

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

U niversité 20 août 1955 - skikda
Faculté des Sciences
Département de mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

مذكرة ماستر

الميدان: رياضيات وإعلام الي
الشعبة: رياضيات
التخصص: تحليل دالي وتطبيقي

الموضوع

طريقة أويلر

تقديم الطالبة :
بوجديدة جيهان

يوم المناقشة : 02|07|2025

لجنة المناقشة :

رئيسا	أستاذ محاضر -أ-	جامعة سكيكدة	العلوش عبد الله
مؤطرا	أستاذ محاضر -ب-	جامعة سكيكدة	بوسنة احسن
ممتحنا	أستاذة محاضرة -ب-	جامعة سكيكدة	بوغيوط نوال

السنة الجامعية: 2024 - 2025

إهداء

بسم الله والحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله
حياكم الله بتحيةة الإسلام بتحيةة أهل الجنان فأقول السلام عليكم ورحمة الله تعالى وبركاته طبتم وطابت
ممشاكم وتبوئتم من الجنان أرقى المقاعد ان شاء الله

إلى من علمني أن الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة إلى الذي لم يبخل عني بأي شيء إلى من سعى
من أجل راحتي ونجاحي
إلى أعظم وأعز رجل في الكون أبي ...

إلى من كانت الداعم الأول لتحقيق طموحي إلى من كانت ملجئي ويدي اليمنى في هذه المرحلة
وإلى من أبصرت بها طريق حياتي واعتزازي بذاتي أُمِّي ...

وإلى الشموع التي تنير لي الطريق وانتظروا هذه اللحظة كثيرا ليفخروا بي كما أنفخ بهم وبوجودهم
إلى إخوتي

إلى من كانت النور في طريقي إلى من قدمت من وقتها وجهدها دون كلل أو ملل إلى أستاذتي
الفاضلة

شكر وتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على سيدنا وحبينا خاتم الأنبياء والمرسلين صلى الله عليه وسلم حضرة الأساتذة والضيوف الكرام السلام عليكم ورحمة الله تعالى وبركاته

أولا وقبل كل شيء نحمد الله سبحانه وتعالى ونشكره لتوفيقه لإكمال هذا البحث ووصولي لهذا اليوم يسرني أن أتقدم بجزيل الشكر والعرفان لأعضاء لجنة المناقشة على رأسهم الدكتور العلوش عبد الله رئيسا والدكتور بوسنة احسن مناقشا والأستاذة بوغيوط نوال مشرفة الذي ساعدتني وأفادتني طوال هذه مذكرة

كما نوجه الشكر الى كل من ساعدني من قريب أو من بعيد في إنجاز هذا البحث العلمي ونشكركم لقبول مذكرة تخرجي التي هي من متطلبات نيل شهادة الماستر تخصص تحليل دالي تحت عنوان طريقة أويلر .

ملخص

تطرقنا في هذه المذكرة الى دراسة طريقة أويلر المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية العادية ، فن الأمثلة العادية إلى الأمثلة الصعبة التي تحدث فيها بعض العقبات في الاستقرار والتقارب . كما تطرقنا بالتفصيل إلى حل هذه العقبات من التحكم في حجم الخطوة الى تحسين طريقة أويلر .

الكلمات المفتاحية :

المعادلات التفاضلية العادية ، الإستقرار ، التقريب العددي ، طريقة أويلر ، الخطأ المحلي ، الخطأ الكلي ، طريقة أويلر المحسنة .

Abstract

In this thesis , we study the Euler's method used for solving ordinary differential equations , ranging from simple examples to more complex casewhere challenges related to stability and convergence may arise. we also discussed in detail how to address these challenges , form step size control to improvements of Euler's method.

key words

Ordinary Dfferential Equations , Stability , Numerical approximatin , Euler Method , Local Truncyion Error , Global Error , Improved Euler Method .

Résumé

Dans ce mémoire , on a étudié la méthode d'Euler utilisée pour la résolution des équations dffiérentielles ordinaires . passant par des exemples simples aux cas plus complexes où apparaissent certaines dfficultés liées á la convergence ou à la stabilité . Nous avons également abordé en détail la manière de surmonter ces dfficultés . allant du controle du pas jusqu'a l'amélioration de la méthode d'Euler.

Mots cles

Equations dfférentielles ordinaires , stabilité , Approximation numérique , Méthode d'Euler , Erreur locale, Erreur globale , Méthed d'Euler améliorée.

الفهرس

7	1	طريقة أويلر	1
7	1.1	جملة المعادلات التفاضلية	1.1
8	2.1	أمثلة أولية	2.1
11	3.1	عملية حسابية مع التحكم في حجم الخطوة	3.1
12	4.1	حساب مسائل صعبة الى حد ما	4.1
13	5.1	الحساب باستخدام طريقة أويلر الضمنية	5.1
17	2	تحليل طريقة أويلر	2
17	1.2	صياغة طريقة اويلر	1.2
17	2.2	خطأ الاقتران المحلي	2.2
18	3.2	خطأ الاقتران الكلي	3.2
19	4.2	تقارب طريقة أويلر	4.2
20	5.2	رتبة التقارب	5.2
22	6.2	صيغة الخطأ المقارب	6.2
23	7.2	خصائص الإستقرار	7.2
25	8.2	تقدير خطأ الإقتران المحلي	8.2
26	9.2	تقارب الخطأ	9.2
29	3	تعميمات طريقة أويلر	3
29	1.3	العمليات الحسابية في خطوة واحدة	1.3
31	2.3	إعتماد أكبر على القيم السابقة	2.3
31	3.3	استخدام المشتقات الأعلى	3.3
32	4.3	طرق متعددة المراحل والإشتقاق	4.3
33	5.3	الطرق الضمنية	5.3
33	6.3	تقديرات الخطأ المحلي	6.3

مقدمة

تعد طريقة أويلر من أبسط الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى بقيمة ابتدائية محددة ، تحتوي على أهمية كبيرة في الدراسات العلمية ، وقد طورت على يد عالم الرياضيات السويسري ليونهارد أويلر والذي إقترحها لأول مرة في كتابه "مؤسسة حساب التكامل" في الفترة الممتدة بين عامي 1768 و 1770.

في تلك الفترة كانت الرياضيات تشهد تطور كبيرا في مجالات التحليل والتقريب العددي . حيث يوجد عدد كبير من المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها بالطرق التحليلية ومن الصعب إيجاد $y(x)$ ، مما يؤدي الى الإعتماد على الطرق العددية للإيجاد الحل التقريبي وخاصة في الحالات التي تكون فيها المعادلة معقدة ، حيث لم تكن هناك أدوات حاسوبية لحل المعادلات المعقدة ، في حين يتم استخدام الطرق العددية للمعادلات التفاضلية العادية لإيجاد تقريبات عديدة لحلول المعادلات التفاضلية يعرف هذا باسم "التكامل العددي" تعتبر المعادلات التفاضلية من الأدوات الرياضية الهامة في فهم العديد من المسائل الفيزيائية ، الهندسية ، الاجتماعية ... وقد امتدت أهميتها مؤخرا الى حقول العلوم الاقتصادية .

حيث تلعب الطرق العددية دورا مهما في حل المعادلات التفاضلية ، وتمثل ميزة استخدام طريقة أويلر في أنه يمكن إستخدامها لحل العديد من المعادلات التفاضلية غير خطية وكذلك الخطية .

لكنها تواجه عدة مشاكل من بينها الاستقرار ، الدقة ، المعادلات الصعبة ... مما أدى الى تطور وتحسين هذه الطريقة ولها إيجابيات وسلبيات واضحة من بين الإيجابيات نذكر البساطة والسهولة في الفهم ، سرعة التنفيذ ، وتتميز بإمكانية استخدام حل العديد من المعادلات التفاضلية غير الخطية والخطية ... ونذكر من بين السلبيات انخفاض الدقة ، عدم الاستقرار للمعادلات الصعبة ، تراكم الأخطاء مع تكرار الخطوات ...

في الفصل الأول سوف نتحدث عن الحل العددي للمعادلات التفاضلية باستخدام طريقة أويلر ، حيث تعتبر طريقة أويلر حالة خاصة من سلسلة تابلور ، وهي تعد من أبسط الطرق العددية لحل هذه المعادلات التفاضلية العادية ، وتستخدم هذه الطريقة لإيجاد تقريبات عديدة لحلول هذه المعادلات ، وعملياته الحاسوبية مع التحكم في حجم الخطوة .

بينما الفصل الثاني يتحدث عن دراسة تحليلية لطريقة أويلر ، حيث تعرف بأنها طريقة من الدرجة الأولى ، أي أن الخطأ المحلي (خطأ في كل خطوة) يتناسب طرديا مع مربع حجم الخطوة h^2 ، بينما الخطأ الكلي يتناسب طرديا مع حجم الخطوة h . الطرق العددية تضمن تقارب الحل التقريبي الى الحل الحقيقي عند تصغير حجم خطوة h ، ونستخدم خطأ التقارب في الطرق العددية للمعادلات التفاضلية باستخدام طريقة أويلر ، حيث يتناسب الخطأ المحلي لطريقة أويلر مع $hy''(x)$. كما اطرقنا في هذا الفصل الى خصائص الطريقة من حيث الإستقرار والتقارب .

في الفصل الثالث تطرقنا الى تعميمات وتحسينات تهدف الى تجاوز هذه القيود المذكورة في الفصلين السابقين ، من بين أبرز هذه التعميمات طريقة أويلر المحسنة حيث تعتمد على حساب الميل في بداية ونهاية الفترة . وتعتبر طريقة رونج - كوتا ($Runge - Kutta$) من بين الطرق إستقرار وأكثر دقة هناك أيضا الطرق متعددة الخطوات ، الطرق الضمنية حيث تلعب دورا مهم في حل المشكلات الصعبة ومن بين هذه الأخيرة ، صيغة الفروق العكسية من الدرجة الثانية .

بعد تناول هذا الموضوع من جوانب متعددة فإن طريقة أويلر العادية تعتمد على حساب الميل عند النقطة الحالية فقط ، حيث نفرض أن الميل ثابت في حين طريقة أويلر المحسنة تعتمد على حساب الميل في كل خطوة تعد هذه الطريقة أبطء قليلا مقارنة بطريقة أويلر العادية . طريقة أويلر كانت خطوة مهمة في تطوير الحلول العددية على الرغم من بساطتها إلا أنها أدت الى تطور كبير في التحليل العددي . في هذه الدراسة ، قننا باستخدام برنامج $Matlab$ لتطبيق طريقة أويلر على عدة أمثلة .

