وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Régularisation d'une classe de problèmes mal-posés de type fractionnaire

Option : AFA

Par :

DJAMAI Aziza

Encadré par : Khelili Besma **M.C.B.** U.SKIKDA

Devant le jury :

Présidente : SETTARA Loubna M.C.B U. SKIKDA
Examinateur : BELYACINE Zahia M.C.B U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Remerciments

J'aimerais en premier lieu remercier mon Dieu Allah qui m'a donné la volonté et la force et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce rapport dans les conditions les plus favorables, en particulier j'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur **Khelili Besma** de m'avoir proposé ce sujet passionnant. Je le remercie vivement pour les heures d'encadrement qu'il m'a accordées et les remarques constructives qui m'ont été précieuses qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens également à remercier les membres de jury, d'avoir accepté de relire mon manuscrit et d'y consacrer une partie de leur temps.

Je remercie également mes enseignants de mastère qui n'ont cessé de me transmettre leurs acquis et leurs expériences.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail:

A

tout les membere de ma famille (mes chers au monde parents, à mes chéres soeurs: Selma, Sihem, Nesma, Newel, Loubna, Souhila, Bouchra et Cherifa).

A

mes amies et à tous ceux qui m'ont encouragé.

A

ceux et celles qui ont été à mes côté dans les moment difficiles

♥ Djamai Aziza

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, on étudie deux classes de problèmes inverses en EDP. Ces problèmes sont qualifiés mal posés au sens de Hadamard. Pour neutraliser le caractère d'instabilité, des méthodes de régularisation sont proposées afin qu'on puisse tirer des informations significatives de ces modèles. La première classe, est consacrée à l'étude d'un problème inverse pour l'équation parabolique. En se basant sur la méthode de régularisation de Tikhonov modifiée, on construit une approximation de la solution et on établit certaines estimations d'erreurs. Dans la deuxième classe nous étudions un problème parabolique fractionnaire en temps dans un domaine borné. L'approche de régularisation proposée est basée sur la méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée, on régularise le problème et on établit certains résultats de convergence.

Mots clés :

Problèmes inverses, Problèmes mal-posés, régularisation, méthode de régularisation de Tikhonov ,méthode des conditions auxiliaires.

ABSTRACT

In this work, we study two classes of inverse problems in EDP. These problems are ill-posed in the sense of Hadamard. To neutralize the character of instability, regularization methods are proposed so that significant information can be drawn from these models. The first class is devoted to the study of an inverse time problem for parabolic equations. By using the modified Tikhonov regularization method, an approximation of the solution is constructed and some error estimates are established. In the second class, we study a time-fractional parabolic problem in a bounded domain. The regularization approach proposed for the fractional diffusion problem is based on the modified quasi-boundary value method. The problem is regularized and some convergence results are established.

Keywords :

Inverse problems, ill-posed problems, regularization, Tikhonov regularization method, quasi-boundary value method.

ملخص

نهدف من خلال هذه المذكرة الى دراسة بعض المسائل العكسية والمعتلة بمفهوم هادمار لجملة من المعادلات التفاضلية الجزئية. لتحديد طابع عدم الاستقرار، يتم اقتراح طرق التسوية بحيث يمكن استخلاص معلومات مهمة من هذه النمادج. في الجزء الأول سندرس مسألة عكسية لمعادلات القطع المكافئ. بناء على طريقة تيخونوف المعدلة، يتم انشاء تقريب للحل ويتم انشاء بعض تقديرات الخطأ. في الصنف الثاني ندرس مسألة عكسية لمعادلات القطع المكافئ الكسرية في مجال محدود. يعتمد نهج التسوية المقترح على طريقة القيم الحدية المضافة، ويتم تسوية المسألة و استخلاص بعض نتائج التقارب

كلمات مفتاحية:

اشكاليات عكسية، اشكالية سيئة الطرح، التسوية، طريقة تيخونوف المعدلة، طريقة القيم الحدية المضافة.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Problèmatique

Problèmes mal-posés

En 1923, le mathématicien français J. Hadamard a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [12]. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution sont considérées. Dans ce même livre Hadamard laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. Petrovsky) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit mal posé.

La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Dans ce cas, il faut ajouter des informations supplémentaires pour minimiser le nombre des solutions.

Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème mal-posé, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données réelles.

La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques (voir **[9]** **[25]** **[29]** **[14]**).

Les problèmes mal-posés apparaissent dans de nombreuses branches de la science et d'ingénieurs comme des problèmes géophysiques, le problème du corps supersonique, le contrôle non destructif, la corrosion, l'imagerie médicale, traitement d'images, et d'autres domaines pratiques. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et se manifeste dans une classe de problèmes très larges, dite "problèmes inverses", et motive de nombreuses recherches en mathématiques [20] [5].

PROBLÉMES INVERSES

D'après J.B.Keller **[21]**, deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre ; si la formulation de l'un met l'autre en cause. On les trouve dans plusieurs situations ; par exemple en reconstituant l'état initial d'un phénomène, à partir de son état final, ou d'une évolution partielle, et également en cherchant la source d'un phénomène donné. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de l'autre appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

L'étude d'un problème inverse exige une bonne maitrise du problème direct et l'on a recours à des notions tant mathématiques que physiques. Généralement, la résolution s'appuie sur des éléments spécifiques au cas à considérer. Toutefois, il existe quelques techniques qui possèdent un champ d'application étendu. Lorsqu'il est question d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir d'observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct) ; cette inversion généralement instable, nécessite un traitement particulier. Il s'agit de techniques, dites de régularisation, dont le but est de rendre le problème bien posé et numériquement réalisable et ce en le perturbant légèrement pour éliminer les agents responsables de l'instabilité [30].

RÉGULARISATION

En mathématique, la régularisation est une procédure qui consiste à modifier un problème non régulier par une autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés rendant son étude théorique et numérique plus faciles.[31]

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains probléme mal posés de Hadamard. Parmiciter :

- La méthode itérative alternative : Initialement proposée par Kozlov et al. [22] : Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes bien-posé dont la solution converge, pour des données appartenant à certaines classes admissibles, vers la solution du problème original.

- La méthode de quasi-réversibilité : Initialement introduite par Lattés & Lions (1969) [26] consiste à transformer le problème de Cauchy mal-posé d'ordre 2 en un problème bien-posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre (terme de correction). Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre quelque problème inverse elliptique, notamment Kilbanov & Santosa [23]et plus récemment Bourgeois [4].

- **La méthode de régularisation de Tikhonov** [37] : est la méthode de régularisation la plus ancienne. Elle consiste à transforme le problème original mal-posé en un problème de minimisation.

- **La méthode de régularisation par les condition aux limites auxiliaires**

(Q.B.V.methode) : a été introduite par Abdulkerimov [1]. L'idée dans Cette méthode est de remplacer le problème mal-posé par un problème bien posé, où on perturber la condition finale en la remplacent par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre α. A été utilisée par plusieurs auteurs dont D.N. Hào, V.D. Nguyen and H. Sahli [13], Samariski [35].

Le but de ce travail est d'étudier quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problémes mal-posés.

Le mémoire est composé d'une introduction et quatre chapitres. Dans l'introduction on décrit les motivations et les objectifs de l'étude abordée, on développe la problématique, et on donne une description détaillée du mémoire.

Le premier chapitre : est consacré à la présentation des concepts de base ainsi que le rappel des outils d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'étude proposée comme la théorie spectrale des opérateurs linéaires et la théorie de Riesz-Fredholm.

Dans le deuxième chapitre : On introduit les notions de problème mal posé et de problème inverse, avec une illustration de quelques exemples. Par la suite, on suit une stratégie de régularisation.

Dans le troisième chapitre : on y étudie étude d'un problème inverse pour l'équation parabolique abstraite axisymétrique. Pour régulariser le problème proposé, on utilise la méthode de régularisation de Tikhonov modifiée, on construit une solution approchée du problème considéré et on établit certaines estimations d'erreurs.

Quant au chapitre quatre : est consacré à l'étude d'un problème parabolique fractionnaire en temps dans un domaine borné, où l'objectif est de reconstruire la donnée initiale à partir de donnée finale. Pour régulariser le problème, nous proposons la méthode des conditions aux limites auxiliaires, on construit une solution approchée du problème considéré et on établit certaines estimations d'erreurs.

CHAPITRE 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1 Eléments de la théorie spectrale

Définition 1.1.1. *[17] [39] [38] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle :*

1. $\forall\, x \in E \qquad \| x \|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\forall\, x \in E, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \| \alpha\, x \|_E = | \alpha | \,.\, \| x \|_E;$
3. $\forall\, (x, y) \in E^2, \qquad \| x + y \| \leqslant \| x \|_E + \| y \|_E;$

Un tel espace E muni d'une norme $\|.\|$ est dit espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. *[17] [39] [38] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$ telle que pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2$, on a :*

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$
3. $\langle x, x \rangle \geqslant 0;$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Théorème 1.1.1. *[17] [39] [38] Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par*

$$\| x \|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.1.3. *[17] [39] [38]Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

1.1.1 Propriétés des espaces de Hilbert :

Proposition 1.1.1. *[17] [39] [38]Inégalité de Cauchy Sharwtz.*

Pour $(x, y) \in H^2$ on a l'inégalité :

$$| \langle x, y \rangle | \leqslant \| x \|_H \| y \|_H$$

Proposition 1.1.2. *[17] [39] [38](Identité du parallélogramme). La norme induite par un produit scalaire satisfait l'égalité.*

$$pour \ (x, y) \in H^2 \qquad \| x + y \|_H^2 + \| x - y \|_H^2 = 2 \left(\| x \|_H^2 + \| y \|_H^2 \right)$$

Théorème 1.1.2. *[17] [39] [38](de projection)*

Soit F une partie non-vide convexe fermée d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe $x_0 \in F$ unique tel que

$$\| x - x_0 \|_E = \inf \{ \| x - a \|, \quad a \in F \}$$

le point x_0 s'appelle la projection de x sur F.

1.1.2 Base Hilbertienne

Définition 1.1.4. *[17] [39] [38] On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert, toute suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :*

1. $\| e_n \| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\langle e_n, e_m \rangle = 0 \ \ \forall n, \ m \in \mathbb{N}, \ \ n \neq m$

L'espace vectoriel engendré par cette base est dense dans H. Alors, tout élément $u \in H$, s'écrit

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle \, e_{n.}$$

Convergence

Définition 1.1.5. *[17] [39] [38] On considère une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace normé* E*. On dit que*

1. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *fortement converge vers* $x \in X$*. si* $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$.
2. *De Cauchy si* $\| x_n - x_m \| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n, m \longrightarrow +\infty$.

Définition 1.1.6. *[17] [39] [38] Un espace normé* E *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* E *est convergente.*

1.1.3 Opérateur linéaire :

Définition 1.1.7. *[17] [39] [38] Soient* E*,* F *deux espaces vectoriels sur le même corps* $\mathbb{k}$*. On dit que l'application ou l'opérateur* $A : E \mapsto F$ *est linéaire si :*

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}, \quad A(x+y) = Ax + Ay \\ A(\alpha x) &= \alpha Ax. \end{aligned}$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et $A(0) = 0$ *cas particulier :*

si A est bijectif alors, A est isomorphisme

si $E = F$ alors, A est endomorphisme de E

si A est isomorphisme de E dans E alors A est automorphisme

si $F = \mathbb{k}$ alors, A est une forme linéaire sur E.

