

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 اوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Les équations différentielles fonctionnelles à retard en biologie

Option : Analyse Fonctionnelle Appliquée
Par :

1. *Aya. Benloucif*

2. *Chaima. Bouaita*

Encadré par : **Ahlème. BOUAKKAZ**

MCA U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : **Amar. OUAOUA**

MCA U. SKIKDA

Examineur: **Soumia. LEULMI**

MCB U. SKIKDA

Année : **2021/2022**

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures	iii
Résumé en Anglais	iv
Résumé en Français	v
Résumé en Arabe	vi
Remerciements	vii
Dédicace	viii
Typographie et Acronymes	x
Notations	xi
Introduction générale	1
1 Généralités	7
1.1 Fonction de Green	8
1.2 Compacité et opérateurs compacts	10

1.2.1	Parties compactes	10
1.2.2	Parties relativement compacte	10
1.2.3	Théorème d'Ascoli-Arzelà	11
1.2.4	Opérateurs compacts	12
1.3	Théorème des points fixes multiples de <i>Leggett-Williams</i>	16
1.3.1	Cônes	16
1.3.2	Points fixes multiples de <i>Leggett-Williams</i>	17
2	Solutions périodiques positives d'une équation différentielle fonctionnelle du premier ordre	19
2.1	Introduction	20
2.2	Inversion de l'équation (2.1) en une équation intégrale	21
2.3	Existence des solutions périodiques positives de l'équation (2.1)	26
3	Applications à certains modèles biologiques	49
3.1	Quelques modèles d'équations différentielles à retard en biologie	50
3.1.1	Modèle de Lasota-Ważewska	50
3.1.2	Modèle de Mackey-Glass	51
3.1.3	Equation de <i>Nicholson</i>	54
3.2	Applications	56
3.2.1	Application à un modèle d'érythropoïèse	56
3.2.2	Application à un modèle en dynamique d'une population isolée	57
3.2.3	Application aux trois modèles de leucopoïèse	59
	Conclusion générale	62
	Bibliographie	64

Table des figures

Globules rouges	50
Channichthyidae.....	51
Différents stades de l'hématopoïèse	52
Différentes cellules sanguines.....	53
Schéma représentant les différentes étapes de l'hématopoïèse.....	54
Lucilia cuprina	54
Cycle de développement de la lucilie cuivrée	55

**Delay differential equations
and applications in biology**

Abstract

In this work, we studied a class of delay differential equations arising from biology. With the aid of a powerful technique based on the *Leggett-Williams* fixed point theorem, the *Green's* functions method and some functional analysis tools, some sufficient conditions are established to guarantee the existence of at least three positive periodic solutions of the proposed equations. Moreover, applications to three biological models are given to illustrate the feasibility of the main findings.

Keywords : Delay differential equation, *Green's* function, *Leggett-Williams* fixed point theorem, periodic solution.

**Les équations différentielles
à retard et applications en biologie**

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié une classe d'équations différentielles à retard issues de modèles biologiques.

À l'aide d'une technique puissante basée sur le théorème du point fixe de *Leggett-Williams*, la méthode des fonctions de *Green* et quelques outils de l'analyse fonctionnelle, des conditions suffisantes sont établies pour garantir l'existence d'au moins trois solutions périodiques et positives des équations proposées. En outre, des applications à trois modèles biologiques sont données pour illustrer la faisabilité des principaux résultats.

Mots clés : Équations différentielle à retard, fonction de *Green*, théorème du point fixe de *Leggett-Williams*, solution périodique.

المعادلات التفاضلية التأخرية وتطبيقات في البيولوجيا

ملخص

في هذا العمل ، درسنا فئة من المعادلات التفاضلية التأخرية الناشئة عن علم الأحياء. بمساعدة تقنية قوية تعتمد على نظرية النقطة الثابتة للوجات-ويليامز، طريقة دوال غرين وبعض أدوات التحليل الدالي ، تم إنشاء بعض الشروط الكافية لضمان وجود على الأقل ثلاثة حلول دورية موجبة للمعادلات المدروسة. بالإضافة إلى ذلك ، تم تقديم تطبيقات لثلاثة نماذج بيولوجية لتوضيح جدوى النتائج الرئيسية.

كلمات مفتاحية: معادلات تفاضلية تأخرية ، دالة غرين ، نظرية النقطة الثابتة للوجات-ويليامز ، حل دوري.

Remerciements

Avant tout, le grand remercie à "**Allah**" qui lui seul guide nos pas dans le bon sens et qui nous a donné la volanté,la patience et surtout la santé durant tous nos années d'étude.

Nous voudrions de remercier très chaleureusement notre directrice de mémoire Mme "**Ahlème. BOUAKKAZ**" pour sa guidance, sa disponibilité et sa qualité d'encadrement et son soutien moral durant la préparation de ce travail.

Nous remercions vivement les membres de jury Dr. **Amar. OUAOUA** et Dr. **Soumia. LEULMI** d'avoir accepter d'examiner notre modeste travail.

Nos remerciement aussi s'incères que profonds s'adressent à Mr "**Rabah. KHEMIS**", pour son aide, ses précieux conseils et son encouragement.

Sans oublier de montionner l'étudiante de doctorat "**Safa. CHOUAF**" pour l'aide qu'elle nous a donné.

Nous tenons aussi à remercier tous les enseignants du département des mathématiques, université 20-Août 1955 à Skikda qui ont contribués à notre formation.

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le respect que j'ai toujours eu pour mes "chères parents" qui n'ont pas cessé de m'encourager durant toutes mes années d'études, que dieu les protège et leur prête une longue vie.

À mes deux grands-mères pour leur prière tout au long de mes études.

À mon seul frère "Hocine", à mes deux merveilleuses soeurs "Amira" et "Dounia", à mon beau frère "Yacine", à ma belle soeur "Rima", pour leur aide et encouragement.

À mon neveu adorable mon bonheur "Djoud".

À toute ma famille et en particulier mes cousines "Roumeissa" et "Djoumana".

À mes chères copines que j'ai passé des moments agréables avec elles tout au long de ces cinq années d'études : "Chaima", "Houda", "Wided" et "Meriem".

À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Aya

Je dédie ce travail

À l'homme de ma vie, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir : mon cher papa tu as toujours été le meilleur exemple de père.

À la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère, que dieu te garde pour moi, je t'adore maman.

À ma seule sœur "Sana" et mon beau frère.

À mes chers frères : Rabie, Karim, Bilal et mes belles soeurs.

À mes nièces et mon neveu "Mouhamed" la source de joie et de bonheur.

À toute ma famille et en particulier ma cousine : "Sara".

À mes chères copines que j'ai passé avec elles mes bonnes moments tout au long de ces cinq années d'études "Aya", "Wided", "Houda", "Meriem" et "Soumia".

À tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

Chaima

Typographie et Acronymes

Typographie

- τ désigne le retard dans l'ensemble de ce mémoire.
- T désigne la période.
- Les noms des savants, les termes techniques ou les mots que nous voulons souligner sont indiqués en italique.

Acronymes

EDR	: Équation différentielle à retard.
CSH	: Cellule souche hématopoïétique.
GB	: Globule blanc.
GR	: Golobule rouge.
NK	: Les cellules "natural killer".
G1	: Phase de croissance 1.
G2	: Phase de croissance 2.
G0	: Phase de repos.
M	: Phase de mitose.
S	: Phase de synthèse de l'ADN.

Ensembles et nombres

Tout au long de ce mémoire, les notations suivantes seront utilisées.

\mathbb{R}	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$: Espace des n -uplets.
\mathbb{N}	: Ensemble des entiers naturels.
\mathbb{N}^*	: Ensemble des entiers naturels non nuls.
\mathbb{C}	: Ensemble des nombres complexes.
$[a, b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: Ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Ensemble des fonctions continûment différentiable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
$\overline{B}_E(0, 1)$: Boule unité fermée de E .
\mathbb{K}	: Cône ordonné.
$\mathbb{L}^1([0, 1])$: Espace de <i>Lebesgue</i> des fonctions intégrables sur $[0, 1]$.
$L(E, F)$: Espace des opérateurs linéaires de E dans F .
$\mathcal{L}(E, F)$: Espace des opérateurs linéaires continus de E dans F .
$\mathcal{K}(E, F)$: Ensemble des opérateurs compacts de E dans F .
$\mathcal{D}(T)$: Domaine de définition de l'opérateur T .

Fonctions

$ \cdot $: Valeur absolue.
$\ \cdot\ $: Norme.
\max	: Fonction maximum.
\sup	: Fonction supremum.
\min	: Fonction minimum.
$\exp x, e^x$: Fonction exponentielle de x .
$G(t, x)$: Fonction de <i>Green</i> .
$\lim_{x \rightarrow a}$: Limite quand x tend vers a .

Motivation et contexte

Le présent travail porte sur l'étude des équations différentielles à retard (EDRs en abrégé) provenant de phénomènes biologiques. Ces équations occupent désormais une place prépondérante dans presque tous les domaines, notamment dans les domaines des sciences et de l'industrie car elles apparaissent dans la modélisation de plusieurs phénomènes d'hérédité réels rencontrés en biologie, physique, chimie, économie, etc.

Ces équations qui nécessitent la mémorisation d'une partie de l'histoire du système pour connaître son évolution, ont longtemps joué un rôle crucial pour comprendre, modéliser, et prévoir le futur des phénomènes biologiques. En effet, la croissance d'une population n'est pas instantanée, mais intervient avec des retards importants et inévitables fournissant des résultats plus précis et réalistes.

Le retard qui est généralement une valeur discrète, variable, que ce soit dépendante du temps ou de l'état ou même distribuée, se traduit comme un temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. Plusieurs expériences ont montré que l'introduction du retard dans l'étude

des populations vivantes peut enrichir la dynamique des modèles considérés où sa signification diffère d'un modèle à un autre, il peut représenter la période d'incubation d'une maladie contagieuse en épidémiologie, la durée du cycle de vie dans la production des cellules sanguines en hématologie, le temps de transit ou la durée d'une transformation cellulaire en dynamique des populations cellulaires, le temps de gestation ou de développement, la phase juvénile ou la période de maturation en dynamique des populations de certaines espèces humaines, animales et végétales.

Historiquement, les travaux de *J. Bernoulli*, *L. Euler*, *J.L. Lagrange*, *P. Laplace*, *S. Poisson* au 18^{ème} siècle furent l'étincelle à l'origine de la passion pour la recherche sur le concept du retard dans les phénomènes réels, une étincelle qui jusqu'à présent ne s'est jamais éteinte. Mais la notion d'une équation différentielle à retard où le comportement est affecté par la dépendance des variables d'états au temps passé, apparaît chez les mathématiciens au début du 20^{ème} siècle. Encouragé par *Picard* qui a souligné lors de la conférence internationale des mathématiciens à *Rome* en 1908, l'importance de modéliser les phénomènes physiques par ce type de modèles, la théorie de ce type d'équations n'a cessé de se développer depuis cette date. À cette époque, ces équations s'introduisent en mathématiques par des travaux en théorie des nombres ou par le biais de problèmes d'origine géométrique (voir [22] et [24]).

La fin des années 20 du 20^{ème} siècle a été marquée par quelques applications dans les sciences de la vie lorsqu'est apparue la nécessité de relier le sujet biologique réel et la représentation qu'on en donne à travers un modèle mathématique avec retard. Les plus importants modèles retardés sont sans doute ceux qui ont été étudiés par *Alfred. J. Lotka* et *de. Vito. Volterra* [25, 26]. En effet, dans cette époque qui était connue sous le nom d'âge d'or

de l'écologie théorique, de nombreux travaux pionniers ont établi des résultats génériques sur les modèles de compétition et de relations prédateur-proie dont on cite, par exemple, l'œuvre majeure de *V. Volterra* [25] où il a écrit sur le rôle des effets héréditaires sur les modèles de la dynamique de plusieurs espèces en interaction.

La seconde moitié du 20ème siècle a été caractérisée par un développement destiné à la modélisation des phénomènes biologiques. Par exemple, en 1948, *Hutchinson* [12] a proposé une nouvelle formulation de l'équation logistique où il a y une dépendance de la population au temps $t - \tau$ plutôt qu'à l'instant t . Parallèlement aux travaux réalisés par *J. Hale* et ses collaborateurs [9], [10], [11], pour développer la théorie des équations à retard, il y a eu d'intensives recherches sur le sujet depuis les années 70 qui ont donné naissance à un nombre considérable de modèles retardés dans l'étude des populations vivantes comme le travail de *Taylor et Sokal* [27] sur les populations de mouches domestiques et les travaux qui concernent la prolifération de certains constituants du sang comme les travaux de *Lasota et Wazewska* [28] sur la production des globules rouges chez les animaux et les études de *Glass et Mackey* [15] sur l'hématopoïèse normale et pathologique chez les êtres humains, les travaux de *Gurney, Blythe et Nisbet* [8] sur l'évolution des populations de *lucilies cuivrées*, les travaux d'*Arino et Kimmel* [2] sur la production cellulaire, les travaux de *Marcus et Westervelt* [16] sur des modèles de réseau de neurones et les modèles épidémiologiques de *Yorke* [29] et *Cooke* [6], etc.