الفصل 1

طريقة أويلر

طريقة أويلر

تستند هذه الفكرة الأساسية الى مبدأ بسيط للغاية مثلا في الوقت x_0 يكون جسم متحرك عند الوضعية y_0 . وأن سرعته في هذا الوقت معروفة هي v_0 ، المبدأ البسيط هو أنه في فترة زمنية قصيرة جدا لا يكن هناك وقت لتغير السرعة بشكل كبير من v_0 . إذا كانت حركة الجسم تحكمها معادلة تفاضلية فإن قيمة v_0 ستعرف كدالة لـ x_0 و y_0 ، حيث يمكن حساب الحل عند x_1 ، والذي يفترض أنه قريب من x_0 على النحو التالي :

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)v_0$$

والتي يمكن إيجادها من القيم المعروفة فقط لـ x_0 ، x_1 و y_0 ، نستطيع إيجاد v_1 باستخدام المعادلة التفاضلية من القيم x_1 و y_1 وتكون دقيقة بدرجة كافية.

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)v_1$$

إن سلسلة التقريبات y_1, y_2, \dots, y_n لحل المعادلة التفاضلية عند النقاط x_1, x_2, \dots, x_n تهدف الى تقريبات مقبولة في أوقات بعيدة بشكل متزايد .

بالطبع فإن تفسير طريقة أويلر أوسع بكثير من وصف حركة واحد يتحرك عبر الزمن على طول خط.

1. جملة المعادلات التفاضلية

تكون جملة المعادلات التفاضلية على الشكل التالي :

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{bmatrix} \quad \text{وحيث } f \text{ أيضا معرفة على } \mathbb{R}^N$$

عندما تكون مسألة لا تتعلق بالزمن تكتب على الشكل التالي :

$$y'(x) = f(y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

وتسمى مسألة مستقلة.

2. أمثلة أولية

مثال 1.1. لنستخدم طريقة أويلر لحل المعادلة التفاضلية التالية عند قيم مختلفة لـ $x = 0.1, 0.2, 0.5$ مع الخطوة $h = 0.1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x} \quad , \quad y(0) = 1$$

المطلوب :

-حساب القيم التقريبية باستخدام طريقة أويلر

-مقارنة النتائج مع القيم الحقيقية

الحل :

الحل التحليلي هو

$$y(x) = x + \sqrt{1 + 2x^2}$$

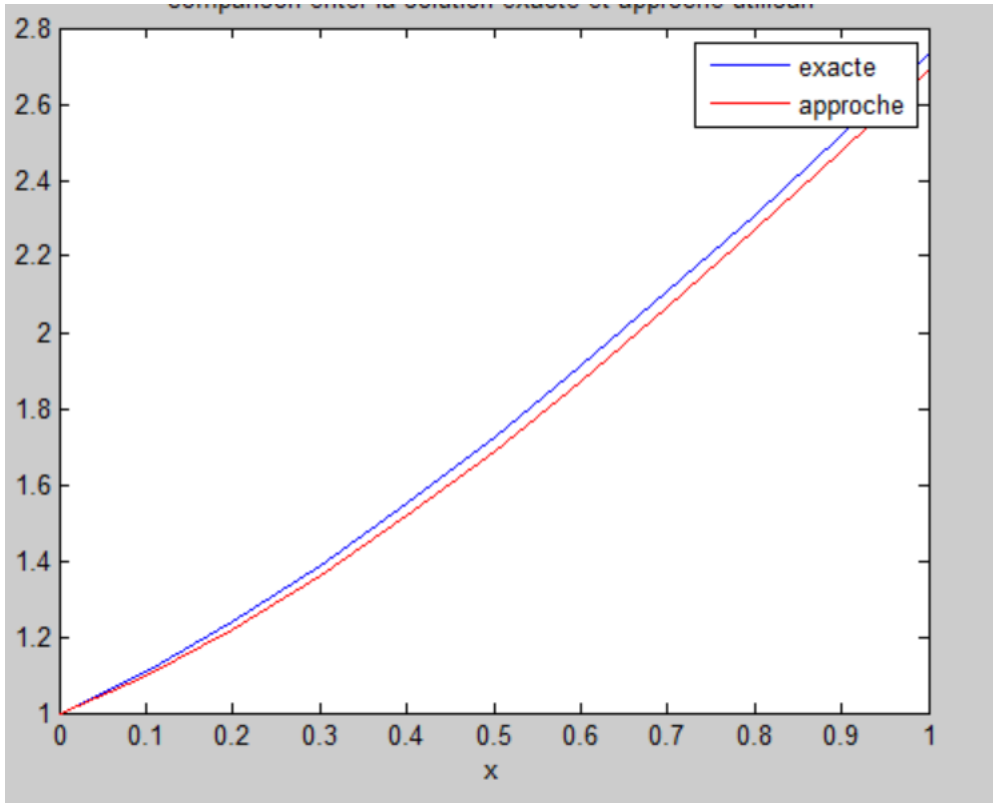
وباستعمال طريقة أويلر الحل y_{n+1} عند الخطوة $n + 1$ هو

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

فنتحصل على الجدول التالي:

الخطأ	الحل التحليلي	الحل التقريبي $h=0.1$	x
0.39005	1.109950	1.5 ; $h = 0.5$	0.1
0.14005	1.109950	1.25 ; $h = 0.25$	
0.00995	1.109950	1.1 ; $h = 0.1$	
0.004745	1.224745	1.22	0.2
0.037248	1.724745	1.687497	0.5

جدول 1 يمثل مقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمعادلة التفاضلية للمثال 1



شكل 1.1: مقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال 1

مثال 1.2. إيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية عند $x = 0.1, x = 0.2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

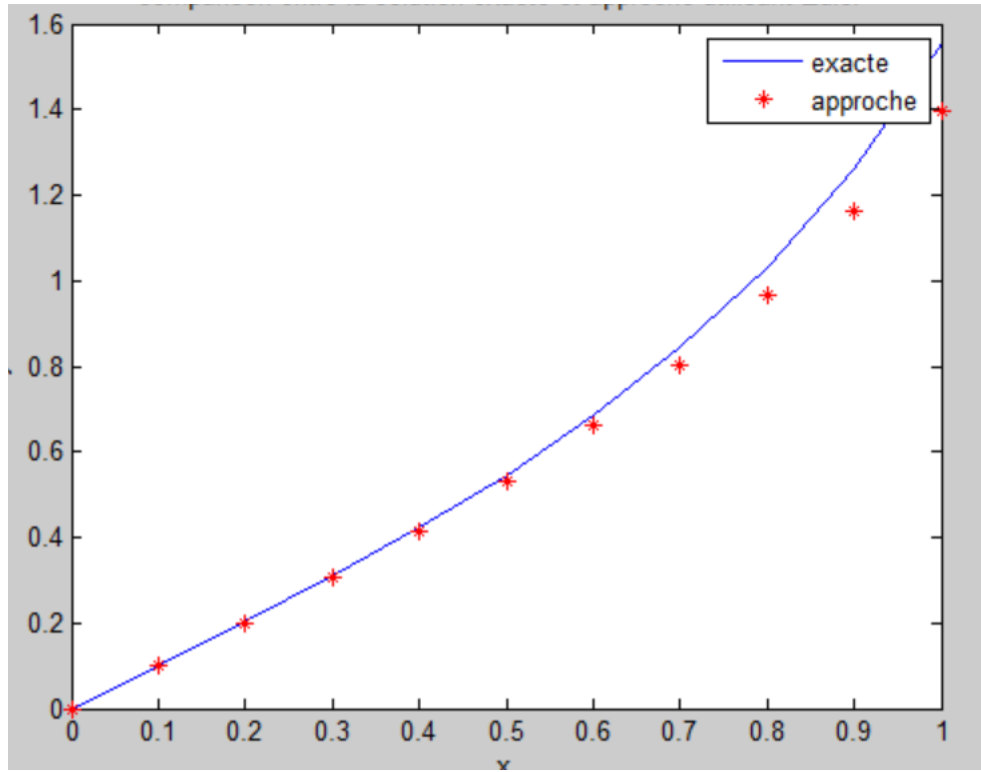
الحل التحليلي لهاته المسألة هو

$$y(x) = \tan(x)$$

وباستعمال طريقة أويلر نجد:

خطأ	الحل التحليلي	الحل التقريبي	x
0.399666	0.100334	0.5 ; $h = 0.5$	0.1
0.149666	0.100334	0.25 ; $h = 0.25$	
0.000334	0.100334	0.1 ; $h = 0.1$	
0.92229	0.202710	1.125	0.2
0.312915	0.202710	0.5156	
0.00171	0.202710	0.201	

جدول 2 يمثل مقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمعادلة التفاضلية للمثال 2



شكل 2.1: مقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي للمثال 2

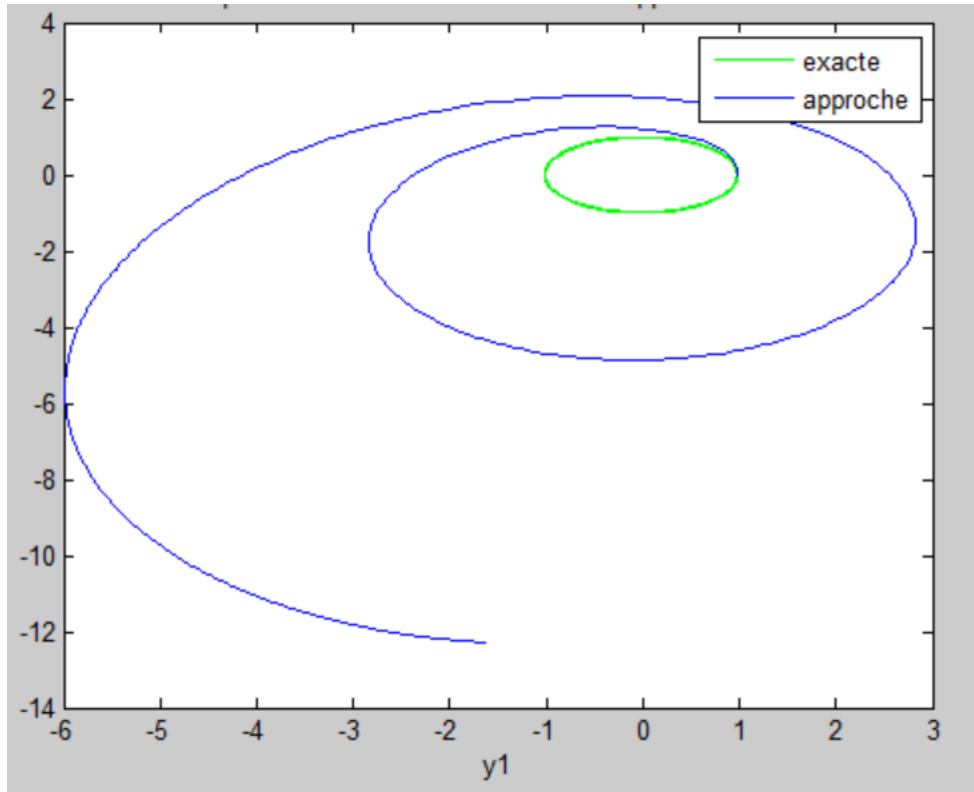
مثال 1.3

لنعتبر الجملة التالية والتي تمثل حركة جسمين حول بعضهما بتأثير الجاذبية وهذا في معلم غاليلي :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_4 \\ \frac{dy_3}{dx} = -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{dy_4}{dx} = -\frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

حيث القيم الابتدائية هي : $y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ والحل التحليلي يكون على الشكل التالي :

$$y(x) = [\cos(x), \sin(x), -\sin(x), \cos(x)]$$



شكل 3.1: مقارنة بين الحل التحليلي والحل التقريبي

3. عملية حسابية مع التحكم في حجم الخطوة

إستخدام طريقة أويلر بخطوة ثابتة قد لا يكون فعالاً لبعض المسائل ، على سبيل المثال في المدرات المركزية من الأفضل إستخدام خطوة صغيرة عند النقاط القريبة من قوة الجذب ، وخطوة أكبر عند النقاط البعيدة ، لتحديد كيفية التحكم في حجم الخطوة يجب تقدير الخطأ في كل خطوة . بما أن الخطأ الكلي هو مجموع الأخطاء الناتجة عن الخطوات الفردية ، يقسم مجال التكامل الى m مجالات نوعية بأطوال $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ نفرض أن نظم الخطأ عند هذه المجالات هو $C_1 h_1^2, \dots, C_m h_m^2$ ، بالترتيب في كل فترة حيث h_1, \dots, h_m هي قيمة الخطوات وهي ثابتة داخل هذه المجالات نوعية .

