وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N[0] : U.S/F.S/D.M/……/2023.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

STABILITE EXPONENTIELLE D'UN SYSTEME THERMOELASTIQUE LORD SHULMAN AVEC AMORTISSEMENT POREUSE ET UN TERME DE RETARD DISTRIBUE

Option : Analyse numérique pour EDP

Par :

- ***BELDJEHEM HIND***
- ***NOUICER AMINA***

Encadré par : Bouzettouta Lamine **MCA. U. SKIKDA**

Devant le jury :

Président : Lallouche Abdallah **MCB. U. SKIKDA**

Examinatrice: Khenniche Ghania **MCB. U. SKIKDA**

Année : 2022/2023

Remerciements

Tout d'abord,on remercie Allah tous puissant qui nous a donnes la volonté et la force pour accomplir ce travail,également nous remercions infiniment nos parents qui modèle d'affection,de patiences et de sacrifice constant qui n'ont jamais cessé de nous aider et qui ont tous nous offerts. Nous tenons également à remercier notre encadreur, qui a été le meilleur soutien et aide dans l'accomplissement de ce travail.Tous merci,Reconnaissance et appréciation à vous.

Dr. Bouzettouta Lamine

pour ses précieux conseils et ses aides et pertinents ont grandement amélioré et ses encouragement et nous lui exprimons toute notre reconnaissance pour nous avoir initié et accompagner tout au long de ce travail, vraiment merci beaucoup. Un grand merci va également aux membres de jury

Dr. Lallouche Abdallah et Dr. Khenniche Ghania

qui seront la pour juger notre travail. En fin, nous remercions à tout qui ont contribue de prés ou loin de ce présent mémoire sans oublier les personnes qui nous avons connus au département de mathématiques à l'université de SKIKDA

Dédicaces

$\mathcal{J}$ e dédie ce mémoire

$\mathcal{A}$ mes chers parents ma mére et mon pére

$\mathcal{P}$ our leur patience, leur amour leur soutien et leurs encouragements

$\mathcal{A}$ mes fréres

$\mathcal{A}$ mes amies et mes camarades.

$\mathcal{S}$ ans oublier tout les professeus que ce soit du primaire, du moyen du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Beldjehem Hind

Dédicaces

$\mathcal{J}$ e dédie ce mémoire

$\mathcal{A}$ mes chers parents ma mére et mon pére

$\mathcal{P}$ our leur patience, leur amour leur soutien et leurs encouragements

$\mathcal{A}$ mes fréres et mon mari

$\mathcal{A}$ mes amies et mes camarades.

$\mathcal{S}$ ans oublier tout les professeus que ce soit du primaire, du moyen du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Nouicer Amina

Résume

Dans ce mémoire nous considérons un systéme thermoelastique de Lord Shulman a une dimension avec amortissement poreuse et un terme de retard distribué.
sous une hypothése appropriée sur le poids du retard ; nous étudions le résultat d'existance et d'unicité de la solution par la méthode des semi-groupes en utilisant la méthode multiplicative qui repose sur un choix appropriées des fonctionnelle de Lyapunov dans le cas d'egalité des vitesse de oropagation des ondes.

Mots-clés : LORD-SHULMAN, Stabilite Exponentielle, Thermoelastique.

Abstract

In this brief we consider a thermoelastic system of Lord Shulman has a dimension with porous damping and a term of distributed delay.under an appropriate mortgage on the weight of the delay ; we study the result of the existence and uniqueness of the solution by the method of the semi-groups using the multiplicative method which is based on an appropriate choice of the functional of Lyapunov in the case of equality of the speed of oropagation of the waves.

Key-words : LORD-SHULMAN , Exponentiel Stability , Thermoelastic

الملخص

في هده المدكرة يعتبر نظام المرونة الحرارية ل Lord Shulman دو البعد 1 مع تخميد مسامي في وجود التاخيرالموزع تحت فرضية مناسبة حول وزن التاخير.ندرس نتيجة وجود و وحدانية الحل بطريقة Semi-groupe ,

بالنسبة لدالة الاستقرار الاسي نستخدم الطريقة الضربية التي بدورها تستند الى اختيار مناسب لداليات Lyaponov في حالة تساوي سرعات انتشار الموجة

كلمات مفتاحية : لوردشولمان, الاستقرار الاسي, المرونة الحرارية.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Selon la théorie de la thermoélasticité, une déformation du corps est liée à un changement d'enthalpie, par conséquent, à un changement de température. En d'autres termes la thermoélasticité est l'étude de la relation entre la conductivité thermique du matériau, ainsi que ses qualites élastiques et sa température. Dans le modèle classique ,le flux de chaleur est régi par la loi de conductivité thermique de fourier, qui est considérée comme la meilleure équation fondamentale pour modéliser la conduction de la chaleur et declare que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. Cependant, ce modèle présente un inconvénient majeur, car son utilisation conduit a une incohérence physique Pour la vitesse infinie de diffusion de la chaleur, c'est-à-dire toute perturbation thermique à un moment donné se transferera instantanément à d'autres parties du corps. En conséquence, de nombreux chercheurs etaient intéressés a développer de nouvelles relations constitutives pour résoudre ce paradoxe, tels que les théories de Green et Lindsay [49]Lord et Shulman [52], et Gurtin et al [45], Ces théories sont basées sur l'équation de conducteur thermique de Cattaneo Maxwell [43]. Les scientifiques ont été tres intéressés par la thermoélasticité de Lord et Shulman au cours de ces dernières années, et beaucoup de travail ont été faites pour l'expliquer. Cette théorie est basée sur l'étude d'un système de quatre équations hyperboliques avec dissipation de la chaleur ; dans ce cas, l'équation de la chaleur est également hyperbolique par opposition à celle parabolique obtenue à partir de la loi de Fourier. D'autre part, un certain nombre de résultats de stabilité ont été obtenus et la théorie de la thermoélasticité avec microtempératures a été explorée dans de nombreux publications [46, 41, 50, 53, 38, 47, 48]. Il est important de noter que la théorie thermodynamique des matériaux élastiques de microstructure a récemment incorpores la notion de microtempérature. Les microéléments liés ont egalement des microtempératures, qui reflètent la différence de température dans un microvolume, en plus des déformations microstring.

Les équations d'évolution de la loi de Cattaneo Maxwell pour l'élasticité thermo-poreuse aux microtempératures sont :

$$\boldsymbol{\rho_1 u_{tt} = t_x \quad , \quad J\varphi_{tt} = h_x + g \quad , \quad \rho_1 T_0 \eta_t = q_x \quad , \quad \rho_1 e_t = P_x + q - Q} \tag{0.1}$$

$\boldsymbol{\rho_1}$ designe la masse volumique, $\boldsymbol{J}$ est le produit de la masse volumique par l'inertie équilibrée, $\boldsymbol{T_0}$ est la température de référence à l'état d'équilibre (que nous supposons égal à un pour simplifier), , $\boldsymbol{\eta}$ est l'entropie, $\boldsymbol{q}$ est le vecteur de flux de chaleur , $\boldsymbol{h}$ est le stress équilibré, $\boldsymbol{g}$ est la force corporelle équilibrée, $\boldsymbol{P}$ est le premier moment du flux de chaleur, $\boldsymbol{Q}$ est le flux de chaleur moyen et $\boldsymbol{e}$ est le premier moment d'énergie.

Les variables $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ sont respectivement le déplacement du matériau élastique solide et la fraction volumique.

Les équations constitutives sont :

$$\begin{aligned}
t &= (\lambda + 2\mu)\, u_x + \mu_0\varphi - \beta_0\,(\tau\theta_t + \theta) & \qquad h &= a_0\varphi_x - \mu_2\,(\tau T_t + T)\,, \\
g &= -\mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1\,(\tau\theta_t + \theta) & \rho_1\eta &= \beta_0 u_x + \beta_1\varphi + a\,(\tau\theta_t + \theta)\,, \\
q &= \delta\theta_x + k_1 T & P &= -k_2 T_x, \\
Q &= (\delta - k_3)\,\theta_x + (k_1 - k_2)\,T & \rho_1 e &= -b\,(\tau T_t + T) - \mu_2\varphi_x.
\end{aligned} \tag{0.2}$$

La variable $\boldsymbol{\theta}$ indique la température, $\boldsymbol{T}$ la microtempérature, qui représente la variation de la température à l'intérieur du microélément, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont les paramètres usuels et $\boldsymbol{\tau}$ est le paramètre de relaxation ce qui es supposé etre petit mais strictement positif. Les coefficients $\boldsymbol{\beta_0}$, $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\mu_0}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{a_0}$ sont des constantes positives, respectivement, le couplage entre le déplacement et la température, le couplage entre le déplacement et la fraction volumique, le couplage entre le déplacement et la porosité, la conductivité thermique et la capacité thermique.

Le reste des paramètres constitutifs $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$, $\boldsymbol{k_3}$, $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\mu_2}$ définissent les caractéristiques du matériau et, en particulier, ils définissent les couplages et vérifient les inégalités :

$$\boldsymbol{{\mu_0}^2 < \mu_1\xi,} \tag{0.3}$$

et

$$\boldsymbol{{k_2}^2 < \delta k_1,} \tag{0.4}$$

dans lequel $\mu_1 = \lambda + 2\mu$, en remplaçant (0.2) par (0.1) , nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \, u_{tt} = \mu_1 u_{xx} + \mu_0 \varphi_x - \beta_0 \left(\tau \, \theta_{tx} + \theta_x \right), & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ J \, \varphi_{tt} = a_0 \varphi_{xx} - \mu_2 \left(\tau \, T_{tx} + T_x \right) - \mu_0 u_x - \xi \varphi + \beta_1 \left(\tau \, \theta_t + \theta \right), & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ a(\tau \, \theta_t + \theta)_t = -\beta_0 \, u_{tx} - \beta_1 \varphi_t + \delta \theta_{xx} + k_1 T_x, & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ b(\tau \, T_t + T)_t = k_2 T_{xx} - \mu_2 \varphi_{tx} - k_2 T - k_3 \theta_x, & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \end{cases} \tag{0.5}$$

Bazarra, Fernandez et Quintanilla [37] ontconsidere (0.5) et utilisé la théorie des semi-groupes avec la méthode développée par Liu et Zheng pour établir la décroissance exponentielle de la solution pour les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u\left(l,t\right) = u\left(0,t\right) = \varphi_x\left(l,t\right) = \varphi_x\left(0,t\right) = \theta_x\left(l,t\right), \\ = \theta_x\left(0,t\right) = T\left(l,t\right) = T\left(0,t\right) = 0. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Dans [42] l'auteur a établi la stabilité du système ci-dessus en présence du terme $\beta\varphi_t$ poreux ajouté dans la deuxiéme équation, et dans le cas où cele ne suppose pas l'effectif de micro-température. Dans le présent travail, nous étendons les résultats obtenus en [38] en ajoutant le terme de retard distribué dans la deuxième équation, nous considérons le système suivant comme :

$$\begin{cases} \rho_1 \, u_{tt} = \mu_1 u_{xx} + \mu_0 \varphi_x - \beta_0 \left(\tau \, \theta_{tx} + \theta_x \right), & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ J \, \varphi_{tt} = a_0 \varphi_{xx} - \mu_0 u_x - \xi \varphi + \beta_1 \left(\tau \, \theta_t + \theta \right) - \gamma_1 \varphi_t - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2 \left(s \right) \varphi_t \left(x, t-s \right) ds, & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ a(\tau \, \theta_t + \theta)_t = -\beta_0 \, u_{tx} - \beta_1 \varphi_t + \delta \theta_{xx} = 0, & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \end{cases} \tag{0.7}$$

Avec les données initiales :

$$\begin{array}{llll} u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \varphi\left(x,0\right) = \varphi_0\left(x\right), & \theta\left(x,0\right) = \theta_0\left(x\right) & \\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) & \varphi_t\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), & \theta_t\left(x,0\right) = \theta_1\left(x\right) & x \in (0,1) \\ \varphi_t\left(x,-t\right) = f_0\left(x,t\right) & x \in (0,1) \quad , \quad t \in (0,\tau_2), & & \end{array}$$

et conditions aux limites de Neumann-Dirichlet

$$u_x\left(0,t\right) = u_x\left(1,t\right) = \varphi\left(0,t\right) = \varphi\left(1,t\right) = \theta\left(0,t\right) = \theta\left(1,t\right) = 0 \quad , \quad t \geq 0.$$

Les données initiales $\boldsymbol{u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, \theta_1}$ appartienent à l'espace fonctionnel approprié, le terme $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \boldsymbol{\gamma_2 (s)\, \varphi_t (x, t-s)\, ds}$ est un retard distribué qui n'agit que sur l'équation poreuse et $\boldsymbol{\gamma_2 : [\tau_1, \tau_2]} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée, où $\boldsymbol{\tau_1, \tau_2}$ sont deux nombres réels satisfaisants $\boldsymbol{0 \leq \tau_1 < \tau_2}$

Nous montrerons que la dissipation due aux effets thermiques avec amortissement poreux sont suffisamment solides pour stabiliser le système de façon exponentielle, indépendamment des vitesse d'ondes du système.

ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre 1 : Nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles.

Chapitre 2 : Nous introduisons certaines transformations eténoncer l'hypothèse nécessaires a notre travail et nous utilisons la méthode de semi-groupe pour prouver le bien-pose de notre probleme.

Chapitre 3 : Nous eńonçons et prouvons nos resultats de Stabilité exponentielle.

N.B :Nous utilisons $\boldsymbol{c_0}$ tout au long de ce memoire pour désigner une constante positive générique.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant l'analyse fonctionnelle et les résultats de quelques inégalités qu'on utilisera ultérieurement. Ensuite, nous donnerons brièvement, des définitions et des théorèmes ainsi que la theorie de semi-groupe qui nous serons très utiles pour la suite de notre travail. On désignera $\boldsymbol{\omega}$ par un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

1.1 Notion d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces Fonctionnels :

1.1.1.1 Espace Complet

Définition 1

Un espace normé $(\boldsymbol{E}; ||.||_{\boldsymbol{E}})$ est complet si toute suite de Cauchy de $\boldsymbol{E}$ est convergente dans $\boldsymbol{E}$.

1.1.1.2 Espace de Banach

Définition 2

Un espaces vectoriel normé **complet** s'appelle espace de **Banach**.

1.1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 3

Un espace de **Hilbert** est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire(u, v) et qui est **complet** pour la norme

$$(u, v)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.2 Espace de Sobolev :

Commençons par les espaces $L^p(\Omega)$.

1.1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 4

on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{mesurables telles que} \tag{1.1}$$

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty, \text{ si } 1 \leq P < \infty \text{ et } supess|f(x)| < +\infty, \text{ si } p = +\infty\}$$

Théorème 1

Les espace $L^p(\Omega)$, muni des normes suivantes

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{pour} \quad 1 \leq p \leq +\infty \quad \text{et} \quad ||f||_{L^\infty} = supess|f(x)|, \tag{1.2}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert .

1.1.2.2 Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Théorème 2

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev où

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)/\forall\alpha, |\alpha| \leq m \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tel que } v_\alpha = \vartheta^\alpha u \text{ au sens faible } \right\} \tag{1.3}$$

On introduit sur H^m le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{\alpha_l eqm} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle, \tag{1.4}$$

et la norme associée $\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, v \rangle}_m$

Théorème 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni de produit scalaire (1.4) est un espace de Hilbert séparable.

Dans le cas $m = 1$ on utilise la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ pour définir l'espace de Sobolev suivant :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\} \tag{1.5}$$

H désigne un espace de Hilbert, H' son dual.

1.2 Certaines inégalités algébrique

Nous allons donner ici quelques inégalités algébrique importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliqués et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

1.2.1 Inégalité de Hölder

Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors le produit f, g est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q dx\right)^{1/q},$$

$$||fg||_{L^1} \leqslant ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

Remarque 2

L'inégalité de Cauchy Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de

Hölder avec $p = q = 2$.

1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

soient f et g deux fonction dans $L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.3 Inégalité de Young

Soit a,b deux réels positifs et p,q deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} b^q.$$

on utilisera parfois la forme

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q \quad \text{avec} \quad C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}}$$

Si $p = q = 2$ on a :

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 \quad \text{où} \quad ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

1.2.4 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

1.3 Quelques théorèmes utiles

Théorème 4

Un opérateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ linéaire non bornée dans H est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(\mathcal{A}) : \quad \langle \mathcal{A}x, x\rangle \leq 0.$$

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximale monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe une fonction

$$u \in C^1([0,\infty], H) \cap C([0,\infty], D(\mathcal{A}))$$

.

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 \quad \text{sur} \quad [0,\infty[\\ u(0) = u_0 \qquad \text{(donnée initiale)} \\ \end{cases} \tag{1.6}$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad |\frac{du}{dt}(t)| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| \quad \forall t \geq 0.$$

1.3.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 5

Soit H un espace de Hilbert , A une forme bilinéaire continue et coercive et $\varphi \in H$. Il existe une unique $u \in H$, vérifiant :

$$A(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

Si A est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}A(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = Min_{v \in H} \quad \left(\frac{1}{2}A(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right)$$

Remarque 3

Une forme bilinéaire $A : H \times H \to \mathbb{R}$

1. Continue s'il existe $C \geq 0$ tq pour tout $u, v \in H$:

$$\forall u, v \in H, |A(u, v)| \leq C|u||v|.$$

2. Coercive s'il existe $\alpha > 0$ tq pour tout $u \in H$:

$$\forall u, v \in H, A(u, u) \geq \alpha ||u||^2.$$

3. a est symétrique si :

$$\forall u, v \in H, A(u, v) = a(v, u);$$

1.3.3 Théorème de Fubini

On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2), (\Omega_1 \times \Omega_2) \in \mathbb{R}^2$ ouvert

Alors,pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même pour presque tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\Omega_2}$

$$\boldsymbol{F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L^1_y(\Omega_2)}$$

De plus on a

$$\boldsymbol{\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy}$$

1.3.4 Inégalité Intégrable

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet,plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants :

Lemme 1

Soient $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $\boldsymbol{C^1}(\mathbb{R}_+)$ telle que :
$\boldsymbol{\psi(0) = 0}$ et $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} = +\infty$. Supposant que : $\exists \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ tels que

$$\boldsymbol{\int_s^{+\infty} \psi'^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0)E(s), \quad \forall s > 0.} \tag{1.7}$$

Alors

$$\begin{cases} \boldsymbol{E(t) \leq E(0)\exp^{1-d\psi(t)}} & \forall \boldsymbol{t} > \boldsymbol{0} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{p = 0} \\ \boldsymbol{E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+p}{1+pd\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}}} & \forall \boldsymbol{t} > \boldsymbol{0} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{p > 0} \end{cases} \tag{1.8}$$

dans le case particulier où $\boldsymbol{\psi(t) = t}$ on déduit les inégalités suivantes :

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{E(t) \leq E(0)\exp^{1-dt}} \quad \forall \boldsymbol{t} > \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{p = 0} \tag{1.9}$$

$$\text{b)} \quad \boldsymbol{E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+p}{1+pd\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}}} \forall \boldsymbol{t} > \boldsymbol{0} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{p > 0}$$

appelées respectivement , estimation exponentielle et estimation polynomiale.

Lemme 2

Soit $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue (décroissante) vérifiant

$$\int_s^{+\infty} \psi(\boldsymbol{E}(t))dt \leq \frac{1}{d}\boldsymbol{E}(s), \quad \forall s > 0, \tag{1.10}$$

où $\boldsymbol{d}$ est un réel strictement positif et $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\boldsymbol{\psi(0) = 0}$. Alors il existe trois réels strictement positifs $\boldsymbol{t_0, c_0}$ et $\boldsymbol{c_1}$ tels que

$$\boldsymbol{E}(t) \leq \psi^{-1}\Big(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\Big), \quad \forall \leq t_0, \tag{1.11}$$

où $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\psi(t)}dt, \quad \forall s > 0. \tag{1.12}$$

1.4 Théorie des semi-groupes

Définition 6

Soit $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{D(\mathcal{A}) \subset X \to X}$ est un opérateur linéaire (non borné). $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est appelé dissipatif si $\boldsymbol{\Re(\mathcal{A}v, v)_x \leq 0, \forall v \in D(\mathcal{A})}$. L'opérateur dissipateur $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est appelé m-dissipative si $\boldsymbol{(\lambda I - \mathcal{A})}$ est surjective pour quelque $\boldsymbol{\lambda > 0}$.

Théorème 5

Un opérateur linéaire $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est dissipatif si et seulement si

$$\boldsymbol{\|(\lambda I - \mathcal{A})_x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \forall x \in D(\mathcal{A}), \lambda > 0,} \tag{1.13}$$

Preuve :

Supposons que $\mathcal{A}$ est dissipatif et fixe $x \in d(\mathcal{A})$ et $\lambda > 0$.alors

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \Re((\lambda - \mathcal{A})x, x)_X$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous concluons que

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \|(\lambda - \mathcal{A})x\|_X \|x\|_X,$$

Qui conduit directement à (1.13) . a l'inverse supposer que (1.13) tient et fixe $x \in D(\mathcal{A})$, alors pour tout $\lambda > 0$,on a

$$\lambda^2 \|x\|_X^2 \leq \lambda^2 \|x\|_X - 2\lambda \Re(\mathcal{A}x, x)_x^2 + \|\mathcal{A}x\|_X^2.$$

En divisant cette inégalité par 2λ, on obtient équivalemment

$$\Re(\mathcal{A}x, x)_x \leq \frac{1}{2\lambda} \|\mathcal{A}x\|_X^2, \lambda > 0.$$

Passer à la limite lorsque λ passer à l'infini donner la dissipativité de $\mathcal{A}$. On peut maintenant prouver certaines propriétés utiles des opérateur m-dissipatifs.

Théorème 6

soit $\mathcal{A}$ est un Opérateur m-dissipatif. ensuite, les propriétés suivantes sont conservées.

1. $\mathcal{A}$ est fermé.

2. pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur X. de plus $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur linéaire borné tel que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(x)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

3. $D(\mathcal{A})$ est dense dans X.

Preuve :

Commençons par le point **1**. comme $\mathcal{A}$ est un opérateur m-dissipatif,il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$,donc par (1.13) il en résulte que $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ a une inverse bornée.Comme $(\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ est borné,il est également fermé. Alors $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ est fermé et donc $\mathcal{A}$ également.

Pour prouver le point**2**, il suffit de prouver que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$ pour tout $\lambda > 0$

Pour cela, nous introduisons l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in (0,1) \quad \text{tel que} \quad R(\lambda I - \mathcal{A}) = X\}$$

Première Λ est un ouvert. en effet (1.13) implique queΛ est un sous-ensemble de l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. comme $\rho(\mathcal{A})$ est un ouvert, pour tout $\lambda \in \Lambda$,il existe un voisinage de λ inclus dans $\rho(\mathcal{A})$. L'intersection de ce voisinage avec la droit réelle est clairement inclus dans Λ, ce qui prouve que Λ est ouvert. Montrons aussi que Λ est fermé. Soit une séquence.$(\Lambda_n)_n$ d'élément de Λ tel que

$$\lambda_n \to \lambda > 0 \quad \text{comme} \quad n \to \infty$$

Ensuite, pour un élément quelque $y \in X$ et tout n, il existe $x_n \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$(\lambda_n I - \mathcal{A})_{x_n} = y \tag{1.14}$$

En raison de (1.13), il en résulte que

$$\|x_n\|_X \leq \lambda_n^{-1} \|y\|_X \tag{1.15}$$

Et donc la suite $(x_n)_n$ est bornée. Nous appliquons maintenant (1.13) avec $x_n - x_m$ et λ_m on obtient

$$\lambda_m \|x_n - x_m\|_X \leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - \mathcal{A}(x_n - x_m)\|_X$$

et par l'utilisation (1.14) on en déduit que

$$\lambda_m \|x_n - x_m\|_X \leq |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\|_X.$$

et par (1.15), On déduit qu'il existe $x \in X$ tel que x_n converge vers x dans X.