Récemment, la littérature de biologie mathématique concernant les EDRs est abondante et les modèles de ce type ont été largement étudiés, surtout dans la modélisation des phénomènes oscillatoires.

Objectifs

L'objectif primordial de ce travail est de présenter l'efficacité de la théorie du point fixe pour établir certains résultats d'existence des équations différentielles retardées issues de modèles biologiques.

Plus précisément, notre travail s'intéresse aux problématiques suivantes : l'existence, la bornitude et la positivité des solutions périodiques d'une classe d'équations fonctionnelles différentielles à retard qui modélise plusieurs phénomènes biologiques.

Plan du mémoire

Notre mémoire se compose de trois chapitres, d'une conclusion et d'une bibliographie.

Dans le chapitre 1, après l'introduction, nous avons présenté brièvement quelques notions préliminaires incontournables pour la bonne compréhension de ce mémoire. La première section est consacrée entièrement à exposer quelques définitions et propriétés fondamentales des fonctions de *Green*. Dans la deuxième section, nous avons jugé judicieux de présenter quelques concepts de compacité. Enfin, nous proposons pour conclure une version du théorème des points fixes multiples de *Leggett-Williams*.

Ensuite, on arrive au deuxième chapitre qui abrite les résultats principaux de ce mémoire et qui est dédié à l'étude de l'existence d'au moins trois solutions périodiques positives de la classe d'équations différentielles fonctionnelles non linéaires du premier ordre suivante :

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda f(t, x(h(t))),$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ sont des fonctions T -périodiques et $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est T -périodique par rapport à la première variable.

Il faut signaler ici que cette classe d'équations peut être considérée comme une classe mère des deux classes d'équations différentielles à retard suivantes :

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda f(t, x(t - \tau(t))),$$

et

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda f(t, x(t - \tau)),$$

où $\tau \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ avec $0 < \tau(t) < t$ dans la première équation et τ est une constante positive dans la deuxième équation.

Ces équations ont prouvé leur mérite dans la description de plusieurs phénomènes d'hérédité rencontrés en biologie et précédemment en dynamique des populations que ce soit cellulaire, animale ou humaine où $x(t)$ peut représenter la densité des cellules, le nombre d'individus ou l'effectif de la population, $a(t)$ est le taux de mortalité ou de destruction des cellules et $\lambda f(t, x(h(t)))$ est le terme de recrutement ou de production.

Les résultats sont obtenus moyennant une technique hybride qui combine l'application du théorème des points fixes multiples de *Leggett-Williams* avec l'utilisation de certaines propriétés d'une fonction de *Green* et quelques outils de l'analyse fonctionnelle. Pour être plus précis, cette technique est basée en premier lieu sur le bon choix d'un espace de *Banach* et d'un cône qui doivent remplir certaines exigences mathématiques et biologiques. La deuxième pierre angulaire de cette approche est l'inversion de l'équation proposée en une équation intégrale équivalente du type *Fredholm* dont le noyau est une fonction de *Green* avant d'utiliser certaines propriétés de ce noyau et le théorème d'*Ascoli-Arzelà* pour ouvrir la voie à l'application du théorème de point fixe choisi.

Finalement, le dernier chapitre est scindé en deux sections. La première section est destinée d'une manière succincte à donner un bref survol des trois modèles biologiques suivants :

Le modèle de *Lasota-Ważewska* suivant :

$$x'(t) = -ax(t) + be^{-\gamma x(t-\tau)},$$

qui modélise la production des globules rouges chez les populations animales.

Le modèle de *Mackey-Glass* suivant :

$$x'(t) = -ax(t) + \frac{bx(t-\tau)}{1+x^n(t-\tau)},$$

qui décrit la production des globules blancs chez les êtres humains.

Le modèle de *Nicholson* suivant :

$$x'(t) = bx^m(t-\tau) \exp(-\gamma x^n(t-\tau)) - ax(t),$$

pour décrire la croissance d'une populations de *lucilies cuivrées*.

Tandis que la deuxième section a été dévoué à appliquer certains résultats principaux obtenus dans le deuxième chapitre à ces trois modèles biologiques.

Finalement, on termine le mémoire par une conclusion générale récapitulant les principaux points abordés dans le présent travail.

CHAPITRE 1

Généralités

Sommaire

1.1	Fonction de Green	8
1.2	Compacité et opérateurs compacts	10
1.3	Théorème des points fixes multiples de <i>Leggett-Williams</i>	16

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle brièvement quelques notions de base comme le concept de fonctions de *Green*, la notion de compacité et une version du théorème des points fixes multiples de *Leggett-Williams*.

On suppose que le rang du tableau Δ ci-dessous est n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^{(1)} & \dots & \beta_1 & \dots & \beta_1^{(n-1)} \\ \alpha_2 & \alpha_2^{(1)} & \dots & \beta_2 & \dots & \beta_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_n^{(1)} & \dots & \beta_n & \dots & \beta_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Théorème 1.1 [17]

- a** Supposons que $a_0(t) \neq 0$. Si l'équation homogène de (1.1) avec les conditions frontières (1.2) n'admet que la solution triviale, alors il existe pour ce problème une fonction de *Green* unique $G(t, s)$, $\forall t \in [c, d]$.
- b** On suppose réalisées les conditions ci-dessus, alors l'équation non homogène (1.1) admet une solution unique donnée par l'expression intégrale suivante :

$$y(t) = \int_c^d G(t, s) g(s) ds. \quad (1.4)$$

Supposons que le problème aux limites (1.2) – (1.3) n'admet que la solution triviale $y(t) = 0$.

Définition 1.1 [13] On appelle fonction de *Green* de l'équation (1.3) avec les conditions frontières (1.2), la fonction $G(t, s)$ construite pour tout point $s \in]c, d[$, et jouissant des quatre propriétés suivantes :

1. $G(t, s)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à t jusqu'à l'ordre $(n - 2)$ inclus pour $t \in [c, d]$.

2. Sa $(n - 1)^{\text{ème}}$ dérivée par rapport à t présente au point $t = s$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{a_0(s)}$, i.e.

$$\frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(s^+, s) - \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(s^-, s) = \frac{1}{a_0(s)},$$

où

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s^+, s) \text{ et } \frac{\partial G}{\partial t}(s^-, s),$$

désignent respectivement les limites à droite et à gauche lorsque t tend vers s de la fonction qui à t fait correspondre $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$.

3. Pour tout s fixé dans $]c, d[$, cette fonction vérifie la condition frontière en c et la condition frontière en d .

4. Pour tout s fixé dans $]c, d[$, la fonction qui à t fait correspondre $G(t, s)$ est solution de l'équation homogène dans chacun des intervalles $[c, s)$ et $(s, d]$.

1.2 Compacité et opérateurs compacts

1.2.1 Parties compactes

Définition 1.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de *Banach*. Une partie M de E est compacte si elle vérifie la propriété de *Borel-Lebesgue* : "de tout recouvrement de M par des ouverts de E , on peut en extraire un sous-recouvrement fini".

Proposition 1.1 Soit M une partie de \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Alors M est compacte si et seulement si M est une partie fermée et bornée.

Théorème 1.2 (*Théorème de Bolzano-Weierstass*) Une partie M d'un espace de *Banach* $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si et seulement si toute suite de M admet une sous-suite convergente dans M .

1.2.2 Parties relativement compacte

Définition 1.3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de *Banach* et M une partie de E . On dit que M est relativement compacte si \overline{M} est compacte.

Proposition 1.2 *Une partie M d'un espace de Banach E est relativement compacte si et seulement si toute suite de M admet une sous-suite convergente dans E .*

1.2.3 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Définition 1.4 Soit M un sous ensemble de $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, M est dit équicontinu si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta > 0, \forall y \in [a, b], [\|x - y\| < \delta] \implies [\forall f \in M, |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Définition 1.5 Soit M une partie de E , M est dite uniformément bornée si et seulement si

$$\forall x \in [a, b], \{ f(x), f \in M \} \text{ est bornée.}$$

Théorème 1.3 (Théorème d'Ascoli-Arzelà) *Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $-\infty < a < b < +\infty$, l'espace des fonctions continues définies sur le compact $[a, b]$ et à valeurs réelles muni de la norme*

$$\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|.$$

Une partie \mathcal{F} de E est relativement compacte dans E si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.

Corollaire 1.1 (Application du théorème d'Ascoli-Arzelà) *Soient k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Le sous-ensemble \mathcal{F} des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ qui vérifient*

$$|f(t)| \leq k_1 \text{ et } \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \leq k_2,$$

pour tout $t \in [a, b]$, est relativement compact dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Preuve. En effet, pour tout $f \in \mathcal{F}$, le théorème des accroissements finis prouve que pour tout $t_0, t \in [a, b]$ il existe une constante $c \in]t_0, t[$ telle que

$$|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)| |t - t_0|.$$

Donc $|f(t) - f(t_0)| \leq k_2 |t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{k_2}$, alors

$$\forall t \in [a, b], |t - t_0| \leq \eta \implies |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de \mathcal{F} en t_0 . Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a, b]$, on en déduit que \mathcal{F} est équicontinu.

On a $|f(t)| \leq k_1$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ ce qui implique que $\|f\|_\infty \leq k_1$ et partant

$$\forall f \in \mathcal{F}, f \in \overline{B}(0, k_1),$$

i.e.,

$$\mathcal{F} \subset \overline{B}(0, k_1),$$

d'où la bornitude de \mathcal{F} .

Finalement, comme \mathcal{F} est borné et équicontinu, alors le théorème d'*Ascoli-Arzelà* assure que \mathcal{F} est relativement compact. ■

1.2.4 Opérateurs compacts

Opérateurs linéaires

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Définition 1.6 On dit qu'un opérateur $T : E \longrightarrow F$ défini sur $\mathcal{D}(T) \subset E$ est linéaire si $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel de E et si pour tout $x, y \in \mathcal{D}(T)$ et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Remarque 1.1 On note par $L(E, F)$, l'espace des opérateurs linéaires de E dans F .

Continuité des opérateurs linéaires

Théorème 1.4 Soit $f \in L(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- (2) f est continue en un point x_0 de E au moins.
- (3) f est continue en 0.
- (4) Il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \text{ pour tout } x \in E.$$

- (5) f est bornée sur la boule unité fermée.
- (6) f est bornée sur la sphère unité.
- (7) f est uniformément continue.

Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.7

- 1) Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est dit borné, s'il est défini partout dans E et transforme tout ensemble borné en un ensemble borné.
- 2) Un opérateur linéaire $T : \mathcal{D}(T) \subset E \longrightarrow F$ est dit borné sur $\mathcal{D}(T)$, s'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}(T), \|Tx\|_F \leq c \|x\|_E.$$

- 3) Un opérateur linéaire $T : \mathcal{D}(T) \subset E \longrightarrow F$ est dit borné si $\mathcal{D}(T) = E$, et s'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \|Tx\|_F \leq c \|x\|_E.$$

En particulier,

$$\exists C > 0 : \|Tx\|_F \leq C, \forall x \in E \text{ tel que } \|x\|_E \leq 1,$$

c'est-à-dire, T est borné sur la boule unité fermée $\overline{B}_E(0, 1)$.

Opérateurs compacts

Définition 1.8 Soient E, F deux espaces de *Banach*

1/ Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ est dite compacte si l'image de chaque borné de E par T est relativement compacte dans F , c'est-à-dire,

$$[T \text{ est compact}] \iff \left[\forall M \subset E, (M \text{ est borné}) \implies \left(\overline{T(M)} \text{ est relativement compacte} \right) \right].$$

2/ L'application continue $T : \Omega \longrightarrow F$ est dite compacte si $T(\overline{\Omega})$ est compacte.

Remarque 1.2 On note par $\mathcal{K}(E, F)$, l'espace des opérateurs compacts de E dans F .

Théorème 1.5 Soit E, F deux espaces de *Banach* et $T \in L(E, F)$, alors

1. T est compact si et seulement si l'image de la boule unité fermée $\overline{B}_E(0, 1)$ par T est relativement compacte, c'est-à-dire

$$T \text{ est compact} \iff \overline{T(\overline{B}_E(0, 1))} \text{ est compacte,}$$

où

$$\overline{B}_E(0, 1) = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}.$$

2. T est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , la suite $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans F .