نفرض أن :

$$h_i = \frac{\sigma_i}{t_i N}$$

بجيث $t_i N$ معرفة على المجال i . وبالتالي قيمة الخطأ المتراكم تعرف بالتقريب كما يلي .

$$E = \sum_{i=1}^m (t_i N) C_i \left(\frac{\sigma_i}{t_i N} \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 C_i t_i^{-1} \quad (1.1)$$

حيث C_i ثوابت تتعلق ب i .

تعبر المعادلة (1.1) عن الخطأ الكلي E كمجموع الأخطاء في الفترات نوعية ، حيث تعتمد على الخطوات المستخدمة $\sigma_i / (t_i N)$ باستخدام متباينة كوشي شوارتز [J.C. Butcher] يمكن تحقيق الحد الأدنى للخطأ عند إختيار :

$$t_i = \frac{\sigma_i \sqrt{C_i}}{\sum_{j=1}^m \sigma_j \sqrt{C_j}}$$

نتحصل على الحالة المثلى عندما يكون $C_i h_i^2$ ثابتا عند كل المجالات نوعية .

ملاحظة

لتحديد كيفية التحكم في حجم الخطوة ، يجب تقدير خطأ في كل خطوة. تقدير الخطأ في كل خطوة يمكننا استخدام تقريب المشتق $y'(x)$ عند بداية الخطوة n يتم حساب $hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ وهو جزء من خطوة أولير. وفي نهاية هذه الخطوة يتم حساب $hf(x_n, y_n)$ ، ومن أجل حساب هذه التقريبات بشكل أفضل نستعمل تقنية شبه منحرف :

$$y(x_n) \approx y(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(hy'(x_{n-1}) + hy'(x_n))$$

ويقدر الخطأ المحلي كالتالي :

$$\frac{1}{2} \|hf(x_{n-1}, y(x_{n-1})) - hf(x_n, y(x_n))\|$$

4. حساب مسائل صعبة الى حد ما

لتكن المسألة التالية ذات شرط ابتدائي :

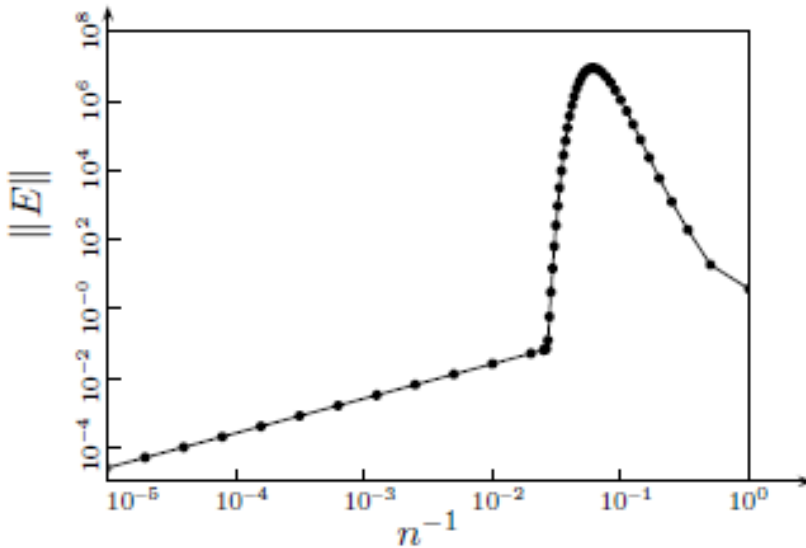
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -16y_1 + 12y_2 + 16\cos(x) - 13\sin(x) & , \quad y_1(0) = 1 \\ \frac{dy_2}{dx} = 12y_1 - 9y_2 - 11\cos(x) + \sin(x) & , \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$$

حيث الحل التحليلي هو

$$y_2(x) = \sin(x) \quad , \quad y_1 = \cos(x)$$

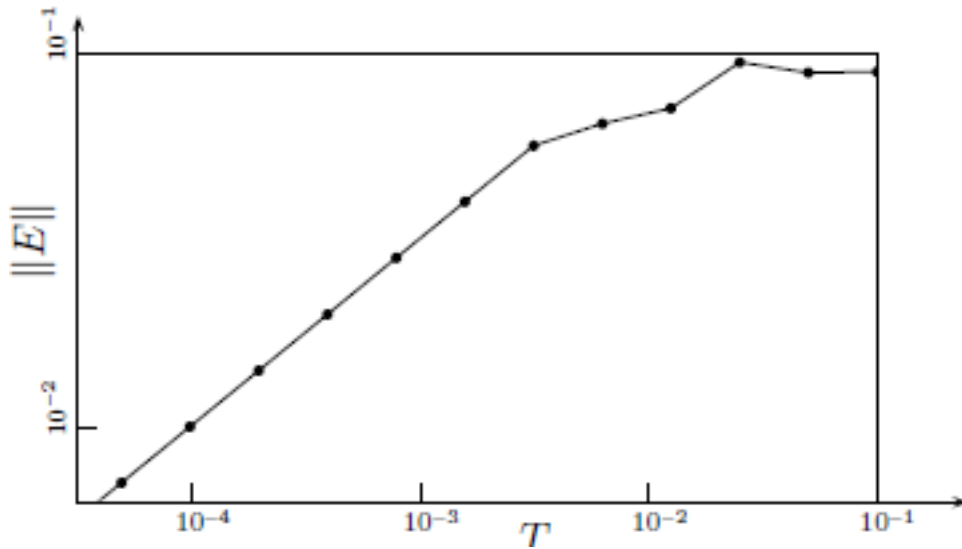
سنحاول حل هذه المسألة بإستعمال طريقة أولير في المرة الاولى نستعمل خطوة ثابتة $h = \frac{\pi}{n}$ ، مما يؤدي الى سلسلة من التقريبات حتى $y(\pi)$. الشكل (4.1) يبين تغير تنظيم الخطأ ، إذا كما نلاحظ تغير مزيج للمنحنى عند الخطوة $n = 38$ ، ثم بعد ذلك يكون منتظما.

لعلاج هذه المشكلة سنقوم بتصغير قيمة h عند الخطوة ذات الخطأ الكبير ذالك بعد حساب الحل ثم حذفه ثم تبديله بالحل المحسوب ب h المصغر.



شكل 4.1: تنظيم الخطأ

بما أن خطأ الإقتطاع مقارب لمربع h . سنعتبر الجذر $\sqrt{\frac{T}{\|E\|}}$ ، حيث E هو تقدير الخطأ و T هي القيمة العظمى لهذا الخطأ عند مختلف القيم. لكن من المهم وضع وسيط S "كافي" أقل من 1 خلال الحساب ، ومن أجل الحماية من خطوة فاشلة أخرى بعد التصغير من الحكمة إضافة وسطين آخرين M و m حيث M هي القيمة العظمى للجذر $\sqrt{\frac{T}{\|E\|}}$ و m القيمة الدنيا لها . عادة $M = 2$ و $m = \frac{1}{2}$ و $S = 0.9$. غالباً استعمال هذا التغيير في ال h يعطي نتائج جيدة انظر الشكل (5.1).



شكل 5.1: الطرق الضمنية وتطبيقاتها على المسائل الصعبة

5. الحساب باستخدام طريقة أويلر الضمنية

تقرب طريقة أويلر التكامل لـ $y'(x)$ عبر كل فترة زمنية $[x_{n-1}, x_n]$ ، حيث تعتمد على قيمة المشقة في بداية الفترة بدلا من نهايتها ، هذا يجعلها أكثر استقرارا في بعض الحالات ، لحساب y عند النقطة x_1 يحسب مايلي :

$$y(x_1) \approx y_0 + hf(x_1, y(x_1))$$

وهذا ينتج عنه ما يسمى بـ " طريقة أويلر الضمنية ". لحساب هذه المعادلة نستخدم تكرار النقطة الثابتة ، حيث نحسب تقريبات متتالية حتى نصل الى قيمة مستقرة كالتالي :

$$y^{[k]} = y_0 + hf(x_1, y^{[k-1]}) \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

نبدأ بـ: $y^{[0]} = y_0$ ونستمر حتى يتقارب التسلسل الى قيمة ثابتة $y(x_1) = y_1$.

إن استخدام طريقة أويلر الضمنية أكثر فاعلية في حالة المسائل الصعبة لأنها تسمح بحساب القيمة التقريبية للنقطة التالية مباشرة باستخدام تكرار النقطة الثابتة ذات معادلة خطية .

