} > 0$ .

On pose  $\zeta_2 = \max \left\{ \frac{\rho_z}{2}, \frac{\rho_u}{2}, \frac{1}{2}\chi, \frac{1}{2}, \frac{c}{2}, \frac{\tau_0}{2k} \right\} > 0$ . Alors

$$\int_0^L \left( z_t^2 + u_x^2 + u_t^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 + \theta^2 + q^2 \right) dx \geq \frac{1}{\zeta_2} E(t),$$

d'où

$$-\zeta_1 \int_0^L \left( z_t^2 + u_x^2 + u_t^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} u_x + \sqrt{\alpha_1} z_x \right)^2 + \theta^2 + q^2 \right) dx \leq -\frac{\zeta_1}{\zeta_2} E(t),$$

d'après (3.39), on obtient (3.38) avec  $\beta_1 = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} > 0$ . ■

## 3.4 Résultat principal de la stabilité

Maintenant on peut énoncer et prouver le résultat de la stabilité exponentielle

**Lemme 3.4.1** *Soit  $(z, u, \theta, q)$  une solution du problème (2). Alors, pour chaque  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , il existe deux constantes positives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  telles que*

$$E(t) \leq \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.40)$$

**Preuve.** On a d'après (3.38)

$$'(t) \leq -\beta_1 E(t), \quad t \geq 0,$$

Prenant en compte l'équivalence entre  $E(t)$  et  $L(t)$ , on peut écrire

$$L'(t) \leq -\lambda_1 L(t), \quad t \geq 0, \quad (3.41)$$

où  $\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\kappa_2}$ . Une simple intégration de (3.41) donne

$$L(t) \leq L(0)e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0,$$

ce qui conduit au résultat désiré (3.40) avec  $\lambda_2 = \frac{L(0)}{\kappa_1}$  et utilisant une autre fois le coté gauche de la relation d'équivalence(3.37). ■

# Chapitre 4

## Test numérique

Dans ce chapitre, on va résoudre numériquement le système (??) dans un domaine unidimensionnel  $\Omega$  de longueur  $L$ . Pour cela on a utilisé le schéma d'Euler pour la discrétisation de la variable temporelle et la méthode classique des différences finis pour la discrétisation de la variable spatiale. De plus, afin de vérifier le comportement asymptotique de la solution du problème discrétisé, on a donné quelques exemples dans lesquels les expériences numériques montrent que l'énergie discrète  $E^n$  décroît d'une manière exponentielle pour des différents choix des paramètres du système.

### 4.1 Discrétisation du problème

On pose  $\hat{z} = z_t$ ,  $\hat{u} = u_t$  et pour chaque  $M, N \in \mathbb{N}$ , on introduit les noeuds suivants :

$$\Omega_N = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N + 1 \text{ where } h = \frac{L}{N + 1}\},$$
$$\Gamma_M = \{t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, M + 1 \text{ where } \Delta t = \frac{T}{M + 1}\}.$$

En appliquant le schéma d'Euler explicite pour la discrétisation de la variable en temps et la méthode des différences finis pour discrétiser la variable spatiale. Notre problème est de trouver  $(\hat{z}_i^n, \hat{u}_i^n, \theta_i^n, q_i^n)$  satisfaisant le

schéma numérique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_z}{\Delta t} (\widehat{z}_i^n - \widehat{z}_i^{n-1}) = \frac{\alpha_1}{h^2} (z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n) + \frac{\alpha_2}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \\ \frac{\rho_u}{\Delta t} (\widehat{u}_i^n - \widehat{u}_i^{n-1}) = \frac{\alpha_3}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{\alpha_2}{h^2} (z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n) \\ + \frac{\beta}{2h} (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n), \\ \frac{c}{\Delta t} (\theta_i^n - \theta_i^{n-1}) = \frac{-1}{h} (q_i^n - q_{i-1}^n) + \frac{\beta}{2h} (\widehat{u}_{i+1}^n - \widehat{u}_{i-1}^n), \\ \frac{\tau_0}{\Delta t} (q_i^n - q_i^{n-1}) = -q_i^n - \frac{k}{2h} (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, N$  et  $n = 1, 2, \dots, M$ . Pour simplifier les calculs numériques dans le schéma utilisé, on considère les conditions aux limites discrétisées suivante

