وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N[0] : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Calcul fractionnaire et les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Option : Analyse fonctionnel appliqué

Par :

1. BOUCHOUCHA ROUMAISSA
2. CHALABI ZEYNEB

Encadré par : Mouy Mounia M.A.A U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : Settara Loubna M.C.B U.SKIKDA
Examinateur: Far Zina M.A.A U.SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions ALLAH Tout-Puissant de nous avoir donné la force et la volonté d'accomplir ce mémoire. En tout premier lieu, Nous tenson exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements a notre encadreur Dr MOUY MOUNIA pour ses précieux conseils, ses encouragement et ses orientation le long de notre travail. Nous remercions également Dr Settara Loubna et Dr Far Zina, membres de jury qui on fait l'honneur et le plaisir d'accepter de juger ce modeste travail Il est important pour nous de remercier notre familles : nos pères, no mères , nos frères et nos sœurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement. Un grand merci à tous nos enseignants de département mathématique université de skikda Nous adressons aussi notre remerciement envers notre amis et notre collègue pour leur soutient morale. Merci pour tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

♡

❤ ROUMAISSA BOUCHOUCHA

❥ ZEYNEB CHALABI

Dédicaces

...Je dédie ce travail :

À

MES CHERS PARENTS pour tous leurs sacrifices, leur amour,
leur tendresse, leur soutien
et leurs prières tout au long de mes ètudes

À

Mes sœurs ♡ ♡et Mes frères ♡ ♡ pour leur
disponibilité à entendre mes frustrations et les
sources de mes tensions et toujours m'aider avec mes
souhaits de bonheur et de réussite dans
leur vie ♡

À

Tous Les Enseignants
du département de Mathématique qui ont contribué à mon formation ♡

À

Mon Mari ♡

À

Tous Mes Amis et Collègue

♡♡Roumaissa♡

♡Zeyneb ♡♡

Résumé

Dans ce travail nous étudions l'existence et l'unicité de la solution continue d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire suivante:

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t.y(t)). \quad \text{pour tout} \quad t \in J = [0.T].0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases}$$

où ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Mots-clés : Calcul fractionnaire, intégration fractionnaire, dérivation fractionnaire, théorème de point fixe.

ملخــــص

في هذا العمل قمنا بدراسة وجود ووحدانية حلول مشكلة النهاية للمعادلات التفاضلية التالية بدرجة:

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t.y(t)). \quad \forall \quad t \in J = [0.T].0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases}$$

بحيث ${}^{C}D^{\alpha}$ الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيثو.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، التكامل الكسري، الاشتقاق الكسري، نظرية النقطة الصامدة.

Abstract

In this work we have studied the existance and uniqueness of solution of a boundary value problem for fractional order of the next differential equation:

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t.y(t)). \quad \text{pour tout} \quad t \in J = [0.T].0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases}$$

where ${}^{C}D^{\alpha}$ is the fractional derivate in the sense of caputo.

Keywords : Fractional calcul, fractional integral, fractional derivate, fixed point theorem.

Table des matières

Introduction **1**

1 *Préliminaire* **3**

1.1 Quelque outils de base : 3

1.1.1 Espace des fonctions intégrables : 3

1.1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues : 4

1.2 Éléments de calcul fractionnaire : 5

1.2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire 5

1.2.2 Intégrale fractionnaire 7

1.2.3 Dérivées fractionnaires 8

1.3 Quelques théorèmes de point fixe 9

1.4 Transformée de Laplace 10

1.5 Espace Lp 11

1.6 Théorème de Fubini 12

2 *Calcul fractionnaires* **13**

2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville : 13

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville : 18

2.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo : 21

3 *Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire* **24**

3.1 problème aux limites dans le cas $0 < \alpha < 1$ 24

3.1.1 Existence et d'unicité de solutions : 24

4 *Conclusion :* **31**

Bibliographie **32**

Notations :

L^p	:	L'espace des fonctions mesurables et intégrables.
C	:	L'espace des fonctions continues.
AC	:	L'espace des fonctions absolument continues.
C_γ	:	L'espace des fonctions continues avec poids.
C_γ^m	:	L'espace des fonctions continues différentiables à l'ordre $n-1$.
Γ	:	Fonction Gamma.
B	:	Fonction Bêta
$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$	:	La dérivée classique d'ordre n.
I^α	:	Opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-liouville.
D_a^α	:	Opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-liouville d'ordre.
${}^C D_a^\alpha$	:	Opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo.
$*$	:	Produit de convolution.
I	:	Opérateur identité.
$n!$	:	Factorielle n.