مثال 1.4. لتكن المسألة التالية :

$$y'(x) = y \quad ; \quad y(0) = 1$$

المطلوب :

أوجد الحل التقريبي باستخدام طريقة أويلر الضمنية عند الخطوة $h = 0.1$

الحل :

الحل التحليلي هو

$$y(x) = e^x$$

باستعمال طريقة أويلر الضمنية نجد :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

نطبق طريقة تكرار النقطة الثابتة :

$$y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{[k]})$$

نحسب عند التكرار الأول :

$$y_1^{[1]} = y_0 + hf(x_1, y_1^{[0]})$$

نحسب أولاً :

$$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_1^{(0)} &= 1 + 0.1(1) \\ y_1^{(0)} &= 1.1 \end{aligned}$$

بالتعويض نجد :

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 1 + 0.1(1.1) \\ y_1^{(1)} &= 1.11 \end{aligned}$$

يمكن تعويض طريقة تكرار النقطة الثابتة بطريقة نيوتن :

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(y_n)}{F'(y_n)}$$

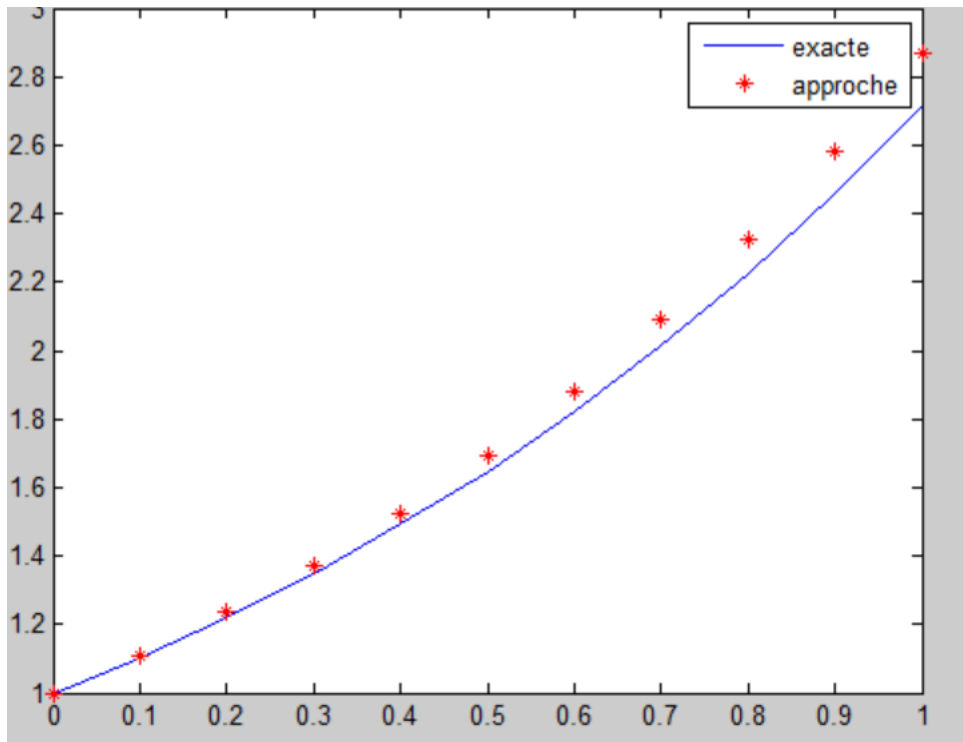
$$\begin{aligned} F(y_{n+1}) &= y_{n+1} - y_n - hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ F(y) &= y - y_n - h * y \\ y_n &= y(1 - h) \end{aligned}$$

لحساب y_1 .

$$\begin{aligned} F(y) &= y - y_0 - 0.1 * y \\ y(1 - 0.1) - 1 &= 0.9y - 1 \\ F'(y) &= 0.9 \end{aligned}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 - \frac{Fy(0)}{F'(0)} \\ y_1 &= 1.11 \end{aligned}$$



شكل 6.1: الطريقة أويلر الضمنية باستخدام تكرار النقطة الثابتة

الفصل 2

تحليل طريقة أويلر

تحليل طريقة أويلر

صيغة طريقة أويلر

لتكن جملة المعادلات التفاضلية :

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.2)$$

حيث $f = [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ مستمرة وتحقق شرط ليبيشيتز الذي يضمن وجود ووحدانية الحل. نفرض أن شرط ليبيشيتز محقق دوماً ، وبممكننا أن نوسع النطاق التي ينطبق عليها شرط ليبيشيتز الى مساحة أشعة ذات الأبعاد \mathbb{N} . حيث أن الحل لا يمتد أبداً خارج المجموعة المترابطة .

نفرض أن الحل لـ (1.2) مطلوب تقريبه عند النقطة \bar{x} ، وأن عدد من النقاط الخطوة الوسيطة يتم إختيارها ، نرمز لها بالرمز

$x_1, x_2, \dots, x_n = \bar{x}$ ، نعرف تقريب الحل \tilde{y} على المجال $[x_0, \bar{x}]$ بالصيغة التالية :

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})f(x_{k-1}, \tilde{y}(x_{k-1})) \quad ; \quad x \in (x_{k-1}, x_k) \quad (2.2)$$

من أجل $k = 1, 2, \dots, n$.

إذا إفتراضنا أن $\tilde{y}(x_0) = y(x_0) = y_0$ ، فإن \tilde{y} يتطابق تماماً مع الدالة المحسوبة باستخدام طريقة أويلر عند النقاط $x = x_k$ ، حيث $k = 1, 2, \dots, n$. \tilde{y} دالة مستمرة على $[x_0, \bar{x}]$ ، هي تقريب خطي مقطع للحل بطريقة أويلر التقريبية . نهتم بجودة التقريب والتي تعتمد على حجم خطوات الحل $H = \max(x_k - x_{k-1})$

لذلك سنعتبر \tilde{y} كتقريب لـ y ، وسنرى ما يحدث للفرق $\|\tilde{y}(\bar{x}) - y(\bar{x})\|$ لما H يقترب من الصفر. مع العلم أنه إذا كان $\|\tilde{y}(\bar{x}) - y(\bar{x})\| \rightarrow 0$ فإن \tilde{y} يتقارب بانتظام نحو y .

خطأ الاقتران المحلي

في خطوة واحدة من طريقة أويلر تكون النتيجة المحسوبة $y_0 + hf(x_0, y_0)$ ، مختلفة عن الإجابة الدقيقة بمقدرا :

$$y(x_0 + h) - y(x_0) - hf(x_0, y(x_0)) = y(x_0 + h) - y(x_0) - hy'(x_0) \quad (3.2)$$

وهو الفرق بين الحل العددي بعد خطوة واحدة والحل التحليلي ، في حين إذا كانت المشتقات الثالثة موجودة ومحدودة فالخطأ يكتب بالشكل التالي :

$$\frac{1}{2}y''(x_0) + o(h^3) \quad (4.2)$$

هذا الشكل مفيد جدا في تفسير النتائج العددية ، لأنه إذا كان h صغيرا بدرجة كافية فسيظهر الخطأ المحلي وكأنه شعاعا ثابتا مضروبا في h^2 . هذا يجعل طريقة أويلر أقل دقة من التقنيات ذات الرتب الأعلى مثل طريقة رونج - كوتا والطرق الخطية . كذلك خطأ الإقتطاع المحلي يساعدنا أيضا في تحديد كيفية التحكم في حجم الخطوة .

3. خطأ الاقتطاع الكلي

عند تطبيق طريقة أويلر لعدة خطوات ، تتراكم الأخطاء وتتداخل بطريقة معقدة . ليكن h^2m نظيم خطأ الاقتطاع المحلي عند أي خطوة ذات الطول h ولنبحث عن الخطأ الكلي .

لذلك نفترض أن خاصية ليبتيشيز محققة حيث L يمثل ثابت ليبتيشيز ، لنذكر أن $\tilde{y}(x)$ هي الحل المحسوب على المجال $[x_0, \bar{x}]$. يتم حساب هذا الحل عند القيم x_k ، إذا من أجل $x \in (x_{k-1}, x_k)$ فإن :

$$\tilde{y}(x) = y_{k-1} + (x - x_{k-1})f(x_{k-1}, y_{k-1}) \quad (5.2)$$

لتكن $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ خطأين لـ $\tilde{y}(x)$ و $f(x, \tilde{y}(x))$ أو $y'(x)$ على الترتيب :

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= y(x) - \tilde{y}(x) \\ \beta(x) &= f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)) \end{aligned}$$

إذن حسب خاصية ليبتيشيز نتحصل على أن :

$$\|\beta(x)\| \leq L\|\alpha(x)\| \quad (6.2)$$

نعرف $E(x)$ بحيث الحل الحقيقي يحقق ما يلي :

$$y(x) = y(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) + (x - x_{k-1})^2E(x) \quad ; \quad x \in (x_{k-1}, x_k) \quad (7.2)$$

كما نفترض أن :

$$\|E(x)\| \leq m$$

ب طرح (5.2) من (7.2) ، وباستخدام (6.2) و (7.2) نتحصل على :

$$\alpha(x) = \alpha(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})\beta(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})^2E(x)$$

كذلك :

$$\|\alpha(x)\| \leq \|\alpha(x_{k-1})\| + (x - x_{k-1})\|\beta(x_{k-1})\| + (x - x_{k-1})^2m$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\alpha(x_{k-1})\| + (x - x_{k-1})L\|\alpha(x_{k-1})\| + (x - x_{k-1})^2m \\ &\leq (1 + (x - x_{k-1})L)\|\alpha(x_{k-1})\| + (x - x_{k-1})^2m \\ &\leq (1 + (x - x_{k-1})L)\|\alpha(x_{k-1})\| + (x - x_{k-1})Hm \end{aligned}$$

حيث إستخدمنا (6.2) وإفترضنا أنه لا يوجد خطوة لها طول أكبر من H .
تميز حالتين :

الحالة 1:

$$\|\alpha(x)\| \leq \|\alpha(x_0)\| + Hm(x - x_0) \quad L = 0$$

الحالة 2:

$$\left(\|\alpha(x)\| + \frac{Hm}{L}\right) \leq (1 + (x - x_{k-1})L)\left(\|\alpha(x_{k-1})\| + \frac{Hm}{L}\right) \quad L > 0$$

من خلال هذه النتائج نستطيع صياغة النظرية التالية :

نظرية 1. نفرض أن الدالة f تحقق شرط ليبشيتز بالثابت L , اذن الخطأ الكلي يكون محدود كما يلي :

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \begin{cases} |y(x_0) - \tilde{y}(x_0)| + Hm(x - x_0) & L = 0 \\ e^{((x-x_0)L)\|y(x_0)-\tilde{y}(x_0)\|} + (e^{((x-x_0)L)-1})\frac{Hm}{L} & L > 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

البرهان

مذكور سابقا

4. تقارب طريقة أويلر

نعتبر سلسلة من التقريبات للحل بطريقة أويلر $y(\bar{x})$ ، بدءا من القيمة $y(x_0)$ ، نرسم للتقريب ذي الخطوة n بالرمز \tilde{y}_n .

الإفتراض الوحيد الذي سنضعه حول \tilde{y}_n لكل قيمة محدودة من n هو أن الخطأ الأولي $y(x_0) - \tilde{y}_n(x_0)$ يكون محدودا بالمعيار K_n ، وأن أكبر خطوة تكون محدودة بـ H_n . بحيث يكون $H_n \rightarrow 0$ و $n \rightarrow \infty$ ، دائما نفترض أن f تحقق شرط ليبشيتز و نرسم بـ D_n الى القيمة $\|y(\bar{x}) - \tilde{y}_n(\bar{x})\|$.