Exemple 1.1 On définit un opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ par

$$(\mathcal{A}x)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(x(s)) ds,$$

où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

\mathcal{I}) La fonction G vérifie les propriétés suivantes :

- 1) $G(t, s) \geq 0, \forall t, s \in [0, 1]$.
- 2) $G(t, s) \leq s(1-s), \forall t, s \in [0, 1]$.
- 3) $G(t, s) \geq \frac{1}{4}s(1-s), \forall t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ et $\forall s \in [0, 1]$.
- 4) $\int_0^1 G(t, s) ds = \frac{t(1-t)}{2} \leq \frac{1}{8}, \forall t \in [0, 1]$.
- 5) $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) ds \leq \frac{1}{2}, \forall t \in [0, 1]$.

\mathcal{II}) L'opérateur \mathcal{A} est complètement continu (continu et compact). En effet,

1) \mathcal{A} est continu sur $\mathcal{C}([0, 1])$: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}([0, 1])$, convergente vers un élément x . On a

$$(\mathcal{A}x_n)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(x_n(s)) ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(x_n(s)) \rightarrow f(x(s)), \quad \forall s \in [0, 1] \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}x_n)(t)| &\leq \int_0^1 G(t, s) f(x_n(s)) ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, 1]} f(x_n(s)) \int_0^1 G(t, s) ds \\ &\leq \frac{M}{8} \in \mathbb{L}^1([0, 1]). \end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Donc $\mathcal{A}x \in \mathbb{L}^1([0, 1])$ et

$$\|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\|_{\mathbb{L}^1([0,1])} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

ce qui montre la continuité de \mathcal{A} sur $\mathcal{C}([0, 1])$.

2) \mathcal{A} est borné sur $\mathcal{C}([0, 1])$: Soit $x \in [0, 1]$, alors

$$|(\mathcal{A}x)(t)| \leq \frac{M}{8} < \infty, \forall t \in [0, 1].$$

3) \mathcal{A} est compact : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathcal{C}([0, 1])$. \mathcal{A} étant borné, donc $(\mathcal{A}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi dans $\mathcal{C}([0, 1])$. De plus, par la propriété (5) de la fonction G , on aura

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}x_n)'(t)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) f(x_n(s)) ds \right| \\ &\leq \sup_{s \in [0,1]} f(x_n(s)) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) ds \\ &\leq \frac{M}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{A}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([0, 1])$. D'après le Corollaire 1.1 et le théorème d'*Ascoli-Arzelà*, \mathcal{A} est compact.

1.3 Théorème des points fixes multiples de *Leggett-Williams*

1.3.1 Cônes

Définition 1.9 [21] Soit X un espace de *Banach* réel. Un sous-ensemble non vide \mathbb{K} de X est dit cône ordonné sur X s'il est convexe, fermé et vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Si $x \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in \mathbb{K}$ pour $\lambda \geq 0$.

(ii) Si $x \in \mathbb{K}$ et $-x \in \mathbb{K}$, alors $x = 0_X$.

Remarque 1.3 La condition (i) de la définition 1.9 entraîne que $0_X \in \mathbb{K}$.

Définition 1.10 Un sous-ensemble non vide \mathbb{K} d'un espace de *Banach* réel X est appelé cône si

$$x \in \mathbb{K} \text{ et } \lambda > 0 \text{ implique que } \lambda x \in \mathbb{K}.$$

Remarque 1.4

- 1) Chaque cône ordonné est un cône, mais la réciproque est fausse.
- 2) Dans le reste du mémoire, pour simplifier, l'appellation "cône" sera réservée pour "cône ordonné".

Définition 1.11 [21] Soit \mathbb{K} un cône sur un espace de *Banach* X . Alors on définit sur X une relation d'ordre partiel \leq par

$$\forall x, y \in X : x \leq y \iff y - x \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.12 Un espace de *Banach* X est dit ordonné s'il contient un cône \mathbb{K} .

1.3.2 Points fixes multiples de *Leggett-Williams*

Définition 1.13 [21] Une application ψ est dite fonctionnelle continue concave positive dans \mathbb{K} si $\psi : \mathbb{K} \longrightarrow [0, \infty)$ est continue et pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ on a

$$\psi(\mu x + (1 - \mu)y) \geq \mu\psi(x) + (1 - \mu)\psi(y), \quad \forall \mu \in [0, 1].$$

On considère les ensembles

$$\mathbb{K}(\psi, a, b) = \{x \in \mathbb{K}, \psi(x) \geq a, \|x\| \leq b\}, \quad a, b \in]0, +\infty[.$$

où ψ est une fonctionnelle positive, continue et concave sur un cône \mathbb{K} . Ainsi, pour $0 < c \leq +\infty$, on définit un ensemble \mathbb{K}_c comme suit :

$$\mathbb{K}_c = \{x \in \mathbb{K} : \|x\| < c\}, \text{ si } 0 < c < +\infty \text{ et } \mathbb{K}_\infty = \mathbb{K}.$$

Donc

$$\overline{\mathbb{K}}_c = \{x \in \mathbb{K} : \|x\| \leq c\}, \text{ si } 0 < c < +\infty \text{ et } \mathbb{K}_\infty = \mathbb{K}.$$

Théorème 1.6 (Leggett-Williams) [14] *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\mathbb{K} \subset X$ un cône et $c_4 > 0$ une constante. Supposons qu'il existe une fonctionnelle ψ continue concave et positive sur \mathbb{K} avec $\psi(x) \leq \|x\|$ pour $x \in \mathbb{K}_{c_4}$ et soit $A : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$ une application continue est compacte. Supposons qu'ils existent des nombres c_1, c_2 et c_3 avec $0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ tels que*

- (1) $\{x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) : \psi(x) > c_2\} \neq \emptyset$ et $\psi(Ax) > c_2$ pour tout $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$,
- (2) $\|Ax\| < c_1$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$,
- (3) $\psi(Ax) > c_2$ pour tout $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_4)$ avec $\|Ax\| > c_3$.

Alors A admet au moins trois points fixes x_1, x_2 et x_3 dans \mathbb{K}_{c_4} . De plus, nous avons $x_1 \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$, $x_2 \in \{x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_4) : \psi(x) > c_2\}$ et $x_3 \in \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \setminus \{\mathbb{K}(\psi, c_2, c_4) \cup \overline{\mathbb{K}}_{c_1}\}$.

CHAPITRE 2

Solutions périodiques positives d'une équation différentielle fonctionnelle du premier ordre

Sommaire

2.1	Introduction	20
2.2	Inversion de l'équation (2.1) en une équation intégrale	21
2.3	Existence des solutions périodiques positives de l'équation (2.1)	26

Dans ce chapitre, on va exposer des résultats d'existence des solutions périodiques positives et bornées d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles du premier ordre intervenant en biologie. Ces résultats sont obtenus moyennant le théorème des points fixes multiples de *Leggett-Williams*, certaines propriétés utiles d'une fonction de *Green* et le théorème d'*Ascoli-Arzelà*.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter quelques résultats d'existence des solutions périodiques et positives de l'équation différentielle non linéaire du premier ordre suivante :

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda f(t, x(h(t))), \quad (2.1)$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ sont des fonctions T -périodiques et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est T -périodique par rapport à la première variable.

Soit \mathbb{X} l'espace de *Banach* de toutes les fonctions T -périodiques et positives défini comme suit :

$$\mathbb{X} = \{x(t) : x(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t) = x(t+T)\},$$

muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|,$$

et soit \mathbb{K} , un cône positif de \mathbb{X} . On suppose que pour tout $M > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $u, v \in \mathbb{K}$ avec $\|u\| \leq M$, $\|v\| \leq M$ et $\|u - v\| < \delta$, on a

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| < \varepsilon, \quad (2.2)$$

uniformément par rapport à t .

Tout au long de ce chapitre, on va utiliser les notations suivantes :

$$f^h = \limsup_{x \rightarrow h} \max_{0 \leq t \leq T} \frac{f(t, x)}{x},$$

et

$$\tilde{f}^h = \limsup_{x \rightarrow h} \max_{0 \leq t \leq T} \frac{f(t, x)}{a(t)x}.$$

Remarque 2.1 Si $h(t) = t - \tau(t)$, $\tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $0 \leq \tau(t) \leq t$, alors l'équation (2.1) prend la forme :

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda f(t, x(t - \tau(t))),$$

et si $h(t) = t - \tau$ où τ est une constante, alors l'équation (2.1) devient :

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda f(t, x(t - \tau)).$$

2.2 Inversion de l'équation (2.1) en une équation intégrale

Lemme 2.1 Si $x \in \mathbb{X} \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors x est une solution de (2.1) si et seulement si $x \in \mathbb{X}$ est une solution de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds, \quad (2.3)$$

où

$$G(t, s) = \frac{e^{\int_t^s a(\theta) d\theta}}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1}. \quad (2.4)$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{X} \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution de (2.1). En multipliant les deux membres de l'équation par $e^{\int_0^t a(\theta) d\theta}$, on obtient

$$[x'(t) + a(t)x(t)] e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} = \lambda [f(t, x(h(t)))] e^{\int_0^t a(\theta) d\theta}.$$

Comme

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} \right] = x'(t) e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} + a(t)x(t) e^{\int_0^t a(\theta) d\theta},$$

alors

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} \right] = \lambda f(t, x(h(t))) e^{\int_0^t a(\theta) d\theta}.$$

L'intégration de t à $t + T$, nous donne

$$\int_t^{t+T} \left(x(s) e^{\int_0^s a(\theta) d\theta} \right)' ds = \lambda \int_t^{t+T} f(s, x(h(s))) e^{\int_0^s a(\theta) d\theta} ds.$$

D'où

$$x(t+T) e^{\int_0^{t+T} a(\theta) d\theta} - x(t) e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} = \lambda \int_t^{t+T} f(s, x(h(s))) e^{\int_0^s a(\theta) d\theta} ds.$$

D'après les propriétés de la périodicité, on arrive à

$$e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} x(t) \left[e^{\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta} - 1 \right] = \lambda \int_t^{t+T} f(s, x(h(s))) e^{\int_0^s a(\theta) d\theta} ds.$$

D'après la relation de chasles, il vient

$$\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta = \int_t^T a(\theta) d\theta + \int_T^{t+T} a(\theta) d\theta.$$

Si on utilise le changement de variable $u = \theta - T$, on obtient

$$\int_T^{t+T} a(\theta) d\theta = \int_0^t a(u+T) du = \int_0^t a(u) du = \int_0^t a(\theta) d\theta.$$

D'où

$$\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta = \int_t^T a(\theta) d\theta + \int_0^t a(\theta) d\theta = \int_0^T a(\theta) d\theta.$$

Par suite

$$x(t) = \lambda \int_t^{t+T} \frac{e^{\int_0^s a(\theta) d\theta}}{e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} \left[e^{\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta} - 1 \right]} f(s, x(h(s))) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \lambda \int_t^{t+T} \frac{e^{\int_0^s a(\theta) d\theta}}{e^{\int_0^t a(\theta) d\theta} \left[\int_0^T a(\theta) d\theta - 1 \right]} f(s, x(h(s))) ds \\
 &= \lambda \int_t^{t+T} \frac{e^{\int_t^s a(\theta) d\theta}}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} f(s, x(h(s))) ds \\
 &= \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds.
 \end{aligned}$$

Inversement, si x est une solution de l'équation intégrale (2.3), alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(x(t)) &= \frac{d}{dt} \left[\lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\lambda \int_t^{t+T} \frac{\exp\left(\int_t^s a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} f(s, x(h(s))) ds \right] \\
 &= \lambda \left[\frac{\exp\left(\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} f(t+T, x(h(t+T))) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\exp\left(\int_t^t a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} f(t, x(h(t))) \right] \\
 &\quad + \lambda \int_t^{t+T} \frac{d}{dt} \left(\frac{\exp\left(\int_t^s a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} f(s, x(h(s))) \right) ds.
 \end{aligned}$$

Mais $f(t+T, x(h(t+T))) = f(t, x(h(t)))$,

$$\frac{\exp\left(\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} - \frac{\exp\left(\int_t^t a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = \frac{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = 1,$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\exp\left(\int_t^s a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} \right) = -a(t) \frac{\exp\left(\int_t^s a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = -a(t) G(t),$$

alors

$$\frac{d}{dt} (x(t)) = \lambda f(t, x(h(t))) - \lambda a(t) \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds.$$

Comme

$$\lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds = x(t),$$

alors

$$x'(t) = -a(t) x(t) + \lambda f(t, x(h(t))).$$

La preuve est achevée. ■

Lemme 2.2 *La fonction de Green G donnée par (2.4) vérifie les propriétés suivantes :*

$$G(t+T, s+T) = G(t, s). \quad (2.5)$$

De plus, si on pose

$$\delta = \exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right),$$

alors

$$0 < \alpha = \frac{1}{\delta - 1} \leq G(t, s) \leq \frac{\delta}{\delta - 1} = \beta, \quad (2.6)$$

pour tout $t, s \in [t, t+T]$.

Preuve.