On a pour tout opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ tel que $D(A)$ est le domaine de définition de l'opérateur A on note :

$$\begin{aligned} G(A) &= \{(x, Ax), x \in D(A)\} \quad \text{le graphe de } A \\ N(A) &= \{x \in D(A), Ax = 0\} \ \text{Noyaux de } A \\ \operatorname{Im}(A) &= \{\forall y \in F, \exists\, x \in D(A), y = Ax\} \ \text{Image de } A. \end{aligned}$$

1.2 Opérateur linéaire borné

Soient H_1, H_2 deux espaces vectoriels normés et $A : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur linéaire, le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.2.1. *[17] [39] [38]Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. A est continu.
2. A est continu en 0.
3. $\exists\ c > 0$ tel que $\parallel Ax \parallel \leqslant c \parallel x \parallel \quad \forall x \in E$.

un opérateur A est linéaire continu d'un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 est une application linéaire continue de H_1 dans H_2 c'est -à-dire qui vérifier :

1. $\forall x \in H_1,\ Ax \in H_2$
2. $\forall (x,y) \in H_1 \times H_1, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 A\left(\ \alpha x + \beta y\right)\ = \alpha\ Ax + \beta\ Ay$
3. $\exists\ c > 0, \forall x \in H_1 \quad \parallel Ax \parallel_{H_2} \leqslant c \parallel x \parallel_{H_1}$

le plus petite nombre c qui vérifier le $3^{éme}$ point ci -dessus s'appelle La norme de l'opérateur A

$$\parallel A \parallel = \sup_{x \in H_1 - \left\{0_{H_1}\right\}} \frac{\parallel Ax \parallel_{H_2}}{\parallel x \parallel_{H_1}}$$

$$\parallel A \parallel = \sup_{\parallel x \parallel = 1} \parallel Ax \parallel_{H_2}$$

$$\parallel A \parallel = \sup_{\parallel x \parallel \leqslant 1} \parallel Ax \parallel_{H_2}$$

$$\parallel A \parallel = \inf \left\{c > 0, \quad \forall x \in H_1 \quad \parallel Ax \parallel_{H_2} \leqslant c \parallel x \parallel_{H_1}\right\}$$

Théorème 1.2.2. *(De Riesz)[17] [39] [38] Soit φ :$H_1 \longrightarrow \Bbbk$ une forme linéaire continue, il existe un unique vecteur $x_0\ \in H_1$ tel que :*

$$\varphi(x) = \langle x_0\ , x \rangle\,, \qquad \forall x \in H_1$$

Théorème 1.2.3. *(Théorème des isomorphismes de Banach)[17] [39] [38].*

Toute application bijectif linéaire continue $A \in \mathcal{L}\left(H_1, H_2\right)$ est inversible.

1.2.1 L'adjoint d'un Opérateur

Théorème 1.2.4. *[17] [39] [38] Soit A un opérateur linéaire continue de H_1 dans H_2,il existe un unique opérateur de H_2 dans H_1 noté A^* tel que*

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*\, y \rangle \,,$$

cette opérateur est appelé l'adjoint de A. Il vérifier de plus $(A^*)^* = A$ et $\| A^* \| = \| A \|$.

1. $\ker(A^*) = (\mathrm{Im}A)^{\perp}$,
2. $(\ker A)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}A^*}$.

Un opérateur dans H_1 est dit auto-adjoint si est seulement si

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_1 \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A\, y \rangle \,, \ c^{'}est\text{-}à\text{-}dire\ A = A^*,$$

-si l'opérateur A est auto-adjoint alors on :

$$\| A \| = \sup_{\|x\|_{H_1} \leqslant 1} |\langle Ax, x \rangle| \,.$$

Opérateur non borné

Un opérateur non borné est une application linéaire $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$, où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de H_1.

Définition 1.2.1. *[17] [39] [38]Un opérateur non borné A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$. i.e ;*

pour toute suite $(u_n) \subset D(A)$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2 alors $u \in D(A)$ et $v = Au$.

L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $D(A)$ muni de la norme du graphe ($\| u \|_G = \| u \|_{H_1} + \| Au \|_{H_2}$) dans H_1.

Théorème 1.2.5. *[17] [39] [38](Théorème du graphe fermé) Si l'operateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1, alors A est borné.*

$(A \ \ \text{fermé et} \ \ D(A) = H_1 \ \ \text{alors} \ \ A \text{ est borné})\,.$

1.3 Le spectre et résolvante d'un opérateur

Définition 1.3.1. *[17] [39] [38] Soit $A \in L(E)$*

1. On appelle spectre de A, l'ensemble

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{k},\ (\lambda I - A) \text{ non inversible}\}$$

tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

Le rayon spectrale de A noté $r(A)$,est défini par :

$$r(A) = \sup \{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

2. Le premier sous-ensemble important du spectre est le spectre ponctuel

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}\ ,\ (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif}\}$$

3. On appelle spectre continue de A l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}\ ,(\lambda I - A) \text{ est injectif et } \mathrm{Im}(\lambda I - A) \text{ est dense dans } E\}$$

4. On appel spectre résiduel de A l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}\ ,(\lambda I - A) \text{ est injectif, } \mathrm{Im}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } E\}$$

et on a $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

5. On appel l'ensemble résolvant de A, l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}, (\lambda I - A) \text{ inversible}\}$$

$\sigma(A) = \mathbb{k} \setminus \rho(A)$

si $\lambda \in \rho(A)$, Alors on note $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L(E)$ la résolvante de A.

1.3.1 Le spectre d'un opérateur non borné

Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$. Un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense.

On appelle ensemble résolvant de A

$$\rho(A) = \{\lambda \in \Bbbk \ \ A_\lambda \ = \lambda I - A \text{ bijective}\}$$

Le spectre de A c'est le complémentaire dans le plan complexe $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

-si $\lambda \in \rho(A)$,l'inverse $R(\lambda, A) = A_\lambda^{-1}$ est définit sur tout l'espace est fermé. Cet opérateur est appelé la résolvante de A.

-$\rho(A)$ est ouvert du plan complexe et le spectre $\sigma(A)$ fermé.

-La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite Identité de la résolvante

$$R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A).$$

1.4 Opérateur Compact

Dans cette section on suppose que E et F deux espaces de Banach.

On dit qu'un opérateur $T \in L(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte.

On désigne par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E, E)$.

L'ensemble $K(E, F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $L(E, F)$ pour la norme $\| \cdot \|_{L(E,F)}$.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'opérateur continue de rang finis de E dans F et soit $T \in L(E, F)$ tel que :

$$\| T_n - T \|_{L(E,F)} \longrightarrow 0 \text{ alors } T \in K(E, F),$$

tout opérateur de rang fini est compact.

Théorème 1.4.1. *[17] [39] [38](Shauder)*

Si $T \in K(E, F)$ Alors $T^* \in K(F, E)$ et réciproquent

Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble ***compact*** *et : $\sigma(A) \subset [- \| A \|, + \| A \|]$.*

Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert.

1. *Si $A_1 \in L(H_{1,}H_2)$ et compact et $A_2 \in L(H_{2,}H_3)$ Alors $A_2A\ _1 \in L(H_{1,}H_3)$ est compact.*
2. *Si $A_1 \in L(H_{1,}H_2)$ et $A_2 \in L(H_{2,}H_3)$ et compact Alors $A_2A\ _1 \in L(H_{1,}H_3)$ est compact.*
3. *Si $A_1 \in L(H_{1,}H_2)$ et compact et $A^* \in L(H_{1,}H_2)$ est aussi compact.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateur compact de H_1 dans H_2, si A_n converge vers A dans $L(H_{1,}H_2)$ c'est-à-dire

$$\| A_n - A \| = \sup_{u\neq 0} \frac{\| A_n u - Au \|_{H_2}}{\| u \|_{H_1}} \longrightarrow 0,$$

alors A est compact.

Soit A un opérateur compact de H_1 dans H_2 où H_1, H_2 deux espaces de Hilbert qui ne sont pas de dimension finie alors A n'est jamais inversible dans $L(H_{1,}H_2)$.

1.5 Décomposition spectrale des Opérateurs auto-adjoint

Dans cette section A désigne un opérateur auto-adjoint compact dans H.

On commence par rappeler la théorie spectrale pour les opérateurs auto-adjoint en dimension finie.

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto adjoint, si H est de dimension finie Alors :

1. Le sous espaces ker $(\lambda I - A)$, où $\lambda \in \sigma(A)$ sont deux a deux orthogonaux.
2. A admet la décomposition spectrale suivante :

$$H = \oplus_{\lambda\in\sigma(A)} \ker(\lambda I - A).$$

3. A est diagonalisable dans une base orthogonale et

$$A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda p_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma_p(A)\setminus\{.\}} \lambda p_\lambda$$

où $p_\lambda$est la projection orthogonale de H sur ker $(\lambda I - A)$.

On caractérise dans ce lemme la norme d'un opérateur auto-adjoint compact.

Lemme 1.5.1. *[17] [39] [38]Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact Alors*

$$\| A \| = \max \{|\lambda| , \lambda \in \sigma(A)\} .$$

Théorème 1.5.1. *(Décomposition Spectrale)[6] [39] [38]*

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur auto adjoint compact, si* H *est séparable, Alors il admet une base Hilbertienne formé de vecteur propre de* A*.*

Autrement dit, A *est diagonalisable dans une base Hilbertienne.*

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur auto adjoint. On pose*

$$m = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle \qquad et \qquad M = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle .$$

1.6 Théorie de Riez-Fredholm

1.6.1 Diagonalisation de l'opérateur auto-adjoint compact

On dit que $A \in L(H_1, H_2)$ est un opérateur compact si $K(B_{H_1}(0,1))$ est relativement compact. Pour la topologie forte on note $K(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateur compact de H_1 dans H_2 et on pose $K(H_1, H_1) = K(H_1)$.

Théorème 1.6.1. *[6] :* $A \in K(H)$ *avec* $\dim \ H = \infty$

1. $0 \in \sigma(A)$,
2. $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$,
3. *l'une des situations suivantes*

ou bien $\sigma(A) = \{0\}$

ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *est fini*

ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *est fini une suite* $\longrightarrow 0$.

Théorème 1.6.2. *[6] Soient* H *est un espace de Hilbert séparable et* $A \in \mathcal{K}(H)$ *un opérateur auto-adjoint compact. Alors* H *admet une base Hilbertienne formé de vecteurs propre de* A *:*

$$\forall x \in H \ x = x_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n ,$$

et

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \ \text{où} \ x_0 \in \ker A.$$

Nous définissons la fonction d'un opérateur auto-adjoint compact A par le théorème d'application spectrale de la manière suivante :

Définition 1.6.1. *Si $f(x)$ est une fonction continue à valeurs réelles sur le spectre $\sigma(A)$ on définit $f(A)$ par*

$$f(A)x = \sum_n f(\lambda_n)(x, e_n)\, e_n \tag{1.1}$$

où A est un auto-adjoint compact $\lambda_n \in \sigma(A)$, et e_n sont les vecteurs propres orthogonaux correspondants.

1.6.2 Famille spectrale

Soit $A : D(A) \subset H \mapsto H$ opérateur non borné.

Alors A est dit à **résolvant compact si**

$$\forall \lambda \in \rho(A),\ R(\lambda, A) \in K(H).$$

On a le résultat suivant

Théorème 1.6.3. *[6] Un opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est à résolvante compact si et seulement si il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu, A) \in K(H)$ compact.*

Théorème 1.6.4. *Soit $A : D(A) \subset H \mapsto H$ opérateur auto-adjoit, Alors :*

1. $\sigma_r(A) = \varnothing$.
2. $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup\ \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$.
3. $A \geqslant \theta \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset [\theta, +\infty]$.