Mais $\boldsymbol{(1.14)}$ Alors implique $\boldsymbol{\mathcal{A}x_n}$ converge vers $\boldsymbol{\lambda x - y}$ et puisque $\boldsymbol{A}$ est fermé, on conclut que $\boldsymbol{x \in D(\mathcal{A})}$ avec $\boldsymbol{\lambda x - \mathcal{A}x = y}$. Cela montre que $\boldsymbol{\lambda}$ appartient $\boldsymbol{\Lambda}$ et que la fermeture de $\boldsymbol{\Lambda}$ est prouvée. En conclusion,$\boldsymbol{\Lambda}$ est un sous-ensemble ouvert, fermé et non vide de $\boldsymbol{(0, \infty)}$.Terminons par le point**3**. Soit $\boldsymbol{y \in X}$ tel que

$$\boldsymbol{(y, x)_x = 0, x \in D(\mathcal{A})} \tag{1.16}$$

Si nous montrons que

$$\boldsymbol{(y, \mathcal{A}x)_x = 0, x \in D(\mathcal{A})} \tag{1.17}$$

alors nous allons obtenir ce

$$\boldsymbol{(y, x - \mathcal{A}x)_x = 0, x \in D(\mathcal{A})}$$

Et puisque $\boldsymbol{R(I - \mathcal{A}) = X}$, on déduit que $\boldsymbol{y = 0}$.
il reste alors à montrer$\boldsymbol{(1.16)}$. soit $\boldsymbol{x \in D(\mathcal{A})}$ est fixé, puis par le point **2**, il existe une suite $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ tel que $\boldsymbol{x_n \in D(\mathcal{A})}$ et

$$\boldsymbol{x = x_n - \frac{1}{n}\mathcal{A}x_n, \forall n \in \mathbb{N}} \tag{1.18}$$

Ceci implique que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}x_n = n(x_n - x)}$$

et de la régularité $\boldsymbol{x, x_n \in D(\mathcal{A})}$, on déduit que $\boldsymbol{x_n}$ appartient à $\boldsymbol{D(\mathcal{A}^2)}$ et que la prochaine identité

$$\boldsymbol{\mathcal{A}x = \mathcal{A}\Big(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\Big)x_n.}$$

Ou équivalent

$$\boldsymbol{\mathcal{A}x_n = \mathcal{A}\Big(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\Big)^{-1}\mathcal{A}x.}$$

Du point**2**, nous savons que

$$\boldsymbol{\Big\|\Big(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1}$$

et donc

$$\|\mathcal{A}x_n\|_X \leq \|\mathcal{A}x\|_X.$$

De plus, comme X est un espace de Hilbert, il existe une sous-suite $(\mathcal{A}x_{nk})$ et $(\mathcal{A}x_n)_n$ et $z \in X$ tel que $\mathcal{A}x_{nk}$ Converge faiblement vers z Ceci implique que la suite de paires $((x_{nk}, \mathcal{A}x_{nk}))_k$ Converge faiblement vers (x, z) dans $X \times X$. Ainsi, par le lemme de Ma-zur, il existe une autre suite $((\tilde{x}_l, z_l))_l$ Fait de combinaisons convexes de $(x_{nj}, \mathcal{A}x_{nj})$ n guarantees (that the that $z_l = \mathcal{A}\tilde{x}_l$) tel que $(\tilde{x}_l, z_l) = (\tilde{x}_l, \mathcal{A}\tilde{x}_l)$ converge fortement vers(x, z) dans $X \times X$ comme l va à ∞. comme $\mathcal{A}$ est fermé, nous en déduisons $z = \mathcal{A}x$. Enfin par (1.16) et (1.18) on a

$$(y, \mathcal{A}x_{nk})_X = n_k(y, x_{nk} - x) = 0$$

et en passant à limite en k, nous trouvons que (1.17) passons maintenant à la notation de semi-groupes linéaires.

Définition 7

soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné.on dit que A est monotone si

$$(Av, v) \geq 0, \forall v \in D(A) \tag{1.19}$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \quad \text{tel que} \quad u + Au = f \tag{1.20}$$

Remarque 4

si A est un maximal monotone, alors λA est aussi maximal monotone pour tout $\lambda > 0$. Par contre si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones alors $A + B$ défini sur $D(A) \cap D(B)$ n'est pas nécessairement maximal monotone.

Définition 8

Une famille à un seul paramètre $(S(t))_{t\geq 0}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ est un semi-groupe des opérateurs linéaires bornés sur X si

1.

$$S(0) = Id_x,$$

2.

$$S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0.$$

L'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ défini par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ z \in X ; \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} \text{existe} \right\}$$

et

$$\mathcal{A}z = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t}, \forall z \in D(\mathcal{A})$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ et $D(\mathcal{A})$ est appelé le domaine de $\mathcal{A}$.

Un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ des opérateurs linéaires bornés est appelée une suite fortement continue(ou un C_0-semi-groupe) si

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)z = z, \forall z \in X. \tag{1.21}$$

Un fortement continue $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X satisfaisant

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1, \forall t \geq 0,$$

est appelé C_0-Semi-groupe de contractions. Montrons maintenant quelques propriétés utiles de C_0-semi-groupe de contractions.

Théorème 7

soit $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contraction sur$X$. alors

1. pour tout $x \in X$, l'application $t \to S(t)x$ est un fonction continue de $[0,\infty)$ dans X.

2. pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$,
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds = S(s)x. \tag{1.22}$$

3. pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$, l'élément $\int_0^t S(s)xds$ appartient à $D(\mathcal{A})$, et
$$\mathcal{A}\Big(\int_0^t S(s)xds\Big) = S(t)x - x \tag{1.23}$$

4. pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et tout $t > 0$, l'élément $S(t)x$ appartient à $D(\mathcal{A})$, et the mapping $t \to S(t)x$ est un fonction différentiable continue de $(0,\infty)$ dans X et
$$\frac{d}{dt}S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x, \forall t \geq 0.$$

5. pour tout $x \in D(\mathcal{A})$et tout $t \geq 0$,on a
$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(u)\mathcal{A}xdu = \int_s^t \mathcal{A}S(u)xdu.$$

Preuve :

pour le point **1**, par (1.21), La propriété de continuité tient trivialement à $t = 0$. maintenant fixer $x \in X$ et prendre un arbitraire $t > 0$ alors pour $h \geq 0$, on a

$$S(t+h)x - S(t)x = S(t)(S(h)x - x),$$

1.5 Théorie de la stabilité de Lyapunov

L'étude de la stabilité pour les systèmes évolutives est souvent liée à la construction des fonctionnelles de Lyapunov. La méthode générale de la construction des fonctions de Lyapunov ont proposée par V.Kolmanovskii et L.Shaikhet et déjà utilisée avec succès pour les équations différentielles, pour les équations de différence à temps discret, pour les équations de différence à temps continu, est utilisé ici pour étudier la stabilité des équations évolutive à retard, en particulier, des équations différentielles partielles. On a l'équation

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} A(t, u(t)) = f_1(t, u_t), t > 0 \\ u(s) = \Psi(s), s \in [-h, 0] \end{cases} \tag{1.24}$$

Notons par $U(t, \Psi)$ la solution de l'équation (1.24) correspondant à la condition initiale Ψ.

Définition 9

La solution triviale de l'équation (1.24) est dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que.

$$|u(t, \Psi)| < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t > 0, \text{si} \quad |\Psi|_{C_H} = \sup_{s \in [-h, 0]} |\Psi(s)| < \delta. \tag{1.25}$$

Définition 10

La solution triviale de l'équation (1.24) est dite exponentiellement stable si elle est stable et il existe $\lambda > 0$ une constante positive tel que pour tout $\Psi \in C(0, -h, H)$ il existe C (qui peut dépendre sur Ψ) tel que :

$$|u(t, \Psi)| \leq C \exp(-\lambda t) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

Maintenant, on va faire la démonstration de la théorème du stabilité. supposons qu'il existe une fonctionnelle $V(t, u_t)$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites pour certains nombres positives c_1, c_2 et λ

Théorème 8

$$|u(t, u_t)| \leq c_1 \exp(\lambda t) |u(t)|^2, t \geq 0 \tag{1.26}$$

$$|u(0, u_0)| \geq c_2 |\Psi|^2_{c_H} \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt} V(t, u_t) \leq 0, t \geq 0 \tag{1.28}$$

Alors la solution triviale de l'équation (1.24) est exponentiellement stable. Notons que le théorème ([?]). implique que l'étude de la stabilité de l'équation (1.24) peut être réduit à la construction appropriées de Lyapunov.Pour construire les fonctionnelles de Lyapunov on utilise des procédures formelles.

1.5.1 Le procédure des fonctionnelles de Lyapunov

Le procédure consiste en quatre étapes.

Etape1

pour transformer l'équation (1.24) sous la forme

$$\frac{dz(t,u_t)}{dt} A_1(t,u_t) + A_2(t,u_t) \tag{1.29}$$

où $z(t,.)$ et $A_2(t,.)$ sont des familles d'opérateurs non linéaire,

1. $z(t,0) = 0; A_2(t,0) = 0$, l'opérateur $A_1(t,.)$ dépendante de t et u_t mais indépendante pour les valeurs précidentes $u(t+s), s < 0$.

Etape2

supposons que la solution triviale de l'équation

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1(t, y(t))$$

est exponentiellement stable et il existe donc une fonctionnelle de Lyapunov $V(t,y(t))$, qui satisfait les conditions du théorème .

Etape3

La fonctionnelle de Lyapunov $V(t,u_t)$ pour l'équation (1.24) est écrit sous la forme $V = V_1 + V_2$, où $V_1(t,u_t) = V(t,z(t,u_t))$. L'élément y de la fonction $V(t,y)$ est remplacée la fonctionnelle $z(t,x_t)$ dans la partie gauche de l'équation (1.24).

Etape4

Généralement, la fonctionnelle $V_1(t, u_t)$ satisfait les conditions du théorème [?].
Pour satisfait ces conditions, il est nécessaire de calculer $\frac{d}{dt}V_1(t, u_t)$ et de l'estimer.
Ensuite, la fonctionnelle $V_2(t, u_t)$ peut être choisir de manière standard.

1.6 Problèmes à Retard

Dans cette section, nous introduisons des exemples de problèmes, anciens et nouveaux,qui sont traité à l'aide de la théorie générale des équation différentielles.Nous tentons de donner un description suffisant de la dérivation, de la solution et propriétés des solutions pour que le lecteur puisse apprécier une partie du goût du problème. Dans aucun des cas nous ne donnons un traitement complet du problème,mais offrent des références pour une étude plus approfondie.

1.6.1 Le contrôle d'un navire

Minorsky (1962) a conçu un dispositif de direction automatique pour le cuirassé New Maexico. ce qui suit est un esquisse du problème . Supposons que le gouvernail du navire ait une position angulaire $x(t)$ et supposons qu'il y ait une force de frottement proportionnelle à la vitesse, disons$-cx(t)$. Il y un instrument indiquant la direction qui point dans la direction de mouvement réelle et il ya instrument pointant dans la direction désirée. Ces deux sont reliés par un dispositif qui active un moteur électrique produisant une certaine force pour déplacer le gouvernial de manière à amener le navire sur trajectoire souhaitée. Il y a un décalage de temps entre le moment où le navire s'éloigne et le moment où le moteur électrique active le force de rappel. L'équation pour $x(t)$ est

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t-h)) = 0 \tag{1.30}$$

où $g(x(t-h)) > 0$ si $x0$ et c est un constant positive. L'objectif est de donner des conditions assurant que $x(t)$ restera prés de zéro pour que le navire suive son cours.

1.6.2 Epidémies (Cooke et Yorke)

Dans les travaux de Cooke et Yorke (1973), l'hypothèse de Lotka est modifiée de sort que le nombre de naissances par unité de temps n'est fonction que de la taille de la population et non de la répartition par âge . Dans cette hypothèse, on a $x(t)$ la taille de la population et on a le nombre de naissance

$B(t) = g(x(t))$. Supposons que chaque individu a un durée de vie L de sorte que le nombre de décès par unité de temps soit $g(x\check{s}(t - L))$.

$$x'(t) = g(x(t)) - g(x(t - L)), \tag{1.31}$$

Où g est fonction différentiable. Nous notons que toute fonction constante est une solution de (**1.31**). Cooke et Yorke (**1973**) considèrent le modèle suivant pour la propagation de la gonorrhée. La population est divisée en deux classes : (a) S(t)=Le nombre de sujets susceptibles. (b) S(t)=Le nombre de maladies infectieuses. Le taux de nouvelle infection dépend uniquement des contacts entre les individus sensibles et infectieux.Puisque est égale à la population totale constante moins $x(t)$, la vitesse est une fonction $g(x(t))$. Supposons qu'une personne exposée est immédiatement infectieuse et reste infectieuse pendant une période L(le temps pour le traitement et la guérison). Alors x vérifie aussi (**1.31**). Or, à tout moment $t, x(t)$ est égal à la somme du capital produit au cours de la période $[t - L, t]$ plus une constante c désignant la valeur des actifs non déprécies. Ainsi :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^L P(s)g[x(t-s)]ds + c \\ &= \int_{t-L}^{t} P(t-u)g[x(u)]ds + c \end{aligned}$$

1.6.3 L'équation de Tournesol

Somolinos (**1978**) a considéré l'équation

$$x'' + (a/r)x' + (b/R)\sin(t - r) = 0$$

Et a obtenu des résultats intéressant sur l'existence des solutions périodiques. L'étude de ce problème remonte au début des années **1800** et a attiré beaucoup d'attention.Il implique le mouvement d'une plante de tournesol .