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire a été introduit le 30 septembre 1965. Ce jour-là, Leibniz a écrit une lettre à l'Hopital, ce qui a permis de généraliser la notion de dérivation entière (classique) à la dérivation non-entière. Si cet ordre est négatif, on parle d'une intégration non-entière et s'il est positif, il s'agit d'une dérivation non-entière. La note de Leibniz a conduit à l'apparition de la théorie des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire qui est devenue un sujet très attractif pour les mathématiciens, et de nombreuses formes différentes d'opérateurs différentiels fractionnaires ont été introduites par : Grunwald, Letnikow, Riemann, Liouville, Hadamard, Caputo, Riez,...

Au cours des dernières années un intéret considérable est donné aux applications des dérivées fractionnaires dans plusieurs domaines. Nous citons maintenant quelques exemples sur ce sujet :

- Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement à la viscoélasticité des matières.

- En économie, quelques systèmes de finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire.

- En biologie, il a été déduit que les membranes des cellules de l'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire.

- En traitement du signal, et le traitement d'image, clarifient parfaitement l'importance de considération et l'analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaire.

-Le travail présenté dans ce mèmoire s'inscrit dans le cadre d'étude de l'existence etl'unicite des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaire. Notre mèmoire est organisée comme suit :

Dans **le premier chapitre**, Nous présentons quelque outils de base, des défintion des fonctions spécifique avec des théorèmes du point fixe.

Au **second chapitre**, nous introduisons la définition des intégrales et des dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville ainsi que ceux de Caputo.

Enfin au **troisième chapitre**, nous abordera question d'existence et d'unicité du solution du problème aux limite des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, l'existence et l'unicité de cette résultat est établie par l'utilisation du théorèmes du point fixe
Et on termine par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous présentons certains théories de base qui concernent des définitions et des propriétés des certains notions d'analyse, telles que les espaces des fonctions intégrables, les fonctions spécifiques qui on utilisées dans les autres chapitres, nous donnons ici la fonction Gamma et la fonction Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

1.1 Quelque outils de base :

1.1.1 Espace des fonctions intégrables :

Définition 1.1 *Soient* $\Omega = (a, b)(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$ *et* $1 \leq p \leq \infty$

1) pour $1 \leq p \leq \infty$ *, l'espace* $L^p(\Omega)$*est l'espace des (classe de) fonction* f *réelles sur* Ω *telles que* f *est mesurable est*

$$\int_a^b \mid f(x) \mid dx \leq +\infty,$$

2) pour $p = \infty$*,l'espace* $L^p(\Omega)$ *est l' espace des (classe de) fonctions mesurables* f *bornées presque partout (p.p) sur* Ω.

Théorème 1.1 *Soit* $\Omega = (a, b)$ *un intervalle fini ou infini de* $\Re$.

1) Pour $1 \leq p < \infty$*,l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\| f \|_p = (\int_a^b | f(x) |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

2) L'espace $L^\infty(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\| f \|_\infty = \inf M \geq 0 : | f(x) | \leq M p.p sur \Omega.$$

1.1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues :

Définition 1.2 *[6]*
Soit $\Omega = [a,b](-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N} = 0.1...$ *on désigne par* $C^N(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *qui on leurs dérivées d'ordre inférieure ou égale a* n *continues sur* Ω*, muni de la norme*

$$\| f \|_{c^n} = \sum_{k=0}^{n} \| f^{(k)} \|_c = \max_{x \in \Omega} | f^{(k)}(x) | \; n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$*,* $C^0(\Omega)$ *l'espace des fonction* f *continue sur* Ω *muni de la norme :*

$$\| f \|_c = \max_{x \in \Omega} | f(x) | \, .$$

Définition 1.3 *[6]*
Soit $\Omega = [a,b](-\infty < a < b < \infty)$ *un intervalle fini. On désigne par*$AC([a,b])$*l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables,c'est à dire :*

$$AC([a,b]) = \left\{ f / \exists \varphi \in L([a,b]) : f(x) = c + \int_a^b \varphi dt \right\}$$

et on appelle $AC([a,b])$ *l'espace des fonctions absolument continues sur* $[a,b]$

Définition 1.4 *[6]*
Pour $n \in= 0, 1, ...,$ *on désigne par* $AC^n([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *ayant des dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *continues sur* $[a,b]$ *telles que* $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$ *c'est à* $AC^n([a,b]) = f : [a,b] \longrightarrow C et f^{(n-1)} \in AC([a,b])$*. En particulier* $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$*.*

1.2 Éléments de calcul fractionnaire :

1.2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

On entend par « fonction spécial » toute fonction qui n'est pas élémentaire (polynôme, fonction trigonométrique, exponentielle, etc) ayant une grande importance et plusieurs applications. Dans cette partie on en rappelle quelques unes qu'on aura besoin dans notre travail.

La fonction Gamma [9]

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle. Nous présentons ici quelques résultats :

Définition 1.5 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \Re(z) > 0, \tag{1.1}$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)lnt}$.