Théorème 1.6.5. *[6] Soit $A : D(A) \subset H \mapsto H$ un opérateur auto-atjoint borné inférieurement et à résolvante compact. Alors A est diagonalisable c'est-à-dire (il existe une base Hilbertienne dans H, $(e_m)_{m\geqslant 1} \subset D(A)$ et une suite réel $(\lambda_m)_{m\geqslant 1}$ telles que*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_m \longrightarrow \infty,\ \ Ae_m = \lambda_m e_m, m = 1, 2, ...$$

Remarque 1.6.1. *Si $A : D(A) \subset H \mapsto H$ opérateur auto-atjoint avec $A \geqslant \theta > 0 \Longrightarrow (0 \in \rho(A))$, et l'injection $H_1 \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.*

CHAPITRE 2

PROBLÈMES INVERSES ET PROBLÈMES MAL POSÉ ET THÉORIE DE LA RÉGULARISATION

2.1 Problème inverse et problème mal posé

Soient E, F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est un opérateur (linéaire ou non linéaire).

Le problème $Ax = y$ est bien posé au sens de Hadamard si les conditions sont vérifiées :

1. **Existence :** pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $Ax = y$ (A surjectif) $\mathrm{Im}(A) = F$ pour tout $y \in F$.
2. **Unicité :** pour tout $y \in F$, il a au plus une solution $x \in E$ (A injectif) $\ker(A) = 0$.

   C'est-à-dire pour tout $x_1, x_2 \in E$. et $Ax_1 = Ax_2$ alors $x_1 = x_2$.
3. **Stabilité** : la solution x dépend continument de la donnée y, c'est -à-dire $\mathrm{Im}(A) = \overline{\mathrm{Im}(A)} = \ker(A^*)^{\perp}$.

C'est-à-dire faible perturbation de donnée y donne faible perturbation de la solution x.

pour tout $(x_n)_n \subset E$ si $y_n = Ax_n \longrightarrow Ax = y$ implique $x_n \to x$ c'est -à-dire (A^{-1} borné).

Problème direct : Etant donné les causes, trouver l'effet $Ax = y$.

Problème inverse : Etant donné les l'effet, trouver les causes $x = A^{-1}y$.

2.2 Problème direct et problème inverses en EDP

Dans le cas de problème directs, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse à la solution

$$\begin{cases} u : (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty[\longmapsto u(x,t) \in E \\ u_t + F(t,x,\partial_{x_1}^{\alpha_1} u, ..., \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f \qquad \text{dans } \Omega \\ \{B_{i=1}^q\}\, u = j_i \quad \text{sur } \partial\Omega \times \ \ [0,+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans le problème inverse : à partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP

On doit retrouver par exemple :

1. f, $g_1, ..., g_q \to$ problème d'identification de sources
2. $u_0 \to$ problème d'identification de donnée initiales.
3. $F \to$ problème d'identification de coefficients.
4. $\Omega \to$ problème d'identification géométrique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère générales mal posé.

2.2.1 Exemples des problèmes mal posés

Exemple 2.2.1. *Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \psi(x), \qquad\qquad 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \qquad\qquad 0 < y < \pi \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\psi \in C^1$. En utilisant la méthode de séparation des variables, nous avons :

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

En substituant u dans le problème (2.2), *on trouve :*

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

donc :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

Ainsi

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

et

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0. \tag{2.4}$$

On vérifie aisément que $X(x) = c_2 \sin(\lambda x)$ *est une solution du problème* (2.3) *et* $Y(y) = c_3 \exp(ny) + c_4 \exp(-ny)$ *est une solution de* (2.4).

Alors la solution du problème (2.2) *est donnée par :*

$$u(x, y) = [c_3 \exp(ny) + c_4 \exp(-ny)] \sin(nx)$$

En utilisant la condition $u(x, 0) = 0$ *donc* $c_4 = -c_3$,

et la condition $u_y(x, 0) = \psi(x)$, *ce qui implique que :*

$$u_y(x, 0) = 2c_3 n \sin(nx) = \psi(x). \tag{2.5}$$

Stabilité : Si nous avons $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, alors la solution du problème (2.2) est donnée par :

$$u_1(x, y) = 0,$$

solution triviale.

On prend

$$\psi_n(x) = \psi(x) + \Delta_n = \psi(x) + \frac{1}{2} \sin(nx),$$

($\psi_n(x)$ donnée perturbée), d'après (2.5) on a :

$$\psi(x) = 2c_3 n \sin(nx),$$

et pour

$$\psi(x) = \psi_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx),$$

alors

$$2c_3 n \sin(nx) = \frac{1}{n} \sin(nx),$$

ce qui implique $2c_3 = \frac{1}{n^2}$, donc la solution du problème (2.2) associée à $\psi_n(x)$ est donnée par :

$$u_2(x,y) = \frac{1}{n^2}\sinh(ny)\sin(nx).$$

Nous remarquons :

$$\begin{aligned}\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty &= \sup_{0\leq x\leq\pi} \mid \psi_1 - \psi_2 \mid \\ &= \sup_{0\leq x\leq\pi} \mid \frac{1}{n}\sin(nx) \mid = \frac{1}{n} \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_\infty &= \sup_{0\leq x\leq\pi} |u_1(x,y) - u_2(x,y)| \\ &= \frac{1}{n^2}|\sinh(ny)| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.\end{aligned}$$

Donc la solution du problème ne dépend pas continument de la donnée $\psi(x)$, alors le problème est instable, d'où il est mal posé.

Exemple 2.2.2. (Différentiation et Intégration)

La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Lest plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct et à l'intégration comme problème inverse.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ et l'opérateur intégrale A définit par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\ dt \tag{2.6}$$

Il est facile de voir directement que A est un opérateur linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans luit même. .

Cet opérateur est injectif, par conter son image est le sous espace vectoriel.

$$\text{Im }(A) = \left\{ f \in H^1(0,1),\ g(0) = 0 \right\},$$

ou' $H^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev. En effet l'équation $Af = g$ équivalente à $f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$, L'image de A n'est pas fermée dans $L^2([0,1])$ comme le montre l'exemple suivant

Considérons une fonction $g \in C^1([0,1])$ donne et $n \in \mathbb{N}$.

Soit

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n}\ \sin(n^2 x).$$

Alors $f_n(x) = g_n^{'}(x) = g^{'}(x) + n\ \cos(n^2 x)$

De simple calcules montrent que

$$\parallel g - g_n \parallel = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\ \sin(2n^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \theta(\frac{1}{n}).$$

$$\parallel f - f_n \parallel = \parallel g' - g_n' \parallel = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\ \sin(2n^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \theta(n).$$

Ainsi la différence entre f *et* f_n *peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre* g *et* g_n *est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de* A *) n'est donc pas continue.*

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes. Une petite perturbation sur les données (ici g*) peut avoir une influence arbitrairement grand sur le résultat (ici* f *).*

Une seconde classe de problèmes inverses est l'estimation de paramètres dans l'équation différentielles. Nous allons en voir un exemple très simple.

Exemple 2.2.3.

$$\begin{cases} -(\ a(x)\ u^{'}(x))^{'} = f(x) \qquad \textit{pour } x \in]-1, 1[\\ \qquad u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Dans cet exemple, nous prendrons $a(x) = x^2 + 1$ *et la solution* $u(x) = \frac{(1-x^2)}{2}$*, ce qui donne* $f(x) = 3x^2 + 1$.

Le problème direct consiste à calculer u*, étant données* a *et* f.

Pour le problème inverse, nous considérons que f *est connue, et nous chercherons à retrouver le coefficient à partir d'une mesure de* u.

Pour cet exemple, volontairement simplifié nous supposerons que l'on mesure u *en tout point de l'intervalle* $]-1, 1[$*, ce qui est bien évidemment irréalise.*

Nous allons voir que même dans cette situation optimiste, nous sommes susceptibles de rencontrer des difficultés.

En intégrant l'équation du problème, et en divisant par $u^{'}$ *nous obtenons l'expression suivantes pour* a *(en supposant que* $u^{'}$ *ne s'annule pas, ce qui est faux sur notre exemple :*

$$a(x) = \frac{c}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi) d\zeta = \frac{c}{x} + x^2 + 1 \quad pour \quad x \neq 0 \tag{2.8}$$

où c est une constante d'intégration.

Il ya dans ce problème deux sources d'instabilité, tout d'abord l'équation (2.8) *fait intervenir* u', *et nous venons de voir que le passage de* u *à* u' *c'est source d'instabilité. Il s'agit l'à d'un phénomène communaux problèmes linéaires et non-linéaires.*

Si u' *est simplement petite la division sera cause d'instabilité.*

2.2.2 Décomposition en valeur singulière (dimension infinie) :

Considérons maintenant un opérateur $A \in K(H_1, H_2)$ où H_1, H_2, deux espaces de Hilbert séparable.

L'une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Ax = y$ tel que $x \in H_1$, $y \in H_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeur singulier (SVD) de l'opérateur A . Cette décomposition on propose des bases pour les espace de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Définition 2.2.1. (valeur singulière)*[32]* ***[21]***

Soient H_1, H_2, *deux espace de Hilbert séparable.(Admet une base Hilbertienne) et* $A \in K(H_1, H_2)$

on appelle valeur singulière de l'opérateur A *le réel positive* $\mu = \sqrt{\lambda}$, *où* λ *est une valeur propre de l'opérateur*

auto-adjoint $T = A^*A : H_1 \to H_2$.

Théorème 2.2.1. (SVD)*[32]* ***[21]***

Soit $A \in K(H_1, H_2)$ *et* Pr_0 *la projection orthogonale sur* $N(T)$, *alors il existe une suite de valeur singulières* (μ_n) *et deux systèmes orthonormé* $\{\varphi_1, \varphi_{2,\ldots}\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_{2,\ldots}\} \subset H_2$ *tel que :*

1. (μ_n) *est décroissante,* $\mu_1 \to 0, n \to \infty$.
2. $A\varphi_n = \mu_n \psi_n, \;\; A^*\psi_n = \mu_n \varphi_n$
3. $\forall x \in H_1, \; x = \sum\limits_{n \geq 1} (x, \varphi_n) \varphi_n + x_0$ *tel que* $x_0 \in \ker(A)$.
4. $\forall x \in H_1, \; Ax = \sum\limits_{n \geq 1} \mu_n (x, \varphi_n) \psi_n$.
5. $\forall y \in H_2, \; A^*y = \sum\limits_{n \geq 1} \mu_n (y, \psi_n) \varphi_n$.

Le système $\{(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)\}_{n\geq 1}$ *est appelé système singulier de* A.

La famille (φ_n) *est une base Hilbertienne de* $N(A)^{\perp}$.

La famille (ψ_n) *est une base Hilbertienne de* $\overline{R(A)}$. *Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fourmi des renseignements sur le caractère Mal posé d'un problème inverse donné.*

Théorème 2.2.2. (*Critère de Picard*) *[32]* ***[21]***

On suppose que H *est un espace de Hilbert séparable.*

Soient $A \in H \longrightarrow H$ *un opérateur compact fini,* $y \in H$ *et* $\{e_n, f_n, \sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ *son système singulier. Alors l'équation* $Ax = y$ *admet une solution si et seulement si*

(*i*) $g \in N(A^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,(A)}$,

(*ii*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, f_n\rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty$,

alors la solution générale est donnée par :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, f_n\rangle|}{\sigma_n} e_n + x_0, \quad x_0 \in N(A)\,. \tag{2.9}$$

Remarque le comportement de valeurs singulières aide à déterminer le degré de complexité du problème mal-posé :

On dit que le problème $Ax = y$ *est faiblement Mal posé si* $\mu_n \sim \frac{1}{n^c}$, $c > 0$ *et le problème* $Ax = y$ *est fortement Mal posé si* $\mu_n \sim \exp^{-np}$, $p > 0$.

2.3 La théorie de régularisation :

La régularisation de problèmes mal-posés, due initialement à Tikhonov, cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la ‹‹solution régularisée››obtenue par ‹‹inversion régularisée ››dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs activement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre ‹‹problème approximant ›› bien posé.

Considérons le problème inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \to H_2$ est un opérateur compact injectif. On suppose que $h_2 \in \mathrm{Im}(K)$, i.e, le problème inverse possède une solution unique.