نظرية 2. تحت الشروط المذكورة أعلاه لدينا $D_n \rightarrow 0$ لما $n \rightarrow \infty$

مثال 2.1. تحت شروط النظرية السابقة نجد .

$$n \rightarrow \infty \text{ لما } \sup_{x \in [x_0, \bar{x}]} \|y(x) - \tilde{y}_n(x)\| \rightarrow 0$$

رتبة التقارب الطرق العددية ، ليس فقط أن الطريقة العددية قد تكون متقاربة ولكن أيضا مدى سرعة تقاربها ، اذا كانت هذه الطريقة تتقارب برتبة 1 ، فهذا معناه أن الخطأ الإجمالي يتناسب مع حجم الخطوة h ، يشرح ذلك من خلال المثال الموالي :

$$y'(x) = 2x \quad , \quad y(0) = 0$$

الحل التحليلي هو

$$y(x) = x^2$$

لكن باستخدام طريقة أويلر بخطوة $h = \frac{1}{n}$ ، نجد أن الخطأ يكون من الرتبة h .

$$h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k}{n} = \frac{n-1}{n}$$

مثال 2.2. على الرغم من حقيقة أن الرتبة هي 1 فقط ، يمكن تحقيق دقة أعلى في بعض الحالات الخاصة .
لنعتبر المسألة ذات الشروط الابتدائية التالية :

$$y'(x) = -y(x)\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} \quad , \quad y(0) = 1 \quad (9.2)$$

حلها هو:

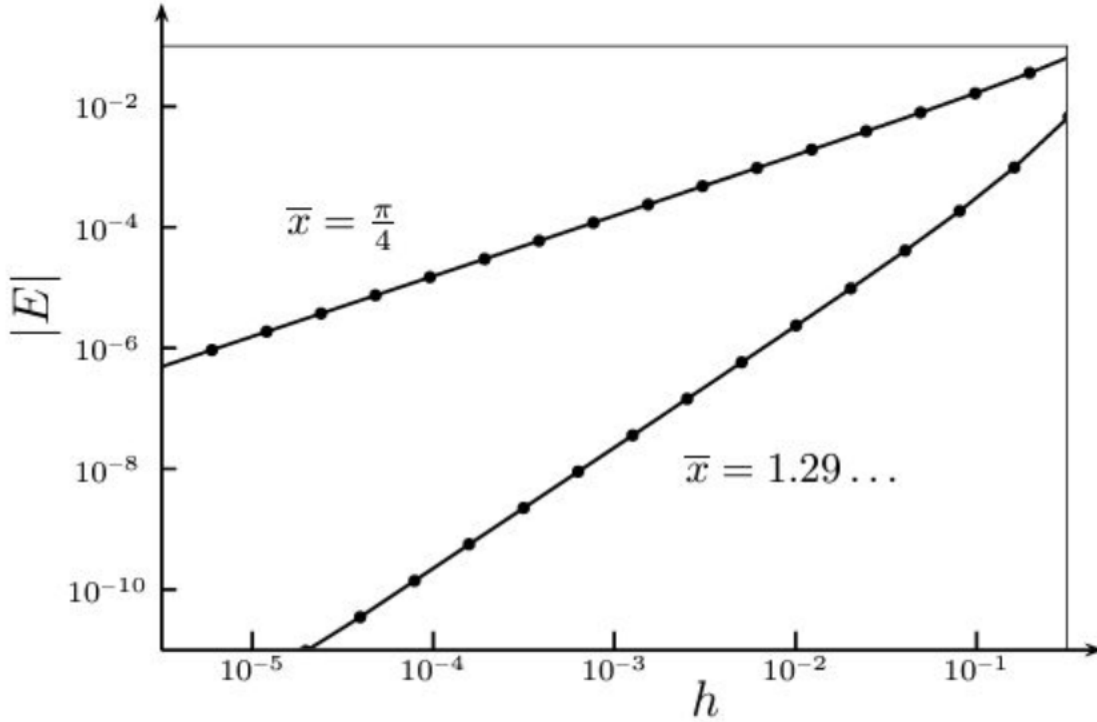
$$y(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

نلاحظ أنه بسبب إلغاء دقيق الحدود في عبارة الخطأ فإن رتبة الخطأ تصبح 2 بدلا من 1 إذا أخذنا القيمة الحدية $\bar{x} \approx 1.29...$ التي هي جذر المعادلة $e^x \cos(x) = 1$.

بعد خطوات معينة ، يتقلص الخطأ بمعدل يتناسب مع 2^{-2} ، وهذا يتوافق مع سلوك من الدرجة الثانية وليس من الدرجة الأولى ، كما هو موضح في الشكل (1.2) يتم تحليل كيفية تراكم الخطأ خلال عدة خطوات ، باستخدام تقدير الخطأ التراكمي من خلال معادلة تحتوي على ضرب عدة حدود ذات الشكل $1 - h \tan(x_k)$ حيث يستخدم تقريب الدالة جيب تمام لتبسيط الحسابات . حيث يتم حساب الخطأ بضرب الخطأ في k ، وتقديره باستخدام التكامل .

النسبة	خطأ	n
4.4125	$1130400.0252 \cdot 10^{-10}$	20
4.1893	$256178.9889 \cdot 10^{-10}$	40
4.0904	$61150.2626 \cdot 10^{-10}$	80
4.0442	$14949.6176 \cdot 10^{-10}$	160
4.0218	$3696.5967 \cdot 10^{-10}$	320
4.0108	$919.1362 \cdot 10^{-10}$	640
4.0054	$229.1629 \cdot 10^{-10}$	1280
4.0026	$57.2134 \cdot 10^{-10}$	2560
4.0003	$14.2941 \cdot 10^{-10}$	5120
	$3.5733 \cdot 10^{-10}$	10240

مثال على زيادة رتبة التقارب للمثال (9.2) .



شكل 1.2: الخطأ مقابل حجم خطوة الزمن عند نقطتي إخراج مختلفتين

مثال 2.3. لتكن :

$$y'(x) = \frac{-x}{1-x^2} ; \quad y(0) = 1$$

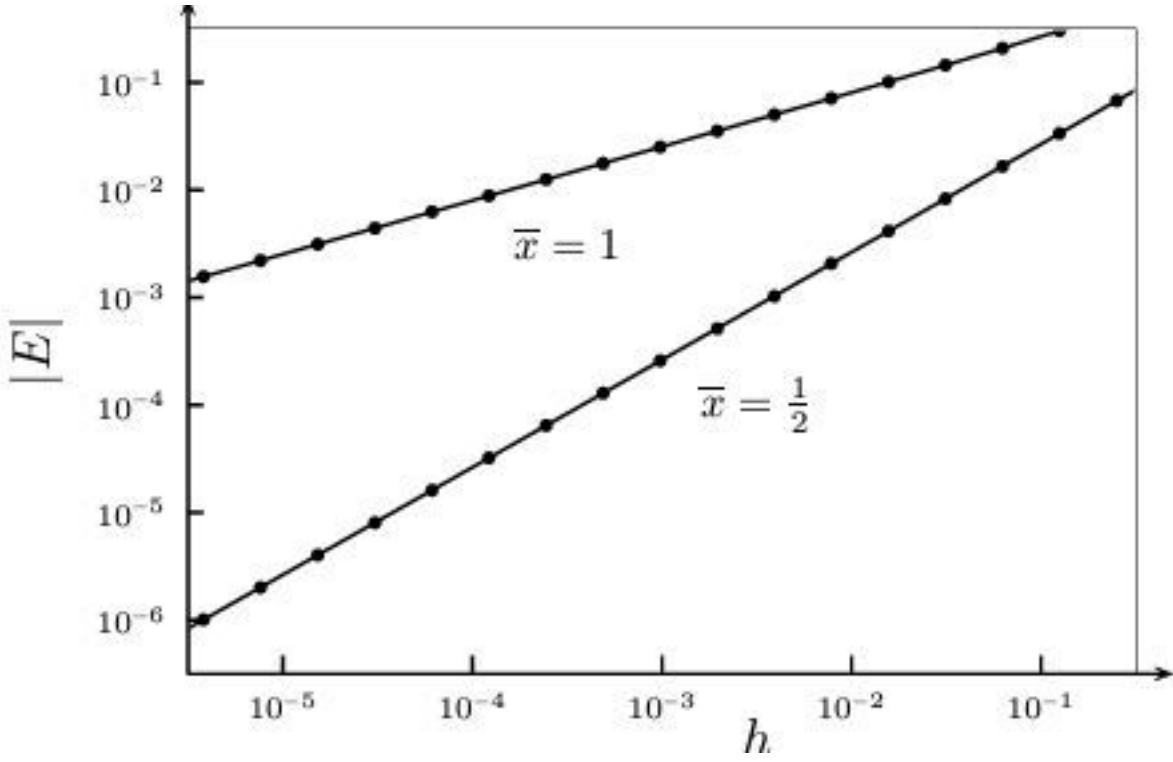
الحل التحليلي هو

$$y(x) = \sqrt{1-x^2}$$

نلاحظ عند $\bar{x} = 1$ تنخفض رتبة التقارب من 1 إلى $\frac{1}{2}$ في حين تشير النتائج إلى أن الخطأ يتناقص عند تكرار عدد الخطوات بمقدار 2^{-2} .

النسبة	الخطأ	n
1.4532	0.30012018700	8
1.4376	0.2072697687	16
1.4279	0.14417382448	32
1.4220	0.1009724646	64
1.4186	0.0710078789	128
1.4166	0.0500556444	256
1.4155	0.353341890	512
1.4149	0.0249615684	1024
1.4146	0.0176414532	2048
1.4144	0.0124709320	4096
1.4143	0.0088169646	8192
1.4143	0.0062340372	16384
	0.0044079422	32768

مثال على إنخفاض الرتبة للمسألة 3-2



شكل 2.2: الخطأ مقابل خطوة الزمن عند نقطتي إخراج مختلفتين

صيغة الخطأ المقارب

الخطأ المقارب في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية باستخدام طريقة أويلر ، يشير الى أن الأخطاء العددية تتراكم مع كل خطوة ، مما يؤدي الى الفرق بين القيم المحسوبة والحل الحقيقي ، يتم تحليل الخطأ باستخدام منهج تقاربي ، نحن ندرس فقط الحالة الحدية عندما جميع الخطوات تؤول الى الصفر ، في النهاية يظهر أن الخطأ المحلي يتناسب مع $\frac{1}{2}y''(x)h^2$ في حين يتراكم الخطأ الإجمالي بمعدل $y''(x)h$ مع زيادة x . نفترض أنه عندما تكون الخطوة تبدأ عند x ، يكون حجم الخطوة مساويا لـ $H_s(x)$ ، حيث $0 < s(x) \leq 1$ طوال عملية التكامل نستخدم H كعامل صغير.