$$z_0^n = u_0^n = \theta_{N+1}^n = q_0^n = 0, \quad z_{N+1}^n = z_N^n, \quad u_{N+1}^n = u_N^n, \quad \theta_1^n = \theta_0^n, \quad (4.2)$$

et les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i^0 = z_0(x_i), \quad u_i^0 = u_0(x_i), \quad \theta_i^0 = \theta_0(x_i), \quad q_i^0 = q_0(x_i), \\ \widehat{z}_i^0 = z_1(x_i) \text{ et } \widehat{u}_i^0 = u_1(x_i) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où

$$z_i^n = z_i^{n-1} + \Delta t \widehat{z}_i^n \text{ et } u_i^n = u_i^{n-1} + \Delta t \widehat{u}_i^n$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, N$  et  $n = 1, 2, \dots, M$ .

On note que pour obtenir  $\{\widehat{z}^n, \widehat{u}^n, \theta^n, q^n\}$ , on est besoin de résoudre quatre systèmes couplés d'équations algébriques. Alors, pour résoudre le (4.1)-(4.3) a chaque pas de temps, on propose d'utiliser l'algorithme de point fixe suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{z}_i^{n,l} = \frac{\alpha_1 \Delta t}{\rho_z h^2} (z_{i+1}^{n,l-1} - 2z_i^{n,l-1} + z_{i-1}^{n,l-1}) + \frac{\alpha_2 \Delta t}{\rho_z h^2} (u_{i+1}^{n,l-1} - 2u_i^{n,l-1} + u_{i-1}^{n,l-1}) \\ + \widehat{z}_i^{n-1}, \\ \widehat{u}_i^{n,l} = \frac{\alpha_3 \Delta t}{\rho_u h^2} (u_{i+1}^{n,l-1} - 2u_i^{n,l-1} + u_{i-1}^{n,l-1}) + \frac{\alpha_2 \Delta t}{\rho_u h^2} (z_{i+1}^{n,l} - 2z_i^{n,l} + z_{i-1}^{n,l}) \\ + \frac{\beta \Delta t}{2\rho_u h} (\theta_{i+1}^{n,l-1} - \theta_{i-1}^{n,l-1}) + \widehat{u}_i^{n-1}, \\ \theta_i^{n,l} = \theta_i^{n-1} + \frac{-\Delta t}{ch} (q_i^{n,l-1} - q_{i-1}^{n,l-1}) + \frac{\beta \Delta t}{2ch} (\widehat{u}_{i+1}^{n,l} - \widehat{u}_{i-1}^{n,l}) \\ (1 + \frac{\Delta t}{\tau_0}) q_i^{n,l} = -\frac{k \Delta t}{2h \tau_0} (\theta_{i+1}^{n,l} - \theta_{i-1}^{n,l}) + q_i^{n-1}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

## 4.2. ENERGIE DISCRÈTE ET QUELQUES EXEMPLES NUMÉRIQUES

avec

$$\begin{cases} z_i^{n,0} = z_i^{n-1}, & u_i^{n,0} = u_i^{n-1}, & \theta_i^{n,0} = \theta_i^{n-1}, & q_i^{n,0} = q_i^{n-1}, & z_i^{n,l} = z_i^{n-1} + \Delta t \widehat{z}_i^{n,l}, \\ u_i^{n,l} = u_i^{n-1} + \Delta t \widehat{u}_i^{n,l}, \end{cases} \quad (4.5)$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = 1, 2, \dots, M$  et  $l = 1, 2, \dots$ .

A chaque pas de temps, on résoud le schéma (4.4) en utilisant une méthode itérative avec un test d'arrêt lorsque la différence entre deux itérations successives inférieure à une tolérance donnée  $\varepsilon$ .

## 4.2 Energie discrète et quelques exemples numériques

L'énergie discrète à chaque pas de temps  $t_n$  du système (4.1)-(4.3) est donnée par

$$\begin{aligned} E^n = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i [\rho_z (\widehat{z}_i^n)^2 + \rho_u (\widehat{u}_i^n)^2 + (\alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}) \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right)^2 \\ & + c (\theta_i^n)^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \sqrt{\alpha_1} \frac{z_{i+1}^n - z_{i-1}^n}{2h} \right)^2 + \frac{\tau_0}{k} (q_i^n)^2], \end{aligned}$$

qui est la discrétisation de l'énergie continue (2.3) où  $a_1 = a_N = \frac{h}{2}$  et  $a_i = h$ ,  $i = 2, \dots, N - 1$ . Dans ce qui suit on présente quelques exemples numériques.