Définition 2.3.1. *[32] (Une Stratégie de Régularisation) : Soient* H_1, H_2 *deux espaces normés et* $K : H_1 \to H_2$ *un opérateur linéaire borné injectif. La famille des opérateurs linéaire* *bornés* $\{R_\alpha\}_{\alpha\geq 0} : H_2 \to H_1,\ \alpha > 0$

est dite "famille régularisant" pour l'opérateur K *si*

$$\forall h_1 \in H_1, \lim_{\alpha\to 0}(R_\alpha K)h_1 = h_1\ ,\ \ i.e,\ R_\alpha K\ \ \textit{converge simplement vers } I. \tag{2.10}$$

Si R_α est une famille régularisant pour l'opérateur $K : H_1 \to H_2$, où H_1 de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés i.e, il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to\infty} \| R_{\alpha_n} \| = +\infty$.

La convergence $R_\alpha h_2 \longrightarrow K^{-1}h_2$ n'est pas uniforme, c'est à dire qu'il n'y a pas de convergence de $R_\alpha K$ vers l'identité au sens de la norme des opérateurs.

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau du bruit, i.e $\left\|h_2^\delta - h_2\right\| \leq \delta$.

Notons $h_1^{\alpha,\delta}$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\left\|h_1^{\alpha,\delta} - h_1\right\|$, on obtient

$$\left\| h_1 - h_1^\delta\right\| \leq \left\| R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha,\delta}\right\| + \| h_1 - R_\alpha h_2\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \| h_1 - R_\alpha h_2\|\,. \tag{2.11}$$

Le premier terme de droite de l'équation (2.11) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Comme $\| R_{\alpha_n} \| \longrightarrow +\infty$ quand $\alpha \longrightarrow 0$. Alors il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (2.11) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α.

Nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1.

Définition 2.3.2. *[32] Une Stratégie de Régularisation* $\delta \to \alpha(\delta)$ *est admissible si pour tout* $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0 \quad et \quad \lim_{\delta\to 0}\Big(\sup_{h_2^\delta \in H_2} \Big\{ \left|R_{\alpha(\eta)}\ h_2^\delta - h_1\right| \ \textit{tel que}\ \left\|K\ h_1 - h_2^\delta\ \right\| \leq \delta \Big\}\Big) = 0. \tag{2.12}$$

Les stratégies de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spéci-

fique selon son degré de complexité. Parmi les méthodes les plus connues en problème inverse, on a la méthode de Tikhonov.

2.3.1 La méthode de Tikhonov :

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, supposons que $K : H_1 \longrightarrow H_2$, $\|A\| < \infty$ est linéaire, $y \in \mathrm{Im}(A)$ telle que $\|y_\delta - y\| \leq \delta$, y_δ n'est pas nécessaire dans $\mathrm{Im}(A)$, le problème

$$Ax = y.$$

Etant donné y_δ on veut donc construire une approximation raisonnable x_α^δ de la solution exacte x de l'équation non perturbée $Ax = y$. On veut aussi que cette approximation soit stable, i.e. que x_α^δ dépende continûment des données y_δ. Donc on cherche une approximation de l'opérateur inverse non borné $A^{-1} : Im(A) \to H_1$ par un opérateur linéaire borné $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1$.

Théorème 2.3.1. *[32] Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $A : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur linéaire compact et soit $\alpha > 0$. Alors pour chaque $y \in H_2$, il existe $x_\alpha \in H_1$.*

$$\| Ax_\alpha - y \|^2 + \alpha \| x_\alpha \|^2 = \inf_{x \in H_1} \| Ax - y \|^2 + \alpha \| x \|^2 . \tag{2.13}$$

Le minimiseur x_α est donné par l'unique solution de

$$\alpha x_\alpha + A^* A x_\alpha = A^* y, \tag{2.14}$$

et dépend continûment de y.

De l'identité ci-dessus, il en résulte que

$$x_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* y,$$

et

$$\begin{aligned} R_\alpha \quad &: \quad H_2 \to H_1 \\ y \quad &\longmapsto \quad R_\alpha(y) = x_\alpha \end{aligned}$$

où $R_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^*$.

Lemme 2.3.1. *[32] Supposons que $A \in \mathcal{L}(H_1)$ (A fermé) est un opérateur auto-adjoint positif alors pour tout $\alpha > 0$ l'opérateur $A+\alpha I$ est bijectif et $\left\|(A+\alpha I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha}$ et $\left\|(A+\alpha I)^{-1} A\right\| \leq$ 1.*

Corollaire 2.3.1. *[32] Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\alpha > 0$ alors*

$$\left\|(A^*A+\alpha I)^{-1} A^*\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Proposition 2.3.1. *[32](Nair page 157) Supposons que $A \in \mathcal{L}(H_1)$ est un opérateur auto-adjoint alors pour tout $\alpha > 0$*

$$\begin{aligned}
\sigma\left((A+\alpha I)^{-1}\right) &= \left\{\frac{1}{\lambda+\alpha}, \lambda \in \sigma(A)\right\} \\
\sigma\left((A+\alpha I)^{-1} A\right) &= \left\{\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}, \lambda \in \sigma(A)\right\} \\
\sigma\left((A+\alpha I)^{-2} A\right) &= \left\{\frac{\lambda}{(\lambda+\alpha)^{-2}}, \lambda \in \sigma(A)\right\}
\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.2. *[32] Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\alpha > 0$ alors*

$$\left\|(A^*A+\alpha I)^{-1} A^*\right\| = \sup\left\{\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+\alpha}, \lambda \in \sigma(A)\right\} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Proposition 2.3.2. *[32] Pour tout $u \in \ker(A)^{\perp}$ et pour tout $v \in \ker(A^*)^{\perp}$ alors*

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha(A^*A+\alpha I)^{-1}u\right\| &\to 0 \quad \textit{quand } \alpha \to 0, \\
\left\|\alpha(A^*A+\alpha I)^{-1} v\right\| &\to 0 \quad \textit{quand } \alpha \to 0.
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.2. *[32] Pour $y \in D(A^+)$*

$$\|x - x_\alpha\| \to 0 \quad \textit{quand}\alpha \to 0$$

Théorème 2.3.3. *[32] Soit $y^\delta \in H_2$ tel que*

$$\left\|y^\delta - y\right\| \leq \delta \ \textit{où } y = Ax,$$

a) Soit $A : H_1 \to H_2$ *un opérateur linéaire injectif et compact, l'opérateur* R_α *définie par*

$$R_\alpha y = \sum_{j \geq 1} \frac{s_j}{\alpha + s_j^2} \langle y, f_j \rangle \, e_j \ ,$$

est une stratégie de régularisation avec

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \alpha > 0,$$

chaque choix $\alpha(\delta) \to 0$ *quand* $\alpha \to 0$ *avec* $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$ *quand* $\alpha \to 0$ *est admissible.*

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE RÉGULARISATION DE TIKHONOV MODIFIÉE POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

3.1 Formulation du problème :

On considère l'équation de la chaleur rétrograde axisymétrique suivante (BHCP)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, & 0 < r \leq r_0,\ 0 < t < T, \\ u(r,T) = \varphi(r)\ , & 0 \leq r \leq r_0, \\ u(r_0,t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(r,t) \text{ borné }, & r = 0,\ \ 0 \leq t < T, \end{cases} \tag{3.1}$$

où r est la coordonnée radiale, $\varphi(r)$ la condition final de la température du cylindre. Notre but est de déterminer la distribution de température $u(.,t)$ pour $0 \leq t < T$ à partir de la donnée $u(r,T) = \varphi(r)$. En effet une petite perturbation dans la donnée peut causer une grande erreur dans la solution $u(.,t)$. Dans ce cas une méthode de régularisation est nécessaire.

Ce problème ((3.1)) est mal posé au sens d'Hadamard, car la solution si elle existe ne dépend pas continûment de la donnée φ.

En effet une petite perturbation dans la donnée peut causer une grande erreur dans la solution $u(.,t)$. Plusieurs méthodes de régularisations ont été considérées pour résoudre ce problème, comme la méthode Q.R [[8], la méthode de Tikhonov [3], la méthode des différences finies [11] et autres.

Dans ce travail on utilise la méthode de régularisation de Tikhonov modifiée [44] pour traiter le problème mal posé (3.1). Et nous obtenons non seulement la continuité de Hölder, mais nous obtenons également des estimations d'erreur de convergence plus rapides, en particulier une estimation de convergence de type logarithmique à $t = 0$.

Avant de donner la formulation de la solution du problème (3.1), nous allons donner une définition, on note :

$$L^2\left[0, r_0; r\right] = \left\{ f : [0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R} : f \ \text{ est mesurable au sens de Lebesgue et } r^{\frac{1}{2}}\ f \in L^2\left[0, r_0\right] \right\}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert avec la norme

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^{r_0} r \left| f((r) \right|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}$$

et le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} r f(x) g(x) dx, \ \text{ pour } f,\ g \in L^2\left[0, r_0; r\right]$$

En tant que solution du problème (3.1), nous entendons une fonction $u(r, t)$ satisfaisant (3.1) au sens classique et pour chaque t fixé dans $[0, T]$, la fonction $u(., t) \in L^2\left[0, r_0, r\right]$. Dans cette classe de fonctions, si la solution du problème (3.1) existe, elle doit être unique [10]. Nous supposons que $u(r, t)$ est la solution unique du problème (3.1). En appliquant la méthode de séparation des variables, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Si la solution du problème* (3.1) *existe, alors elle est donnée par*

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n e^{(\frac{\mu_n}{r_0})^2 (T-t)} J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}), \tag{3.2}$$

et

$$c_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^{r_0} r \varphi(r) J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}) dr,\ n = 1, 2, ..., \tag{3.3}$$

où $J_0(z)$ *et* $J_1(z)$ *désignent respectivement les fonctions de Bessel d'ordre* 0 *et d'ordre* 1.

$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est la siute des racines de l'équation* $J_0(z) = 0$ *et satisfait :*

$$0\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ..., \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu_n = \infty.$$

Démonstration. En appliquant la méthode de séparation des variables, nous cherchons une solution du problème (3.1) de la forme :

$$u(r,t) = v(t)R(r), \tag{3.4}$$

en substituant (3.4)) dans (3.1), on trouve :

$$v'(t) + \lambda v(t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{3.5}$$

et que $R(r)$ satisfait l'équation :

$$R"(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r) = 0, \tag{3.6}$$

$$R(r_0) = 0, \tag{3.7}$$

$$|R(0)| < +\infty, \tag{3.8}$$

où λ sont des constantes inconnues. Il est facile de constater que la valeur propre du problème (3.6)-(3.8) est non négative, c'est-à-dire $\lambda \geq 0$ (voir [15]).

Lorsque $\lambda = 0$, nous obtenons la solution générale du problème (3.6) :

$$R(r) = A_1 + A_2 \ln r,$$

à partir de (3.7) et (3.8), nous avons : $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ c'est-à-dire, $R(r) = 0$. Pour $\lambda > 0$, selon [15], nous obtenons la solution générale de l'équation (3.6) :

$$R(r) = B_1 J_0(\sqrt{\lambda}) + B_2 Y_0\left(r\sqrt{\lambda}\right), \quad 0 < r \leq r_0, \tag{3.9}$$

où $J_0(z)$ et $Y_0(z)$ désignent respectivement les fonctions de Bessel de première espèce et de deuxième espèce, données par :

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left[\eta + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right] J_0(z) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

en raison des condition (3.7), (3.8) et $\lim_{z\to 0} Y_0(z) = -\infty$, alors $B_1 J_0(r_0\sqrt{\lambda}) = 0$, $B_2 = 0$.