Lemme 1.1 *L'intégrale* (1.1) *est convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(z) > 0$.

Proposition 1.1 *La fonction Gamma satisfait les propriété suivantes :*

1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

2) $\Gamma(z+n) = z(z+1)....(z+n-1)\Gamma(z)$

3) $\Gamma(z) = (z-1)!$

Preuve.

1) Une intégration par partie de l'intégral qui défini $\Gamma(z)$ nous donne

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = [e^{-t} e^z / z]_0^{\infty} + 1/z \int_0^{\infty} e^{-t} e^z dt = 1/z\Gamma(z+1). \tag{1.2}$$

2) Nous obtenons le résultat en se basant sur la propriété précédente

3) Nous utilisons une démonstration par récurrence - pour $z = 1$ nous avons :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1, \tag{1.3}$$

- supposon que $\Gamma(z) = (z-1)!$ est vrai montrons que la propriété reste vrai pour l'odre $(z+1)$ d'après la propriété (1) nous avons :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)! = z!. \tag{1.4}$$

■

La fonction Bêta [9]

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utilisé la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma

Définition 1.6 *La fonction Bêta est définie par :*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{w-1} du z > 0, w > 0. \tag{1.5}$$

Proposition 1.2 *Soit* $(z,w) \in \mathbb{R}_+^2$ *nous avons*

1)

$$\beta(z,w) = \beta(w,z), \tag{1.6}$$

2)

$$\beta(z,w) = \Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(z+w). \tag{1.7}$$

Preuve.

1)

$$\beta(z,w) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{w-1} du, \tag{1.8}$$

on utilisant le changement de variable $u = 1-t$

$$\beta(z,w) = \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{w-1} dt = \beta(w,z), \tag{1.9}$$

2)

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{w-1} dy. \tag{1.10}$$

En utilisant le changement de variable $(x,y) = (rs, r(1-s))$ dont la matrice Jaccobienne est

$J = \begin{bmatrix} s & r \\ 1-s & -r \end{bmatrix}$

et $\mid J \mid= r$ alors $dxdy = rdrds$ puis on appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{+\infty} e^{-r}x^{z+w}dr \int_0^1 s^z(1-s)^{w-1}ds = \Gamma(z+w)\beta(z,w). \tag{1.11}$$

Donc

$$\beta(z,w) = \Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(z+w). \tag{1.12}$$

Ce qui représente la relation entre les deux fonctions esentielles du calcule fractionnaire.

■

1.2.2 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approcher de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville.

Définition 1.7 *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a,b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$; est définie par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

où Γ est la fonction Gamma, lorsque $a = 0$ nous écrivons

$$I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$$

où $\varphi_\alpha(t) = \frac{t\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$
$\varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$,
econtent..$t\varphi_\alpha \longrightarrow \delta$ quand $\alpha \longrightarrow 0$.

Théorème 1.2 *Pour $h \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe.*

$$I_a^\alpha(I_\alpha^\beta h(t)) = I_a^{\alpha+\beta}h(t) \quad pour \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

Proposition 1.3 *Nous avons les propriétés suivantes :*

1) $I_a^\alpha h(t) = h(t)$

2) L'opérateur intégral I_0^a est linéaire.

1.2.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann- Liouville, Caputo ainsi que Gruonwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

1. APPROCHE DE GRUONALD-LETNIKOV

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. La dérivée de Grunwald- Letnikov d'ordre α est définie par :

$$(D_{a+}^\alpha f)(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh).$$

Les coefficients binomiaux avec des signes alternatifs pour des valeurs positives de n sont définis comme :

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{j} = \frac{n}{j(n-j)}.$$

Pour le calcul des coefficients binomiaux on peut utilisés la relation entre la fonction Gamma d'Euler et la factorielle, définie comme :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha}{j(\alpha-j)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{(j+1)\Gamma(\alpha-\alpha+1)}.$$

La dérivée de Grunwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^{-j} \binom{\alpha}{j} f(t-jh).$$

Permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur $\mathbb{R}$ (de Liouville). Par contre les inconvénients de cette approche sont sa difficulté technique pour faire les calculs, les preuves et les grandes restrictions sur les fonctions.

2. Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.8 *Soit f une fonction intégrable sur [a, b], alors la dérivée fractionnaire d'ordre*

α*(avec* $n-1 \leq \alpha < n$) *au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds = \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t)).$$

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.3 *(Banach)[10]*
Soient X un espace de Banach,et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique, i.e $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.