CHAPITRE 2
RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE LA SOLUTION

2.1 Préliminaires

Comme en [40], nous introduisons la nouvelle variable dépendante suivante

$$z\left(x,\rho,s,t\right)=\varphi_{t}\left(x,t-\rho\, s\right), \qquad \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(\tau_{1},\tau_{2})\times(0,\infty) \tag{2.1}$$

Il est facile de vérifier que z satisfait

$$s\, z_{t}\left(x,\rho,s,t\right)=-z_{\rho}\left(x,\rho,s,t\right)\ . \qquad \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(\tau_{1},\tau_{2})\times(0,\infty) \tag{2.2}$$

Par conséquent, le problème (0.7) est équivalent à

$$\begin{cases}\rho_{1}\, u_{tt}=\mu_{1}u_{xx}+\mu_{0}\varphi_{x}-\beta_{0}\left(\tau\,\theta_{tx}+\theta_{x}\right), & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty)\\ J\,\varphi_{tt}=a_{0}\varphi_{xx}-\mu_{0}u_{x}-\xi\varphi & \\ +\beta_{1}\left(\tau\,\theta_{t}+\theta\right)-\gamma_{1}\varphi_{t}-\displaystyle\int_{\tau_{1}}^{\tau_{2}}\gamma_{2}\left(s\right)\ z\left(x,1,s,t\right)ds, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty)\\ a(\tau\,\theta_{t}+\theta)_{t}=-\beta_{0}\, u_{tx}-\beta_{1}\varphi_{t}+\delta\theta_{xx}, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty)\\ s\, z_{t}=-z_{\rho}, & \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(\tau_{1},\tau_{2})\times(0,\infty)\end{cases} \tag{2.3}$$

Avec les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x) \;\;,\;\; \varphi(x,0)=\varphi_0(x) \;\;,\;\; \theta(x,0)=\theta_0(x) \qquad dans\,(0,1)\,, \\ u_t(x,0)=u_1(x) \;\;,\;\; \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x) \;\;,\;\; \theta_t(x,0)=\theta_1(x) \qquad dans\,(0,1)\,, \\ z(x,\rho,s,0)=f_0(x,\rho\, s) \qquad dans\,(0,1)\times(0,1)\times(0,\tau_2)\,, \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=\varphi(0,t)=\varphi(1,t)=\theta(0,t)=\theta(1,t)=0, \qquad t\geq 0 \\ z(x,0,s,t)=\varphi_t(x,t) \qquad dans\,(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\times(0,\infty)\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

en ce qui concerne le poids du retard, nous supposons seulement que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\, ds < \gamma_1. \tag{2.5}$$

entre- temps, en utilisant $(2,3)_1$ et les conditions aux limites que nous obtenons

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)\,dx = 0\,. \qquad \forall t\geq 0 \tag{2.6}$$

Ainsi, en résolvant (2.5) et en utilisant les données initiales de u, on obtient

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = t\int_0^1 u_1(x)\,dx + \int_0^1 u_0(x)\,dx\;. \qquad \forall t\geq 0$$

Par conséquent, si nous mettons

$$\overline{u}(x,t) = u(x,t) - t\int_0^1 u_1(x)\,dx - \int_0^1 u_0(x)\,dx \quad t\geq 0\;,\;\; x\in(0,1)$$

on se retrouve avec :

$$\int_0^1 \overline{u}(x,t)\,dx = 0\,, \quad t\geq 0$$

Ainsi, l'inégalité de Poincaré peut être appliquée sur $\overline{u}$ .en outre, la simple substitution montre que $(\overline{u},\varphi,\theta)$ est la solution du problème (2.3) avec des données initiales pour $\overline{u}$ données comme

$$\overline{u}(x,0) = \overline{u}_0(x) = u_0(x) - \int_0^1 u_0(x)\,dx,$$

et

$$\overline{u}_t(x,0) = \overline{u}_1(x) = u_1(x) - \int_0^1 u_1(x)\,dx.$$

Dans ce qui suit, nous travaillerons avec $\overline{\boldsymbol{u}}$ mais, par commodité, nous écrivons $\boldsymbol{u}$ au lieu de $\overline{\boldsymbol{u}}$

2.2 Position du problème

Dans ce chapitre, nous donnons le résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.3)-(2.4) en utilisant la théorie semi-groupe.

nous présentons d'abord la fonction vectorielle

$$\boldsymbol{U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, \psi, z)^T} .$$

et les nouvelles variables dépendantes

$$\boldsymbol{v = u_t \quad , \quad \phi = \varphi_t \quad , \quad \psi = \theta_t .}$$

alors le système (2.3)-(2.4) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_t = AU,} \\ \boldsymbol{U(x,0) = U_0(x) = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, \theta_1, f_0)^T ,} \end{cases} \tag{2.7}$$

Où $\boldsymbol{A : D(A) \subset H \to H}$ est un opérateur linéaire Défini par

$$\boldsymbol{AU} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \\ \dfrac{\boldsymbol{\mu_1}}{\boldsymbol{\rho_1}}\boldsymbol{u_{xx}} + \dfrac{\boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{\rho_1}}\boldsymbol{\varphi_x} - \dfrac{\boldsymbol{\beta_0}}{\boldsymbol{\rho_1}}(\boldsymbol{\tau\,\psi_x + \theta_x}) \\ \\ \boldsymbol{\phi} \\ \\ \dfrac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\varphi_{xx}} - \dfrac{\boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{u_x} - \dfrac{\boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\varphi} + \dfrac{\boldsymbol{\beta_1}}{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\tau\,\psi + \theta}) - \dfrac{\boldsymbol{\gamma_1}}{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\phi} - \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{J}}\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} \boldsymbol{\gamma_2(s)\,z(x,1,s,t)\,ds} \\ \\ \boldsymbol{\psi} \\ \\ -\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\psi} - \dfrac{\boldsymbol{\beta_0}}{\boldsymbol{a\tau}}\boldsymbol{v_x} - \dfrac{\boldsymbol{\beta_1}}{\boldsymbol{a\tau}}\boldsymbol{\phi} + \dfrac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{a\tau}}\boldsymbol{\theta_{xx}} \\ \\ -\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{z_\rho(x,\rho,s,t)} \end{pmatrix}$$

et $\boldsymbol{H}$ est l'espace d'énergie donné par

$$\boldsymbol{H} = H_*^1(0,1)\times L_*^2(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))$$

De telle sorte que

$$\begin{aligned} H_*^1(0,1) &= H^1(0,1)\cap L_*^2(0,1)\\ L_*^2(0,1) &= \left\{ w\in L^2(0,1) : \int_0^1 w(x)\,dx = 0 \right\} \end{aligned}$$

Pour toute $U = (u,v,\varphi,\phi,\theta,\psi,z)^T \in \boldsymbol{H}$ et $\widetilde{U} = \left(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\varphi},\tilde{\phi},\tilde{\theta},\tilde{\psi},\tilde{z}\right)^T \in \boldsymbol{H}$ nous équipons $\boldsymbol{H}$ avec le produit scalaire défini par

$$\begin{aligned} \left(U,\widetilde{U}\right)_H =& \rho_1\int_0^1 v\,\tilde{v}\,dx + J\int_0^1 \phi\,\tilde{\phi}\,dx + a_0\int_0^1 \varphi_x\,\tilde{\varphi}_x\,dx\\ &+ \delta\tau\int_0^1 \theta_x\,\tilde{\theta}_x\,dx + a\int_0^1 (\tau\,\psi+\theta)\left(\tau\,\tilde{\psi}+\tilde{\theta}\right)dx\\ &+ \mu_1\int_0^1\left(u_x+\frac{\mu_0}{\mu_1}\varphi\right)\left(\tilde{u}_x+\frac{\mu_0}{\mu_1}\tilde{\varphi}\right)dx\\ &+ \left(\xi-\frac{\mu_0^2}{\mu_1}\right)\int_0^1\varphi\,\tilde{\varphi}dx + \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\gamma_2(s)|\,z(x,\rho,s,t)\;\tilde{z}(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx. \end{aligned}$$

Le domaine de $\boldsymbol{A}$ est donné par

$$\begin{aligned} D(A) = \Big\{ U\in H \ / \ u\in H_*^2(0,1)\cap H_*^1(0,1)\ ;\ v\in\ H_*^1(0,1)\ ;\ \varphi,\theta\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\\ \phi,\psi\in\ H_0^1(0,1)\ ;\ z,z_\rho\in L^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))\ ;\ z(x,0,s,t)=\phi \Big\}. \end{aligned}$$

Où

$$H_*^2(0,1) = \left\{ w\in H^2(0,1) : w_x(0) = w_x(1) = 0 \right\}.$$

il est clair que $D(A)$ est dense en $\boldsymbol{H}$.

Maintenant, nous pouvons donner le résultat d'existence suivant.

Théorème 9

soit $U_0 \in H$, Problème (2.7) a une solution unique $U \in C(\mathbb{R}_+, H)$.De plus, si $U_0 \in D(A)$, alors $U \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$

Démonstration. Le résultat découle du théorème de Lumer-phillips à condition de prouver que A est un opérateur dissipatif maximal. Premièrement, nous prouvons que A est dissipatif. Pour toute $U \in D(A)$, et en utilisant le produit scalaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}(AU, U)_H = &-\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\, ds\right)\int_0^1 \phi^2 dx - \delta\int_0^1 \theta_x^2\, dx \\ &- \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\, ds\, dx - \int_0^1 \phi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2(s)\, z(x,1,s,t)\, ds\, dx\end{aligned} \tag{2.8}$$

en utilisant l'inégalité de Young sur le dernier terme de (2.8) on obtient

$$-\int_0^1 \phi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2(s)\, z(x,1,s,t)\, ds\, dx \leq \left(\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\, ds\right)\int_0^1 \phi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\, ds\, dx \tag{2.9}$$

Remplacer (2.9) par (2.8) et utiliser (2.5) nous obtenons

$$(AU, U)_H = -\left(\gamma_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\, ds\right)\int_0^1 \phi^2 dx - \delta\int_0^1 \theta_x^2\, dx \leq 0 \tag{2.10}$$

L'opérateur A est donc dissipatif. Prouvons ensuite que l'opérateur A est maximale. Il suffit de montrer que l'opérateur $I - A$ est surjectif. En effet, pour tout $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T \in H$, nous prouvons qu'il existe un $U \in D(A)$ unique tel que

$$(I - A)\, U = F \tag{2.11}$$

C'est-a-dire

$$\begin{cases} u - v = f_1 \in H^1_*(0,1) \\ \\ v - \dfrac{\mu_1}{\rho_1} u_{xx} - \dfrac{\mu_0}{\rho_1}\varphi_x + \dfrac{\beta_0}{\rho_1}(\tau\,\psi_x + \theta_x) = f_2 \in L^2_*(0,1) \\ \\ \varphi - \phi = f_3 \in H^1_0(0,1) \\ \\ \phi - \dfrac{a_0}{J}\varphi_{xx} + \dfrac{\mu_0}{J}u_x + \dfrac{\xi}{J}\varphi - \dfrac{\beta_1}{J}(\tau\,\psi + \theta) + \dfrac{\gamma_1}{J}\phi + \dfrac{1}{J}\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma_2(s)\, z(x,1,s,t)\, ds = f_4 \in L^2(0,1) \\ \\ \theta - \psi = f_5 \in H^1_0(0,1) \\ \\ \psi + \dfrac{\beta_0}{a\,\tau} v_x + \dfrac{\beta_1}{a\,\tau}\phi - \dfrac{\delta}{a\,\tau}\theta_{xx} + \dfrac{1}{\tau}\psi = f_6 \in L^2(0,1) \\ \\ z + \dfrac{1}{s} z_\rho = f_7 \in L^2((0,1),(0,1),(\tau_1,\tau_2)) \end{cases} \tag{2.12}$$

nous remarquons que la dernier équation (2.12) avec $z(x,0,s,t) = \phi(x,t)$ a une solution unique donnée par

$$z(x,\rho,s,t) = \phi(x,t)\; e^{-s\rho} + s\, e^{-s\rho}\int_0^\rho e^{s\,\sigma} f_7(x,\sigma,s,t)\, d\sigma \tag{2.13}$$

Insérer $v = u - f_1$, $\phi = \varphi - f_3$, $\psi = \theta - f_5$ et (2.13) in $(3,5)_2$, $(3,5)_4$ et $(3,5)_6$,nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1\, u - \mu_1\, u_{xx} - \mu_0\,\varphi_x + \beta_0(\tau+1)\,\theta_x = h_1 \in L^2(0,1) \\ \mu_4\,\varphi - a_0\,\varphi_{xx} + \mu_0\, u_x - \beta_1(\tau+1)\,\theta = h_2 \in L^2(0,1) \\ a(\tau+1)\,\theta - \delta\,\theta_{xx} + \beta_0\, u_x + \beta_1\,\varphi = h_3 \in L^2(0,1) \end{cases} \tag{2.14}$$

où

$$h_1 = \rho_1(f_1 + f_2) + \beta_0\,\tau\, f_{5\,x}$$

$$h_2 = \left(J + \gamma_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s}\gamma_2(s)\; ds\right) f_3 + J\, f_4 - \beta_1\,\tau\, f_5 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\, e^{-s}\gamma_2(s)\int_0^1 e^{s\,\sigma} f_7(x,\sigma,s,t)\, d\sigma\; ds$$

$$h_3 = a\;(\tau+1)\, f_5 + a\,\tau f_6 + \beta_0 f_{1x} + \beta_1 f_3$$

$$\mu_4 = J + \xi + \gamma_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s}\gamma_2(s)\; ds$$