En appliquant les propriétés de la fonction de Bessel d'ordre 0 : $J_0(z)$, on peut écrire : nous savons que l'équation $J_0(z) = 0$ a une séquence de racines $\{\mu\}_{n=1}^{\infty}$ qui satisfait à $0 < \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n = \infty$.

Ainsi, les valeurs propres du problème (3.6), (3.8) sont :

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \qquad n = 1, 2, ...,$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \qquad n = 1, 2, ...,$$

Par conséquent, les solutions correspondantes de l'équation (3.5) sont

$$v_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 t}, \qquad n = 1, 2, ...,$$

Ainsi, nous obtenons la représentation classique du problème (3.1) :

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 t} R_n(r).$$

À $t = T$ nous avons les développements :

$$u(r,T) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n R(r) \text{ avec } c_n = e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 T} a_n,$$

et la solution du problème (3.1) est donnée par

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 (T-t)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Selon les propriétés de la fonction de Bessel d'ordre 0 : $J_0(x)$, le système de fonctions caractéristiques

$$J_0\left(\frac{\mu_1 r}{r_0}\right),\ J_0\left(\frac{\mu_2 r}{r_0}\right), ...,\ J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), ...,$$

est complète, avec une orthogonalité pondérée avec poids r dans $L^2\left[0, r_0; r\right]$ (voir [10]) ainsi

$$c_n = \frac{\int_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr} = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \quad n = 1, 2, ...,$$

Cela prouve le lemme.

Soit

$$w_n(r) = \frac{\sqrt{2}}{r_0 J_1(\mu_n)} J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}). \tag{3.10}$$

Ensuite, les systèmes de fonctions propres $w_1(r), w_2(r), ..., w_n(r), ...$ avec une orthogonalité pondérée avec poids r dans $L^2\left[0, r_0; r\right]$. En utilisant (3.3) et (3.10), (3.2) peut être réécrit comme :

$$u(r, T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 (T-t)} \left\langle \varphi(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r). \tag{3.11}$$

Étant donné que des erreurs de mesure existent dans φ, la solution doit être reconstruite à partir de données bruitées φ^δ qui est supposée satisfaire

$$\left\| \varphi(.) - \varphi^\delta(.) \right\| \leq \delta, \tag{3.12}$$

où $\varphi(.)$ et $\varphi^\delta(.)$ appartiennent à $L^2\left[0, r_0; r\right]$. On suppose aussi qu'il existe une condition a priori pour le problème (3.1)

$$\left\| u(., 0) \right\|_p \leq E,\ \ p \geq 0, \tag{3.13}$$

où $\left\| u(., 0) \right\|_p$ est défini par

$$\left\| u(., 0 \right\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)^{\frac{p}{n}} \left\langle u(., 0), w_n(.) \right\rangle w_n(.) \right\|.$$

□

3.2 Caractère mal-posé du problème inverse

Nous définissons un opérateur $K(t) : u(.,t) \to \varphi(.)$, alors le problème (3.1) dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$ peut être réécrit sous la forme de l'équation d'opérateur suivante :

$$K(t)u(r,t) = \varphi(r), \quad 0 \leq t < T. \tag{3.14}$$

En utilisant la formule (3.11), par conséquent

$$\langle \varphi(r), w_n(r) \rangle = \langle u(r,t), w_n(r) \rangle \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 (T-t)},$$

alors pour tout t fixé dans $]0,t[$, l'opérateur $K(t)$ du problème (3.14) peut être réécrit comme suit :

$$K(t)u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u(r,t), w_n(r) \rangle \, e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 (T-t)} w_n(r). \tag{3.15}$$

Par conséquent, $K(t)$ est un opérateur linéaire compact auto-adjoint avec des valeurs propres :

$$k_n(t) = e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 (T-t)} \tag{3.16}$$

et des vecteurs propres ω_n. Puisque les valeurs propres $k_n(t)$ de l'opérateur $K(t)$ décroissent rapidement de manière exponentielle, nous réalisons que le problème (3.1) est un problème mal posé.

3.3 Régularisation avec estimation d'erreur

Dans cette étude nous proposons la méthode de régularisation de Tikhonov modifiée pour l'équation de la chaleur axisymétrique l'idée dans cette méthode est de remplacer le problème mal posé par un problème de minimisation.

Pour des données perturbées $\varphi^\delta(r)$, la régularisation de Tikhonov peut être utilisée, nous recherchons une fonction $u_\alpha^\delta(.,t) \in L^2\left[0, r_0; r\right]$, qui minimise la quantité

$$J_\alpha\left(u^\delta\right) := \left\| K(t)u^\delta - \varphi^\delta \right\|^2 + \alpha^2 \left\| u^\delta \right\|^2, \quad \forall u^\delta(.,t) \in L^2\left[0, r_0; r\right]. \tag{3.17}$$

Selon ([24], théorème (2.11)) cette fonctionnelle de Tikhonov J_α a un minimum unique $u_\alpha^\delta(.,t) \in L^2\left[0, r_0; r\right]$, et cela minimise $u_\alpha^\delta(.,t)$ pour être une solution unique de l'équation normale

$$K^*(t)K(t)u_\alpha^\delta + \alpha^2 u_\alpha^\delta = K^*(t)\varphi^\delta, \ \ \alpha > 0, \tag{3.18}$$

où $K^*(t)$ est l'adjoint de $K(t)$. De plus, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *l'équation normale* (3.18) *a pour solution unique donnée par*

$$u_\alpha^\delta(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]}{1+\alpha^2 \exp\left[2(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]} \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r). \tag{3.19}$$

Démonstration. Soit I l'opérateur identité dans $L^2[0, r_0; r]$. Comme $K(t)$ est un opérateur autoadjoint, c'est-à-dire, $K(t) = K^*(t)$ en combinant (3.18) avec (3.15) nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n^2+\alpha^2\right) \left\langle u_\alpha^\delta(r,t), w_n(r) \right\rangle w_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r).$$

Cela donne

$$\left(k_n^2+\alpha^2\right) \left\langle u_\alpha^\delta(r,t), w_n(r) \right\rangle = k_n \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} u_\alpha^\delta(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u_\alpha^\delta(r,t), w_n(r) \right\rangle w_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{k_n^2+\alpha^2} \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]}{\exp\left[-2(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]+\alpha^2} \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r). \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]}{1+\alpha^2 \exp\left[2(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]} \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r). \end{aligned}$$

nous appelons $u_\alpha^\delta(r,t)$ donnée par (3.19) l'approximation Tikhonov de la solution exacte $u(r,t)$ donnée par (3.11) du problème (3.1) dans l'intervalle $0 \le t < T$.

Clairement, la procédure de régularisation consiste à remplacer l'inconnu $\varphi(r)$ par une donnée bruitée filtrée $\varphi^\delta(r)$. Le filtre en (3.19) atténue les hautes fréquences en $\varphi^\delta(r)$ d'une manière compatible avec l'objectif de minimiser la quantité (3.17). En utilisant cette idée, nous pouvons remplacer le filtre $\frac{1}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2(T-t)\right]}$ par un autre filtre $\frac{1}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}$, et introduire une nouvelle approximation$u_\alpha^\delta(r,t)$ de la solution $u(r,t)$ du problème (3.1) dans l'intervalle $0 \leq t < T$:

$$u_\alpha^\delta(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]}{1+\alpha^2 \exp\left[2 (\mu_n/r_0)^2 T\right]} \left\langle \varphi^\delta(r), w_n(r) \right\rangle w_n(r) \tag{3.20}$$

nous appelons $u_\alpha^\delta(r,t)$ les approximations de Tikhonov modifiées $u(r,t)$ de la solution du problème (3.1) pour $0 \leq t < T$.

Afin d'obtenir une estimation de stabilité pour la solution régularisée, nous avons besoin du lemme suivant dont la preuve est similaire à celle du Lemme(3.2) [7]. □

Lemme 3.3.1. *Soit* $0 \leq t < T$, $\alpha > 0$. *Alors*

$$\sup_{s>0} \frac{e^{s(T-t)}}{1+\alpha^2 e^{2sT}} \leqslant \alpha^{\frac{t-T}{T}}. \tag{3.21}$$

De plus, si $0 < \alpha < 1/\sqrt{3}$, $p \geq 0, t(p+1)/p \geq 1$ *alors on a la relation suivante :*

$$\sup_{s>0} \frac{e^{(2T-t)s}(1+s)^{-\frac{p}{2}}}{1+\alpha^2 e^{2Ts}} \leq \alpha^{\frac{t-2T}{T}} \left(\frac{1}{T} \ln \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\right)^{\frac{-p}{p+1}}. \tag{3.22}$$

Selon les propriétés de la fonction Bessel d'ordre 0 : $J_0(x)$, *il existe une constante positive* c *telle que pour tout nombre naturel* n,

$$n \geq c\mu_n. \tag{3.23}$$

Théorème 3.3.2. *Soit* $u_{\alpha_1}^\delta$ *et* $u_{\alpha_2}^\delta$ *deux solutions du problème régularisé* (3.18) *correspondantes aux données* φ_1^δ *et* φ_2^δ, *respectivement vérifiant* $\left\|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right\| \leq \delta$ *alors pour* $0 \leq t < T$ *on trouve l'estimation d'erreur*

$$\left\|u_{\alpha_1}^\delta - u_{\alpha_2}^\delta\right\| \leq \alpha^{\frac{t-T}{T}} \left\|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right\|.$$

Démonstration. Pour démontrer que u_α^δ dépend continûment de φ^δ, on calcule

$$\begin{aligned}
\left\|u_{\alpha_1}^\delta - u_{\alpha_2}^\delta\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[(\mu_n/r_0)^2 (T-t)\right]}{1+\alpha^2 \exp\left[2 (\mu_n/r_0)^2 T\right]} (\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta, w_n) w_n\right\| \\
&\leq \sup_{s>0} \frac{e^{s(t-T)}}{1+\alpha^2 e^{2Ts}} \left\|(\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta, w_n) w_n\right\| \\
&\leq \sup_{s>0} \frac{e^{s(t-T)}}{1+\alpha^2 e^{2Ts}} \left\|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right\| \\
&\leq \alpha^{\frac{t-T}{T}} \left\|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta\right\|.
\end{aligned}$$

Dans le théorème suivant on montre que la solution régularisée u_α^δ donnée par (3.20) est une approximation stable de la solution exacte u donnée par (3.11). $\square$

Théorème 3.3.3. *Supposons que u est la solution du problème (3.1) et u_α^δ donnée par (3.20). Soit la donnée φ^δ satisfaisant $\left\|\varphi_1^\delta - \varphi\right\| \leq \delta$, et la solution exact u vérifiant $\|u(.,0)\|_p \leq E$, $p \geq 0$, où le paramètre de régularisation est choisi comme suit :*

$$\alpha = \frac{\delta}{E}\ln(\frac{E}{\delta})^{\frac{p}{p+1}} \tag{3.24}$$

alors il y a l'estimation de stabilité suivante :

$$\left\|u(.,t) - u_\alpha^\delta(.,t)\right\| \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}(\ln\frac{E}{\delta})^{\frac{-p}{p+1}(1-\frac{t}{T})}(1 + c_1T^p + o(1)) \text{ pour } \delta \to 0 \tag{3.25}$$

où $c_1 = (\min\{1, c^2r_0^2\})^{-p/2}$.