Théorème 1.4 *(Schauder)[6]*
Soit (E, d)un espace métrique complet, soit X une partie convexe et fermé de E, et soit $A : X \longrightarrow X$une application telle que l'ensemble $Ax : x \in X$ est relativement compacte dans E. Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.5 *(Schaefer)[10, 11]*
Soient X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu.Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \wedge\ Au = u, pour \quad un \quad certain \quad \lambda \in]0,1[\},$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.6 *(Ascoli-Arzelà)[11]*
Soit Aun sous ensemble de $C(J, E)$, A est relativement compacte dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\| f(x) \| \leq k \quad pourtout \quad x \in J \quad et \quad tout \quad f \in A.$$

2) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \| f(t_1 - ft_2) \| \leqslant \varepsilon \quad pour \quad tout \quad t1, t2 \in J et \; tout f \in A.$$

3) Pour tout $x \in$ l'ensemble $f(x)$, $f \in A \subset E$ est relativement compacte.

Définition 1.9 *(Opérateur contractant)*
Soit X est espace de Hilbert et A un opérateur borné, l'opérateur A est dit opérateur contractant s'il exisle une constante K telle que $0 < K < 1$ et

$$\forall x, y \in X, \| Tx - Ty \| \leq K \| x - y \| .$$

1.4 Transformée de Laplace

Définition 1.10 *[13]*
La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$est formellement définie par :

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

$f(t)$ est appelee l'originale de $\mathcal{L}f(s)$.
La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale (1.13) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel γ, ce qui veut dire qu'il existe deux constantes M et T telles que :

$$| f(t) | \leq M e^{\gamma t}, t > T,$$

dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $\Re(s) > \gamma$.
L'originale $f(t)$ peut être reconstituée à l'aide de la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \mathcal{L}f(s) ds, \quad c > \gamma.$$

Proposition 1.4 *[6]*
La transformée de Laplace est linéaire.

Définition 1.11 *L'opérateur de convolution de Laplace de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ définies sur $R+$ est donné pour $x \in \mathbb{R}_+$par :*

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(x - t) g(t) dt.$$

Théorème 1.7 *(Théorème de convolution)[6]*

Pour deux fonctions $f(t)$, $s(t)$ dont les transformées de Laplace existent on a :

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s).\mathcal{L}g(s).$$

Proposition 1.5 *La transformé de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction $(f(t))$est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0^+),$$

sous l'hypothèse d'existence des intégrales correspondantes.

1.5 Espace Lp

En analyse, les espaces Lp sont des espaces de fonction dont la puissance P-iéme est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.12 *[12]*
Soit $\Omega =]a, b[\quad (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$. pour $1 \leq p < \infty$; on définit l'espace Lp comme suit :

1) *Pour $1 \leq p < \infty$, $Lp(\omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de puissance p^{iem} intégrables sur Ω c'est-à-dire :*

$$f \in L_p(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \| f(x)|^p \, dx < \infty \quad f \quad mesurable. \tag{1.14}$$

$\|f\|_p = (\int |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ *est une norme sur $L^P(\Omega)$*
$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$*est un Banach.*

2) *Pour $p = 2$ alors :*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : f mesurable \text{ à carré intégrable sur} \Omega, \int_\Omega f^2(x) dx < \infty \right\}$$

$$(L^2(\Omega) :< .,. >_{L^2(\Omega)}),$$

est le produit scalaire défini par :

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x) \ dx \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{1.15}$$

3) Pour $p = \infty, L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur* Ω.

Définition 1.13 f *est dite essentiellement bornée sur* Ω *s'il* $\exists M > 0$ *telle que,*

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf \{M \leq 0; |f(x)| \leq M, p.p \quad sur \Omega\}, \tag{1.16}$$

$(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ *est un Banach.*

1.6 Théorème de Fubini

Soit E un ensemble mesurable $\mathbb{R}^n((a,b) \subset \mathbb{R}^n)$ et $((c,d) \subset \mathbb{R}^n)$ un ensemble mesurable et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $(a,b)\times(c,d)$, alors pour presque tous les $x \in (a,b)$, $f(x,y)$ est intégrable sur (c,d) et :

$$\int_{(a,b)\times(c,d)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

c-à-d : Si $f(x,y)$ est une mesurable sur $(a,b)\times(c,d)$ et est finie l'une des intégrales :

$$\int_{(a,b)} \left(\int_{(c,d)} |f(x,y)|dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|dx \right) dy.$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaires

Dans ce chapitre,nous introduisons la définition des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ainsi que ceux de Caputo.