1. On a

$$G(t+T, s+T) = \frac{\exp\left(\int_{t+T}^{s+T} a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1}.$$

Posant

$$v = \theta - T, \text{ c-à-d } \theta = v + T,$$

alors

$$\begin{aligned} d\theta &= dv, \quad a(\theta) = a(v + T) \\ \theta &= t + T \implies v = (t + T) - T = t \\ \theta &= s + T \implies v = (s + T) - T = s. \end{aligned}$$

Donc

$$G(t + T, s + T) = \frac{\exp\left(\int_{t+T}^{s+T} a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = \frac{\exp\left(\int_t^s a(v + T) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(v + T) dv\right) - 1}.$$

Comme a est périodique, alors $a(v + T) = a(v)$. D'où

$$G(t + T, s + T) = \frac{\exp\left(\int_{t+T}^{s+T} a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = \frac{\exp\left(\int_t^s a(v) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(v) dv\right) - 1} = G(t, s).$$

2. Comme $a(\theta) > 0$, $\exp\left(\int_t^s a(v) dv\right) > 0$ et $\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) > 1$, alors

$$G(t, s) = \frac{\exp\left(\int_t^s a(v) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} > 0,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} G(t, s) &= \frac{\exp\left(\int_t^s a(v) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} \\ &= a(s) \frac{\exp\left(\int_t^s a(v) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = a(s) G(t, s) > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$G(t, s) \geq G(t, t) = \frac{1}{\delta - 1},$$

et

$$G(t, s) \leq \frac{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right)}{\exp\left(\int_0^T a(\theta) d\theta\right) - 1} = \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Ce qui achève la preuve. ■

2.3 Existence des solutions périodiques positives de l'équation (2.1)

Dans cette section, on va utiliser le théorème du point fixe de *Leggett-Williams* pour établir l'existence d'au moins trois solutions périodiques positives de l'équation (2.1).

Lemme 2.3 *L'ensemble \mathbb{K} donnée par :*

$$\mathbb{K} = \left\{ x(t) \in X : x(t) \geq \frac{\|x\|}{\delta}, t \in [0, T] \right\}, \quad (2.7)$$

est un cône.

Preuve. Il est aisé de prouver que \mathbb{K} est fermé, il suffit de montrer que toute suite (x_n) d'éléments de \mathbb{K} qui converge (donc qui a une limite $x \in \mathbb{X}$) a sa limite dans \mathbb{K} lui même (autrement dit, on ne peut pas sortir de \mathbb{K} par un passage à la limite).

La convexité : Si $x, y \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in [0, 1]$, alors

$$x \in \mathbb{K} \implies x(t) \geq \frac{\|x\|}{\delta} \implies \alpha x(t) \geq \frac{\alpha \|x\|}{\delta},$$

et

$$y \in \mathbb{K} \implies y(t) \geq \frac{\|y\|}{\delta} \implies (1 - \alpha)y(t) \geq (1 - \alpha) \frac{\|y\|}{\delta}.$$

En sommant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha x(t) + (1 - \alpha)y(t) &\geq \frac{\alpha \|x\| + (1 - \alpha) \|y\|}{\delta} \\ &= \frac{\|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\|}{\delta} \\ &\geq \frac{\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|}{\delta}, \end{aligned}$$

alors $\alpha x(t) + (1 - \alpha)y(t) \in \mathbb{K}$ ce qui prouve qu'il est convexe.

Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on va montrer que $x \in \mathbb{K} \implies \lambda x \in \mathbb{K}$: On a

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{K} &\implies x(t) \geq \frac{\|x\|}{\delta} \\ &\implies \lambda x(t) \geq \frac{\lambda \|x\|}{\delta} = \frac{\|\lambda x\|}{\delta}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda x \in \mathbb{K}$.

Si $x \in \mathbb{K}$ et $-x \in \mathbb{K}$, on va montrer que $x = 0$: On a

$$x(t) \in \mathbb{K} \iff x(t) \geq \frac{\|x\|}{\delta},$$

et

$$-x(t) \in \mathbb{K} \iff -x(t) \geq \frac{\|-x\|}{\delta} = \frac{\|x\|}{\delta} \iff x(t) \leq \frac{-\|x\|}{\delta}.$$

Par suite

$$0 \leq \frac{\|x\|}{\delta} \leq x(t) \leq \frac{-\|x\|}{\delta} \leq 0,$$

ce qui prouve que $x(t) = 0$. ■

Maintenant, on définit un opérateur intégral A_λ comme suit :

$$\begin{aligned} A_\lambda : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{X} \\ x &\longmapsto A_\lambda x, \end{aligned}$$

où

$$(A_\lambda x)(t) = \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds. \quad (2.8)$$

Lemme 2.4 *L'opérateur A_λ défini par (2.8) vérifie les propriétés suivantes :*

- 1) $A_\lambda(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$.
- 2) A_λ est complètement continu.

Preuve.

1) Soit $x \in \mathbb{K}$. D'une part, si on pose $z = s - T$, c-à-d $s = z + T$ on obtient

$$\begin{aligned} (A_\lambda)x(t+T) &= \lambda \int_{t+T}^{t+2T} G(t+T, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &= \lambda \int_t^{t+T} G(t+T, z+T) f(z+T, x(h(z+T))) dz. \end{aligned}$$

Comme $f(z+T, x(h(z+T))) = f(z, x(h(z)))$, on en déduit d'après (2.5) que

$$\begin{aligned} (A_\lambda)x(t+T) &= \lambda \int_t^{t+T} G(t, z) f(z, x(h(z))) dz \\ &= \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &= (A_\lambda)x(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

D'autre part, en vertu de (2.6), on aura

$$(A_\lambda x)(t) \geq \lambda\alpha \int_t^{t+T} f(s, x(h(s))) ds,$$

et

$$\|A_\lambda x\| \leq \lambda\beta \int_t^{t+T} f(s, x(h(s))) ds,$$

ce qui donne

$$\int_t^{t+T} f(s, x(h(s))) ds \geq \frac{\|A_\lambda x\|}{\lambda\beta}.$$

Il s'ensuit que

$$(A_\lambda x)(t) \geq \frac{\lambda\alpha}{\lambda\beta} \|A_\lambda x\| = \frac{\alpha}{\beta} x(t).$$

Comme

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\frac{\delta-1}{\delta}} = \frac{1}{\delta-1} \times \frac{\delta-1}{\delta} = \frac{1}{\delta},$$

alors

$$(A_\lambda x)(t) \geq \frac{\|A_\lambda x\|}{\delta}. \quad (2.10)$$

De (2.9) et (2.10), on en déduit que $A_\lambda x \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathbb{K}$. D'où $A_\lambda(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$.

2) Maintenant, on va montrer que A_λ est complètement continu; c'est-à-dire qu'il est continu et envoie les ensembles bornés en des ensembles relativement compacts.

Par définition, A_λ est continu si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{K}, [\|x - y\| < \delta] \implies [\|A_\lambda x(t) - A_\lambda y(t)\| < \varepsilon].$$

D'après l'hypothèse (2.2), si $x, y \in \mathbb{K}$ avec $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ et $\|x - y\| < \delta$, on obtient

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |f(s, u(h(s))) - f(s, v(h(s)))| < \frac{\varepsilon}{\lambda \beta T}. \quad (2.11)$$

De (2.11), on arrive à

$$\begin{aligned} |(A_\lambda x)(t) - (A_\lambda y)(t)| &\leq \lambda \int_t^{t+T} |G(t, s)| |f(s, x(h(s))) - f(s, y(h(s)))| ds \\ &\leq \lambda \beta \int_0^T |f(s, x(h(s))) - f(s, y(h(s)))| ds \\ &\leq \lambda \beta \frac{\varepsilon}{\lambda \beta T} T < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que A_λ est continu.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\lambda x)(t) &= \frac{d}{dt} \left(\lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \right) \\ &= \lambda [G(t, t+T) f(t+T, x(h(t+T))) - G(t, t) f(t, x(h(t)))] \\ &\quad + \int_t^{t+T} \frac{d}{dt} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &= \lambda f(t, x(h(t))) [G(t, t+T) - G(t, t)] \\ &\quad + \int_t^{t+T} \frac{d}{dt} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds. \end{aligned}$$

Comme,

$$G(t, t+T) - G(t, t) = 1,$$

et

$$\frac{d}{dt}G(t, s) = -a(t)G(t, s),$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\lambda x)(t) &= \lambda f(t, x(h(t))) - \int_t^{t+T} a(t)G(t, s)f(s, x(h(s)))ds \\ &= \lambda f(t, x(h(t))) - a(t)A_\lambda x(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt}A_\lambda x(t) \right| &\leq \lambda |f(t, x(h(t)))| + |a(t)| |A_\lambda x(t)| \\ &\leq \lambda \beta M_1 [\|a\| T + 2]. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\{(A_\lambda x) : x \in \mathbb{K}, \|x\| \leq M\}$ est une famille de fonctions uniformément bornées et équicontinues sur $[0, T]$. Donc d'après le théorème d'*Ascoli-Arzelà*, elle est compacte. Par conséquent, l'opérateur A_λ est compact.

Comme A_λ est continu et compact, alors A_λ est complètement continu. ■

Lemme 2.5 *La fonctionnelle ψ définie par :*

$$\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t), \quad x \in \mathbb{K},$$

est continue, positive et concave.

Preuve. D'abord ψ est positive et continue par définition. En outre, si $x, y \in \mathbb{K}$ et $\mu \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \psi(\mu x + (1 - \mu)y) &= \min_{t \in [0, T]} (\mu x + (1 - \mu)y)(t) \\ &\geq \min_{t \in [0, T]} \mu(x(t)) + \min_{t \in [0, T]} ((1 - \mu)y(t)) \\ &\geq \mu \min_{t \in [0, T]} x(t) + (1 - \mu) \min_{t \in [0, T]} y(t) \\ &\geq \mu \psi(x) + (1 - \mu) \psi(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve la concavité de ψ . ■

Théorème 2.1 *Supposons que $f^\infty < 1$ et qu'ils existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que*

$$(H_1) \ f(t, x) \geq 2\delta c_2 \text{ pour } x \in \mathbb{K}, c_2 \leq x \leq \delta c_2 \text{ et } 0 \leq t \leq T,$$

$$(H_2) \ f(t, x) < c_1 \text{ pour } x \in \mathbb{K}, 0 \leq x \leq c_1 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Alors, pour

$$\frac{\delta - 1}{2\delta T} < \lambda < \frac{\delta - 1}{\delta T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

Preuve. Si la condition $f^\infty < 1$ est satisfaite, alors il existe $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\theta > 0$ tel que

$$f(t, x) < \varepsilon x \text{ pour } x \geq \theta.$$

De plus si

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

alors

$$f(t, x) < \varepsilon x + \gamma, \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

En effet, si on pose

$$f^\infty = \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \frac{f(t, x)}{x} = \ell.$$

La condition $f^\infty < 1$ conduit à

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \theta > 0 : x > \theta \implies \left| \frac{f(t, x)}{x} - \ell \right| < \varepsilon',$$

où

$$\left| \frac{f(t, x)}{x} - \ell \right| < \varepsilon' \implies \frac{f(t, x)}{x} < \ell + \varepsilon'.$$

Donc $\forall \varepsilon' > 0$ et $x > \theta$ on a

$$f(t, x) < (\ell + \varepsilon') x \text{ avec } \ell < 1.$$

Par conséquent, il existe $0 < \varepsilon < 1$ sachant que

$$f(t, x) < \varepsilon x,$$

et

$$f(t, x) < \varepsilon x + \gamma, \text{ où } \gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x).$$

Maintenant, on va utiliser le Théorème 1.6 de *Leggett-Williams* pour montrer l'existence des solutions périodiques positives.

a) On va prouver que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$. C'est pour ça on choisit

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\gamma}{1 - \varepsilon}, \delta c_2 \right\}.$$

Soit $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$, on a

$$x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \implies \begin{cases} x \in \mathbb{K} \\ \text{et} \\ \|x\| \leq c_4 \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) \geq \frac{\|x\|}{\delta} \\ \text{et} \\ \|x\| \leq c_4 \end{cases}.$$

Et on va montrer que $A_\lambda x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$; c'est-à-dire on va montrer que

$$(A_\lambda)x(t) > \frac{\|A_\lambda x\|}{\delta},$$

et

$$\|A_\lambda x\| \leq c_4.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \|A_\lambda x\| &\leq \frac{\lambda\delta}{\delta-1} \int_0^T (\varepsilon x(h(s)) + \gamma) ds \\
 &\leq \frac{\lambda\delta}{\delta-1} \int_0^T (\varepsilon \|x\| + \gamma) ds \\
 &\leq \frac{\lambda\delta(\varepsilon c_4 + \gamma)}{\delta-1} T \\
 &\leq \left[\frac{1}{\delta-1} \right] \left[\frac{\delta-1}{\delta T} \right] \delta T [\varepsilon c_4 + \gamma] \\
 &\leq \varepsilon c_4 + \gamma,
 \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\gamma}{1-\varepsilon}, \delta c_2 \right\} \implies \begin{cases} c_4 > \frac{\gamma}{1-\varepsilon} \\ \text{et} \\ c_4 > \delta c_2 \end{cases},$$

ce qui entraîne que

$$c_4 > \frac{\gamma}{1-\varepsilon} \implies \gamma < c_4(1-\varepsilon).$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \|A_\lambda x\| &\leq \varepsilon c_4 + c_4(1-\varepsilon) \\
 &= c_4,
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$.

b) On va montrer que $\{x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) : \psi(x) > c_2\} \neq \emptyset$ et $\psi(A_\lambda x) > c_2$ pour tout $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$.