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|u - u_\alpha^\delta\right\| &= \left\|u + u_\alpha - u_\alpha - u_\alpha^\delta\right\| \\ &\leq \left\|u + u_\alpha\right\| + \left\|u_\alpha - u_\alpha^\delta\right\|.\end{aligned}$$

d'après le Théorème (3.3.2) nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|u_\alpha - u_\alpha^\delta\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left[(\mu_n/r_0)^2(T-t)\right]}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}\left\langle\varphi(r)-\varphi^\delta(r), w_n(r)\right\rangle w_n(r)\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n^{-1}(t)}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}\left\langle\varphi-\varphi^\delta, w_n\right\rangle w_n\right\| \\ &\leq \alpha^{\frac{t-T}{T}}\delta.\end{aligned}$$

Grâce à (3.1), (3.23) et (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}\|u-u_\alpha\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n^{-1}(t)\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}\langle\varphi, w_n\rangle w_n\right\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^2e^{\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2(2T-t)}\left(1+n^2\right)^{-\frac{p}{2}}}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+n^2\right)^{\frac{p}{2}}\langle u(.,0), w_n\rangle w_n\right\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^2e^{\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2(2T-t)}c_1\left(1+(\mu_n/r_0)^2\right)^{-\frac{p}{2}}}{1+\alpha^2\exp\left[2(\mu_n/r_0)^2T\right]}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+n^2\right)^{\frac{p}{2}}\langle u(.,0), w_n\rangle w_n\right\|.\end{aligned}$$

Soit $s = (\mu_n/r_0)^2$. En combinant avec les conditions (3.12), (3.13), les inégalités (3.21) et (3.22) avec le choix de α donné par (3.24), nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|u(.,t) - u_\alpha^\delta(r,t)\right\| &\leq \sup_{s>0} \frac{\alpha^2 e^{(2T-t)s} c_1 (1+s^2)^{-\frac{p}{2}}}{1+\alpha^2 \exp[2sT]} E + \sup_{s>0} \frac{e^{s(T-t)}}{1+\alpha^2 e^{2sT}} \delta \\
&\leq c_1 E \alpha^{\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T} \ln \frac{1}{\sqrt{3\alpha}} \right)^{\frac{-p}{p+1}} + \alpha^{\frac{t-T}{T}} \delta \\
&\leq c_1 E \left(\frac{\delta}{E} \left(\ln(\frac{E}{\delta}) \right)^{\frac{p}{p+1}} \right)^{\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T} \ln \left(\frac{E}{\sqrt{3}\delta} (\ln \frac{E}{\delta}) \right)^{-\frac{p}{p+1}} \right)^{-\frac{p}{p+1}} + \left(\frac{\delta}{E} \left(\ln(\frac{E}{\delta}) \right)^{\frac{p}{p+1}} \right)^{\frac{t-T}{T}} \delta \\
&\leq E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} (\left(\ln(\frac{E}{\delta}) \right)^{\frac{-p}{p+1}(1-\frac{t}{T})} \left[c_1 \left(\frac{T \ln \frac{E}{\delta}}{\ln \left(\frac{E}{\sqrt{3}\delta} - \frac{p}{p+1} \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right) \right)} \right)^{\frac{p}{p+1}} + 1 \right].
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.1.

(i) Lorsque $p = 0$, l'estimation (3.25) *devient* $\left\|u(.,t) - u_\alpha^\delta(.,t)\right\| \leqslant 2E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}}$. *Il s'agit d'une estimation de stabilité de type Hölder.*

(ii) Lorsque $p > 0$, l'estimation (3.25) *est une estimation d'erreur de type logarithmique-Hölder, en particulier au temps initial $t = 0$,* (3.25) *est une estimation de convergence de type logarithmique.*

CHAPITRE 4

RÉSULTATS DE STABILITÉ POUR LES ÉQUATIONS PARABOLIQUES FRACTIONNAIRES EN TEMPS

4.1 Inroduction

Soit H un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire $\langle . \rangle$ et de la norme $\|.\|$. On note par $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur
H, $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur auto-adjoint fermé sur H telle que $-A$ est un générateur d'un semi-groupe de contraction compact $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur H. Supposons que A admette une base orthonormée $\{\phi_i\}_{i\geq 1}$ dans H, associée aux valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ telles que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ et $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$.

Pour $\gamma \in]0,1[$, on considère le problème de diffusion-fractionnaire en temps.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^r} + Au = 0, \ 0 < t < T, \\ \quad \|u(T) - f\| \leqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}$est la dérivée de caputo **[19]** **[28]** définie par

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \frac{\partial u(.,s)}{\partial s} ds, \quad \gamma \in]0,1[$$

et $\Gamma(.)$ représente la fonction Gamma d'Euler.

Notre problème inverse est de déterminer la condition inconnue $u(0) = g$ et $u(t)$ pour $0 < t < T < \infty$.

Ce problème (4.1) est mal posé au sens d'Hadamard, car la solution si elle existe, elle ne dépend pas continûment de la donnée.

Si $\gamma = 1$ le problème (4.1) est un problème parabolique classique mal-posé et a été largement étudié par plusieurs auteur (théoriquement et numériquement) dans **[36]**, **[18]** .

Cependant pour le problème rétrograde fractionnaire, à notre connaissance, il y a très peu de travaux. Sakamoto et Yamamoto **[34]** ont prouvé qu'il existe une solution faible unique pour le problème rétrograde (4.1) sous la condition $g(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Liu et al.**[27]** ont utilisé une méthode de quasi réversibilité pour résoudre le problème rétrograde (4.1) dans le cas unidimensionnel pour des coefficients spéciaux $a_{ij}(x) = 1$ et $c(x) = 0$. Plusieurs articles sur les équations paraboliques fractionnaires rétrogrades en ont été publiés : la méthode de mollifications **[40]**, la méthode des condition aux limites auxiliaire **[43]** **[45]** la régularisation de Tikhonov **[2]** **[16]** **[41]** **[42].**

Dans notre travail nous proposons pour l'étude de ce problème méthode des conditions aux limites auxiliares modifiée. L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème mal-posé (4.1) par un problème bien posé, dans lequel on perturbe la condition finale $u(T) = f$ en la remplaçant par une condition non-locale $\alpha A^k v_\alpha(0) + v_\alpha(T) = f$ dépendante d'un petit paramètre α.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma \nu_\alpha}{\partial t^\gamma} + Av_\alpha = 0, 0 < t < T, \\ \alpha A^k v_\alpha(0) + v_\alpha(T) = f, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $0 < \alpha < 1$ est $k > 0$.

On donne quelques estimations pour la solution du problème régularisé et on montre aussi que le problème modifié est stable et que sa solution est l'approximation de la solution exacte du problème original. Enfin, on termine par certains résultats de convergence.

Remarque 4.1.1. *Le cas $k = 0$, correspond à la méthode des conditions aux limites auxiliaires classique.*

Notons

$$D(A^p) = \left\{ \psi \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2p} \langle \psi, \phi_n \rangle^2 < \infty \right\}$$

et la norme

$$\|\psi\|_p = \|\psi\|_{D(A^p)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2p} \langle \psi, \phi_n \rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \psi \in D(A^p).$$

Dans le cas où $H = L^2(\Omega)$, Ω *est un domaine borné dans* $\mathbb{R}^d$ *et* A *est un opérateur symétrique uniformément elliptique défini par :*

$$Au = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)) + c(x)u(x), x \in \Omega$$

avec

$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Dans lequel les coefficients satisfont

$$a_{ij} = a_{ji} \in c^1(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1, \cdots, \ d, \ c \in c(\overline{\Omega}), \ c \geqslant 0, \ x \in \overline{\Omega}$$

et

$$v\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ , \ x \in \overline{\Omega}, \ \xi \in \mathbb{R}^d, \ \textit{pour la constant } v > 0$$

4.2 Préliminaire

Dans cette section, nous présentons certaine théories de bas qui concernent des fonction utiles qui sont utilisés dans ce chapitre.nous donnons ici les définitions des fonction gamma et Mittag-Leffter. Ces fonction jouent en rôle très important dans la théorie des problèmes inverses avec dérivée fracionnaire.

Définition 4.2.1. *La fonction gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_{+\infty}^{0} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ *est une fonction strictement décroissante pour* $0 < z \leqslant 1$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad \textit{et} \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(-n+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

Définition 4.2.2. *La fonction Mittag-Leffler* ***[19] [28]***

$$E_{\gamma,\beta(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\gamma+\beta)},\ z \in \mathbb{C},\ \gamma > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$$

pour $\gamma \in]0,1[$, $g \in H$, *considérons l'équation parabolique fractionnaire en temps :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + Au = 0, \quad 0 < t < T. \\ u(0) = g. \end{cases} \tag{4.3}$$

La dérivée de Caputo $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ *est définie par*

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \frac{\partial u(.,s)}{\partial s} ds = \lim_{n \to 0^+} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^{t-\eta} (t-s)^{-\gamma} \frac{\partial u(.,s)}{\partial s} ds,\ \gamma \in]0,1[\,.$$

Définition 4.2.3. *Soit* $g \in H$ *la fonction* $u(t) : [0,T] \to H$ *est la solution du problème* (4.3) *si* $u(t) \in C^1((0,T),H) \cap C([0,T],H)$, $u(t) \in D(A)$ *pour tout* $t \in]0,T[$ *et* (4.3) *est vérifiée.*

Théorème 4.2.1. *Le problème* (4.3) *admet une solution unique,qui peut être représentée sous la forme :*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma) \langle g, \phi_n \rangle \phi_n \tag{4.4}$$

pour prouver le Théoreme (4.2.1), *nous avons besoin des résultats auxiliares suivants.*

Lemme 4.2.1. ***[43]*** *Pour tout* λ_n *satisfaisant* $\lambda_n \geqslant \lambda_1 > 0$,*il existe des constantes positives* $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ *dépendant de* γ, T, λ_1 *telle que*

$$\frac{\overline{c_1}}{\lambda_n} \leqslant E_{\gamma,1}(-\lambda_n T^\gamma) \leqslant \frac{\overline{c_2}}{\lambda_n}.$$

Lemme 4.2.2. *Soit* $\gamma \in]0.1[$, $\lambda > 0$ *et* $t > 0$. *On a*

$$(a) \qquad \frac{d}{dt} E_{\gamma.1}(-\lambda t^\gamma) = -\lambda t^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\lambda t^\gamma) \tag{4.5}$$

$$(b) \qquad \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} E_{\gamma.1}(-\lambda t^\gamma) = -\lambda E_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma) \tag{4.6}$$

la partie (a) *peut être trouvée dans* ***[33]***. *La preuve de la partie* (b) *est simple et nous l'omettons. Maintenant, nous somme en mesure de prouver le Théoreme* (4.2.1). *Tout d'abord, nous vérifions que* $u(t)$ *défini par* (4.4) *est une solution du problème* (4.3) .

Nous prouvons que $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in]0,T[$. Pour chaque $t > 0$, d'après

le Lemme (4.2.1) nous concluons qu'il existe des constantes positives c_3, c_4 dépendant de γ, t, λ_1 telles que $\frac{\overline{c_3}}{\lambda_n} \leqslant E_{\gamma,1}(-\lambda_n t^\gamma) \leqslant \frac{\overline{c_4}}{\lambda_n}$. Cela implique que
$\langle u(t), \phi_n \rangle^2 = (E_{\gamma,1}(-\lambda_n t^\gamma))^2 \langle g, \phi_n \rangle^2 \leq \left(\frac{\overline{c_4}}{\lambda_n}\right)^2 \langle g, \phi_n \rangle^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par conséquent, il s'ensuit que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \langle u(t), \phi_n \rangle^2 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\overline{c_4})^2 \langle g, \phi_n \rangle^2 = (\overline{c_4})^2 \|g\|^2 < \infty$.

Par conséquent, $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in]0, T[$.

Puisque $E_{\gamma.1}(0) = 1$, on a $u(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(0) \langle g, \phi_n \rangle \phi_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n = g$.