**Exemple 4.2.1** *Pour ce test numérique, on choisit les différentes valeurs suivantes pour les coefficients*

$$\begin{aligned} \rho_z = 5.5, & \quad \rho_u = 4.5, & \alpha_1 = 0.08, & \alpha_2 = 0.09, & \alpha_3 = 0.15, \\ \beta = 0.05, & c = 1.12, & \tau_0 = 0.15, & k = 0.001. \end{aligned}$$

*On exécute notre code pour les paramètres de discrétisation suivants :  $N = 100$ ,  $M = 200$ ,  $L = 1$ ,  $T = 1$  and take  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Concernant les conditions initiales*

$$z_0 = \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad q_0 = \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \theta_0 = \frac{1}{5} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{et} \quad z_1 = u_0 = u_1 = 0.$$

*Voici l'évolution en temps des solutions approchées ainsi que l'énergie discrète*

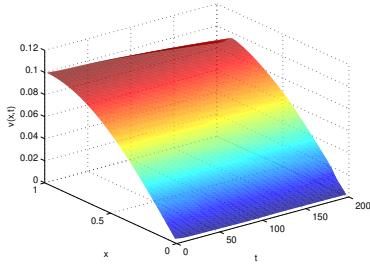


FIGURE 4.1 – Evolution en temps de la fonction  $z$  (Exemple 4.2.1)

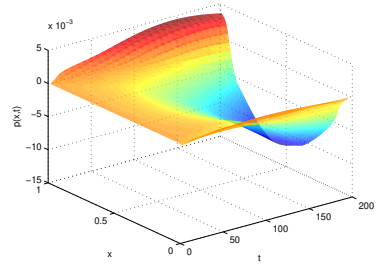


FIGURE 4.2 – Evolution en temps de la fonction  $u$  (Exemple 4.2.1)

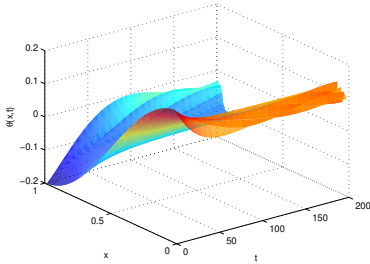


FIGURE 4.3 – Evolution en temps de la fonction  $\theta$  (Exemple 4.2.1)

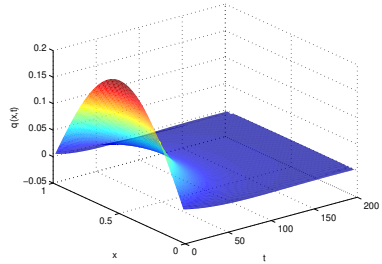


FIGURE 4.4 – Evolution en temps de la fonction  $q$  (Exemple 4.2.1)

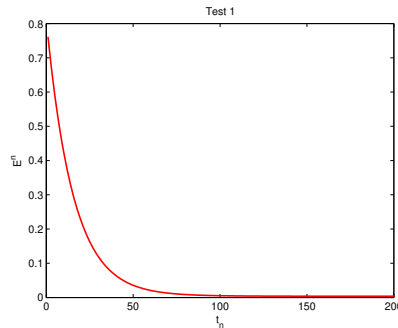


FIGURE 4.5 – Evolution en temps de l'énergie discrète (Exemple 4.2.1)

**Exemple 4.2.2** Dans ce test, on choisit les quantités suivantes

$$\rho_z = 3, \quad \rho_u = 2, \quad \alpha_1 = 0.15, \quad \alpha_2 = 0.15, \quad \alpha_3 = 0.25,$$

$$\beta = 0.08, \quad c = 1.25, \quad \tau_0 = 0.15, \quad k = 0.001.$$

## 4.2. ENERGIE DISCRÈTE ET QUELQUES EXEMPLES NUMÉRIQUES

Les paramètres de discrétisations sont :  $N = 100$ ,  $M = 200$ ,  $L = 2$ , avec  $T = 1$  et  $\varepsilon = 10^{-5}$ . On prend les conditions initiales suivantes

$$z_0 = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{\pi}{2}\right), \quad z_1 = u_1 = 0, \quad u_0 = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{5\pi}{2}\right),$$

$$\theta_0 = \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{1}{2} e^{-x} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Voici l'évolution en temps des solutions approchées ainsi que l'énergie discrète