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (10.2)$$

حيث يتم تعريف الحل التقريبي على الشكل $y(x) + Hv(x)$ حيث H صغير جدا ، لأن H صغيرة نقرب $f(x, y(x) + Hv(x))$ بـ $f(x, y(x)) + H \frac{df}{dy} v(x)$ وبذلك نحصل على :

$$y(x) + Hv(x) = y(x_0) + H v_0 + \int_{x_0}^x (f(x, y(x)) + H \frac{df}{dy} v(x) + \frac{1}{2} H_s(x) y''(x)) dx \quad (11.2)$$

ب طرح (11.2) من (12.2) وقسمة الفرق على H نجد:

$$v(x) = v_0 + \int_{x_0}^x \left(\frac{\delta f}{\delta y} v(x) + \frac{1}{2} S(x) y''(x) \right) dx$$

اذن v يحقق مسألة القيمة الابتدائية

$$v'(x) = \frac{\delta f}{\delta y} v(x) + \frac{1}{2} S(x) y''(x) \quad ; \quad v(x_0) = v_0 \quad (12.2)$$

نستخدم هذه النتيجة لفهم تأثير الأخطاء المحلية على الخطأ الكلي أثناء حل المعادلات التفاضلية ، يتم ذلك بكتابة $\phi(\xi; \bar{x})$ للحل عند \bar{x} للمعادلة التفاضلية .

$$w'(x) = \frac{df}{dy}w(x) \quad ; \quad w(\xi) = I$$

بأخذ w قيما في فضاء المصفوفات ذات الأبعاد $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ، في الحالة الخاصة عندما يكون $\frac{df}{dy}$ مصفوفة ثابتة M يكون الحل $\phi(\varepsilon, \bar{x}) = e^{((\bar{x}-\varepsilon)M)}$ يمكننا الان كتابة الحل عند $x = \bar{x}$ للمعادلة (13.2) بالشكل :

$$v(\bar{x}) = \phi(x_0, \bar{x})v_0 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \phi(x, \bar{x})S(x)y''(x)dx$$

إختيار S يجب أن يكون دقيق للحفاظ على ثبات قيمة ثابتة $\|\phi(x, \bar{x})S(x)y''(x)\|$ ، مما يساعد في تقليل مقدار الخطأ الكلي عند تنفيذ عدد معين من الخطوات .

7. خصائص الإستقرار

يعد تحليل الخطأ في الطرق العددية ، خاصة في المسائل الصعبة ، أمرا مهما لاستقرار الحلول ، ولذلك يتم التركيز على التحليل الفرعي ، مع التركيز على دراسة المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة مثل الجملة التفاضلية

$$y'(x) = My(x) \quad (13.2)$$

حيث يمكن إستخدام طريقة أويلر بخطوة ثابتة h كما يلي :

$$y_n = (I + hM)y_{n-1}$$

مما يؤدي الى الحل العددي

$$y_n = (I + hM)^n y_0 \quad (14.2)$$

الحل التحليلي هو

$$y(x_n) = e^{(nhM)}y(x_0) \quad (15.2)$$

يتم تحليل المعادلة التفاضلية بإستخدام تغير في الأساس بحيث يكون $y(x) = S\hat{y}(x)$ و $y_n = S\hat{y}_n$ حيث S مصفوفة ثابتة . يتم إعادة كتابة المعادلة التفاضلية بإستخدام مصفوفة تحويل S لتبسيطها ، تصبح على الشكل .

$$\hat{y}'(x) = \hat{M}\hat{y}(x)$$

$$\hat{M} = S^{-1}MS \quad \text{حيث}$$

الحل التحليلي يكتب على الشكل:

$$\hat{y}(x_n) = e^{(nh\hat{M})}\hat{y}(x_0)$$

والحل التقريبي يتم تحويله الى:

$$\hat{y}_n = (I + h\hat{M})^n \hat{y}_0$$

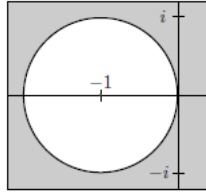
باستخدام الصيغة القانونية لجوردان، يجعل النظام أكثر إنفصالا حيث تصبح بعض المعادلات على الشكل $y'(x) = qy(x)$ لكل قيمة ذاتية مميزة q للمصفوفة M .

في حين مجموعة النقاط في المستوى المركب التي تجعل السلوك مستقرا تعرف بمنطقة الإستقرار ، يكون محدود أي أن الإستقرار يتحقق عندما تكون $|1 + z| \leq 1$ مما يشكل قرصا في المستوى المركب مركزه -1 ونصف قطره 1 .

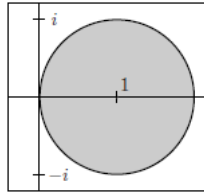
يتم توضيح هذه المنطقة في الشكل (3.2) بمقابل إيجاد منطقة الإستقرار لطريقة أويلر الضمنية باستخدام الصيغة $y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)$ يصبح $y_n = y_{n-1} + zy_n$ ومن ثم فإن $y_n = (1 + z)^{-1}y_{n-1}$ المتتالية المحدودة ، وهو أن يكون $|1 + z| \geq 1$ ، مما يعني أن القيم غير المحدودة تقع خارج القرص الذي مركزه -1 ونصف قطره 1 .

الإستقرار العددي مهم في الطرق العددية ، وتعتبر الطرق ذات الإستقرار في النصف الأيسر من المستوي المركب "مستقرة A" مثل طريقة أويلر الضمنية مما يجعلها ضرورية للمسائل الصعبة .
بالنسبة لهاتين الطريقتين المكونتين من خطوة واحدة ، تعرف النسبة $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ باسم "دالة الإستقرار"
نرمز لها بالرمز

$$R(z) = \begin{cases} 1 + z \\ 1 \\ 1 + z \end{cases}$$



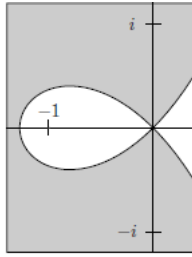
شكل 3.2: منطقة الإستقرار لطريقة أويلر



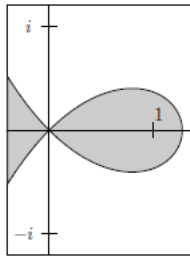
شكل 4.2: منطقة الإستقرار لطريقة أويلر الضمنية

الإستقرار من النوع A يتطلب أن يكون دالة الإستقرار أقطاب خارج النصف الأيسر من المستوي العقدي ، وأن يكون مقدارها محدود بـ 1 على المحور التخيلي .

إن ضرب $R(z)$ في $e^{(-z)}$ لا يؤثر على الأقطاب في المستوي المركب ، مما يسمح بتصنيف الإستقرار وفقا لمجموعة معينة، كما تم عرض الرسوم



شكل 5.2: ترتيب النجمة لطريقة أويلر



شكل 6.2: ترتيب النجمة لطريقة أويلر الضمنية

يعتمد تحليل الاستقرار في الطرق العددية ، مثل طريقة أويلر العادية والضمنية ، على دراسة دالة الاستقرار بعد ضرب العامل الأسّي ، هو النمط الذي يظهر بالقرب من الصفر ، لأن لكل من هذه الطرق $R(z)e^{-z} = 1 + Cz^2 + O(z^3)$ يكون مقدارها أكبر أو يساوي أو أقل من 1 عندما يكون $|z|$ صغيراً ، وذلك تقريباً عندما يكون الجزء الحقيقي موجباً أو صفراً أو سالباً على التوالي $Re(R(z)e^{-z}) > 0$ تعرف بإسم "الأصابع" وعندما $Re(R(z)e^{-z}) < 0$ تعرف بإسم "الأصابع المزدوجة" بالنسبة لكل من طريقة أويلر وطريقة أويلر الضمنية يوجد تطابق دقيق بين الأصفار والأصابع المزدوجة المحدودة ، وبين الأقطاب والأصابع المحدودة . بالنسبة لدالة الاستقرار $R(z)$ ، يتم رسم المسارات في المستوى العقدي حيث تكون $w(z) = e^{(-z)}R(z)$ قيمة حقيقية وإيجابية . في حين تضاف الأسهم الى المسارات لتوضيح إتجاه زيادة w .

8. تقدير خطأ الإقتطاع المحلي

إن التحكم في حجم الخطوة بناء على تقدير الخطأ المحلي كان مفيداً في طريقة أويلر . لنفترض أن y_1, y_2, \dots, y_n تمثل سلسلة من التقريبات لحل مسألة قيمة ابتدائية ، المحسوبة بإستخدام طريقة أويلر . يمكننا أن نفرض أن حجم الخطوة h يأخذ قيمة ثابتة ، حيث يتم مناقشة تقدير الخطأ المحلي بالنسبة لفترة واحدة ، لنعتبر التقريب القادم للخطوة وكأنه دقيق تماماً ، نقدم الحل \hat{y} لمسألة القيمة الابتدائية:

$$\hat{y}(x) = f(x, \hat{y}(x)) \quad ; \quad \hat{y}(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

يمكننا بعد ذلك تفسير الفرق $\hat{y}(x_n) - y_n$ كما هو الحال مع الخطأ الذي تم تقديمه في الخطوة n .

يتم تقدير الخطأ المحلي لإقتطاع في طريقة أويلر باستخدام سلسلة تايلور المتقطعة حتى الرتبة $O(h^3)$ حيث يكون الخطأ المحلي تقريباً $\frac{h^2}{2}\hat{y}''(x_{n-1})$ حيث يساعد هذا التقريب في تحسين الدقة والتحكم في حجم الخطوة في الحسابات العددية . بين النتيجة المحسوبة بإستخدام طريقة أويلر وطريقة أويلر ذات ترتيب أعلى ، في حين هناك العديد من الطرق التي يمكن إيجادها بطريقة ذات ترتيب أعلى ، إحدى هذه الطرق تقيم $hf(x_n, y_n)$ ثم إعادة حساب الخطوة كالتالي :

$$y_{n-1} + \frac{1}{2}(hf(x_n, y_n) + hf(x_{n-1}, y_{n-1})) \quad (16.2)$$

كما نهدف الى إستخدام هذا التقريب الأكثر دقة فعليا ، فإن الحساب الثاني للدالة f في كل خطوة سيضعف تقريبا كمية العمل المطلوب لإكمال كل خطوة ، لتقدير الخطأ يجب أخذ قيمة للانتقال بدون تكلفة لتقدير أخطاء القطع المحلية هو الفرق بين النتيجتين :

$$\frac{1}{2}hf(x_n, y_n) - hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

تقارب الخطأ

إن تحليل الخطأ التقريبي في الطرق العددية ، مثل طريقة أويلر ، والتي تفترض الحسابات الدقيقة ، ولكن في الواقع العلمي تلعب الأخطاء الناتجة عن الحسابات دورا كبيرا . كما يرمز لخطأ الكلي في النتيجة عند الخطوة n بالرمز α_n ، والى الخطأ في المشتق بالرمز β_n .

$$\alpha_n = y(x_n) - y_n$$

$$\beta_n = f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)$$

كما تعطى العلاقة بين القيم الدقيقة و التقريبية من خلال المعادلات التالية :

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})r_n$$

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) + L_n$$

حيث يمثل r_n خطأ التقريب بسبب التقريب العددي بينما L_n هو خطأ القطع .
يؤدي ذلك الى معادلة الفرق :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + h\beta_{n-1} + L_n + r_n$$

على الرغم أننا نعرف شيئا عن L_n ، لاسيما أنه يتصرف بشكل تقاربي مثل ثابت مضروب في h^2 ، إلا أن القليل جدا معروف عن r_n . يستخدم نموذج متشائم لخطأ التقريب يفترض أن الأخطاء تتراكم بأسوأ طريقة ممكنة ويربط مقدار الخطأ بمقدار y_n ومعامل التقريب ϵ .