Soit

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{N} E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma) \langle g, \phi_n \rangle \phi_n, \ \ \forall t \in [0, T], \quad N \in \mathbb{N}^*. \tag{4.7}$$

On a

$$u_n(t) \to u(t) \text{ dans } H,\ N \to \infty, \forall t \in [0, T]. \tag{4.8}$$

D'après le Lemme (4.2.2) et (4.7),on obtient

$$\frac{\partial^\gamma u_N(t)}{\partial t^\gamma} + Au_N(t) = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, T[.$$

Cela implique que

$$Au_N(t) = -\frac{\partial^\gamma u_N(t)}{\partial t^\gamma} \to -\frac{\partial^\gamma u(t)}{\partial t^\gamma} \quad \text{dans } H, \quad N \to \infty,\ \forall t \in]0, T[. \tag{4.9}$$

En utilisant (4.8) et (4.9) ainsi que la propriété de fermeture de l'opérateur A, nous obtenons...

$$\frac{\partial^\gamma u(t)}{\partial t^\gamma} + Au(t) = 0, \ \ \forall t \in]0, T[.$$

Maintenant, nous prouvons la continuité de $u(t)$ en $t = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{t \to 0} \|u(t) - u(0)\| = 0. \tag{4.10}$$

En effet, comme $g \in H$, il existe des constantes positives M et n_δ telles que $\|g\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle^2 \leq M$ et $\sum\limits_{n=n_\delta}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle^2 \leq \frac{\delta^2}{4}$. De plus, comme $\lim\limits_{t \to 0} E_{\gamma.1}(t) = E_{\gamma.1}(0) = 1$, il existe une constante $\delta_1 = \delta_1(\delta, M)$ telle que $|E_{\gamma.1}(-t) - 1| \leq \frac{\delta}{2(1+M)}, \forall t \leq \delta_1$. Si $0 < t \leq (\delta_1/\lambda_{n_\delta})^{\frac{1}{\gamma}}$, alors $\lambda_n t^\gamma \leq \delta_1, \forall n < n_\delta$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(0)\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle g,\phi_n\rangle - g\right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{n_\delta-1}(E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)-1)^2\langle g,\phi_n\rangle^2 + \sum_{n=n_\delta}^{\infty}(E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)-1)^2\langle g,\phi_n\rangle^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_\delta-1}(E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)-1)^2\langle g,\phi_n\rangle^2 + \sum_{n=n_\delta}^{\infty}\langle g,\phi_n\rangle^2 \\
&\leq \frac{\delta^2}{4(1+M)^2}\sum_{n=1}^{n_\delta-1}\langle g,\phi_n\rangle^2 + \frac{\delta^2}{4} \leq \frac{\delta^2}{4(1+M)^2}\|g\|^2 + \frac{\delta^2}{4} \leq \frac{\delta^2}{2}
\end{aligned}$$

Cela implique $\lim\limits_{t\to 0}\|u(t)-u(0)\| = 0$.

Pour prouver l'unicité d'une solution du problème (4.3), nous representons $u(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle u(t),\phi_n\rangle\phi_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u(t)\phi_n$, en remplaçant cela dans (4.3) on obtient $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + Au = 0, 0 < t < T$ et $u_n(0) = \langle g,\phi_n\rangle$ Ainsi, d'après le Théorème (4.3), page 231 dans **[19]**, on obtient $u_n(t) = E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)u_n(0) = E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle g,\phi_n\rangle$ qui suit (4.4).

Donc

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle g,\phi_n\rangle\phi_n$$

4.3 Régularisation et estimations d'erreurs

Dans cette section, on régularise le problème (4.1) en utilisant la méthode des valeurs aux limites auxiliaires modiée.

Considérons le problème approché suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma \nu_\alpha}{\partial t^\gamma} + Av_\alpha = 0, & 0 < t < T, \\ \alpha A^k v_\alpha(0) + v_\alpha(T) = f, \end{cases} \tag{4.11}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $k > 0$.

Et la donnée mesurée $f^\delta \in L^2(\Omega)$, satisfait $\left\|f^\delta - f\right\| \leq \delta$.

Où $\|.\|$ est la norme dans L^2.

Remarque 4.3.1. *Le cas $k = 0$, correspond à la méthode des conditions aux limites auxiliaires classique.*

4.3.1 Quelques résultas auxiliaires

Lemme 4.3.1. *(Inégalité de Young). Si a, b sont des nombres non negatifs et m,n des nombres positifs tels que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$, alors $ab \leq \frac{a^m}{m} + \frac{b^n}{n}$.*

Nous montrons que le problème (4.11) est bien posé.

Théorème 4.3.1. *Le problème (4.11) admet une solution unique*

$$v_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma) \langle f, \phi_n \rangle \phi_n}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}, \tag{4.12}$$

pour $\alpha > 0$ et $t \in [0, T]$.

De plus il existe une constante $\overline{c_5}$ telle que

$$\|v_\alpha(t)\| \leq \overline{c_5}\alpha^{\frac{-1}{k+1}} \|f\|, \quad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration. D'après le Théorème (4.3.1)

On considére le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma \nu_\alpha}{\partial t^\gamma} + Av_\alpha = 0, & 0 < t < T, \\ v_\alpha(0) = g_\alpha, \end{cases} \tag{4.13}$$

où $g_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n \rangle \phi_n}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}$.

Le problème (4.13) est bien-posé, sa solution est donnée par

$$v_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma) \langle f, \phi_n \rangle \phi_n}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}. \tag{4.14}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \alpha A^k v_\alpha(0) + v_\alpha(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha\lambda_n^k \langle f, \phi_n \rangle \phi_n}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)} + \frac{E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \langle f, \phi_n \rangle \phi_n}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\left[\left(\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right) \langle f, \phi_n \rangle\right] \phi_n}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\langle f, \phi_n \rangle\right] \phi_n = f. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Grâce à (4.15) et l'unicité de la solution du problème direct (4.13), on déduit que le problème (4.13) admet une solution unique v_α donnée par (4.12). Pour démontrer que v_α continûment de f, on calcule

$$\|v_\alpha(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\langle f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2$$

pour $k>0$ en utilisant les Lemmes (4.2.1) et (4.3.1) on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) &\geq \frac{\left(\alpha^{\frac{1}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k}{k+1}}\right)^{k+1}}{k+1} + \frac{k}{k+1}\left((E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma))^{\frac{k}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}}\\ &\geq \alpha^{\frac{1}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k}{k+1}}\left(E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right)^{\frac{k}{k+1}}\\ &\geq \alpha^{\frac{1}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k}{k+1}}\left(\overline{c_1}/\lambda_n\right)^{\frac{k}{k+1}} \geq \overline{c_1}^{\frac{k}{k+1}}\alpha^{\frac{1}{k+1}} \qquad (4.16)\end{aligned}$$

par conséquent, avec $k\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \geq \overline{c_6}\alpha^{\frac{1}{k+1}} \qquad (4.17)$$

comme $v_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\langle v_\alpha(0),\phi_n\rangle\phi_n$ et $0\leq E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\leq 1$ avec $\overline{c_5} = \frac{1}{\overline{c_6}}$ on obtient $\|v_\alpha(t)\| \leq \|v_\alpha(0)\| \leq \overline{c_5}\alpha^{\frac{-1}{k+1}}\|f\|$, $\forall t\in[0,T]$. □

Lemme 4.3.2. *Si $\|u(0)\|_p \leq E$ est vérifié pour certaines constantes posisives $p, E>0$ alors il existe des constantes c_7 et c_8 telles que*

$$\|u(0)-v_\alpha(0)\| \leq \begin{cases}\overline{c_7}\left(\alpha^{\frac{2p}{k+1}}E^2 + \alpha^{\frac{-2}{k+1}}\varepsilon^2\right) & si\ p<k+1,\\ \overline{c_8}\left(\alpha^2E^2 + \alpha^{\frac{-2}{k+1}}\varepsilon^2\right) & si\ p\geq k+1.\end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\|u(0)-v_\alpha(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle u(0)-v_\alpha(0),\phi_n\rangle^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\langle u(0),\phi_n\rangle - \frac{\langle f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\langle u(0),\phi_n\rangle - \frac{\langle u(T),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)} + \frac{\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\langle u(0),\phi_n\rangle - \frac{E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\langle u(0),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\lambda_n^k\langle u(0),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2 \qquad (4.18)\end{aligned}$$

D'après (4.17) et (4.18), nous avons

$$\|u(0)-v_\alpha(0)\|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\lambda_n^k\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle u(T)-f,\phi_n\right\rangle^2 \tag{4.19}$$

si $p<k+1$,en utilisant les Lemmes (4.2.1) et (4.3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) &\geq \frac{k+1-p}{k+1}\left(\left(\alpha\lambda_n^k\right)^{\frac{k+1-p}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k+1-p}}+\frac{p}{k+1}\left(\left(E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right)^{\frac{p}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{p}}\\ &\geq \alpha^{\frac{k+1-p}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k(k+1-p)}{k+1}}\left(E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right)^{\frac{p}{k+1}}\\ &\geq \alpha^{\frac{k+1-p}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k(k+1-p)}{k+1}}\left(\overline{c_1}/\lambda_n\right)^{\frac{p}{k+1}}\geq \overline{c_1}^{\frac{p}{k+1}}\alpha^{\frac{k+1-p}{k+1}}\lambda_n^{k-p}\end{aligned}$$

D'après (4.19) et de cette inégalité, nous avons

$$\|u(0)-v_\alpha(0)\|^2 \leq \overline{c_1}^{\frac{-p}{k+1}}\alpha^{\frac{2p}{k+1}}\lambda_n^{2p}\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\|u(T)-f\|^2$$

il existe donc une constante $\overline{c_7}$ telle que

$$\|u(0)-v_\alpha(0)\|^2 \leq \overline{c_7}\left(\alpha^{\frac{2p}{k+1}}+E^2+\alpha^{\frac{-2}{k+1}}\varepsilon^2\right)$$

si $p\geq k+1$, d'aprés (4.19) on obtient

$$\begin{aligned}\|u(0)-v_\alpha(0)\|^2 &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\lambda_n^k\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\|u(T)-f\|^2\\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\lambda_n^k\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle}{\frac{\overline{c_1}}{\lambda_n}}\right)^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\varepsilon^2\\ &\leq 2\left(\frac{1}{\overline{c_1}}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\lambda_n^{k+1}\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle\right)^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\varepsilon^2\\ &\leq 2\left(\frac{1}{\overline{c_1}}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\lambda_n^{k+1-p}\lambda_n^p\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle\right)^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\varepsilon^2\\ &\leq 2\left(\frac{1}{\overline{c_1}}\right)^2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\lambda_1^{k+1-p}\lambda_n^p\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle\right)^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\varepsilon^2\\ &\leq 2\left(\frac{\lambda_1^{k+1-p}}{\overline{c_1}}\right)^2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2p}\left\langle u(0),\phi_n\right\rangle^2+\frac{2\alpha^{\frac{-2}{k+1}}}{\overline{c_6}^2}\varepsilon^2\end{aligned}$$

□

Théorème 4.3.2. *Soient u la solution du problème inverse* (4.1) *et v_α est la solution du problème régularisé* (4.11) *satisfaisant*

$$\|u(0)\|_p \leq E, \quad p > 0, \quad E > 0 \tag{4.20}$$

les énoncés suivants sont vrais :

(i) Si $0 < p < k+1$, alors avec $\alpha = (\frac{\varepsilon}{E})^{\frac{k+1}{p+1}}$, il existe une constante c_1 telle que

$$\|u(t) - v_\alpha(t)\| \leq c_1 \varepsilon^{\frac{p}{p+1}} E^{\frac{1}{p+1}}, \forall t \in [0,T] .$$

(ii) Si $p \geq k+1$, alors avec $\alpha = (\frac{\varepsilon}{E})^{\frac{k+1}{k+2}}$, il existe une constante c_2 telle que

$$\|u(t) - v_\alpha(t)\| \leq c_2 \varepsilon^{\frac{k+1}{k+2}} E^{\frac{1}{k+2}}, \quad \forall t \in [0,T] .$$