2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville :

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n - 1} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Définition 2.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par R-L) d'ordre α dune fonction f est définie par :*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \qquad x > a, \tag{2.1}$$

pour $(-\infty \leqslant \alpha < x < +\infty)$
pour $\alpha = 0$, on a : $I_a^0 = I(l'oprateuridentit)$
pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, I_a^\alpha$ coincide avec l'intégrale répétée n fois de la forme :

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n - 1} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Exemple 2.1 *Soit* $f(x) = (x-a)^c$ *avec* $c > -1$ *alors*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c}, \tag{2.3}$$

en effet

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^\alpha (t-a)^c dt.$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Béta on obtient :

$$t - a = s(x-a); 0 \leq s \leq 1, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x-a-s(x-a)]^{\alpha-1} s^c (x-\alpha)^{c+1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^c ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c} \beta(\alpha, c+1) \\
I_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c},
\end{aligned}$$

dans la cas $a = 0$ *On a,*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} x^{\alpha+c}.$$

Théorème 2.1 (Existence de l'intégrale) *[13]*
Si $f \in L^1([a;b])$*et* $\alpha > 0$*, alors* $(I_a^\alpha f)(x)$ *existe pour tout* $x \in [a;b]$ *et on a*

$$I_a^\alpha f \in L^1([a,b]).$$

Preuve. Soit $x \in [a;b]$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^x \mid (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) \mid dt &\leq \int_a^x (x-a)^{(\alpha-1)} \mid f(t) \mid dt \\
&= (x-a)^{(\alpha-1)} \int_a^x \mid f(t) \mid dt \\
&\leq (x-a)^{(\alpha-1)} \parallel f \parallel_1 < +\infty \quad si \in [a;b].
\end{aligned}$$

Donc $(I_a^\alpha f)(x)$ existe presque partout sur $[a;b]$.

En utilisant la définition (2.1) puis le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_a^b \mid (I_a^\alpha f)(x) \mid dx &= \int_a^b \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \mid dx \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} \mid f(t) \mid dtdx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} \mid f(t) \mid dtdx.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \mid (I_a^\alpha f)(x) \mid dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid dxdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid \left[\int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx\right] dt,\end{aligned}$$

en effectuant la changement de variable $x = t + y(b-t)$ et moyennant la relation (1.12) (sachant que $\Gamma(1) = 1$), on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \mid (I_a^\alpha f)(x) \mid dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid \left[\int_0^1 y^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha-1}(b-t)dy\right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid \left[\int_0^1 y^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha} dy\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^\alpha \left[\int_0^1 y^{\alpha-1} dy\right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^\alpha \beta(\alpha, 1) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} dt \\ \int_a^b \mid (I_a^\alpha f)(x) \mid dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^\alpha dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b \mid (I_a^\alpha f)(x) \mid dx \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \mid f(t) \mid dt,$$

et puisque $f \in L^1([a;b])$, on déduit que

$$\int_a^b \mid (I_a^\alpha f)(x) \mid dx < +\infty,$$

i.e : $I_a^\alpha f \in L^1([a;b])$. ■

Exemple 2.2 *Soit* $f(x) = c$ *on a*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} dt,\end{aligned}$$

par le changement de variable $t = a + s(x-a)$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-s(x-a))^{(\alpha-1)}(x-a)ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^\alpha (1-s)^{(\alpha-1)} ds \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{(\alpha-1)} ds \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \beta(1,\alpha) \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha \Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Théorème 2.2 *Soient* $\alpha > 0$ *et* $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ *est une suite des fonctions continues et simplement convergentes sur [a ;b]. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville et le singne limite comme suite :*

$$\left[I_a^\alpha (\lim_{n\to+\infty} f_k) \right](x) = \lim_{n\to+\infty} (I_a^\alpha f_k)(x).$$

Preuve. Soit $f_k \longrightarrow f_\alpha$

$$\begin{aligned}\mid I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x) \mid &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \mid f_k(t) - f(t) \mid (x-t)^{\alpha-1} dt \mid \\ &\leq \frac{\parallel f_k - f \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\parallel f_k - f \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha} (x-a)^\alpha \\ &\leq \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel f_k - f \parallel_\infty \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel f_k - f \parallel_\infty (b-a)^\alpha \longrightarrow^{k\longrightarrow+\infty} 0.\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3 *[16] Soient $\alpha, \gamma > 0$ pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$. On a*

$$I_a^{\alpha}(I_a^{\gamma} f) = I_a^{\alpha+\gamma} f = I_a^{\gamma}(I_a^{\alpha} f), \tag{2.5}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$,si de plus $f \in c([a;b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve. supposons d'abord $f \in L^1([a;b])$. On a

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{\alpha}(I_a^{\gamma} f)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} (I_a^{\gamma} f)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (t-y)^{\gamma-1} f(y)dydt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-y)^{\gamma-1} f(y)dydt.
\end{aligned}$$

Les deux intégrales figurant dans cette dernière égalité existent (en vertu du théorème existence de l'intégrale) pour presque tout $x \in [a;b]$, et la théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{\alpha}(I_a^{\gamma} f)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-y)^{\gamma-1} f(y)dydt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_y^x (x-t)^{\alpha-1} (t-y)^{\gamma-1} f(y)dtdy,
\end{aligned}$$

pasons $t = y + s(x-y)$;on a trouve

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{\alpha}(I_a^{\gamma} f)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x \int_0^1 (x-y)^{\alpha+\gamma-1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\gamma-1} f(y)dsdy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1} f(y) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\gamma-1} dsdy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1} f(y) \beta(\gamma, \alpha)dy \\
&\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1} f(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+\gamma-1} f(y)dy \\
&= (I_a^{\alpha+\gamma} f)(x)
\end{aligned}$$

si $f \in c([a;b])$, en utilisant la densité de $C([a;b])$ dans $L^1([a;b])$ la relation (2.5) reste veste vraie ■