سيكون خطأ الخطأ التقريب مقدار تقريبي أي أن نفترض أن الأخطاء دائما تؤدي الى أسوأ النتائج هو مبالغة . ويقترح بدلا من ذلك إعتبار الأخطاء موزعة عشوائيا ومستقلة عن بعضها البعض ، هناك إفتراضان :

إفتراض المتشائم : يضيف مصطلحا إضافيا للخطأ التراكمي من الشكل Ch^{-1} حيث C ثابت لأن الخطأ المحلي يكون متشابهة في كل خطوة وعدد الخطوات يتناسب عكسيا مع h .

إفتراض العشوائية : يؤدي الى مساهمة للخطأ من الشكل $Ch^{-\frac{1}{2}}$ مما يقلل من التأثير المتوقع للأخطاء الى أنه سواء تم إستخدام نموذج حتمي أو إحصائي ، حيث يفترض أن الأخطاء تتوزع عشوائيا ولا تتراكم مما يجعل إعادة النظر عند تصغير حجم الخطوة يعطي نتائج دقيقة ، خاصة إذا كانت خطأ الاقتران .

إن تأثير أخطاء القطع والتقريب في الحسابات العددية ، موضحا كيفية تراكمها وتأثيرها على الدقة ويشير الى أن إستخدام تقنيات مثل "الجمع المعوض" والمعروفة أيضا بخوارزمية "جيل-مولر" يساعد في تقليل أخطاء التقريب عند جمع أعداد صغيرة عديدة .

كما يستعرض في بعض الدراسات و الأبحاث التي تناولت هذا الموضوع ، مثل أعمال كاهان (1965) وفيتاسيك (1969) مع مراجعات حديثة قدمها هيغام (1993) . المقارنة بين خوارزميتين لحل مشكلة عديدة بإستخدام خطوات مختلفة تبين أن الطريقة العادية تعاني من أخطاء تقريب متزايدة مع الخطوات الصغيرة ، بينما خوارزمية Gill - Moller (الجمع المعوض) تتجنب تراكم هذه الأخطاء . تم حسابات إضافية باستخدام تقريب منتظم الى ثلاثة أرقام عشرية ، مما أكد أن تقييم القيم النهائية يمكن تنفيذه بدقة عالية مع الحد الأدنى من الخطأ ، حيث يتم تقليل أخطاء الطرح والجمع بفضل تقارب القيم المستخدمة في العمليات الحسابية .

z	newy	الحد	$h^*f(y)$	y	x
0.0000	1.01	0.0100	0.0100	1.00	0.00
0.0002	1.02	0.0102	0.0102	1.01	0.01
0.0006	1.03	0.00106	0.0104	1.02	0.02
0.0012	1.04	0.0112	0.0106	1.03	0.03
0.0020	1.05	0.0120	0.0108	1.04	0.04
0.0030	1.06	0.0130	0.0110	1.05	0.05
0.0042	1.07	0.0142	0.0112	1.06	0.06
0.0044-	1.09	0.0156	0.0114	1.07	0.07
0.0028-	1.10	0.0072	0.0116	1.09	0.08
0.0010-	1.11	0.0090	0.0118	1.10	0.09
				1.11	0.10

الجدول يوضح عشر خطوات من طريقة أويلر المحسنة الى ثلاثة أرقام مهمة

الفصل 3

تعميمات طريقة أويلر

مقدمة

كما رأينا في مناقشتنا لطريقة أويلر ، فإنها تعد أبسط الطرق العددية وتتمتع بالعديد من الخصائص المرغوبة ، بهدف تحسن الدقة العددية مع الحفاظ على بساطتها . سيكون الهدف المهم هو الحصول على طرق يكون فيها الخطأ غير المتماثل يتناسب مع قوى عالية من حجم الخطوة h . بالنسبة لهذه الطرق ، ستكون الزيادة في الدقة ، الناتجة عن تقليل حجم الخطوة ، حيث يتم التركيز على تطوير طرق تقلل الخطأ بشكل أسرع عند تقليل حجم الخطوة h مقارنة بطريقة أويلر التقليدية ، بالإضافة الى دراسة خصائص الاستقرار لهذه الطرق . في حين لا تعمل هذه الطريقة جيدا مع المسائل الصعبة بسبب اعتبارات الاستقرار . نرغب في إيجاد طرق أكثر استقرارا للمسائل الصعبة ، مع تحقيق توازن بين الدقة وتقليل التكاليف الحسابية ، على سبيل المثال تحسين آليات بدء الحساب وتغيير حجم الخطوة .

النسبة	y_2	نسبة	y_1	n
3.9688	-0.04016858	3.9676	0.01479021	32
4.0001	-0.01012098	4.0417	0.00372781	64
4.0041	-0.00253020	4.0361	0.00092233	128
4.0031	-0.00063190	4.0219	0.00022852	256
4.0018	-0.00015785	4.0119	0.00005682	512
			0.00001416	1024

النسبة	y_4	النسبة	y_3	n
	0.01548159		0.04038636	32
4.1552	-0.00372585	3.9497	0.01022525	64
4.0659	-0.00091636	4.0132	0.00254793	128
4.0294	-0.00022742	4.0163	0.00063440	256
4.0138	-0.00005666	4.0105	0.00015818	512
4.0067	-0.00001414	4.0059	0.00003949	1024

الجدول 1 الأخطاء في الحل العددي لمشكلة المدار (للمثال 1.3) مع انحراف صفري خلال نصف فترة باستخدام (3.1) (3.2)

العمليات الحسابية في خطوة واحدة

1. يتم حساب f أكثر من مرة ، بدلا من حسابها مرة واحدة في كل خطوة كما في طريقة أويلر ، حيث يتم إستخدامها بتقنيات مثل قاعدة شبه المنحرف . المشكلة تكون في أن المشتقة تكون عادة غير معرف في نهايتها ، لكن معرفة في بدايتها . لتخلص من هذه المشكلة يتم إستخدام أحد

حسابي f لتقدير الحل في نهاية ، مما يؤدي الى تحسين الدقة وتقدير المشتقة عند نهاية الخطوة .

في حين يتم حساب قيمتين ل f ، ولكن هناك بيانات متاحة الآن لتطبيق صيغة قاعدة شبه المنحرف ، نكتب الخوارزمية لحساب y_n على الشكل :

$$y_n^* = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (1.3)$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n^*) + f(x_{n-1}, y_{n-1})) \quad (2.3)$$

مثال 3.1 . (طريقة Runge - Kutta)

يتم حل مشكلة كيبلر (Kepler) ذات الإنحراف المداري الصفري باستخدام طريقة Runge - Kutta من المرتبة الثانية . يتم التكامل العددي خلال نصف دورة باستخدام عدد الخطوات n بحيث تأخذ القيم $n = 2^i$; $i = 5, 6, 7, \dots, 10$. وبتالي يكون حجم الخطوة على النحو التالي: $h = \pi 2^{-i}$

مثال 3.2 . لتكن معادلة التفاضلية التالية :

$$y'(x) = \frac{x - y}{2} \quad ; \quad y(0) = 1$$

*أوجد حل باستخدام طريقة أويلر المحسنة عند الخطوة $h = 0.1$

الحل

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_n)]$$

بوضع $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)]$$

حساب مايلي :

$$f(x_0, y_0) = -0.5$$

نطبق طريقة أويلر العادية نجد :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 1 + 0.1(-0.5)$$

$$y_1 = 0.95$$

ومنه

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)]$$

$$f(x_1, y_1) = \frac{0.1 - 0.95}{2} = -0.375$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}[-0.5 - 0.375]$$

$$y_1 = 0.9562$$

2. إعتداع أكبر على القيم السابقة

بعد الخطوة الأولى من الطريقة العددية ، تصبح التقريبات متاحة للاستخدامها في حساب y_n ، بإستخدام القيم السابقة مثل $y(x_{n-1})$ و $y(x_{n-2})$. بدلا من الاعتماد فقط على y_{n-1} .
في تعميم لطريقة أويلر ، حيث يتم تقدير المشتقة عند نقطة المنتصف $x_{n-\frac{1}{2}} = x_{n-1} + \frac{1}{2}h$ بدلا من x_{n-1} بإستخدام المعلومات السابقة ، يمكن تحسين التقريب بإضافة معدل التغير بين القيم السابقة .
يؤدي هذا الى الطريقة العددية التالية .

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{3}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1}) - \frac{1}{2}f(x_{n-2}, y_{n-2})\right) \quad (3.3)$$

النسبة	الخطأ y_2	نسبة	الخطأ y_1	n
	0.00537347		0.00295976	32
2.3976	0.00224114	7.8987	0.00037472	64
3.6879	0.00067465	8.0168	0.00004674	128
3.8503	0.00018294	8.0217	0.00000583	256
3.9267	0.00004751	8.0136	0.00000073	512
	0.00001210	8.0074	0.00000009	1024

النسبة	الخطأ y_4	نسبة	الخطأ y_3	n
	-0.00154957		-0.00471581	32
7.9797	-0.00019419	2.1899	-0.00215339	64
8.1221	-0.00002391	3.2451	-0.00066358	128
8.1017	0.0000295	3.6551	-0.00018155	256
8.0620	-0.00000037	3.8351	-0.00004734	512
	-0.00000005	3.9194	-0.00001208	1024

الجدول 2 الأخطاء في الحل العددي لمشكلة المدار (3.1) مع انحراف صفري خلال نصف فترة باستخدام (3.3)

نلاحظ أن الجدول (2) يمثل قيم الأخطاء ونسب التغير (*Ratio*) للمتغيرات الأربعة عند قيم مختلفة لـ n يمكن ملاحظة مايلي :
جميع القيم تتناقص مع زيادة n ، مما يعكس تحسين الدقة للحل العددي ، ونسب التغير في y_4 و y_1 تظهر إستقرار أكبر مقارنة بـ y_3 و y_2 .