Soit ψ une fonctionnelle continue concave et positive définie sur \mathbb{K} par

$$\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t),$$

et $c_3 = \delta c_2$. On pose

$$\Omega = \{x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) : \psi(x) > c_2\},$$

et soit $x \in \Omega$, alors

$$x \in \Omega \implies \begin{cases} x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) \\ \text{et} \\ \psi(x) > c_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \psi(x) \geq c_2 \text{ et } \|x\| \leq c_3 \\ \text{et} \\ \psi(x) > c_2 \end{cases} .$$

Si $\phi_0(t) = \phi_0$ avec $c_2 < \phi_0 < c_3$, alors $\phi_0 \in \Omega$ et donc Ω est non vide. Il reste à montrer que $\psi(A_\lambda x) > c_2$ pour tout $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$. Pour cela, si $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$ nous avons

$$\psi(A_\lambda x) = \min_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds.$$

D'après (H_1) , on obtient

$$\begin{aligned} \psi(A_\lambda x) &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} 2\delta c_2 T \\ &> \left[\frac{\delta - 1}{2\delta T} \right] \left[\frac{1}{\delta - 1} \right] [2\delta c_2 T] \\ &> c_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la première condition du Théorème 1.6 est satisfaite.

c) On va montrer que $\|A_\lambda x\| < c_1$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$. Soit $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$, alors

$$x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1} \implies \begin{cases} x \in \mathbb{K} \\ \text{et} \\ \|x\| \leq c_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\|x\|}{\delta} \leq x(t) \\ \text{et} \\ \|x\| \leq c_1 \end{cases} .$$

On a

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds. \end{aligned}$$

D'après (H_2) , on aura

$$\begin{aligned}\|A_\lambda x\| &\leq \frac{\lambda\delta}{\delta-1}c_1T \\ &< \left[\frac{\delta-1}{\delta T}\right] \left[\frac{\delta}{\delta-1}\right] [c_1T] \\ &< c_1.\end{aligned}$$

Donc la deuxième condition Théorème 1.6 est remplie.

Finalement, pour $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_4)$ avec $\|A_\lambda x\| > c_3$, on a

$$\begin{aligned}\|A_\lambda x\| &= \left\| \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \right\| \\ &\leq \frac{\lambda\delta}{\delta-1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(A_\lambda x) &\geq \frac{\lambda}{\delta-1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &> \left[\frac{\delta-1}{2\delta T}\right] \left[\frac{1}{\delta-1}\right] 2\delta c_2 T \\ &> c_2,\end{aligned}$$

et par conséquent, la troisième condition du Théorème 1.6 est satisfaite.

Enfin, (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

Théorème 2.2 *Supposons que $f^\infty < \frac{1}{\beta}$ et qu'ils existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que*

(H_3) $f(t, x) \geq \delta(\delta-1)c_2$ pour $x \in \mathbb{K}$, $c_2 \leq x \leq \delta c_2$ et $0 \leq t \leq T$,

(H_4) $f(t, x) < \frac{1}{\beta}c_1$ pour $x \in \mathbb{K}$, $0 \leq x \leq c_1$ et $0 \leq t \leq T$.

Alors, pour

$$\frac{1}{\delta T} < \lambda < \frac{1}{T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

La preuve de ce théorème est analogue à celle du Théorème 2.1. Par souci d'exhaustivité, il convient cependant de prouver ce théorème.

Preuve. Si $f^\infty < \frac{1}{\beta}$, alors il existe $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ et $\theta > 0$ telles que

$$f(t, x) < \varepsilon x \text{ pour } x \geq \theta.$$

De plus, si

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

alors

$$f(t, x) < \varepsilon x + \gamma \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Si on choisit

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\gamma\beta}{1 - \beta\varepsilon}, \delta c_2 \right\},$$

et si on suit les mêmes démarches que celles du Théorème 2.1, on peut montrer que

$A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$. Ensuite, on définit une fonctionnelle continue concave et positive ψ dans \mathbb{K} par

$$\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t).$$

On choisit $c_3 = \delta c_2$ et on pose

$$\Omega = \{x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) : \psi(x) > c_2\},$$

alors

$$x \in \Omega \implies \begin{cases} x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) \\ \text{et} \\ \psi(x) > c_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \psi(x) \geq c_2 \text{ et } \|x\| \leq c_3 \\ \text{et} \\ \psi(x) > c_2 \end{cases}.$$

Si $\phi_0(t) = \phi_0$ avec $c_2 < \phi_0 < c_3$, alors $\phi_0 \in \Omega$ et donc l'ensemble Ω est non vide. De plus, pour $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$ on a

$$\psi(A_\lambda x) = \min_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds.$$

D'après (H_3) , on obtient

$$\begin{aligned}\psi(A_\lambda x) &\geq \frac{\lambda}{\delta-1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{\lambda}{\delta-1} \delta(\delta-1) c_2 T \\ &> c_2.\end{aligned}$$

D'après (H_4) , pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$ on aura

$$\begin{aligned}\|A_\lambda x\| &\leq \frac{\lambda\delta}{\delta-1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda\delta}{\delta-1} c_1 \frac{\delta-1}{\delta} T \\ &< c_1.\end{aligned}$$

En outre, pour $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_4)$ avec $\|A_\lambda x\| > c_3$, il vient

$$c_3 < \|A_\lambda x\| \leq \frac{\delta}{\delta-1} \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\psi(A_\lambda x) &\geq \frac{1}{\delta-1} \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &> \frac{c_3}{\delta} \\ &= c_2.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons par le Théorème 1.6, que l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

Théorème 2.3 *Supposons que $f^\infty < \frac{1}{\beta^2}$ et qu'ils existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que*

$$(H_5) \quad f(t, x) \geq \frac{c_2}{\beta} \text{ pour } x \in \mathbb{K}, c_2 \leq x \leq \delta c_2, \text{ et } 0 \leq t \leq T,$$

$$(H_6) \quad f(t, x) < \frac{c_1}{\beta^2} \text{ pour } x \in \mathbb{K}, 0 \leq x \leq c_1, \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Alors pour

$$\frac{1}{T} < \lambda < \frac{\beta}{T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

Preuve. Si $f^\infty < \frac{1}{\beta^2}$, alors il existe $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\beta^2}\right)$ et $\theta > 0$ telles que

$$f(t, x) < \varepsilon x,$$

pour $x \geq \theta$. De plus, si

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

alors $f(t, x) < \varepsilon x + \gamma$ pour $x \geq 0$ et $0 \leq t \leq T$.

Comme dans la preuve du Théorème 2.1, il est facile de montrer que

$A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$ où

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\beta^2 \gamma}{1 - \beta^2 \varepsilon}, \delta c_2 \right\}.$$

Si ψ est une fonctionnelle continue concave et positive dans \mathbb{K} et définie comme dans la preuve du Théorème 2.1, alors pour $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$ nous obtenons de (H_5) que $\|A_\lambda x\| > c_2$ et pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$, la condition (H_6) conduit à

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &\leq \beta \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \beta \lambda \int_0^T \frac{c_1}{\beta^2} ds \\ &< c_1. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est le même que celui du Théorème 2.1. Par conséquent (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

Théorème 2.4 *Supposons que $f^\infty < \frac{(\delta - 1)^2}{\delta^3}$ et qu'ils existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que*

(H_5) *soit satisfaite,*

(H_7) $f(t, x) < \frac{(\delta - 1)^2}{\delta^3} c_1$ *pour $x \in \mathbb{K}$, $0 \leq x \leq c_1$ et $0 \leq t \leq T$.*

Alors pour

$$\frac{1}{T} < \lambda < \frac{\delta^2}{(\delta - 1)T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

Preuve. Si $f^\infty < \frac{(\delta - 1)^2}{\delta^3}$, alors il existe $\varepsilon \in \left(0, \frac{(\delta - 1)^2}{\delta^3}\right)$ et $\theta > 0$ telles que

$$f(t, x) < \varepsilon x \text{ pour } x \geq \theta.$$

De plus, on suppose que

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

ce qui donne

$$f(t, x) < \varepsilon x + \gamma \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

On pose

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\delta^3 T}{(\delta - 1)^2 - \delta^3 \varepsilon}, \delta c_2 \right\}.$$

Donc, si on suit les mêmes démarches que celles du Théorème 2.1, on peut prouver que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$.

Avec la même fonctionnelle continue, concave et positive ψ qui est définie dans la preuve du Théorème 2.1 et en utilisant (H_5) , on obtient

$$\begin{aligned} \psi(A_\lambda x) &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} (\delta - 1) c_2 T \\ &> c_2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$ on utilise (H_7) pour avoir

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &\leq \lambda \frac{\delta}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &< \lambda \left(\frac{\delta}{\delta - 1} \right) \left(\frac{(\delta - 1)^2}{\delta^3} \right) c_1 T \\ &< c_1. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est similaire à la preuve du Théorème 2.1. Par conséquent (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

Théorème 2.5 Soit $f^\infty < 1$ et $f^0 < 1$. S'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que (H_1) soit satisfaite, alors pour

$$\frac{\delta - 1}{2\delta T} < \lambda < \frac{\delta - 1}{\delta T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

Preuve. Si $f^\infty < 1$, il existent $0 < \delta_1 < 1$ et $\varepsilon_1 > 0$ telles que

$$f(t, x) \leq \delta_1 x.$$

Pour $x \geq \varepsilon_1$, soit

$$\beta_1 = \max_{0 \leq x \leq \varepsilon_1, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

alors

$$f(t, x) \leq \delta_1 x + \beta_1, \text{ pour } 0 \leq x < \infty.$$

On choisit

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\beta_1}{1 - \delta_1}, \delta c_2 \right\},$$

donc pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$, on a

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} \int_0^T (\delta_1 x(h(s)) + \beta_1) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} \int_0^T (\delta_1 \|x\| + \beta_1) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta (\delta_1 c_4 + \beta_1)}{\delta - 1} T \\ &< c_4, \end{aligned}$$

ce qui montre que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$.

Soit $c_3 = \delta c_2$ et soit la fonctionnelle non négative concave et continue

$$\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t).$$

Moyennant (H_1) , on peut montrer la condition (1) du théorème de *Leggett-Williams*.

Comme $f^0 < 1$, il existent $0 < \delta_2 < 1$ et $0 < \varepsilon_2 < \frac{c_2}{2}$ telles que

$$f(t, x) \leq \delta_2 x, \text{ pour } 0 < x < \varepsilon_2.$$

Soit $0 < c_1 = \varepsilon_2$, alors pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$, on a

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_0^T G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \lambda \delta_2 \left(\frac{\delta}{\delta - 1} \right) c_1 T \\ &\leq \delta_2 c_1 \\ &< c_1. \end{aligned}$$

Donc, la conditions (2) du théorème de *Leggett-Williams* est satisfaite. La preuve de la condition (3) du Théorème 1.6 est facile. Par conséquent, (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

Exemple 2.1 On considère l'équation

$$x'(t) = - \left(\frac{\log 3}{2} \right) |\sin t| x(t) + \left(\frac{12}{35\pi} \right) e^9 x^3(t) e^{-x(t)}, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

Ici $a(t) = \frac{\log 3}{2} |\sin t|$ et $T = \pi$. Posant $\lambda = \frac{3}{7\pi}$, alors $f(t, x) = \frac{4}{5} e^9 x^3 e^{-x}$. Il est Claire que $f^\infty < 1$ et $f^0 < 1$. En outre, $\int_0^\pi a(t) dt = \log 3$ ce qui implique que $\delta = 3$. Par conséquent, $\alpha = \frac{1}{\delta - 1} = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\delta}{\delta - 1} = \frac{3}{2}$. En choisissant $c_2 = 3$, nous obtenons $c_3 = \delta c_2 = 9$. Alors il est facile de voir que

$$f(t, x) = \frac{4}{5} e^9 x^3 e^{-x} > \frac{108}{5} > 18 = 2\delta c_2 \text{ pour } c_2 \leq x \leq c_3.$$

C'est-à-dire (H_1) est satisfaite. En outre, $\lambda = \frac{3}{7\pi} \in \left(\frac{1}{3\pi}, \frac{2}{3\pi} \right) = \left(\frac{\delta - 1}{2\delta T}, \frac{\delta - 1}{\delta T} \right)$, ainsi par le Théorème 2.5, l'équation (2.12) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

Remarque 2.2 En générale, il est difficile d'obtenir une fonction $f(t, x(t))$ vérifiant les conditions (H_1) et (H_2) , ou (H_3) et (H_4) , ou (H_5) et (H_6) , ou (H_5) et (H_7) simultanément. D'après le Théorème 2.5, il est facile de vérifier que les conditions (H_2) , (H_4) , (H_6) , et (H_7) peuvent être remplacées par les conditions $f^0 < 1$, $f^0 < \frac{1}{\beta}$, $f^0 < \frac{1}{\beta^2}$ et $f^0 < \frac{(\delta - 1)^2}{\delta^3}$ respectivement. Pour la preuve, on peut suivre les mêmes démarches du Théorème 2.5.