Proposition 2.1 *[14], [15] Soit $f \in c([a;b])$, et soient $\alpha, \gamma > 0$, on a pour tout $x \in [a;b]$*

1)

$$\lim_{\alpha\to 0}(I_a^{\alpha} f)(x) = f(x). \tag{2.6}$$

2) Si $p < \gamma$ alors

$$\frac{d^p}{dx^p}(I_a^{\gamma} f)(x) = (I_a^{\gamma-p} f)(x). \tag{2.7}$$

Proposition 2.2 *soit r un entier naturel et supposons que $f^{(r)}$ est intégrable alors,*

$$f^{(r-1)}(x) = (I_a^1 f^{(r)})(x) + f^{(r-1)}(a). \tag{2.8}$$

$$f(x) = (I_a^r f^{(r)})(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a). \tag{2.9}$$

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

Définition 2.2 *[6],[16] soit $f \in L^1([a;b])$ une fonction intégrable sur[a ;b],la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$,notée$D_a^{\alpha} f$ est définie par :*

$$(D_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t)dt. \tag{2.10}$$

où $n-1 < [(\Re(\alpha)] < n$ et $x > a$. En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$ on a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{2.11}$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right) \int_a^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x). \tag{2.12}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1

$$(D_a^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha})(x),$$

tel que : $n = [\Re(\alpha)] + 1 \quad x > a$.

Exemple 2.3

1) Soit $f(x) = (x-\alpha)^{\beta}$ avec $\beta > -1$ pour $\alpha \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$, on a d'après la remarque (2.1) puis l'exemple (2.3) :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Alors,pour $(\alpha-\beta) \in \{1,2,...n\}$ on a :

$$D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = 0 \qquad j \in \{1,2,...n\}, \tag{2.13}$$

par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin 1,2,...n$ on trouve

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{2.14}$$

2) En particulier,si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$,la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(x) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$D_a^{\alpha} C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Remarque 2.2 (Dérivée la fonction exponentielle) *:[15] La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, de la fonction e^{bx} où b est une constante, est donnée par l'expression suivante :*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{bx} = b^n e^{bx}.$$

Liouville a étendu cette définition pour inclure les dérivées d'ordre arbitraire α

$$D_a^{\alpha} e^{bx} = b^{\alpha} e^{bx}. \tag{2.15}$$

Il a aussi utilisé le développement en série pour collecter toutes les fonctions exponentielles

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x},$$

où $b_n > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$. D'où

$$D_a^\alpha(f(x)) = D_a^\alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.3 (Dérivée de fonctions trigonométriques :) *[15] On a*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha\left(e^{ibx}\right) &= (ib)^\alpha e^{ibx} \\ &= isin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)(cos(bx) + isin(bx))b^\alpha \\ &= b^\alpha\left[cos(bx + \alpha\frac{\pi}{2}) + isin(bx + \alpha\frac{\pi}{2})\right]. \end{aligned}$$

D'où l'en déduit les identités suivantes

$$D_a^\alpha(cos(bx)) = b^\alpha cos(bx + \alpha\frac{\pi}{2}). \tag{2.16}$$

$$D_a^\alpha(sin(bx)) = b^\alpha sin(bx + \alpha\frac{\pi}{2}). \tag{2.17}$$

Théorème 2.4 *Soient f et g deux fonctions intégrables dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $D_a^\alpha(\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ existe et on a*

$$(D_a^\alpha(\lambda_1 f + \lambda_2 g))(x) = \lambda_1(D_a^\alpha f)(x) + \lambda_2(D_a^\alpha g)(x). \tag{2.18}$$

Preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $[a, b]$. Moyennant la définition de la dérivée de Riemann-Liouville, on aura

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha(\lambda_1 f + \lambda_2 g))(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t))dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda_1 f(t)dt\right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda_2 g(t)dt\right) \\ &= \frac{\lambda_1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right) \\ &+ \frac{\lambda_2}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt\right) \\ &= \lambda_1(D_a^\alpha f)(x) + \lambda_2(D_a^\alpha g)(x). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3 *[6],[16] Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. si $f \in AC^n([a;b])$, alors la dérivée fractionnnaire $D_a^\alpha f$ existe presque partout sur [a ;b] et de plus, elle est donnée par*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n\alpha-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Proposition 2.4 *[6],[16] Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n, m-1 \leq \beta < m$*