Pour résoudre (2.14), on considère la formulation variationnelle suivante :

$$\boldsymbol{B}\left((u,\varphi,\theta);\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right)\right)=\boldsymbol{L}\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right) \tag{2.15}$$

où $\boldsymbol{B} : \left[H^1_*(0,1)\times H^1_0(0,1)\times H^1_0(0,1)\right]^2 \to \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire définie par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\left((u,\varphi,\theta);\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right)\right) &= \rho_1\int_0^1 u\,\tilde{u}\,dx+\mu_4\int_0^1\varphi\,\tilde{\varphi}\,dx+a(\tau+1)^2\int_0^1\theta\,\tilde{\theta}\,dx\\ &+\mu_1\int_0^1 u_x\,\tilde{u}_x\,dx+a_0\int_0^1\varphi_x\,\tilde{\varphi}_x\,dx+\delta(\tau+1)\int_0^1\theta_x\,\tilde{\theta}_x\,dx\\ &+\mu_0\int_0^1\left(u_x\,\tilde{\varphi}+\varphi\,\tilde{u}_x\right)dx+\beta_0(\tau+1)\int_0^1\left(u_x\,\tilde{\theta}-\theta\,\tilde{u}_x\right)dx\\ &+\beta_1(\tau+1)\int_0^1\left(\varphi\,\tilde{\theta}-\theta\,\tilde{\varphi}\right)dx\end{aligned}$$

et $\boldsymbol{L} : H^1_*(0,1)\times H^1_0(0,1)\times H^1_0(0,1) \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire donnée par

$$\boldsymbol{L}\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right)=\int_0^1 h_1\,\tilde{u}\,dx+\int_0^1 h_2\,\tilde{\varphi}\,dx+(\tau+1)\int_0^1 h_3\,\tilde{\theta}\,dx$$

Maintenant pour $V = H^1_*(0,1)\times H^1_0(0,1)\times H^1_0(0,1)$ équipé de la norme

$$\|(u,\varphi,\theta)\|_V^2=\|u\|^2_{L^2(0,1)}+\|u_x\|^2_{L^2(0,1)}+\|\varphi\|^2_{L^2(0,1)}+\|\varphi_x\|^2_{L^2(0,1)}+\|\theta\|^2_{L^2(0,1)}+\|\theta_x\|^2_{L^2(0,1)}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\left((u,\varphi,\theta);(u,\varphi,\theta)\right) &= \rho_1\int_0^1 u^2dx+\mu_4\int_0^1\varphi^2dx+a(\tau+1)^2\int_0^1\theta^2dx+\mu_1\int_0^1 u_x^2dx\\ &+a_0\int_0^1\varphi_x^2dx+\delta(\tau+1)\int_0^1\theta_x^2dx+2\mu_0\int_0^1 u_x\,\varphi\,dx\end{aligned}$$

d'autre part, on peut écrire

$$\mu_1\,u_x^2+2\mu_0\,u_x\,\varphi+\mu_4\,\varphi^2=\frac{1}{2}\left[\mu_1\left(u_x+\frac{\mu_0}{\mu_1}\varphi\right)^2+\mu_4\left(\varphi+\frac{\mu_0}{\mu_4}u_x\right)^2+\left(\mu_1-\frac{\mu_0^2}{\mu_4}\right)u_x^2+\left(\mu_4-\frac{\mu_0^2}{\mu_1}\right)\varphi^2\right]$$

en utilisant (0.3), on en déduit

$$\mu_1 u_x^2 + 2\mu_0 u_x \varphi + \mu_4 \varphi^2 > \frac{1}{2}\left[\left(\mu_1 - \frac{\mu_0^2}{\mu_4}\right) u_x^2 + \left(\mu_4 - \frac{\mu_0^2}{\mu_1}\right)\varphi^2\right]$$

alors, pour certains $M_0 > 0$

$$B\left((u,\varphi,\theta);(u,\varphi,\theta)\right) \geq M_0 \,\|(u,\varphi,\theta)\|_V^2$$

ainsi B est coercitif. De même, on peut facilement prouver que les formes bilinéaires et linéaires B et L sont continues.

Par conséquent, par le lemme de Lax-Miligram, le problème variationnel (2.15) a une solution unique

$$(u,\varphi,\theta) \in H_*^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$$

satisfaire

$$B\left((u,\varphi,\theta);\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right)\right) = L\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right) \qquad \forall\left(\tilde{u},\tilde{\varphi},\tilde{\theta}\right) \in V$$

La substitution de u, φ et θ dans $(3,5)_1$, $(3,5)_3$ et $(3,5)_5$,respectivement, on obtient

$$(v,\phi,\psi) \in H_*^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$$

De même, en insérant ϕ dans (2.13) et en gardant à l'esprit $(3,5)_7$, nous trouvons

$$z\,,\;\; z_\rho \;\in L^2\left((0,1)\,,(0,1)\,,(\tau_1,\tau_2)\right)$$

Maintenant si $(\varphi,\theta) \equiv (0,0) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$, En suite (2.15) est réduite à

$$\rho_1 \int_0^1 u\,\tilde{u}\,dx + \mu_1 \int_0^1 u_x\,\tilde{u}_x\,dx + \mu_0 \int_0^1 \varphi\,\tilde{u}_x\,dx - \beta_0(\tau+1)\int_0^1 \theta\,\tilde{u}_x\,dx = \int_0^1 h_1\,\tilde{u}\,dx \qquad \forall \tilde{u} \in H_*^1(0,1) \tag{2.16}$$

ce qui implique

$$-\mu_1 u_{xx} = -\rho_1 u + \mu_0 \varphi_x - \beta_0(\tau+1)\theta_x + h_1 \;\in L^2(0,1) \tag{2.17}$$

Par conséquent, par la théorie de la régularité pour l'équation elliptique linéaire, il s'ensuit que

$$u \in H^2(0,1) \cap H_*^1(0,1)$$

De plus, (2.16) est également vrai pour tout $\vartheta \in C^1([0,1]) \subset H_*^1(0,1)$. Par conséquent, nous avons

$$\rho_1 \int_0^1 u\,\vartheta\,dx + \mu_1 \int_0^1 u_x\,\vartheta_x\,dx + \mu_0 \int_0^1 \varphi\,\vartheta_x\,dx - \beta_0(\tau+1) \int_0^1 \theta\,\vartheta_x\,dx - \int_0^1 h_1\,\vartheta\,dx = 0$$

pour tous $\vartheta \in C^1([0,1])$, en utilisant l'intégration par parties et en gardant à l'esprit (2.17), on obtient

$$u_x(1)\,\vartheta(1) - u_x(0)\,\vartheta(0) = 0 \qquad \forall \vartheta \in C^1([0,1])$$

par conséquent, $u_x(0) = u_x(1) = 0$. on obtient

$$u \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1)$$

De même, on obtient

$$-a_0\,\varphi_{xx} = -\mu_4\,\varphi - \mu_0\,u_x - \beta_1(\tau+1)\,\theta + h_2 \ \in L^2(0,1)$$

$$-\delta\,\theta_{xx} = -a(\tau+1)\,\theta - \beta_0\,u_x - \beta_1\,\varphi + h_3 \in L^2(0,1)$$

nous avons donc

$$\varphi\,,\ \theta \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

Enfin, l'application de la théorie de la régularité pour les équations elliptiques linéaires garantit l'existence d' $U \in D(A)$ unique tel que (2.11) est satisfait. Par conséquent, A est un opérateur maximal. d'Où, le résultat du théorème 2.2 suit le théoreme Lummer-Phillips (voir [48, 53]) $\square$

CHAPITRE 3

STABILITÉ EXPONENTIELLE

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode énergétique pour prouver que le système (2.3)-(2.4) est exponentiellement stable. Pour atteindre notre objectif, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3

La fonction énergétique, $\boldsymbol{E}$, définie par :

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho_1 u_t^2 + J\varphi_t^2 + a_0\varphi_x^2 + \delta\tau\theta_x^2 + a(\tau\theta_t+\theta)^2 + \mu_1\left(u_x + \frac{\mu_0}{\mu_1}\varphi\right)^2 + \left(\xi - \frac{\mu_0^2}{\mu_1}\right)\varphi^2\right) dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\gamma_2(s)|\, z^2(x,\rho,s,t)\, ds\, d\rho\, dx \qquad t \geq 0. \tag{3.1}$$

satisfait

$$E'(t) \leq -\left(\gamma_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\, ds\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \delta\int_0^1 \theta_x^2 dx. \tag{3.2}$$

Preuve :

multiplier $(2,3)_1$ par u_t, $(2,3)_2$ par φ_t, $(2,3)_3$ par $(\tau\,\theta_t + \theta)$, on les intégre sur (0,1) et la somme obtenue sera

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\rho_1 u_t^2 + \mu_1 u_x^2 + 2\mu_0\varphi\, u_x + J\varphi_t^2 + a_0\varphi_x^2 + \xi\varphi^2 + a(\tau\theta_t+\theta)^2 + \delta\tau\theta_x^2\right) dx$$
$$+ \gamma_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \delta\int_0^1 \theta_x^2 dx + \int_0^1 \varphi_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2(s)\; z(x,1,s,t)\, ds\, dx = 0 \tag{3.3}$$

multiplier $(2,3)_4$ par $|\gamma_2(s)|\, z$ et intégrer sur $(0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)$ on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\gamma_2(s)|\, z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; z^2(x,0,s,t)\,ds\,dx=0 \tag{3.4}$$

la somme (3.3),(3.4) et en utilisant le fait que $z(x,0,s,t)=\varphi_t(x,t)$,nous avons

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left(\rho_1\,u_t^2+\mu_1 u_x^2+2\mu_0\varphi\,u_x+J\,\varphi_t^2+a_0\,\varphi_x^2+\xi\varphi^2+a(\tau\,\theta_t+\theta)^2+\delta\tau\,\theta_x^2\right)dx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\gamma_2(s)|\, z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx\right\}$$
$$=-\gamma_1\int_0^1\varphi_t^2dx-\delta\int_0^1\theta_x^2dx-\int_0^1\varphi_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma_2(s)\; z(x,1,s,t)\,ds\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx+\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; ds\int_0^1\varphi_t^2dx$$

le fait que

$$\mu_1 u_x^2+2\mu_0\varphi\,u_x+\xi\varphi^2=\mu_1\left(u_x+\frac{\mu_0}{\mu_1}\varphi\right)^2+\left(\xi-\frac{\mu_0^2}{\mu_1}\right)\varphi^2$$

nous trouvons

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\rho_1\,u_t^2+J\,\varphi_t^2+a_0\,\varphi_x^2+\delta\tau\,\theta_x^2+a(\tau\,\theta_t+\theta)^2+\mu_1\left(u_x+\frac{\mu_0}{\mu_1}\varphi\right)^2+\left(\xi-\frac{\mu_0^2}{\mu_1}\right)\varphi^2\right)dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\gamma_2(s)|\, z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx$$

et

$$E'(t)=-\left(\gamma_1-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; ds\right)\int_0^1\varphi_t^2dx-\delta\int_0^1\theta_x^2dx-\int_0^1\varphi_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma_2(s)\; z(x,1,s,t)\,ds\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx \tag{3.5}$$

en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$-\int_0^1 \varphi_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2(s)\ z(x,1,s,t)\,ds\,dx \leq \left(\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\ ds\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\, z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx \tag{3.6}$$

inserer (3.6) dans (3.5) , et on utilisant (2.5), on trouve

$$E'(t) \leq -\left(\gamma_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\ ds\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \delta\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq 0$$

Ainsi, l'énergie est décroissante et majorée par $E(0)$, ce qui conclut la preuve.