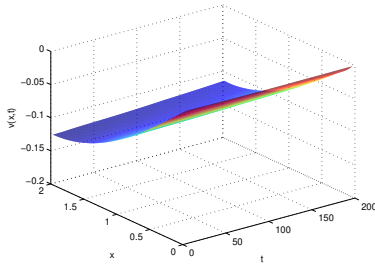


FIGURE 4.6 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $z$  (Exemple 4.2.2)

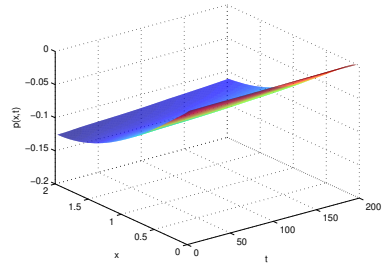


FIGURE 4.7 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $u$  (Exemple 4.2.2)

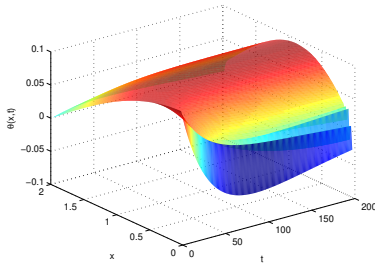


FIGURE 4.8 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $\theta$  (Exemple 4.2.2)

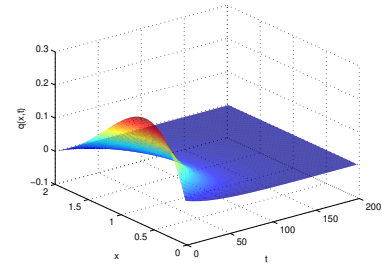


FIGURE 4.9 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $q$  (Exemple 4.2.2)

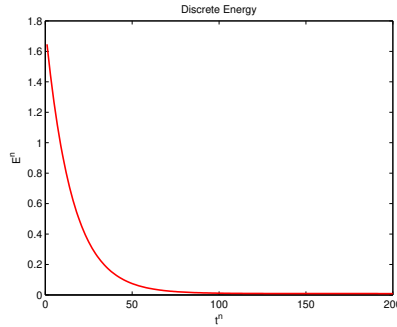


FIGURE 4.10 –  
Evolution en temps de l'énergie discrète (Exemple 4.2.2)

**Exemple 4.2.3** Dans ce test, on choisit les paramètres suivants

$$\rho_z = 3.5, \rho_u = 2.5, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.1, \alpha_3 = 0.2,$$

$$\beta = 0.05, c = 1.5, \tau_0 = 0.06, k = 0.0001,$$

avec  $N = 100$ ,  $M = 200$ ,  $L = 1.5$  et  $\varepsilon = 10^{-5}$ . On utilise les conditions aux limites suivantes

$$z_0 = \frac{1}{4}(x^2 - 2Lx), z_1 = u_1 = 0, u_0 = \frac{1}{8}(x^2 - 2Lx),$$

$$\theta_0 = \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } q_0 = 1.2x^2 e^{-2x}.$$

Voici l'évolution en temps des solutions approchées ainsi que l'énergie discrète

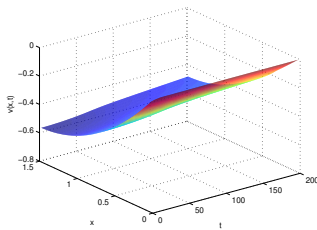


FIGURE 4.11 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $z$  (Exemple 4.2.3)

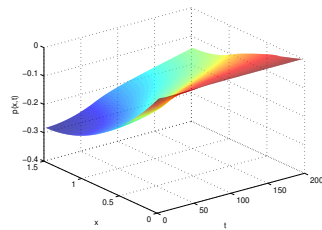


FIGURE 4.12 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $u$  (Exemple 4.2.3)