1) Pour $f \in L^1([a;b])$, l'égalité :

$$D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t),$$

est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$,

2) si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a;b])$, la relation :

$$D_a^\beta (D_a^\alpha f)(x) = (I^{\alpha-\beta}) f(x)$$

est vrai presque partout sur $[a,b]$,

3) si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = (D^{\beta-\alpha} f)(x),$$

4) si $f \in L^1([a;b])$ et $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a;b])$ avec $n = [\Re(\alpha)+1]$, alors

$$\left[I_a^\alpha (D_a^\alpha f)\right](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+} \left[(\frac{d}{dx})^j I_a^{n-\alpha} f \right](x).$$

2.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo :

On va introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 2.3 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que*

$$\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a;b].$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$$^{C}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau = J^{n-\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)). \tag{2.19}$$

Proposition 2.5

1) *Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :*

   Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n, (n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}_a^CD_t^p f(t)$ et ${}_a^RD_t^q f(t)$ existent alors :

$$^{C}D^{p}f(t) =^{R} D^{p}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}\right). \tag{2.20}$$

   On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura $^{C}D^{p}f(t)$

2) *Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :*

   Si f est une fonction continue on a :

$$^{C}D^{p}J_a^p f = f et J_a^p(^{C}D^{p})f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}, \tag{2.21}$$

   donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse a droite.

Exemple 2.4

1) *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :*

   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$^{C}D^{p}C = 0. \tag{2.22}$$

2) *La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo :*

   Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$,alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

   d'où

$$^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites du premier ordre, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire .

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t.y(t)). \quad pourtout \quad t \in J = [0.T].0 < \alpha < 1. \tag{3.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{3.2}$$

Où $^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. $f : [0.T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.
Où f est comme dans le problème (3.1)-(3.2)
Pour problème on présentera deux résultats d'existence.
Le premier est basé sur le théorème de point fixe de Banach et le second sur le théorème de point fixe de Schaefer. ces résultats sont dus à Benchohra et Al [8].

3.1 problème aux limites dans le cas $0 < \alpha < 1$

3.1.1 Existence et d'unicité de solutions :

On commence par la définition d'une solution du problème $(3.1) - (3.2)$

Définition 3.1 *Une fonction $y \in C^1([0.T].\mathbb{R})$ est dite solution du problème* (3.1)-(3.2) *si y satisfait l'équation ${}^C D^{\alpha} y(t) = f(t.y(t))$ sur J et la condition $ay(0) + by(T) = c$. Pour l'existence de la solution du problème* (3.1)-(3.2)*, on a besoin du lemme suivant :*

Lemme 3.1 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0.T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \tag{3.3}$$

si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^C D_a^{\alpha} y(t) = h(t). \quad t \in [0.T], \tag{3.4}$$

$$y(0) = y_0. \tag{3.5}$$

Lemme 3.2 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0.T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right], \tag{3.6}$$

si et seulement si y est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^C D^{\alpha} y(t) = h(t). \quad t \in [0.T], \tag{3.7}$$

$$ay(t) + by(T) = c. \tag{3.8}$$

Preuve. D'après le lemme 3.1 on a

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Il reste à vérifier les conditions aux limites, on a

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Or

$$ay(0) + by(T) = c,$$

par suite

$$ay(0) + by(0) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds = c,$$

avec

$$a + b \neq 0,$$

c'est à dire

$$y(0) = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right].$$

Et on obtient (3.6). Ce qui achève la démonstration. On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.2), en utilisant le théorème de contraction de Banach. ■

Théorème 3.1 *Supposons que : (H1) il existe une constante $K > 0$ telle que :*
$| f(t.u) - f(t.\bar{u}) | \leq k | u - \bar{u} |$ *pour tout* $t \in J$. *et tout* $u.\bar{u} \in \mathbb{R}$.
Si

$$\frac{KT^{\alpha} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right)}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1, \tag{3.9}$$

alors,le problème (3.1)-(3.2) *admet une solution unique sur* $[0, T]$.

Preuve. On va transformer le problème (3.1)-(3.2) en problème de point fixe.considérons l'opérateur.

$$F : C([0.T].\mathbb{R}) \longrightarrow C([0.T].\mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s.y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s.y(s)) ds - c \right], \tag{3.10}$$

il est clair, que les point fixe de l'opérateur F sont les solution du problème (3.1)-(3.2).
F est bien défini, on effet : si $y \in C([0.T])$. alors $(Fy) \in C([0.T].\mathbb{R})$.
Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en effet : si $x.y \in C([0.T].\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mid F(x)(t) - F(y)(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f(s.x(s)) - f(s.y(s)) \mid ds \\
&+ \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid f(s.x(s) - f(s.y(s)) \mid ds \\
&\leq \frac{K \parallel x-y \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{\mid b \mid K \parallel x-y \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{KT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \parallel x-y \parallel_\infty,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\parallel F(x) - F(y) \parallel_\infty \leq \frac{KT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \parallel x-y \parallel_\infty .$$

En vertu de (3.9) on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.1)-(3.2).