3. استخدام المشتقات الأعلى

نستطيع إستنتاج صيغ للمشتقات الأعلى لـ y ، بإستخدام الصيغة الخاصة بـ y' المعطاة بواسطة المعادلة التفاضلية ، مما يتيح خيارات حسابية متنوعة. يستخدم هذا لتحسين أداء الطرق متعددة مثل رونج-كوتا والطرق متعددة الخطوات ، خاصة عند تطبيق مبرهنة تايلور فيما يلي :

مثال 3.3. -مسألة القيم الأولية :

$$y' = yx + y^2 \quad , \quad y(0) = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

الحل

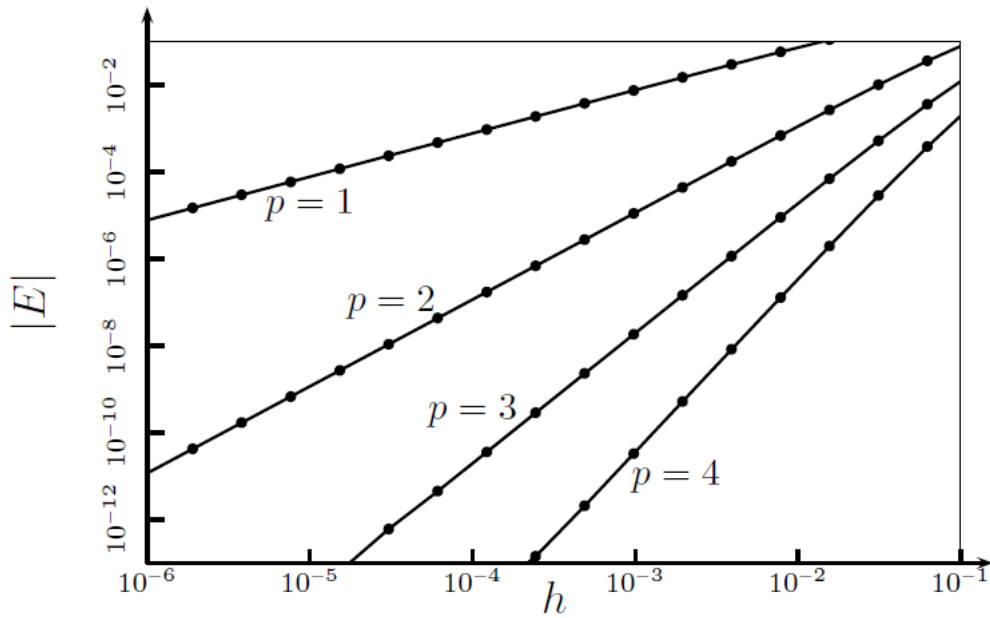
$$y(x) = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)}}{2 - \int_0^x e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} dx}$$

بتفاضل عدة مرات حتى المشتقة الرابعة نجد:

$$y'' = (x + 2y)y' + y \quad (5.3)$$

$$y''' = (x + 2y)y'' + (2 + 2y')y' \quad (6.3)$$

$$y^{(4)} = (x + 2y)y''' + (3 + 6y')y'' \quad (7.3)$$



شكل 1.3: الأخطاء في المسألة (4.1) باستخدام متسلسلة تايلور من الرتب $p = 1, 2, 3, 4$

يستخدم طريقة متسلسلة لحل معادلة عند النقطة $\bar{x} = 1$ باستخدام n خطوة وحجم خطوة $h = \frac{1}{n}$ ، في حالات مختلفة من الرتب $p = 1, 2, 3, 4$ يتم حساب التقريب y_n باستخدام مشتقات y حتى الرتبة المطلوبة على سبيل المثال الرتبة $p = 4$.

4. طرق متعددة المراحل والإشتقاق

تعتبر الطرق متعددة الخطوات ، ومتعددة المراحل ، ومتعددة المشتقات ، من أهم الفئات الأساسية في التحليل العددي ، فقد بذلت العديد من المحاولات .

من أهمها طريقة "Risenbrock" التي تستخدم في مشتقات الدالة f وتساعد في حل المشاكل الصعبة . مما يسمح باستخدام مشتقات الدالة f ، ويجعل من الممكن حساب المشتقة الثانية y'' في مسائل من النوع $y''(x) = f'(y(x))f(y(x))$ مع ذلك لا يمكن حساب المشقة دائماً $f'(y(x))$.

بينما توجد طرق أخرى ، يركز عليها هي الطرق الخطية العامة ، والتي تشمل مزيج من الطرق متعددة المراحل والمشتقات ، يتم تمثيل طريقة أويلر كأبسط نهج في هذا التصنيف ، في حين أن الطرق الخطية العامة تمثل أكثرها تطورا حيث تشمل جميع الطرق متعددة القيم والمراحل والمشتقات.

5. الطرق الضمنية

تلعب الطرق الضمنية دورا مهما في حل المشكلات الصعبة (*stiffproblems*) . مثل طريقة أويلر الضمنية ، طريقة *Runge - Kutta* الضمنية من أمثلتها صيغة الفرق العكسي من الدرجة الثانية

$$y_n = \frac{2}{3}hf(x_n, y_n) + \frac{4}{3}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} \quad (8.3)$$

مثال 3.4. لتكن طريقة شبه منحرف الضمنية :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})) \quad (9.3)$$

تصنف هذه الطرق بأنها تحتاج إلى حل معادلات غير خطية في كل خطوة زمنية ، لان القيمة الجديدة تعتمد على نفسها ، يتم ذلك باستخدام تكرار نقطة ثابتة تعد بعض هذه الطرق جزءا من عائلات مشهورة مثل *Runge - Kutta* ، *Adam - Moulton*.

يتم إيجاد حل معادلة الضمنية (9.3) عادة يتم ذلك عن طرق تقسيم تقريب ابتدائي $\eta^{[0]}$ ، سلسلة من التقريبات $\eta^{[k]}$ حيث $k = 1, 2, 3, \dots$ يتم تكوينها عن طريق إدخال $\eta^{[k]}$ بدلا من y_n في الطرف الأيسر من المعادلة (9.3) و $\eta^{[k-1]}$ بدلا من y_n في الطرف الأيمن .

$$\eta^{[k]} = y_{n-1} + \frac{h}{2}(f(x_n, \eta^{[k-1]}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})) \quad (10.3)$$

يتم حساب قيمة عدديا كحد لهذه السلسلة في المشكلات الصعبة ، إذا لم يكن صغير جدا ، فقد لا تتقارب السلسلة ، مما يتطلب استخدام طرق أكثر تعقيدا مثل نيوتن "*Newton*" - رافسون "*Raphson*" لحل المعادلات الضمنية .

6. تقديرات الخطأ المحلي

تعد تقديرات الخطأ المحلي ضرورية في الطرق العددية لتقييم دقة كل خطوة أثناء الحسابات ، السبب الرئيسي لذلك هو أن الجهد المبذول في كل خطوة ، مما يوازن بين تكلفة الحساب وكفاءته ، إذا كان تكلفة كل خطوة تقريبا ثابتة ، فهذا يعني أن الخطأ المرتكب في الخطوات يجب أن يكون تقريبا متساويا ، بحيث يهدف هذا التقييم الى ضمان أن تكون الأخطاء المتراكمة عبر الخطوات متقاربة في الحجم . كما أن تقييم الدقة لطريقة معينة ، يساعد في تحديد الحاجة الى تغيير الطريقة العددية المستخدمة الى طريقة أخرى أكثر أو أقل دقة ، عادة لا تتوفر القيم الدقيقة للحلول ، لذا يتم استخدام تقريبن متتالين لتقدير الخطأ المحلي .

تعتبر طريقة أويلر من بين أهم الطرق العددية، لحل المعادلات التفاضلية، رغم بساطتها ومحدوديتها من حيث الدقة إلا أنها تستخدم على مجال واسع في التطبيقات العلمية، يرجع إليها من أجل حل المشاكل التي تتصادف في التطبيقات العلمية، وذلك لسهولتها ومرونة خصائصها، إلا أن لطريقة أويلر بعض النقص مثل محدودية الدقة والاستقرار، خاصة عند استخدام خطوات زمنية كبيرة أو في حالة التعامل مع المعادلات الصعبة، بناء على ذلك، انتقلنا إلى دراسة بعض التعميمات والتحسينات التي طرأت على هذه الطريقة مثل طريقة أويلر المحسنة والضمنية والتي تهدف إلى تحسين الدقة وتقليل الخطأ التراكمي، على الرغم من ذلك فإنها تشكل مدخلاً مهماً لفهم أساسيات الطرق العددية في حل المعادلات التفاضلية. تؤكد هذه الدراسة أن الفهم الجيد لطريقة أويلر وتطورها يعد أساساً مهماً في ميدان التحليل العددي.

المراجع العلمية

- [1] Burden , Richard L.and Faires , J.Douglas Numerical Analysis /ninth edition Cengage Learnind 2010
- [2] J.C.Bitche.Numerical Methods for Ordinary Dfferential Equation , John Wiley - Sons Inc (2008) dfferential equations. BIT, ,18 .41–22
- [3] Khan, Amina. "Meet the 'Hidden Figures' mathematician who helped send Americans into space". Los Angeles Times. بتاريخ عليه اطلع .2017-02-12. في الأصل من مؤرشف .2017-12-07
- [4] Richard . Burden /J.Douglas Faires Numerical Analysis /ninth edition

```
a=0;
b=1;
n=10;
h=(b-a)/n;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=0;
f=@(x)(1+x.^2);
for i=1:n
    y(i+1)= y(i)+h*f(y(i))
end
x=[a:h:b];
yexact=tan(x);
plot(x,yexact)
hold on
plot(x,y,'r*')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('exacte','approche')
title('comparison entre la solution exacte et approche utilisant Euler')
```

```

clear all
clc
a=0;
b=1;
n=10;
h=(b-a)/n;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=1;
f=@(x,y) (y+x)/(y-x);
x=[a:h:b]
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(x(i),y(i));
end
yexact=x+sqrt(1+2*x.^2)
plot(x,yexact)
hold on
plot(x,y,'r')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('exacte','approche')
title('comparison enter la solution exacte et approche utilisan')

```

```

a=0;
b=100;
h=0.2
n=(b-a)/h;
e=0.0167;
y1=zeros(1,n+1);
y1(1)=1-e;
y2=zeros(1,n+1);
y3=zeros(1,n+1);
y4=zeros(1,n+1);
y4(1)=sqrt((1-e)/(1+e));
r=zeros(1,n+1);
r(1)=sqrt(y1(1).^2+y2(1).^2);
for i=1:n
y1(i+1)=y1(i)+h*y3(i);
y2(i+1)=y2(i)+h*y4(i);
y3(i+1)=y3(i)+h*(-y1(i)/(y1(i).^2+y2(i).^2).^(3/2));
y4(i+1)=y4(i)+h*(-y2(i)/(y1(i).^2+y2(i).^2).^(3/2));
r(i+1)=sqrt(y1(i+1).^2+y2(i+1).^2);
end
r
omega=[a:h:b];
x=zeros(1,n+1);
y=zeros(1,n+1);
rex=zeros(1,n+1);
p=1-e^2;
for i=1:n+1
rex(i)=p/(1+e*cos(omega(i)));
x(i)=rex(i)*cos(omega(i));
y(i)=rex(i)*sin(omega(i));
end

rex
%plot(omega,rex)
%plot(y1,y2,'g*')
plot(x,y,'g')
hold on
%plot(omega,r,'r+')
plot(y1,y2)
%plot(x,y)
xlabel('y1')
ylabel('y2')
legend('exacte','approche')
title('comparison enter la solution exacte et approche utilisan')

```

```
a=0;
b=1;
n=10;
h=0.1;
x0=0;
y0=1;
y=zeros(1,n+1);
x=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;
x(1)=x0;
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)/(1-h);

end
x=[a:h:b];
yexact=exp(x);
plot(x,yexact)
hold on
plot(x,y,'r*')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('exacte','approche')
title('comparison entre la solution exacte et approche utilisant Euler')
```