Remarque 2.3 On a

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+T} a(s) G(t, s) ds &= \frac{1}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} \int_t^{t+T} a(s) e^{\int_t^s a(\theta) d\theta} ds \\
 &= \frac{1}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} \int_t^{t+T} \frac{d}{ds} \left(e^{\int_t^s a(\theta) d\theta} \right) ds \\
 &= \frac{1}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} \left[e^{\int_t^s a(\theta) d\theta} \right]_t^{t+T} \\
 &= \frac{1}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} \left[e^{\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta} - e^{\int_t^t a(\theta) d\theta} \right] \\
 &= \frac{1}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} \left[e^{\int_t^{t+T} a(\theta) d\theta} - 1 \right] \\
 &= \frac{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1}{e^{\int_0^T a(\theta) d\theta} - 1} = 1.
 \end{aligned}$$

Ceci nous amène à obtenir des nouvelles conditions suffisantes pour l'existence d'au moins trois solutions positives et périodiques de l'équation (2.1).

Théorème 2.6 Supposons que $f^{\infty} < T$ et qu'ils existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que (H_1) et (H_4) soient satisfaites. Alors pour

$$\frac{\delta - 1}{2\delta T} < \lambda < \frac{1}{T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions positives et périodiques.

Preuve. Si $f^{\infty} < T$, il existent $\varepsilon \in (0, T)$ et $\theta > 0$ telles que

$$f(t, x) \leq \varepsilon a(t) x \text{ pour } x \geq \theta \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Soit

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

alors

$$f(t, x) \leq \varepsilon a(t) x + \gamma \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

On choisit

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\delta \gamma T}{(\delta - 1)(T - \varepsilon)}, \delta c_2 \right\},$$

alors, si $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$, il vient

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) (a(s) x(h(s)) \varepsilon + \gamma) ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) (a(s) \|x\| \varepsilon + \gamma) ds \\ &\leq \lambda \left[\varepsilon c_4 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_t^{t+T} a(s) G(t, s) ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \gamma \int_t^{t+T} G(t, s) ds \right] \\ &\leq \lambda \left[\varepsilon c_4 + \frac{\delta \gamma}{\delta - 1} T \right] \\ &< c_4. \end{aligned}$$

D'où $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$.

Ainsi, si on définit une fonction continue concave et non négative ψ sur \mathbb{K}

par

$$\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t),$$

on aura

$$\psi(x) \leq \|x\|.$$

Soit $c_3 = \delta c_2$ et $\phi_0(t) = \phi_0$, où $c_2 < \phi_0(t) < c_3$. Donc

$$\phi_0 \in \{x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3) : \psi(x) > c_2\}.$$

De plus, en utilisant (H_1) , si $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$, on obtient

$$\begin{aligned} \psi(A_\lambda x) &= \min_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{1}{\delta - 1} \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} 2\delta c_2 T \\ &> c_2. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$, de (H_4) , on arrive à

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \frac{\lambda \delta}{\delta - 1} c_1 \frac{\delta - 1}{\delta} T \\ &< c_1, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $A_\lambda x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$.

Finalement, pour $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_4)$ avec $\|A_\lambda x\| > c_3$, on a

$$c_3 < \|A_\lambda x\| \leq \frac{\delta}{\delta - 1} \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\psi(A_\lambda x) &\geq \frac{1}{\delta-1} \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &> \frac{c_3}{\delta} \\ &= c_2.\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 1.6 sont satisfaites et donc l'équation (2.1) admet au moins trois solutions positives T -périodiques. ■

Théorème 2.7 *Supposons que $f \sim^\infty < T$ et qu'ils existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que (H_4) et la condition (H_8) suivante :*

(H_8) $f(t, x) \geq 2(\delta-1)c_2$ pour $x \in \mathbb{K}$, $c_2 \leq x \leq \delta c_2$ et $0 \leq t \leq T$, soient satisfaites, alors pour

$$\frac{1}{2T} < \lambda < \frac{1}{T},$$

l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives.

Preuve. La preuve de ce théorème est très semblable à celle du Théorème 2.6. Ici, on utilise (H_8) au lieu de (H_1) . Pour montrer la condition (1) du Théorème 1.6, on définit ψ sur \mathbb{K} par

$$\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t),$$

et on pose

$$c_3 = \delta c_2.$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\psi(A_\lambda x) &= \min_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{1}{\delta-1} \lambda \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{\lambda}{\delta-1} 2(\delta-1)c_2 T \\ &> c_2.\end{aligned}$$

Enfin, par le Théorème 1.6, l'équation (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

Théorème 2.8 Soit $\tilde{f}^{\infty} < T$ et $\tilde{f}^0 < T$. Supposons qu'il existent des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que (H_1) soit satisfaite. Alors pour

$$\frac{\delta - 1}{2\delta T} < \lambda < \frac{1}{T},$$

il existe au moins trois solutions T -périodiques positives de (2.1)

Preuve. Si $\tilde{f}^{\infty} < T$, il existent $0 \leq \delta_1 \leq T$ et $\varepsilon_1 > 0$ telles que

$$f(t, x) \leq \delta_1 a(t) x \text{ pour } x > \varepsilon_1 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Soit

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \varepsilon_1, 0 \leq t \leq T} f(t, x).$$

Alors

$$f(t, x) \leq \delta_1 a(t) x + \gamma \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Si on choisit c_4 comme dans la preuve du Théorème 2.6, on peut montrer que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$. En outre, on définit une fonction continue et concave ψ sur \mathbb{K} par $\psi(x) = \min_{t \in [0, T]} x(t)$. Donc l'utilisation de (H_1) , nous permet de prouver la condition (1) du Théorème 1.6.

Maintenant, $\tilde{f}^0 < T$ implique qu'il existent δ_2 , $0 < \delta_2 < T$ et $\frac{c_2}{2} > \varepsilon_2 > 0$ telles que

$$f(t, x) \leq \delta_2 a(t) x \text{ pour } 0 \leq x \leq \varepsilon_2 \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

En posant $0 < c_1 = \varepsilon_2$, alors $0 < c_1 < c_2$. D'où, pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \lambda \delta_2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T G(t, s) a(s) \|x\| ds, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &\leq \lambda c_1 \delta_2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T a(s) G(t, s) ds \\ &\leq \lambda c_1 \delta_2 \\ &< c_1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la condition (2) du Théorème 1.6 est satisfaite.

En suivant les mêmes démarches que celles dans la preuve du Théorème 2.6, on peut montrer la condition (3) du Théorème 1.6. Par conséquent, il existe au moins trois solutions T -périodiques positives de (2.1). ■

Théorème 2.9 Soit $\tilde{f}^\infty < T$, $\tilde{f}^0 < T$ et supposons que (H_8) est satisfaite.

Alors il existe au moins trois solutions T -périodiques positives de (2.1) pour

$$\frac{1}{2T} < \lambda < \frac{1}{T}.$$

Preuve. Comme $\tilde{f}^\infty < T$ et $\tilde{f}^0 < T$, on peut procéder comme dans la preuve du Théorème 2.8 pour prouver que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$ et que les conditions (2) et (3) du Théorème 1.6 sont remplies. Il reste alors de montrer la condition (1) du Théorème 1.6. On considère la fonctionnelle concave ψ comme dans les preuves précédentes. Alors, pour $x \in \mathbb{K}(\psi, c_2, c_3)$, on utilise (H_8) pour obtenir

$$\begin{aligned} \psi(A_\lambda x) &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} \int_0^T f(s, x(h(s))) ds \\ &\geq \frac{\lambda}{\delta - 1} 2(\delta - 1) c_2 T \\ &> c_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (1) du Théorème 1.6 est satisfaite. D'où le résultat désiré. ■

Théorème 2.10 *Supposons que $f \sim^\infty < T$ et qu'il existe des constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que (H_1) et la condition (H_9) suivante :*

(H_9) $f(t, x) < x$ pour $0 \leq x \leq c_1$ et $0 \leq t \leq T$,

soient satisfaites. Alors, pour

$$\frac{\delta - 1}{2\delta T} < \lambda < \frac{\delta - 1}{\delta T},$$

il existe au moins trois solutions T -périodiques positives de (2.1).

Preuve. Comme $f \sim^\infty < T$, il existe $\varepsilon \in (0, T)$ et $\theta > 0$ telles que

$$f(t, x) \leq \varepsilon a(t)x \text{ pour } x \geq \theta \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

Soit

$$\gamma = \max_{0 \leq x \leq \theta, 0 \leq t \leq T} f(t, x),$$

alors $f(t, x) \leq \varepsilon a(t)x + \gamma$ pour $x \geq 0$ et $0 \leq t \leq T$.

Maintenant, si on choisit

$$c_4 > \max \left\{ \frac{\delta \gamma T}{\delta(T - \varepsilon) + \varepsilon}, \delta c_2 \right\},$$

on peut prouver que $A_\lambda : \overline{\mathbb{K}}_{c_4} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_{c_4}$. Par ailleurs, pour prouver la deuxième condition du Théorème 1.6, on procède comme suit :

De (H_9) , pour $x \in \overline{\mathbb{K}}_{c_1}$ on aura

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \lambda \int_t^{t+T} G(t, s) f(s, x(h(s))) ds \\ &\leq \lambda c_1 \frac{\delta}{\delta - 1} T \\ &< c_1. \end{aligned}$$

Tandis que la troisième condition de Théorème 1.6 est facile à établir. Enfin, (2.1) admet au moins trois solutions T -périodiques positives. ■

CHAPITRE 3

Applications à certains modèles biologiques

Sommaire

3.1	Quelques modèles d'équations différentielles à retard en biologie	50
3.2	Applications	56

Après un rapide survol des trois modèles classiques en hématologie humaine et vétérinaire et aussi en dynamique des populations isolées, la deuxième section de ce chapitre vise à appliquer quelques résultats d'existence obtenus précédemment pour étudier cinq modèles retardés, quatre d'entre eux modélisent la production des cellules sanguines tandis que le cinquième modèle décrit l'évolution d'une mouche à viande appelée "mouche des moutons australiens".

3.1 Quelques modèles d'équations différentielles à retard en biologie

3.1.1 Modèle de Lasota-Ważewska

À la fin des années soixante-dix du siècle dernier et dans l'un des premiers travaux pionniers qui forment les bases de l'étude mathématique de l'hématopoïèse, *Ważewska-Czyżewska* et *Lasota* [28] ont introduit l'équation différentielle à un retard constant suivante :

$$x'(t) = -ax(t) + be^{-\gamma x(t-\tau)}, \quad (3.1)$$

pour décrire l'érythropoïèse chez les animaux.



(3.2)

Globules rouges

En terme médical, $x(t)$ (cellules/kg) est la densité des érythrocytes (hématies, globules rouges, GRs) matures dans la circulation sanguine au temps t , $ax(t)$ (cellules/jour) est le terme de destruction, $a > 0$ (jours⁻¹) est le taux de destruction des globules rouges dans la circulation, $be^{-\gamma x(t-\tau)}$ (cellules/kg-jour) qui dépend de la densité cellulaire à un temps antérieur, décrit la reproduction des globules rouges, $b > 0$ (unités cellules/kg-jour) est le taux de production maximal de globules rouges, $\frac{1}{\gamma}$ désigne le nombre maximal d'érythrocytes que le corps peut supporter et τ (jours) représente le temps entre

la production d'une cellule immature dans la moelle osseuse et sa maturité avant sa libération dans la circulation sanguine.

Remarque 3.1 Tous les vertébrés ont des hématies sauf le poisson des glaces *Channichthyidae* chez lequel l'oxygène est dissous dans son sang.