Notre deuxième résultat pour le problème (3.1)-(3.2) est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer. ■

Théorème 3.2 *Supposons que*

(H2) La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

(H3) il existe une constante $M > 0$ *telle que* $\mid f(t,u) \mid \leq M$ *pour tout* $t \in J.$ *et tout* $u \in \mathbb{R}$.

alors, le problème (3.1)-(3.2). *admet au moins une solution sur* $[0;T]$ *:*

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.10) admet un point fixe La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Étape 1 : F est continue.

Soit $y_n$une suite dans $C([0,\, T], \mathbb{R})$convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y,c'est à dire :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_n - y\|_\infty = 0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$. Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in [0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in [0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \qquad (3.11) \\
&\leq \frac{\|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right. \\
&\left. + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
&\leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\alpha \Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue alors

$$\|Fy_n(t) - Fy(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

d'où la continuité de F.

Étape 2 : l'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T], \mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante positive l telle que pour tout $y \in B_{\eta^*}$, $\quad B_{\eta^*} = y \in C([0,T], \mathbb{R}) \quad : \|y\|_\infty \leq \eta^*$. On a $\|F(y)\|_\infty \leq l$. Par (H3) on a pour tout $t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = l.$$

Et par suite $F\left(B_{\eta^*}\right)$ est borné.

Étape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinue de $C([0,T],\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in (0,t], t_1 < t_2, B_{\eta^*}$ un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)\,(t_1) - F(y)\,(t_2)| \leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right] ds \\
& + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}\, ds \\
& \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2-t_1)^{\alpha} + t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha}\right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^{\alpha} \\
& \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^{\alpha} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left(t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F. D'après l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà $F\left(B_{\eta^*}\right)$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*} c'est à dire F est complètement continu, et d'après l'étape 1, F est continu. Par conséquent $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Étape 4 : Maintenant, il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est borné.

Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$. On a :

$$\begin{aligned}
y(t) = & \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s)) ds \right. \\
& \left. - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s)) ds - c \right] \right].
\end{aligned}$$

Alors, d'après $(h3)$, et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^{\alpha} + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^{\alpha} + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0,t]$ on a

$$\|F(y)\|_{\infty} \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^{\alpha} + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^{\alpha} + \frac{|c|}{|a+b|} = \mathbf{R}.$$

Cela montre que e est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.1)-(3.2).

$\blacksquare$

Chapitre 4

Conclusion :

Notre but principal dans ce mémoire est de présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solution du problème aux limites pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de caputo. Ces résultats on été obtenue par l'utilisation du théorème du point fixe .

Nous avons montrer l'existence de cette solution et en faisant intervenir le théorème de contraction de Banach, Schaefer,et Schauder nous avons établi un résultat sur l'existence et l'unicité de la solution.

Bibliographie

[1] H.T. Davis : The Theory of Linear Operators, Bloomington, Indiana : The Principia Press, 1936 ;p.20.

[2] N.J. Kalton and E. saab : Banach spaces, Proceedings of the Missouri Conference heldinColimbia, USA, june24-29,1984.

[3] V.Lakshmikantham and A.S.Vatsala : Basic Theory of Fractional Differential Equations,NonlinearAnal.,69(8),2008,pp.2677-2682.

[4] J.A.T.Machado and A.Azenha :Position Force Fractional Control of Mechanical Manipulators. In :Proceeding of the 1998 5th international workshop on advanced motion control, Coimbra, Portugal, 1998,pp.216-221.

[5] F.Mainardi,Fractional Calculus :Some Basic Problems in Contium and Statistical Mechanics, in"Fractals and Fractional Calculusin Contium Mechanics"(ACarpinteri and F.Mainardi,Eds), Springer-Verlag, Wien. 1997,pp.291-348.

[6] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[7] L.stara,Etude de certains probléme inverse parabolique d'ordre fractionnaire, thése de doctorat,université Badji-Mokhtar annaba,2018

[8] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problèmes for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[9] [16] I.Podlubny :Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego.1999.

[10] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[11] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[12] K. B.Oldam, J.Spanier, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[13] M.Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, (2010).

[14] M.Aissaoui and M.Ben-Aissa,L'integrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.Mémoire soutenu (2012-2013),Univ.Aboubekre Belkad Tlemcen.

[15] A.Benlabbes,sur des problémes aux conditions aux limites et à dérivées fractionnaire,thése(2016) Univ.Sidi Bel Abbés.

[16] Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[17] H- Brizis, Analyse fractionnaire.

[18] J-V Mill, Theory and application of fractional différential equation.

[19] A.A.Killas and S.A Marzon, Cauchy problem for différential equation xith caputo derivate .