Lemme 4

soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.3)-(2.4) , la fonctionnelle $I_1(t)$

Défini par

$$I_1(t) = \rho_1 \int_0^1 u_t\, u\, dx - \beta_0 \tau \int_0^1 \theta\, u_x\, dx \qquad t \geq 0, \tag{3.7}$$

satisfait

$$I_1{}'(t) \leq -\frac{\mu_1}{2}\int_0^1 u_x^2\, dx + c_0 \int_0^1 \left(\theta_x^2 + u_t^2 + \varphi^2\right)\, dx \qquad t \geq 0. \tag{3.8}$$

Preuve :

en multipliant $(2,3)_1$par u et en intégrant (0,1) on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 u_{tt}\, u\, dx = \mu_1 \int_0^1 u_{xx}\, u\, dx + \mu_0 \int_0^1 \varphi_x\, u\, dx - \beta_0 \int_0^1 (\tau\, \theta_{tx} + \theta_x)\, u\, dx$$

l'intégration par parties avec les conditions aux limites,nous obtenons

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^1 u_{tt}\, u\, dx + \rho_1 \int_0^1 u_t^2\, dx - \rho_1 \int_0^1 u_t^2\, dx &= -\mu_1 \int_0^1 u_x^2\, dx - \mu_0 \int_0^1 \varphi\, u_x\, dx + \beta_0 \int_0^1 (\tau\, \theta_t + \theta)\, u_x\, dx \\
&= -\mu_1 \int_0^1 u_x^2\, dx - \mu_0 \int_0^1 \varphi\, u_x\, dx \\
&+ \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta_t\, u_x dx + \beta_0 \int_0^1 \theta\, u_x dx \\
&+ \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta\, u_{tx}\, dx - \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta\, u_{tx}\, dx \\
&= -\mu_1 \int_0^1 u_x^2\, dx - \mu_0 \int_0^1 \varphi\, u_x\, dx \\
&+ \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta_t\, u_x dx + \beta_0 \int_0^1 \theta\, u_x dx \\
&+ \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta\, u_{tx}\, dx + \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta_x\, u_t\, dx\end{aligned}$$

qui équivaut à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\rho_1 \int_0^1 u_t\, u\, dx - \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta\, u_x dx\right) &= \rho_1 \int_0^1 u_t^2\, dx - \mu_1 \int_0^1 u_x^2\, dx - \mu_0 \int_0^1 \varphi\, u_x\, dx \\
&+ \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta_x\, u_t\, dx + \beta_0 \int_0^1 \theta\, u_x dx\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$I_1(t) = \rho_1 \int_0^1 u_t\, u\, dx - \beta_0 \tau \int_0^1 \theta\, u_x\, dx \qquad t \geq 0 \tag{3.9}$$

et

$$I_1{}'(t) = \rho_1 \int_0^1 u_t^2\, dx - \mu_1 \int_0^1 u_x^2\, dx - \mu_0 \int_0^1 \varphi\, u_x\, dx + \beta_0\, \tau \int_0^1 \theta_x\, u_t\, dx + \beta_0 \int_0^1 \theta\, u_x dx \tag{3.10}$$

utiliser les inégalités de Young et Poincaré et (0.3) on trouve

$$-\mu_0 \int_0^1 \varphi\, u_x\, dx \leq \xi^2 \int_0^1 \varphi^2\, dx + \frac{\mu_1}{4} \int_0^1 u_x^2\, dx \tag{3.11}$$

$$\beta_0\,\tau\int_0^1 \theta_x\,u_t\,dx \le \frac{\beta_0\,\tau}{2}\int_0^1 \theta_x^2\,dx + \frac{\beta_0\,\tau}{2}\int_0^1 u_t^2\,dx \tag{3.12}$$

$$\beta_0\int_0^1 \theta\,u_x dx \le \beta_0^2\int_0^1 \theta_x^2\,dx + \frac{\mu_1}{4}\int_0^1 u_x^2\,dx \tag{3.13}$$

insertion (3.11),(3.12),(3.13) dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} I_1{}'(t) &\le -\frac{\mu_1}{2}\int_0^1 u_x^2\,dx + \left(\rho_1+\frac{\beta_0\,\tau}{2}\right)\int_0^1 u_t^2\,dx + \left(\beta_0^2+\frac{\beta_0\,\tau}{2}\right)\int_0^1 \theta_x^2\,dx + \xi^2\int_0^1 \varphi^2\,dx \\ &\le -\frac{\mu_1}{2}\int_0^1 u_x^2\,dx + c_0\int_0^1\left(u_t^2+\theta_x^2+\varphi^2\right)dx \end{aligned}$$

Lemme 5

soit (u,φ,θ,z) la solution de (2.3)-(2.4) , la fonctionnelle $I_2(t)$

Définie par

$$I_2(t) = J\int_0^1 \varphi_t\,\varphi\,dx + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx - \frac{\mu_0\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi(y)\,dy\right)dx \qquad t\ge 0, \tag{3.14}$$

satisfait pour tout $\varepsilon_1 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} I_2{}'(t) &\le -a_0\int_0^1 \varphi_x^2\,dx - \frac{\mu_3}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 u_t^2 dx + c_0\int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)^2 dx \\ &+ c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{\mu_3}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\,ds\right)\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx \qquad t\ge 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

où $\mu_3 = \xi - \frac{\mu_0^2}{\mu_1}$

Preuve :

en multiploant $(2,3)_2$ par φ, et en intégrant (0,1) on obtient

$$\begin{aligned} J\int_0^1 \varphi_{tt}\,\varphi\,dx &= a_0\int_0^1 \varphi_{xx}\,\varphi\,dx - \mu_0\int_0^1 u_x\,\varphi\,dx - \xi\int_0^1 \varphi^2\,dx + \beta_1\int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\,\varphi\,dx \\ &- \gamma_1\int_0^1 \varphi_t\,\varphi\,dx - \int_0^1 \varphi\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma_2(s)\; z(x,1,s,t)\,ds\,dx \end{aligned}$$

enutilisant l'intégration par parties avec les conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned}J\int_0^1 \varphi_{tt}\,\varphi\,dx + J\int_0^1 \varphi_t^2\,dx - J\int_0^1 \varphi_t^2\,dx = -a_0\int_0^1 \varphi_x^2\,dx - \mu_0\int_0^1 u_x\,\varphi\,dx - \xi\int_0^1 \varphi^2\,dx\\ + \beta_1\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx\\ - \gamma_1\int_0^1 \varphi_t\,\varphi\,dx - \int_0^1 \varphi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2(s)\; z(x,1,s,t)\,ds\,dx\end{aligned}$$

qui équivaut à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(J\int_0^1 \varphi_t\,\varphi\,dx + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^1 \varphi^2\,dx\right) = J\int_0^1 \varphi_t^2\,dx - a_0\int_0^1 \varphi_x^2\,dx - \mu_0\int_0^1 u_x\,\varphi\,dx - \xi\int_0^1 \varphi^2\,dx\\ + \beta_1\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx - \int_0^1 \varphi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2(s)\; z(x,1,s,t)\,ds\,dx\end{aligned} \tag{3.16}$$

multiplier $(2,3)_1$ par $-\frac{\mu_0}{\mu_1}\int_0^x \varphi(y)\;dy$, on integre ples parties avec les conditions aux limites, on a

$$-\frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_{tt}\left(\int_0^x \varphi(y)\;dy\right)\;dx = \mu_0\int_0^1 u_x\,\varphi\,dx + \frac{\mu_0^2}{\mu_1}\int_0^1 \varphi^2\,dx - \frac{\beta_0\,\mu_0}{\mu_1}\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx$$

qui équivaut à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi(y)\;dy\right)\;dx\right) = \mu_0\int_0^1 u_x\,\varphi\,dx + \frac{\mu_0^2}{\mu_1}\int_0^1 \varphi^2\,dx - \frac{\beta_0\,\mu_0}{\mu_1}\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx\\ - \frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi_t(y)\;dy\right)\;dx\end{aligned} \tag{3.17}$$

en ajoutant (3.16) et (3.17) le resultat est :

$$\frac{d}{dt}\left(J\int_0^1 \varphi_t\,\varphi\,dx + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^1 \varphi^2\,dx - \frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi\,(y)\;dy\right)\;dx\right) = J\int_0^1 \varphi_t^2\,dx - a_0\int_0^1 \varphi_x^2\,dx$$
$$- \mu_3\int_0^1 \varphi^2\,dx$$
$$+\left(\beta_1 - \frac{\beta_0\,\mu_0}{\mu_1}\right)\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx$$
$$- \frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi_t\,(y)\;dy\right)\;dx$$
$$- \int_0^1 \varphi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2\,(s)\;z\,(x,1,s,t)\,ds\,dx$$

où $\mu_3 = \xi - \frac{\mu_0^2}{\mu_1}$ alors, on obtient

$$I_2\,(t) = J\int_0^1 \varphi_t\,\varphi\,dx + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^1 \varphi^2\,dx - \frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi\,(y)\;dy\right)\;dx \qquad t\geq 0 \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned} I_2{}'\,(t) &= J\int_0^1 \varphi_t^2\,dx - a_0\int_0^1 \varphi_x^2\,dx - \mu_3\int_0^1 \varphi^2\,dx - \int_0^1 \varphi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2\,(s)\;z\,(x,1,s,t)\,ds\,dx \\ &+\left(\beta_1 - \frac{\beta_0\,\mu_0}{\mu_1}\right)\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx - \frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi_t\,(y)\;dy\right)\;dx \qquad t\geq 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Cauchy Schwarz, nous obtenons

$$- \frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\int_0^1 u_t\left(\int_0^x \varphi_t\,(y)\;dy\right)\;dx \leq \varepsilon_1\int_0^1 u_t^2\,dx + \frac{1}{4\varepsilon_1}\left(\frac{\mu_0\,\rho_1}{\mu_1}\right)^2\int_0^1 \varphi_t^2\,dx \tag{3.20}$$

$$-\int_0^1 \varphi\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_2\,(s)\;z\,(x,1,s,t)\,ds\,dx \leq \frac{\mu_3}{4}\int_0^1 \varphi^2\,dx + \frac{1}{\mu_3}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2\,(s)|\,ds\right)\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2\,(s)|\;z^2\,(x,1,s,t)\,ds\,dx \tag{3.21}$$

$$\left(\beta_1 - \frac{\beta_0\,\mu_0}{\mu_1}\right)\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\,\varphi\,dx \leq \frac{\mu_3}{4}\int_0^1 \varphi^2\,dx + \frac{1}{\mu_3}\left(\beta_1 - \frac{\beta_0\,\mu_0}{\mu_1}\right)^2\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2\,dx \tag{3.22}$$

insérer (3.20), (3.21) et (3.22)dans (3.19) on a

$$\boldsymbol{I_2}'(t) \leq -a_0 \int_0^1 \varphi_x^2\,dx - \frac{\mu_3}{2}\int_0^1 \varphi^2\,dx + \varepsilon_1 \int_0^1 u_t^2\,dx + c_0 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2\,dx + c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \varphi_t^2\,dx$$
$$+\frac{1}{\mu_3}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\,ds\right)\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\;z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx \qquad t\geq 0$$

Lemme 6

soit (u,φ,θ,z) la solution de (2.3)-(2.4) , la fonctionnelle $I_3(t)$

Définie par

$$I_3(t) = -a\int_0^1 \tau^2\theta_t\,\theta\,dx - \frac{a\tau}{2}\int_0^1 \theta^2\,dx \qquad t\geq 0, \tag{3.23}$$

satisfait pour tout $\varepsilon_2 > 0$ l'estimation

$$I_3'(t) \leq -\frac{a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t+\theta)^2\,dx + \varepsilon_2\int_0^1 u_t^2\,dx + c_0\int_0^1 \varphi_t^2\,dx + c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \theta_x^2\,dx \qquad t\geq 0. \tag{3.24}$$

Preuve :

en multipliant $(2,3)_3$ par $-\tau\,\theta$,et en intégrant (0,1) on obtient

$$-a\,\tau^2\int_0^1 \theta_{tt}\,\theta\,dx - a\,\tau\int_0^1 \theta_t\,\theta\,dx = \beta_0\,\tau\int_0^1 u_{tx}\,\theta\,dx + \beta_1\,\tau\int_0^1 \varphi_t\,\theta\,dx - \delta\tau\int_0^1 \theta_{xx}\,\theta\,dx$$

et puis l'intégration par parties avec les conditions aux limites,nous obtenons

$$-a\,\tau^2\int_0^1 \theta_{tt}\,\theta\,dx - a\,\tau\int_0^1 \theta_t\,\theta\,dx = -\beta_0\,\tau\int_0^1 u_t\,\theta_x\,dx + \beta_1\,\tau\int_0^1 \varphi_t\,\theta\,dx + \delta\tau\int_0^1 \theta_x^2\,dx$$

qui équivaut à

$$\frac{d}{dt}\left(-a\int_0^1 \tau^2\theta_t\,\theta\,dx - \frac{a\tau}{2}\int_0^1 \theta^2\,dx\right) = -a\tau^2\int_0^1 \theta_t^2 dx - \beta_0\,\tau\int_0^1 u_t\,\theta_x\,dx + \beta_1\,\tau\int_0^1 \varphi_t\,\theta\,dx + \delta\tau\int_0^1 \theta_x^2\,dx$$

alors, on obtient

$$I_3(t) = -a\int_0^1 \tau^2\theta_t\,\theta\,dx - \frac{a\tau}{2}\int_0^1 \theta^2\,dx \qquad t\geq 0$$

et

$$\boldsymbol{I_3}'(t) = -a\tau^2 \int_0^1 \theta_t^2 dx - \beta_0 \tau \int_0^1 u_t \,\theta_x \,dx + \beta_1 \tau \int_0^1 \varphi_t \,\theta \,dx + \delta\tau \int_0^1 \theta_x^2 \,dx \tag{3.25}$$

en utilisant les inégalités de Young et de Poincar, on trouve

$$-\beta_0 \tau \int_0^1 u_t \,\theta_x \,dx \leq \varepsilon_2 \int_0^1 u_t^2 \,dx + \frac{1}{4\varepsilon_2}(\beta_0\tau)^2 \int_0^1 \theta_x^2 \,dx \tag{3.26}$$

$$\beta_1 \tau \int_0^1 \varphi_t \,\theta \,dx \leq \frac{1}{2}(\beta_1\tau)^2 \int_0^1 \varphi_t^2 \,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta_x^2 \,dx \tag{3.27}$$

profitant du fait

$$-\int_0^1 (\tau\,\theta_t)^2 dx \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 \,dx + \int_0^1 \theta_x^2 \,dx$$

on a

$$-\,a \int_0^1 (\tau\,\theta_t)^2 dx \leq -\frac{a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 \,dx + a\int_0^1 \theta_x^2 \,dx \tag{3.28}$$

insérer (3.26), (3.27) et (3.28) dans (3.25) on a

$$I_3'(t) \leq -\frac{a}{2}\int_0^1 (\tau\theta_t + \theta)^2 \,dx + \varepsilon_2 \int_0^1 u_t^2 \,dx + c_0 \int_0^1 \varphi_t^2 \,dx + c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \theta_x^2 \,dx \qquad t \geq 0$$