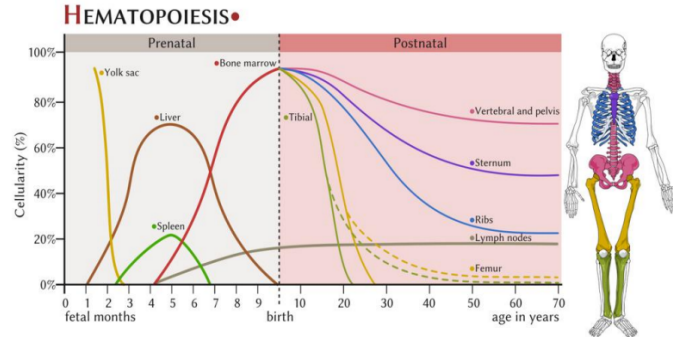
Channichthyidae

En effet, chez les mammifères, le cycle de vie des globules rouges est le même que chez les humains. Les globules rouges sont aussi les mêmes ; ils ont la forme de disques creusés en leur centre, n'ont pas de noyau et utilisent l'hémoglobine pour transporter l'oxygène et le dioxyde de carbone. Chez les oiseaux, la production des globules rouges, qui garde un noyau non-actif, se fait, comme chez les mammifères, dans la moelle osseuse. Chez les vertébrés non-mammaliens, les globules rouges sont plus grands et ont conservé leurs noyaux, et, comme chez les mammifères, utilisent l'hémoglobine pour fixer l'oxygène et le dioxyde de carbone. En revanche, les globules rouges semblent être une exception chez les invertébrés (arthropodes, araignées, mollusques) par exemple, chez les arthropodes, l'air est directement amené vers les organes par un système de trachées ; de ce fait, aucun moyen de transport de l'oxygène n'est nécessaire.

3.1.2 Modèle de Mackey-Glass

À la fin des années soixante-dix, plus précisément en 1978, les scientifiques canadiens *Michael Mackey* et *Leon Glass* [15] ont introduit un modèle d'hé-

matopoïèse postnatal chez les êtres humains et ils l'ont appliqué notamment à l'étude de l'anémie aplasique et de l'hématopoïèse périodique.



Différents stades de l'hématopoïèse [5]

Ils ont proposé un modèle pionnier décrivant la dynamique d'une population de cellules souches hématopoïétiques (CSH) avec un taux de production monotone et un retard constant de la forme :

$$P'(t) = -aP(t) + \frac{b \theta^n P(t - \tau)}{\theta^n + P^n(t - \tau)}.$$

En effectuant le changement de variable $P(t) = \theta x(t)$, on arrive à

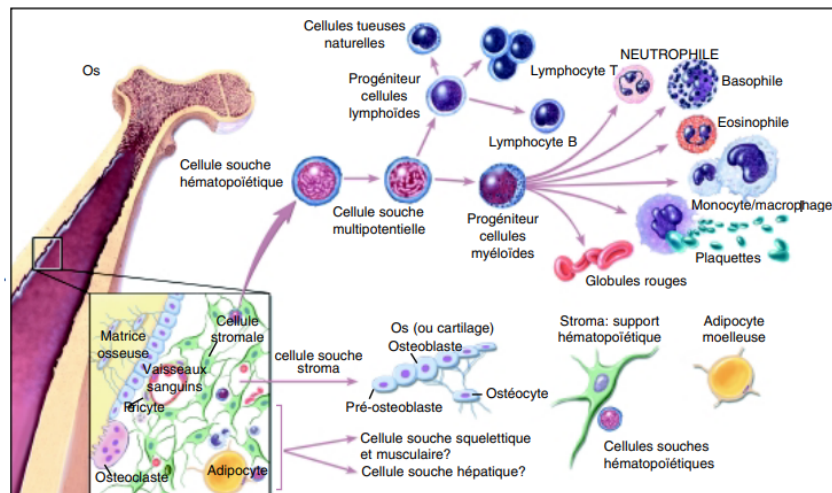
$$x'(t) = -ax(t) + \frac{b x(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)}. \quad (3.3)$$

Plus précisément, ce modèle mathématique a été établi pour modéliser la leucopoïèse ou lymphopoïèse (appelée parfois leucocytopoïèse), qui se définit comme la production de leucocytes (globules blancs ou GBs) à partir des cellules souches hématopoïétiques localisées dans la moelle osseuse. Ces cellules qui participent aux défenses spécifiques de l'organisme, sont divisées en plusieurs catégories de cellules, dont :

- Les polynucléaires (ou granulocytes) : Leur fonction est la phagocytose et ils ont une durée de vie d'une journée.
- Les monocytes : Leur fonction est la phagocytose et ils ont une durée de vie très courte (environ 24 heures)..

Chapitre 3. Applications à certains modèles biologiques

- Les lymphocytes : Ils sont responsables des réponses spécifiques immunitaires dont on distingue trois types, les lymphocytes **B**, les lymphocytes **T**, et les cellules **NK** ou "*Natural Killer*".



Différentes cellules sanguines [3]

En terme médical, $x(t)$ (cellules/kg) désigne la densité des leucocytes matures (globule blancs) dans la circulation sanguine au temps t , qui sont détruites avec un taux $a > 0$ (jours⁻¹), $ax(t)$ (cellules/jour) est le terme de destruction, $\frac{b x(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)}$ (cellules/kg-jour) qui dépend de la densité cellulaire à un temps antérieur, décrit la reproduction des leucocytes, $b > 0$ (unités cellules/kg-jour) est le taux de production maximal de leucocytes, n est un exposant positif désigne la sensibilité du taux de production et $\tau > 0$ (jours) est la durée du cycle cellulaire qui correspond à la période qui va de la naissance d'une globule blanc par division d'une cellule mère jusqu'à sa propre division en réponse à une demande effectuée au temps $t - \tau$. Ce cycle est traditionnellement constitué d'une phase **G1**, phase de synthèse **S** de l'ADN, une phase **G2** et d'une phase de mitose **M** suivée par une phase de repos **G0** hors le cycle.

Remarque 3.2 L'érythropoïèse chez les êtres humains a été modélisée par la deuxième équation de *Mackey-Glass* $x'(t) = -ax(t) + \frac{b}{1 + x^n(t - \tau)}$.

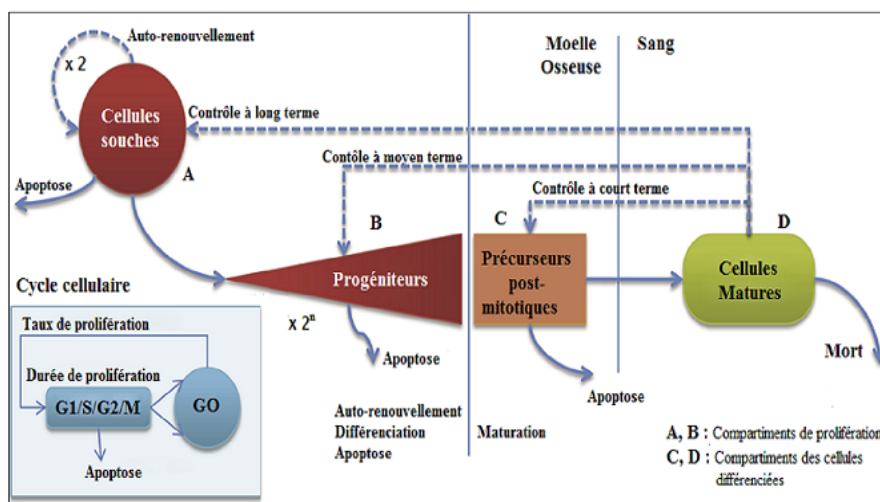


Schéma représentant les différentes étapes de l'hématopoïèse [1]

3.1.3 Equation de *Nicholson*

En mathématiques, l'équation de *Nicholson*, que l'on désigne aussi sous le terme de "équation des mouches du mouton australien", est une équation différentielle non linéaire du premier ordre avec délai.



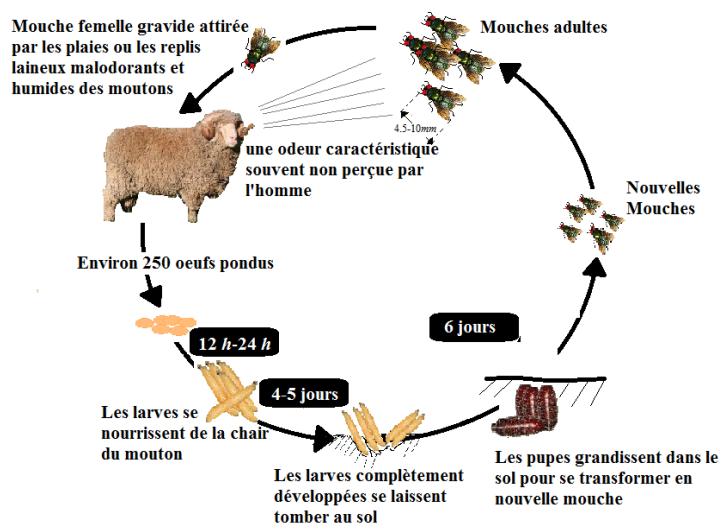
Lucilia cuprina

Cette équation qui a été proposée par *Gurney, Blythe et Nisbet* [8] en 1980, est classiquement utilisée comme modèle pour décrire la dynamique

d'une population de mouches à viande connues sous le nom "*lucilies cuivrées australiennes*" et pour laquelle de nombreuses données de terrain ont été collectées sur plusieurs populations de cette mouche par le célèbre biologiste entomologiste australien *Alexander Jhon. Nicholson* ([19, 18, 20]). Après trois décennies, ces travaux expérimentaux qui ont été faits dans les années cinquante aboutissent enfin à une équation à retard de la forme :

$$x'(t) = bx^m(t - \tau) \exp(-\gamma x^n(t - \tau)) - ax(t), \quad (3.4)$$

où $x(t)$ représente l'effectif de la population à l'instant t (les lucilies cuivrées adultes à l'instant t), b est le maximum de la croissance quotidienne d'œufs par individu, $\frac{1}{\gamma}$ est la capacité de charge du milieu, a est le taux de mortalité par individu (jour^{-1}) et τ est la durée de la phase de maturation (le cycle de développement).



Cycle de développement de la lucilie cuivrée [4]

Remarque 3.3 Dans le premier modèle qui a été proposé par *Gurney* et ses collaborateurs en 1980, $m = n = 1$.

3.2 Applications

Enfin, nous concluons ce chapitre par quelques applications en biologie validant les résultats obtenus précédemment.

3.2.1 Application à un modèle d'érythropoïèse

Maintenant, on va appliquer quelques résultats du deuxième chapitre pour étudier l'équation de *Lasota-Ważewska* (3.1). Il faut noter ici que les travaux réalisés jusqu'à maintenant restent concentrés sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (3.1) (voir [7] et [31]). Par contre, à notre connaissance, rien n'existe dans la littérature sur l'existence d'au moins trois solutions périodiques positives de l'équation (3.1). Les résultats qui suivent découlent du Théorème 2.7.

Théorème 3.1 *Supposons que $\gamma < 2e$, $\delta \leq \frac{2e}{2e - \gamma}$ et $\gamma\delta^2 < \delta - 1$, où $\delta = e^{aT}$, alors pour*

$$\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T},$$

l'équation (3.1) admet au moins trois solutions périodiques positives.

Preuve. Soit $f(t, x) = e^{-\gamma x}$, donc

$$f(t, x) > e^{-\gamma\delta c_2} \text{ pour } c_2 \leq x \leq \delta c_2,$$

où $\delta = e^{aT}$. Ainsi, (H_8) est satisfaite si et seulement si

$$e^{-\gamma\delta c_2} \geq 2(\delta - 1)c_2 \text{ pour } c_2 \leq x \leq \delta c_2.$$

Maintenant, on choisit $c_2 = \frac{1}{\delta\gamma}$, alors $\delta \leq \frac{2e}{2e - \gamma}$ et $c_2 = \frac{1}{\delta\gamma}$ ce qui implique que

$$e^{-\gamma\delta c_2} \geq 2(\delta - 1)c_2 \text{ pour } c_2 \leq x \leq \delta c_2.$$

Par conséquent (H_8) est satisfaite.

Il est aisé de voir que $\tilde{f}^\infty < T$. Pour appliquer le Théorème 2.7, on doit montrer (H_4) et l'existence d'une constante c_1 telle que $0 < c_1 < c_2$.

Comme $f(t, x) < 1$, alors (H_4) est satisfaite si $c_1 > \frac{\delta}{\delta - 1}$. En effet, (H_4) est satisfaite si

$$1 < \frac{\delta - 1}{\delta} c_1 \text{ pour } 0 \leq x \leq c_1,$$

ce qui signifie que $c_1 > \frac{\delta}{\delta - 1}$.

Maintenant, on va montrer l'existence de cette constante c_1 , Il est clair que $\gamma\delta^2 < \delta - 1$ implique que

$$\frac{\delta}{\delta - 1} < \frac{1}{\gamma\delta} = c_2.$$

Ainsi, il existe un réel $c_1 \in \left(\frac{\delta}{\delta - 1}, \frac{1}{\gamma\delta}\right)$ tel que

$$\frac{\delta}{\delta - 1} < c_1 < c_2 = \frac{1}{\gamma\delta}.$$

Donc $f(t, x)$ satisfait (H_4) . Par conséquent, le Théorème 2.7 assure l'existence d'au moins trois solutions périodiques positives de l'équation (3.1) où

$$\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T}.$$

Ce qui achève la preuve. ■

3.2.2 Application à un modèle en dynamique d'une population isolée

Ici, on va appliquer quelques résultats du deuxième chapitre pour étudier l'équation de *Nicholson* (3.4).