## 4.2. ENERGIE DISCRÈTE ET QUELQUES EXEMPLES NUMÉRIQUES

---

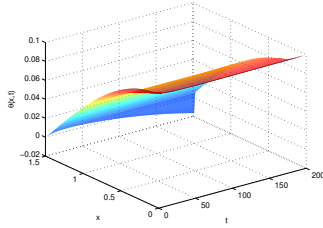


FIGURE 4.13 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $\theta$  (Exemple 4.2.3)

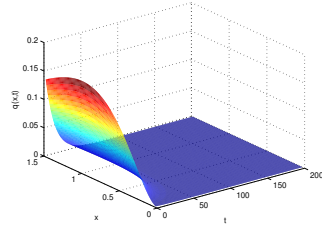


FIGURE 4.14 –  
Evolution en temps de la  
fonction  $q$  (Exemple 4.2.3)

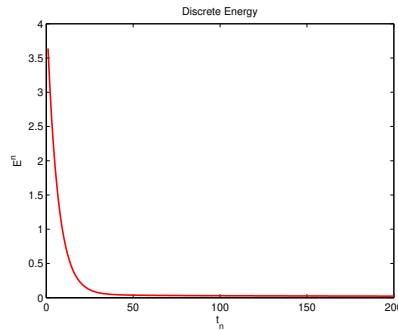


FIGURE 4.15 –  
Evolution en temps de l'énergie discrète (Exemple 4.2.3)

Note que dans chaque test la condition (1) a été pris en compte pour assurer la positivité de l'énergie discrète. De plus, pour différents choix des coefficients du système et des conditions initiales, les graphes présentés dans les Figures 4.1 – 4.4, 4.6 – 4.9, 4.11 – 4.14, montrent que les expériences numériques sont qualitativement identiques avec les résultats analytiques établis dans notre travail. Aussi, les graphes 4.5, 4.10, 4.15 montrent que l'énergie décroît d'une manière exponentielle. Cela confirme le comportement asymptotique de la solution du système (4.1)-(4.3) avec un seul mécanisme d'amortissement donné par le deuxième son.



# Conclusion

Dans le présent travail on a présenté d'une manière efficace et rigoureuse une étude qualitative d'un problème qui modélise le phénomène du gonflement des sols dans un milieu poreux en utilisant des outils mathématiques intervenant dans la théorie des semi-groupes concernant, d'une part, l'étude de l'existence et l'unicité. D'une autre part, on a analysé le comportement asymptotique par la méthode d'énergie en se basant sur une construction appropriée de la fonctionnelle de Lyapunov en exploitant la méthode multiplicative. Cela, conduit à prouver la décroissance d'une manière exponentielle de l'énergie. Les résultats obtenus sont illustrés par des tests numériques en utilisant le langage de programmation MATLAB.

# Bibliographie

- [1] A. Bedford, D. S. Drumheller, Theories of immiscible and structured mixtures. *Int. J. Eng. Sci.* 21(8), 863–960 (1983).
- [2] F. Boyer, Analyse numérique des Equations aux Dérivées partielles, polycopié du cours pour Master, Université Paul Sabatier-Toulouse 3, 2016.
- [3] K. J. Engel, R. Nagel, A Short Course on Operator Semigroups. Springer, Universitext Editorial Board(North America).
- [4] A. C. Eringen, A continuum theory of swelling porous elastic soils. *Int. J. Eng. Sci.* 32(8), 1337–1349 (1994).
- [5] F. Fouzia, The stability of some porous system. A Doctorat Thesis, Annaba Univ, 2022.
- [6] M. Hassina, K. Marwa, G. Hana, Les  $C_0$ –semi groupes de contraction, Mémoire du fin d’étude, Enset Skikda, 2020.
- [7] D. Ieşan, On the theory of mixtures of thermoelastic solids. *J. Thermal stress.* 14(4), 389–408 (1991).
- [8] A. Pazy, Semigroups of Linear Operator and Application to Partial Differential Equations. Springer, 1983.
- [9] F. Reguia, M. Aicha, Sur la stabilité exponentielle des  $C_0$ –semi groupes Application a un système de type Timoshenko, Mémoire du fin d’étude, Université HAMMA LAKHDAR D’EL OUED, 2015.
- [10] J. P. Raymond, Equations d’évolution, Polycopié du cours pour DEA, de Mathématiques Appliquées Université Paul Sabatier-Toulouse.