Lemme 7

soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.3)-(2.4) , la fonctionnelle $I_4(t)$

Définie par

$$I_4(t) = -\rho_1\, a \int_0^1 \left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)(\tau\,\theta_t + \theta)\;dx \qquad t \geq 0, \tag{3.29}$$

satisfait pour tout $\varepsilon_3 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} I_4'(t) \leq & -\frac{\beta_0\,\rho_1}{2}\int_0^1 u_t^2 \,dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 \,dx + c_0 \int_0^1 \varphi^2 \,dx + c_0 \int_0^1 \varphi_t^2 \,dx \\ & + c_0 \int_0^1 \theta_x^2 \,dx + c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2 \,dx \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Preuve :

En multipliant $(2,3)_3$ par $-\rho_1 \int_0^x u_t(y)\,dy$, en intégrant (0,1) on obtient

$$-\rho_1\, a \int_0^1 \left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)(\tau\,\theta_t+\theta)_t\,dx = \beta_0\,\rho_1 \int_0^1 u_{tx}\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)dx + \beta_1\,\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)dx - \delta\,\rho_1 \int_0^1 \theta_{xx}\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)dx$$

en utilisant l'intégration par parties avec les conditions aux limites, on obtient

$$-\rho_1\, a \int_0^1 \left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)(\tau\,\theta_t+\theta)_t\,dx = -\beta_0\,\rho_1 \int_0^1 u_t^2\,dx + {}_1\,\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)dx + \delta\,\rho_1 \int_0^1 \theta_x\, u_t d$$

qui équivaut à

$$\frac{d}{dt}\left(-a\rho_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)\,dx\right) = -a\rho_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\left(\int_0^x u_{tt}(y)\,dy\right)\,dx - \beta_0\,\rho_1 \int_0^1 u_t^2\,dx + \beta_1\,\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)dx + \delta\,\rho_1 \int_0^1 \theta_x\, u_t dx$$

en utilisant $(2,3)_1$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(-a\rho_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)\,dx\right) = -a\mu_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\,u_x\,dx - a\mu_0 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\,\varphi\,dx + a\,\beta_0 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)^2 dx - \beta_0\,\rho_1 \int_0^1 u_t^2\,dx + \beta_1\,\rho_1 \int_0^1 \varphi_t\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)dx + \delta\,\rho_1 \int_0^1 \theta_x\, u_t dx$$

ensuite nous avons

$$I_4(t) = -a\,\rho_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)\left(\int_0^x u_t(y)\,dy\right)\,dx \qquad t \geq 0$$

et

$$I_4{}'(t) = -a\mu_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\, u_x\, dx - a\mu_0 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\, \varphi\, dx + a\,\beta_0 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2 dx$$
$$- \beta_0\,\rho_1 \int_0^1 u_t^2\, dx + \beta_1\,\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x u_t(y)\, dy \right) dx + \delta\,\rho_1 \int_0^1 \theta_x\, u_t dx \tag{3.31}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Cauchy Schwarz, on trouve

$$\delta\,\rho_1 \int_0^1 \theta_x\, u_t dx \leq \frac{\beta_0\,\rho_1}{4} \int_0^1 u_t^2\, dx + \frac{\delta^2 \rho_1}{\beta_0} \int_0^1 \theta_x^2\, dx \tag{3.32}$$

$$\beta_1\,\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x u_t(y)\, dy \right) dx \leq \frac{\beta_0\,\rho_1}{4} \int_0^1 u_t^2\, dx + \frac{\beta_1\,\rho_1}{\beta_0} \int_0^1 \varphi_t^2\, dx \tag{3.33}$$

$$- a\mu_0 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\, \varphi\, dx \leq \frac{a\,\mu_0}{2\varepsilon_3} \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2\, dx \; + \frac{a\,\varepsilon_3\,\mu_0}{2} \int_0^1 \varphi^2\, dx \tag{3.34}$$

$$- a\mu_1 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)\, u_x\, dx \leq \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2\, dx + \frac{1}{4\varepsilon_3} (a\,\mu_1)^2 \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2\, dx \tag{3.35}$$

insérer (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35) dans (3.31) on a

$$I_4{}'(t) \leq -\frac{\beta_0\,\rho_1}{2} \int_0^1 u_t^2\, dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2\, dx + c_0 \int_0^1 \varphi^2\, dx + c_0 \int_0^1 \varphi_t^2\, dx$$
$$+ c_0 \int_0^1 \theta_x^2\, dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 (\tau\,\theta_t + \theta)^2\, dx \qquad t \geq 0$$

Lemme 8

soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.3)-(2.4) , la fonctionnelle $I_5(t)$

définie par

$$I_5(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\, e^{-s\,\rho}\, |\gamma_2(s)|\, z^2(x, \rho, s, t)\, ds\, d\rho\, dx \qquad t \geq 0, \tag{3.36}$$

satisfait à l'estimation

$$\boldsymbol{I_5}'(t) \leq -\eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)| \, z^2(x,1,s,t) \, ds \, dx - \eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, |\gamma_2(s)| \, z^2(x,\rho,s,t) \, ds \, d\rho \, dx$$
$$+ \gamma_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx \qquad t \geq 0. \tag{3.37}$$

Preuve :

En multipliant $(2,3)_4$ par $e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \, z$, en intégrant $(0,1) \times (0,1) \times (\tau_1, \tau_2)$ on obtient

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \; z_t \, z \, ds \, d\rho \, dx = -\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \; z_\rho \, z \, ds \, d\rho \, dx$$

qui équivaut à

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \, z^2(x,\rho,s,t) \, ds \, d\rho \, dx = -\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \; \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x,\rho,s,t) \; ds \, d\rho \, dx$$

L'Intégration par partie et l'utilisant de $z(x,0,s,t) = \varphi_t(x,t)$ nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \, z^2(x,\rho,s,t) \, ds \, d\rho \, dx = & -\int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s} |\gamma_2(s)| \, z^2(x,1,s,t) \, ds \, dx \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, e^{-s\rho} \; |\gamma_2(s)| \, z^2(x,\rho,s,t) \, ds \, d\rho \, dx \\ & + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)| \, ds \right) \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx \end{aligned}$$

ensuite nous avons

$$I_5(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, e^{-s\rho} |\gamma_2(s)| \, z^2(x,\rho,s,t) \, ds \, d\rho \, dx \qquad t \geq$$

et

$$I_5'(t) = -\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s}\,|\gamma_2(s)|\,z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\,ds\right)\int_0^1 \varphi_t^2\,dx$$
$$-\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,e^{-s\rho}\,|\gamma_2(s)|\,z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx$$

utilisant le fait que $e^{-s} \leq e^{-s\rho} \leq 1$ nous obtenons pour tous $\rho \in [0,1]$

$$I_5'(t) \leq -\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s}\,|\gamma_2(s)|\,z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\,ds\right)\int_0^1 \varphi_t^2\,dx$$
$$-\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,e^{-s}\,|\gamma_2(s)|\,z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx$$

puisque $-e^{-s}$ est une fonction croissante, nous avons $-e^{-s} \leq -e^{-\tau_2}$ pour tous $s \in [\tau_1,\tau_2]$. Enfin, réglage $\eta_1 = e^{-\tau_2}$ et rappel (2.5) nous obtenons

$$I_5'(t) \leq -\eta_1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\gamma_2(s)|\,z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx - \eta_1\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\gamma_2(s)|\,z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx$$
$$+\gamma_1\int_0^1\varphi_t^2\,dx \qquad t \geq 0$$

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov $L(t)$ par

$$L(t) = N\,E(t) + N_1\,I_1(t) + N_2\,I_2(t) + N_3\,I_3(t) + N_4\,I_4(t) + N_5\,I_5(t) \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.38}$$

lorsque N, N_1, N_2, N_3, N_4 et N_5 sont des nombres réels positifs à choisir de façon appropriée plus tard

Lemme 9

soit (u,φ,θ,z) la solution de (2.3)-(2.4) alors, il existe deux constantes positives b_1 et b_2 de sorte que la fonctionnelle de Lyapunov $L(t)$ satisfait

$$b_1\,E(t) \leq L(t) \leq b_2\,E(t) \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.39}$$

et

$$L'(t) \leq -\varsigma\,E(t) \quad , \quad \varsigma > 0. \tag{3.40}$$

Preuve :

Depuis (3.38), nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
|L(t) - N\,E(t)| &\leq N_1 |I_1(t)| + N_2 |I_2(t)| + N_3 |I_3(t)| + N_4 |I_4(t)| + N_5 |I_5(t)| \\
&\leq N_1 \rho_1 \int_0^1 |u_t|\ |u|\ dx + N_1 \beta_0\, \tau \int_0^1 |u_x|\ |\theta|\ dx + N_2 J \int_0^1 |\varphi_t|\ |\varphi|\ dx \\
&+ \frac{N_2 \gamma_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx \\
&+ \frac{N_2 \mu_0 \rho_1}{\mu_1} \int_0^1 |u_t| \left(\int_0^x |\varphi(y)|\, dy \right) dx + N_3\, a\, \tau^2 \int_0^1 |\theta_t|\ |\theta|\ dx + \frac{N_3\, a\, \tau}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \\
&+ N_4 \rho_1\, a \int_0^1 |\tau\, \theta_t + \theta| \left(\int_0^x |u_t(y)|\, dy \right) dx + N_5 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\, e^{-s\rho} |\gamma_2(s)|\ z^2 ds\, d\rho\, dx
\end{aligned}
$$

En exploitant les inégalités de Young, Poincar et Cauchy-Schwarz, (3.1) et le fait que $e^{-s\,\rho} \leq 1$ pour tout $\rho \in [0, 1]$ on obtient

$$
\begin{aligned}
|L(t) - N\,E(t)| &\leq c \int_0^1 \left(u_t^2 + \varphi_t^2 + (\tau\, \theta_t + \theta)^2 + \varphi_x^2 + \varphi^2 + \theta_x^2 + \left(u_x + \frac{\mu_0}{\mu_1} \varphi \right)^2 \right) dx \\
&+ c \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\ |\gamma_2(s)|\ z^2(x, \rho, s, t)\, ds\, d\rho\, dx \\
&\leq c\, E(t)
\end{aligned}
$$

par conséquent, nous avons

$$
(N - c)\, E(t) \leq L(t) \leq (N + c)\, E(t)
$$

Choisir N est suffisamment grand et dépend de N_i , $i = \overline{1, 5}$, on obtient (3.40)

Maintenant, en différenciant (3.38) et en rappelant (3.2) , (3.8) , (3.15) , (3.24) , (3.30) , (3.37) on a

$$
\begin{aligned}
L'(t) \leq & -\left(\frac{N_4\,\beta_0\,\rho_1}{2} - N_3\,\varepsilon_2 - N_2\,\varepsilon_1 - N_1\,c_0\right)\int_0^1 u_t^2 dx - N_2\,a_0 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
& - \left(N\left(\gamma_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\; ds\right) - N_2\,c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) - N_3\,c_0 - N_4\,c_0 - N_5\,\gamma_1\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& - \left(\delta\,N - N_1\,c_0 - N_3\,c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) - N_4\,c_0\right)\int_0^1 \theta_x^2 dx - \left(\frac{N_1\,\mu_1}{2} - N_4\,\varepsilon_3\right)\int_0^1 u_x^2 dx \\
& - \left(\frac{N_2\,\mu_3}{2} - N_1\,c_0 - N_4\,c_0\right)\int_0^1 \varphi^2 dx - \left(\frac{N_3\,a}{2} - N_2\,c_0 - N_4\,c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\right)\int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)^2 dx \\
& - \left(N_5\,\eta_1 - \frac{N_2\,\gamma_1}{\mu_3}\right)\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx \\
& - N_5\,\eta_1 \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\;|\gamma_2(s)|\; z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx
\end{aligned}
$$