Théorème 3.2 *Supposons que $m > 1$ et $2e(\delta - 1)\delta^{(m-1)}\gamma^{\frac{m-1}{n}} \leq 1$. Alors, pour*

$$\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T},$$

l'équation (3.4) admet au moins trois solutions positives périodiques.

Preuve. Soit $f(t, x) = x^m e^{-\gamma x^n}$ et on pose $c_2 = \frac{1}{\delta \gamma^{\frac{1}{n}}}$. Il est aisé de constater que

$$c_3 = \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{n}}},$$

et que $2e(\delta - 1)\delta^{(m-1)}\gamma^{\frac{m-1}{n}} \leq 1$ conduisent à l'estimation suivante :

$$c_2^m e^{-\gamma \delta^n c_2^n} > 2(\delta - 1)c_2 \text{ pour } c_2 \leq x \leq \delta c_2.$$

Et partant (H_8) est satisfaite. De plus, les deux inégalités $\tilde{f}^\infty = 0 < T$ et $\tilde{f}^0 = 0 < T$ sont remplies. Donc d'après le Théorème 2.9, l'équation (3.4) avec

$$\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T},$$

admet au moins trois solutions périodiques positives. ■

Le corollaire suivant découle directement du Théorème 2.5. Il faut signaler ici que, malgré que les conditions de ce théorème semblent compliquées, ils sont faciles à vérifier.

Corollaire 3.1 *Supposons que $m > 1$ et $\delta < \min \left\{ \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{n}}}, \frac{1+2e}{2e} \right\}$. Alors, pour*

$$\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T},$$

l'équation (3.4) admet au moins trois solutions positives périodiques.

Preuve. En effet, l'estimation $\delta < \min \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\gamma n}}, \frac{1+2e}{2e} \right\}$, donne

$$2e(\delta - 1)\delta^{(m-1)}\gamma \frac{m-1}{n} \leq 1.$$

On conclut par le Théorème 2.5, que pour $\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T}$, l'équation (3.4) admet au moins trois solutions périodiques et positives. ■

3.2.3 Application aux trois modèles de leucopoïèse

De même, on va appliquer quelques résultats du deuxième chapitre pour étudier l'équation de *Mackey-Glass* (3.3).

L'application du Théorème 2.9 à l'équation (3.3) donne le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Si $e^{aT} < \frac{3}{2}$ et $T > 1$, alors pour*

$$\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T},$$

l'équation (3.3) admet au moins trois solutions périodiques positives.

Preuve. Soit $f(t, x) = \frac{x}{1+x^n}$ et

$$c_2 = \frac{1}{\delta} \left[\frac{1}{2(\delta-1)} - 1 \right] \frac{1}{n}.$$

Alors $\tilde{f}^\infty < T$ et $\tilde{f}^0 = 1 < T$. Comme $e^{aT} < \frac{3}{2}$, i.e. $\delta < \frac{3}{2}$, on obtient $c_2 > 0$.

En outre,

$$c_2 = \frac{1}{\delta} \left[\frac{1}{2(\delta-1)} - 1 \right] \frac{1}{n},$$

implique que

$$\frac{1}{1 + \delta^n c_2^n} = 2(\delta - 1).$$

D'où la condition (H_8) est satisfaite. Enfin, pour $\frac{1}{2T} < b < \frac{1}{T}$, on déduit du Théorème 2.9 que l'équation (3.3) admet au moins trois solutions périodiques et positives. ■

De même, l'application du Théorème 2.9 à l'équation autonome suivante :

$$x'(t) = -ax(t) + b \frac{x(t - \tau)}{r + x^n(t - \tau)}, \quad (3.5)$$

donne le théorème suivant :

Théorème 3.4 *Si $rT > 1$ et $e^{aT} < \frac{3}{2}$, alors pour*

$$\frac{a}{2T} < b < \frac{a}{T},$$

l'équation (3.5) admet au moins trois solutions périodiques positives.

Si $x(t - \tau)$ située au numérateur de l'équation (3.3) est élevé à une puissance positive quelconque désignée par m , on obtient l'équation (3.6) suivante :

$$x'(t) = -ax(t) + b \frac{x^m(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)}. \quad (3.6)$$

Par souci de simplicité, on pose

$$\mu = 2(\delta - 1) \delta^{2m-1} \frac{n}{1 + m - n} \left(\frac{1 + n - m}{m - 1} \right)^{\frac{m-1}{n}}. \quad (3.7)$$

L'application du Théorème 2.9 à l'équation (3.6) conduit au résultat suivant :

Théorème 3.5 *Si $0 < m - 1 < n$, alors pour*

$$\frac{\mu}{2T} < b < \frac{\mu}{T},$$

l'équation (3.6) admet au moins trois solutions périodiques positives.

Preuve. On peut voir facilement que $\delta > 1$ et $0 < m - 1 < n$ entraînent que $\mu > 0$. L'équation (3.6) peut s'écrire comme suit :

$$x'(t) = -ax(t) + \frac{b}{\mu} \mu \frac{x^m(t-\tau)}{1+x^n(t-\tau)}. \quad (3.8)$$

Soit $f(t, x) = \mu \frac{x^m}{1+x^n}$. Comme $m > 1$, $\tilde{f}^0 = 0 < T$ et $\tilde{f}^\infty = 0 < T$, alors l'application du Théorème 2.9 nécessite de trouver $c_2 > 0$ pour laquelle (H_8) est satisfaite.

Si on pose

$$c_2 = \frac{1}{\delta} \left(\frac{m-1}{1+n-m} \right)^{\frac{1}{n}},$$

alors, pour $c_2 \leq \|x\| \leq \delta c_2$, on obtient

$$\mu \frac{x^m}{1+x^n} \geq \mu \frac{(\|x\|/\delta)^m}{1+\delta^n c_2^n} \geq \frac{\mu}{\delta^m} \frac{c_2^m}{1+\delta^n c_2^n}, \quad (3.9)$$

et

$$1 + \delta^n c_2^n = \frac{n}{1+n-m}.$$

Il vient d'après (3.7) et (3.9) que

$$\begin{aligned} \mu \frac{x^m}{1+x^n} &\geq \frac{c_2^m}{\delta^m} \frac{n-m+1}{n} 2(\delta-1) \delta^{2m-1} \frac{n}{n-m+1} \left(\frac{1+n-m}{m-1} \right)^{\frac{m-1}{n}} \\ &\geq 2(\delta-1) c_2^m \delta^{m-1} \left(\frac{1+n-m}{m-1} \right)^{\frac{m-1}{n}} \\ &\geq 2(\delta-1) c_2^m \delta^{m-1} \frac{1}{c_2^{m-1} \delta^{m-1}} \\ &\geq 2(\delta-1) c_2. \end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat désiré. ■

Conclusion générale

En conclusion de ce mémoire, mentionnons que les équations différentielles à retard qui tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur, occupent une place privilégiée en bio-mathématique surtout dans la description d'un grand nombre de phénomènes biologiques tels que l'hématopoïèse, la croissance des populations, l'épidémiologie, etc.

Dans ce travail nous avons étudié une classe d'équations différentielles fonctionnelles qui généralise les équations différentielles à retard.

Dans un premier temps, nous avons commencé par considérer le cas d'une classe générale d'équations différentielles fonctionnelles du premier ordre où nous avons étudié l'existence d'au moins trois solutions positives, périodiques et bornées via le théorème du point fixe de *Leggett-Williams* combiné avec la méthode des fonctions de *Green* et certains outils utiles de l'analyse fonctionnelle.

Ensuite, nous avons appliqué certains des résultats obtenus à l'étude de cinq modèles biologiques avec un retard constant. Enfin, pour récapituler, l'approche utilisée est une technique hybride basée en premier lieu sur le bon choix de l'espace de travail et son sous ensemble, ensuite, le deuxième pas est l'inversion de l'équation en question en une équation intégrale de

Conclusion

Fredholm dont le noyau est une fonction de *Green*, puis sur l'établissement de certaines propriétés du noyau obtenu avant de définir un opérateur intégral pour appliquer le théorème du point fixe choisi.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Adimy, S. Bernard, J. Clairambault, F. Crauste, S. Génieys, L. Pujon-Menjouet, *Modélisation de la dynamique de l'hématopoïèse normale et pathologique*, Université Lyon 1, Hématologie, vol. 14, n°5, 339 – 350, 2008.
- [2] O. Arino. *A nondifferentiable semigroup generated by a model of cell population dynamics*. In *Appl. Math. Comput. Sci*, volume 4(2), 211 – 221, 1986.
- [3] S. Bernard, *Équations différentielles à retard et leur application en hématopoïèse, avec étude du cas de la neutropénie cyclique*, Université de Montréal, 2003.
- [4] A. Bouakkaz, *Technique de points fixes et applications aux équations différentielles fonctionnelles non linéaires à retard*, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2018.
- [5] M. Bouizem, *Modèles mathématiques structurés en âge*, Thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbes, 2019.
- [6] K.L. Cooke. *Stability analysis for a vector disease model*. In *J. Math.*, volume 9, 31 – 42, 1979.

Bibliographie

- [7] J.R. Graef, C. Qian, P.W. Spikes, *Oscillation and global attractivity in a periodic delay equation*. Can. Math. Bull.38,275–283, 1996.
- [8] W.S.C. Gurney, S.P. Blathe, R.M. Nishbt, *Nicholson's blowflies revisited*. Nature 287, 17 – 21, 1980.
- [9] J.K. Hale et M.K. Cruz, *Existence, Uniqueness and Continuous Dependence for Hereditary Systems*. Ann. Mat. Pura. Appl., 85, 1970.
- [10] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [11] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional Differential equations*. Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [12] G.E. Hutchinson, *Circular causal systems in ecology*, Ann. New York Acad. Sci. 50, 221, 1948.
- [13] M. Krasnov, Z. Kissélev, G. Makarenko, *Equations intégrales. Problèmes et exercices*. Moscou, 1977.
- [14] R.W. Leggett, L.R. Williams, *Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*. Indiana Univ. Math. J. 28, No. 4, 673 – 688, 1979.
- [15] M.C. Mackey, *Unified Hypothesis for the Origin of Aplastic Anemia and Periodic Hematopoiesis*, Blood, Vol. 51, No. 5 (May), 941 – 956, 1978.
- [16] C.M. Marcus, R.M. Westervelt, *Stability of analog neural networks with delay*, Phys. Rev. A 39, 347, 1989.
- [17] A. Martin, *Equations aux dérivées partielles, exercices résolus*. Dunod, 1991.
- [18] A.J. Nicholson, *An outline of the dynamics of animal populations*, Austral. J. Zoo.2, 9 – 65, 1954.

Bibliographie

- [19] A.J. Nicholson, *Compensatory Reactions of Populations to Stresses, and Their Evolutionary Significance*, *Australian Journal of Zoology*, 2, 1 – 8, 1954.
- [20] A.J. Nicholson, *The self adjustment of population to change. Cols. Spring Harb's Syrup. Quant. Biol.* 22, 153 – 173, 1957.
- [21] S. Padhi, J.R. Graef, P.D.N. Srinivasu, *Periodic Solutions of First-Order Functional Differential Equations in Population Dynamics*, Springer, 2014.
- [22] O. Polossuchin, *Über eine Besondere Klasse von Differentialen Funktionalgleichungen, Inaugural Dissertation"*, Zürich, German, 1910.
- [23] S. Ruan, *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, Miami, 2014.
- [24] E. Schmidt, *Über eine Klasse linearer funktionaler differentialgleichungen*, *Math. Ann.* 70, German, 499 – 524, 1911.
- [25] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématiques de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [26] V. Volterra, *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, *J. de Mathématiques* 7, 249 – 298, 1928.
- [27] C.E. Taylor, R.R. Sokal. *Oscillation in housefly populations due to time lag*. *Ecology*, 57, 1060 – 1067, 1976.
- [28] M. Ważewska-Czyżewska, A. Lasota, *Mathematical problems of the dynamics of the red blood cells system*, *Math. Appl.*4, 23 – 40, 1976.
- [29] J.A. Yorke, *Asymptotic stability for one dimensional differential delay equations*. In *J. Diff. Eqns.*, volume 7, 189 – 202, 1970.
- [30] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications, fixed-point theorems*, Springer-Verlage, Berlin, 1993.

Bibliographie

- [31] W. Zhang, D. Zhu, P. Bi, *Existence of periodic solutions of a scalar functional differential equation via a fixed point theorem*. Math. Comput. Model. 46, 718 – 729, 2007.

Logiciel utilisé : Scientific WorkPlace 5.5.