A ce moment, nous fixons $\varepsilon_1 = \frac{\beta_0\,\rho_1\,N_4}{8N_2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\beta_0\,\rho_1\,N_4}{4N_2}$ et $\varepsilon_3 = \frac{\mu_1\,N_1}{4N_4}$, nous finissons avec

$$
\begin{aligned}
L'(t) \leq & -\left(\frac{N_4\,\beta_0\,\rho_1}{8} - N_1\,c_0\right)\int_0^1 u_t^2 dx - N_2\,a_0 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
& - \left(N\left(\gamma_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\; ds\right) - N_2\,c_0\left(1+\frac{8N_2}{N_4\,\beta_0\,\rho_1}\right) - N_3\,c_0 - N_4\,c_0 - N_5\,\gamma_1\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& - \left(\delta\,N - N_1\,c_0 - N_3\,c_0\left(1+\frac{4N_3}{N_4\,\beta_0\,\rho_1}\right) - N_4\,c_0\right)\int_0^1 \theta_x^2 dx - \frac{N_1\,\mu_1}{4}\int_0^1 u_x^2 dx \\
& - \left(\frac{N_2\,\mu_3}{2} - N_1\,c_0 - N_4\,c_0\right)\int_0^1 \varphi^2 dx \\
& - \left(\frac{N_3\,a}{2} - N_2\,c_0 - N_4\,c_0\left(1+\frac{4N_4}{N_1\,\mu_1}\right)\right)\int_0^1 (\tau\,\theta_t+\theta)^2 dx \\
& - \left(N_5\,\eta_1 - \frac{N_2\,\gamma_1}{\mu_3}\right)\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2(s)|\; z^2(x,1,s,t)\,ds\,dx \\
& - N_5\,\eta_1 \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\;|\gamma_2(s)|\; z^2(x,\rho,s,t)\,ds\,d\rho\,dx
\end{aligned}
$$

Ensuite, on fixe N_1 et on choisit N_4 assez grand pour que

$$
\kappa_1 = \frac{N_4\,\beta_0\,\rho_1}{8} - N_1\,c_0 > 0
$$

une fois que N_4 est fixé, nous prenons N_2 assez grand pour que

$$\kappa_2 = \frac{N_2\,\mu_3}{2} - N_1\,c_0 - N_4\,c_0 > 0$$

après avoir fixé N_2, nous choisissons N_3 et N_3 suffisamment grands pour que

$$\kappa_3 = \frac{N_3\,a}{2} - N_2\,c_0 - N_4\,c_0\left(1 + \frac{4N_4}{N_1\,\mu_1}\right) > 0 \qquad , \qquad \kappa_4 = N_5\,\eta_1 - \frac{N_2\,\gamma_1}{\mu_3} > 0$$

Enfin, sélectionnez N suffisamment grand (encore plus grand de sorte que (3.39) est toujours valide) pour

$$\kappa_5 = N\left(\gamma_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\gamma_2\,(s)|\;ds\right) - N_2\,c_0\left(1 + \frac{8N_2}{N_4\,\beta_0\,\rho_1}\right) - N_3\,c_0 - N_4\,c_0 - N_5\,\gamma_1 > 0$$

et

$$\kappa_6 = \delta\,N - N_1\,c_0 - N_3\,c_0\left(1 + \frac{4N_3}{N_4\,\beta_0\,\rho_1}\right) - N_4\,c_0 > 0$$

De plus, nous avons mis

$$\kappa_7 = \delta\frac{N_1\,\mu_1}{4} \qquad , \qquad \kappa_8 = N_2\,a_0 \qquad , \qquad \kappa_9 = N_5\,\eta_1$$

on obtient (3.40)

Dans ce qui suit, nous utiliserons la relation d'équivalence (3.39) pour estimer l'énergie du système (2.3)-(2.4) en utilisant l'estimation (3.40) basée sur l'hypothèse (2.5). Le résultat de stabilité peut maintenant etre énoncer comme suit.

Théorème 10

que (u, φ, θ, z) soit la solution de (2.3)-(2.4) et nous supposons que (2.5) retient, Alors, la solution (u, φ, θ, z) est stable exponentiellement, i. e. il existe deux constantes positives λ_1 et λ_2 telles que

$$E\,(t) \leq \lambda_2\,e^{-\lambda_1\,t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.41}$$

Preuve :

en utilisant l'équivalence de $E(t)$ et $L(t)$ on en déduit que

$$L'\,(t) \leq -\lambda_1 L\,(t) \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.42}$$

où $\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{\varsigma}{b_2} > 0}$, Une simple intégration de (3.42) donne

$$\boldsymbol{L(t) \leq L(0)\, e^{-\lambda_1 t} \qquad \forall t \geq 0}$$

ce qui donne le résultat on série (3.41) et en utilisant l'autre côté de (3.39) encore. La preuve est complète

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. A .Apalara, *"On the stability of porous-elastic system with microtemperatures"*, J. Therm. Stresses, vol. 42, no. 2, 2019, 265-278.

[2] L. Bouzettouta, A. Djebabla, Exponential stabilization of the full von Kármán beam by a thermal effect and a frictional damping and distributed delay. J Math Phys. 2019 ;60 :041506. DOI :10.1063/1.5043615.

[3] H. Brézis, *"Analyse fonctionnelle :théorie et application"*, Dunod, PARIS- France, (1999). .

[4] S. Chiriţă, M. Ciarletta and C. D'Apice, *"On the theory of thermoelasticity with microtemperatures"*, J. Math. Anal. Appl., vol. 397, no. 1, 2013, 349-361.

[5] P. S. Casas, and R. Quintanilla, *"Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures"*, J. Eng. Sci., vol. 43, 2005, no. 1-2, 33-47. .

[6] T. Cazenave, A. Hareaux, *"Introduction aux Problèmes d' évolution semi-linéaire"*, Ellipses,société de mathématiques appliques et industrielles. .

[7] S. C. Cowin, *"The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids"*, Elasticity, vol. 15, no. 2, 185-191, 1985. DOI :10.1007/BF00041992.

[8] S. C. Cowin, J. W. Nunziato, *"Linear elastic materials with voids"*, J. Elasticity, vol. 13, 1983, no. 2, 125-147.

[9] M. A. Goodman, and S. C. Cowin, *"A continuum theory for granular materials"*, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 44, no. 4, 1972, 249-266.

[10] M. Hachel, A. Djebabla, N. Tatar, *"On the decay of the energy for linear thermoelastic systems by thermal and microtemperature effects"*, Eurasian J. Math. Comput. Appl., 2018, vol. 6, 2018 , 29-37.

[11] D. Ieşan and R. Quintanilla, *"A theory of porous thermoviscoelastic mixtures"*, J. Thermal Stresses, vol. 30, no. 7, 2007, 693-714. .

[12] D. Iesan, *"Thermoelastic Models of Continua"*, Dordrecht : Springer, 2004.

[13] D. Ieşan, *"On a theory of micromorphic elastic solids with microtemperatures"*, J. Thermal Stresses, vol. 24, no. 8, 2001, 737-752.

[14] D. Ieşan, R. Quintanilla, *"On a theory of thermoelasticity with microtemperatures"*, J.Thermal Stresses, vol. 23, no. 3, 2000, 199-215.

[15] D. Ieşan, *"A theory of thermoelastic materials with voids"*, Acta Mech., vol. 60, no. 1-2, 1986, 67-89.

[16] H. E. Khochemane, L. Bouzettouta and A. Guerouah, Exponential decay and well-posedness for a one-dimensional porous-elastic system with distributed delay, Applicable Analysis, 10.1080/00036811.2019.1703958.

[17] H. E. Khochemane, L. Bouzettouta and S. Zitouni, General decay of a nonlinear damping porous-elastic system with past history, Annali dell'universita' di ferrara, 65(2) (2019), 249–275.

[18] Z. Liu, S. Zheng, *"Semigroups Associated with Dissipative Systems"*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 1999. .

[19] A. Magaña, and R. Quintanilla, *"On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials"*, Int. J. Solids Struct., vol. 43, 2006, 11-12, 3414-3427.

[20] M. I. Mustafa, *" A uniform stability result for thermoelasticity of type III with boundary distributed delay"*, J. Abstr. Diff. Equa. Appl., 2 (1) (2014), 1–13. .

[21] M. I. Mustafa, M. Kafini, *" Exponential decay in thermoelastic systems with internal distributed delay"*, Palestine J. Math. 2 (2), 287-299 (2013).

[22] A. S. Nicaise, C. Pignotti ; *"Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay"*, Diff. Int. Equs. 21 (9-10) (2008), 935-958.

[23] S. Nicaise, C. Pignotti, *" Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks"*, SIAM J. Control Optim., 45 (5) (2006), 1561–1585. .

[24] A. Pazy. *"Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations"*, Applied Math. Sciences, Springer-Verlag, New York, 44, 1983.

[25] Chandrasekharaiah, D. S. ; *Thermoelasticity with second sound : a review,* Appl. Mech. Rev., 39 (3), 355–376 (1986).

[26] Chandrasekharaiah, D. S. ; *Hyperbolic thermoelasticity : a review of recent literature,* Appl. Mech. Rev., 51 (12), 705–729 (1998).

[27] Coleman, B. D. ; Hrusa, W. J. ; Owen D. R. ; *Stability of equilibrium for a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound in solids,* Arch. Rational Mech. Anal. 94, 267–289 (1986).

[28] Datko, R. ; Lagnese, J. ; Polis, M. P. ; *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations,* SIAM J. Control Optim. 24 (1), 152–156 (1986).

[29] Messaoudi, S. A. ; Said-Houari, B. ; *Exponential stability in one-dimensional non-llinear ther- moelasticity with second sound,* Math. Meth. Appl. sci., 28 (2), 205-232 (2005).

[30] Racke, R. ; *Thermoelasticity with second sound–exponential stability in linear and non-linear 1-d,* Math. Meth. Appl. Sci., 25 (5), 409–441 (2002).

[31] Racke, R. ; *Instability of coupled systems with delay,* Comm. Pure, Appl. Anal., 11 (5), (2012).

[32] Richard, J. P. ; *Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems, Automatica,* 39 (10), 1667–1694 (2003).

[33] Beuter, A. ; B élair, J. ; Labrie, C. ; *Feedback and delays in neurological diseases : a modeling study using dynamical systems,* Bull. Math. Bio., 55 (3), 525-541 (1993).

[34] Abdallah, C. ; Dorato, P. ; Benitez-Read, J. ; Byrne, R. ; *Delayed positive feedback can stabilize oscillatory system,* ACC. San Francisco, 3106–3107 (1993).

[35] Joseph, D. D. ; Preziosi, L. ; *Heat waves,* Reviews of Modern Physics 61 (1), 41–73 (1989).

[36] Tarabek, M. A. ; *On the existence of smooth solutions in one-dimensional nonlinear ther- moelasticity with second sound,* Quart. Appl. Math. 50 (4), 727–742 (1992).

[37] N. Bazarra, JR. Fernandez and R. Quintanilla, Lord-Shulman thermoelasticity with microtemperatures. Appl Math Optim. (2020) https ://doi.org/10.1007/s00245-020-09691-2.

[38] M. Boudeliou M, A. Bouraoui and A. Djebabla, On the stability of Lord Shulman thermoelastic system with porous damping. Research Square. (2002). https ://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1938971/v1.

[39] L. Bouzettouta, S. Zitouni, Kh. Zennir, and H. Sissaoui, "Well-posedness and decay of solutions to Bresse system with internal distributed delay," Int. J. Appl. Math. Stat. 56, 153–168 (2017).

[40] C. Cattaneo, On a form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, C. R. Acad. Sci. Paris 247(1958) 431-433.

[41] H. Dridi and A. Djebabla, On the stabilization of linear porous elastic matherials by microtemperature efect and porous damping. Annan Dell'universita'di Ferrara 66, 13-25 (2019).

[42] A. E. Green and K. A. Lindsay, Termoelasticity. J. Elast,2 (1972) 1-7.

[43] M. E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand, The Mechanics and Thermodynamics of Continua ; Cambridge University Press : Cambridge, UK, 2010.

[44] H. W. Lord, Y. Shulman, A generalized dunamical theory of thermoelasticity, J. Mech. Phys. Solids 15 (1967) 299-309.

[45] M. Hachelif, Djebabla , N. Tatar, On the decay of the energy for linear thermoelastic systems by thermal and micro-temperature effects, Eurasian J. Math. Comput. Appl., 2018, vol. 6, (2018) 29-37.

[46] M. Aouadi, M. Ciarletta, F. Passarella, Thermoelastic theory with microtemperatures and dissipative thermodynamics, J. Thermal Stresses 41 (2018) 522-542.

[47] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. Diff Int Equ. 2008 ;21(9-10) :935-958.

[48] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag : New York, (1983).

[49] P.S. Casas, and R. Quintanilla, Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures, Int. J. Eng. Sci., vol. 43, no. 1-2, pp. 33-47, 2005.

[50] M. Saci, A. Djebabla, On the stability of linear porous elastic materials with microtemperatures effects. J. Therm. Stresses 43(10), 1300-1315 (2020).

[51] H. E. Khochemane, L. Bouzettouta, A. Guerouah, "Exponential decay and well-posedness for a one-dimensional porous-elastic system with distributed delay", Appl. Anal. 100, 2950–2964 (2021).

[52] T. A. Apalara, on the stability of porous-elastic system with microtemperatures, J. Therm. Stresses, 2018. DOI :10.1080/01495739.2018.1486688.

[53] Z. Liu, S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 398, Chapman & Hall/CRC, Boca Ra ton, FL, 1999.