Démonstration. On a

si $p < k+1$, d'après le Lemme (4.3.2), nous avons

$$\|u(0) - v_\alpha(0)\|^2 \leq \overline{c_7} \left(\alpha^{\frac{2p}{k+1}} + E^2 + \alpha^{\frac{-2}{k+1}} \varepsilon^2 \right)$$

à partir de

$$u(t) - v_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \langle u(0) - v_\alpha(0), \phi_n \rangle \phi_n \text{ et } 0 \leq E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \leq 1$$

on obtient

$$\|u(t) - v_\alpha(t)\|^2 \leq \overline{c_7} \left(\alpha^{\frac{2p}{k+1}} + E^2 + \alpha^{\frac{-2}{k+1}} \varepsilon^2 \right)$$

en choisissant $\alpha = (\frac{\varepsilon}{E})^{\frac{k+1}{p+1}}$ donc

$$\|u(t) - v_\alpha(t)\| \leq c_1 \varepsilon^{\frac{p}{p+1}} E^{\frac{1}{p+1}}, \forall t \in [0,T]$$

si $p \geq k+1$,de

$$u(t) - v_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \langle u(0) - v_\alpha(0), \phi_n \rangle \phi_n et 0 \leq E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \leq 1$$

d'après le Lemme (4.3.2),

nous avons

$$\|u(t)-v_\alpha(t)\|^2 \leq \overline{c_8}\left(\alpha^2+E^2+\alpha^{\frac{-2}{k+1}}\varepsilon^2\right)$$

en choissisant $\alpha=(\frac{\varepsilon}{E})^{\frac{k+1}{k+2}}$ donc

$$\|u(t)-v_\alpha(t)\| \leq c_2\varepsilon^{\frac{k+1}{k+2}}E^{\frac{1}{k+2}}, \forall t\in[0,T]$$

□

Théorème 4.3.3. *Soit $k\in\mathbb{N}, k\geq q>0$ si $u(t)$ est une solution du problème* (4.1) *satisfaisant* (4.20) *avec $p>q>0$ et $v_\alpha(t)$ est la solution du problème* (4.11) *alors avec $\alpha=(\frac{\varepsilon}{E})^{\frac{k+1}{p+1}}$ il existe des constantes c_6,c_7 telle que*

$$\|u(t)-v_{\alpha\varepsilon}(t)\|_q \leq \begin{cases} c_6\varepsilon^{\frac{p-q}{p+1}}E^{\frac{2}{p+1}} & si\ q<p\leq k+q+1 \\ c_7\left(\varepsilon^{\frac{k+1}{p+1}}E^{\frac{p-q}{p+1}}+\varepsilon^{\frac{p-q}{p+1}}E^{\frac{q+1}{p+1}}\right) & si\ p>k+q+1 \end{cases}$$

Démonstration. On a : $u(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle u(0),\phi_n\rangle\phi_n, v_\alpha(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle f,\phi_n\rangle\phi_n}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}$

nous avons

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v_\alpha(t)\|_q^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^q E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle u(0),\phi_n\rangle-\frac{\lambda_n^q E_{\gamma.1}(-\lambda_n t^\gamma)\langle f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^q\langle u(0),\phi_n\rangle-\frac{\lambda_n^q\langle f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^q\langle u(0),\phi_n\rangle-\frac{\lambda_n^q\langle u(T),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}+\frac{\lambda_n^q\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^q\langle u(0),\phi_n\rangle-\frac{\lambda_n^q E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\langle u(0),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}+\frac{\lambda_n^q\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\lambda_n^{k+q}\langle u(0),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}+\frac{\lambda_n^q\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2\\
&\leq 2\left(\frac{\alpha\lambda_n^{k+q}\langle u(0),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n^q\langle u(T)-f,\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2 \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

avec $k>q$,en utilisant les Lemmes (4.2.1) et (4.3.1) nous avons

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) &\geq \frac{q+1}{k+1}\left((\alpha\lambda_k^n)^{\frac{k+1}{q+1}}\right)^{\frac{k+1}{q+1}} + \frac{k-q}{k+1}\left((E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma))^{\frac{k-q}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k-q}} \\
&\geq \alpha^{\frac{q+1}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k(q+1)}{k+1}}\left(E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right)^{\frac{k-q}{k+1}} \\
&\geq \alpha^{\frac{q+1}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k(q+1)}{k+1}}\left(\frac{\overline{c_1}}{\lambda_n}\right)^{\frac{k-q}{k+1}} = \overline{c_1}^{\frac{k-q}{k+1}}\alpha^{\frac{q+1}{k+1}}\lambda_n^q
\end{aligned}$$

par conséquent,avec $k \geq q$,il existe une constante $\overline{c_8}$telle que

$$\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \geq \overline{c_8}\,\alpha^{\frac{q+1}{k+1}}\lambda_n^q \tag{4.22}$$

D'après (4.21) et (4.22) il existe une constante $\overline{c_9}$ telle que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v_\alpha(t)\|_q^2 &\leq 2\left(\frac{\alpha\lambda_n^{k+q}\langle u(0), \phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2 + \overline{c_9}\alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\|u(T) - f\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\alpha\lambda_n^{k+q}\langle u(0), \phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2 + \overline{c_9}\alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2 \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

si $q < p < k+1$, D'aprés les Lemmes (4.2.1) et (4.3.1) nous avons

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) &\geq \left(\left(\alpha\lambda_n^k\right)^{\frac{k+q+1-p}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k+q+1-p}} + \frac{p-q}{k+1}\left(\left(\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right)^{\frac{p-q}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{p-q}} \\
&\geq \alpha^{\frac{k+q+1-p}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k(k+q+1-p)}{k+1}}\left(E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)\right)^{\frac{p-q}{k+1}} \\
&\geq \alpha^{\frac{k+q+1-p}{k+1}}\lambda_n^{\frac{k(k+q+1-p)}{k+1}}\left(\frac{\overline{c_1}}{\lambda_n}\right)^{\frac{p-q}{k+1}} = \overline{c_1}^{\frac{p-q}{k+1}}\alpha^{\frac{k+q+1-p}{k+1}}\lambda_n^{k+q-p}
\end{aligned}$$

par conséquent,avec $q < p < k+q+1$, il existe une constante $\overline{c_{10}}$ telle que

$$\alpha\lambda_n^k + E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma) \geq \overline{c_{10}}\alpha^{\frac{2(k+q+1-p)}{k+1}}\lambda_n^{k+q-p} \tag{4.24}$$

De (4.23) et (4.24), nous concluons qu'il existe une constante $\overline{c_{11}}$ telle que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v_\alpha(t)\|_q^2 &\leq \overline{c_{11}}\left(\alpha^{2\frac{(p-q)}{k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2p}\langle u(0), \phi_n\rangle^2 + \alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2\right) \qquad (4.25) \\
&\leq \overline{c_{11}}\left(\alpha^{2\frac{(p-q)}{k+1}}E^2 + \alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

si $q > k+q+1$, D'aprés le Lemme (4.2.1) et (4.23), après quelques estimations,nous avons

$$\begin{aligned}\|u(t)-v_\alpha(t)\|_q^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{\alpha\lambda_n^{k+q}\langle u(0),\phi_n\rangle}{\alpha\lambda_n^k+E_{\gamma.1}(-\lambda_n T^\gamma)}\right)^2+\overline{c_{11}}\alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2 \\ &\leq \frac{2\alpha^2}{\overline{c_1}^2}\lambda_1^{2(k+q+1-p)}E^2+\overline{c_{11}}\alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{4.26}$$

De (4.23) et (4.24), on conclut qu'il existe une constante $\overline{c_{12}}$ telle que

$$\|u(t)-v_\alpha(t)\|_q^2 \leq \begin{cases} \overline{c_{11}}\left(\alpha^{\frac{2(p-q)}{k+1}}E^2+\alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2\right) \text{si } q<p\leq k+q+1 \\ \overline{c_{12}}\left(\alpha^2E^2+\alpha^{\frac{-2(q+1)}{k+1}}\varepsilon^2\right) \text{si } p>k+q+1 \end{cases}$$

En choisissant $\alpha=\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{k+1}{p+1}}$, on trouve :

$$\|u(t)-v_{\alpha\varepsilon}(t)\|_q \leq \begin{cases} c_6\varepsilon^{\frac{p-q}{p+1}}E^{\frac{2}{p+1}} \text{ si } q<p\leq k+q+1 \\ c_7\left(\varepsilon^{\frac{k+1}{p+1}}E^{\frac{p-q}{p+1}}+\varepsilon^{\frac{p-q}{p+1}}E^{\frac{q+1}{p+1}}\right) \text{ si } p>k+q+1. \end{cases}$$

□

CONCLUSION

Dans ce travail, on a étudié deux classes de problèmes mal posés. Dans la première classe, on a étudié un problème inverse parabolique abstrait. L'approche utilisée dans cette analyse est basée sur la méthode de régularisation de Tikhonov modifiée, où des résultats de stabilisation et de régularisation ont été obtenus. Quant à la deuxième classe, elle comporte à l'étude de problème parabolique fractionnaire en temps, on a déterminé la condition initiale à partir de la condition finale en utilisant la méthode des condition aux limites auxiliaires modifiée qui nous a permis la régularisation de notre problème et l'obtention d'une estimation ‹‹holderienne, logarithmique››du taux de convergence de la méthode. La méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée a été largement expérimentée et donne des approximations des solutions précises avec beaucoup d'avantages comme la simplicité du calcul.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. S. Abdulkerimov. Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat., 1(1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).

[2] Al-Jamal M f 2017 A backward problem for the time-fractional diffusion equation math.Methods Appl.sci.40 2466-74.

[3] Buong, N. : On a monotone ill-posed problem. Acta Mathematica Sinica, English Series, 21(5), 1001–1004 (2005).

[4] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, Inverse Problems 21, 1087-1104, (2005).

[5] N. Boussetila. Thèse de Doctorat : Etude de problèmes non locaux et régularisation de problèmes mal posés en EDP, (2005).

[6] H. Brezis. Analyse Functionnelle Théorie et applications MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).

[7] [23] Carasso, A. : Determining surface temperature from interior observations. SIAM J. Appl. Math., 42, 558–574 (1982).

[8] Dang, D. T., Nguyen, N. I. : Regularization and error estimates for nonhomogeneous heat problems. Electron. J. Differential Equations, 1, 1–10 (2006).

[9] H.W. Engel, M. Hanke & A. Neubauer, Regularization of inverse problems, Kluwer Academic, (2000).

[10] Evans, L. C. : Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998 [20] Abramowitz, M., Stegun, I. A. : Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1972.

[11] Fatullayev AG. Numerical solution of the inverse problem of determining an unknown source term in a heat equation. Mathematics and Computers in Simulation 2002 ; 58 :247–253.

[12] J. Hadamard. Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations,Yale Uni Press, New Haven, (1923).

[13] D.N. Hào, V.D. Nguyen and H. Sahli. A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time, J. Math. Anal. Appl., 345(2008), 805-815.

[14] V. Isakov, Inverse problems for partial differential equations, Springer-Verlag (2006).

[15] Jiang, L. S., Chen, Y. J., Liu, X. H., Yi, F. K. : Lectures on Equation of Mathematical Physics (in Chinese), Higher Education Press, Beijing, 1995.

[16] Jin B and Rundell W 2015 ATutorial on invers problems for anomalous diffusion processes Inverse problems 31 28.

[17] T. Kato. Perturbation theory for linear operators, University of california, berkely,berlin Heidelberg New york, (1980).

[18] K.A. Ames, J.F. Epperson, A kernel-based method for the approximate solution of backward parabolic problems, SIAM J. Numer. Anal. (1997) 1357–1390.

[19] kilbas AA,Srivastava HM and Trujillo, THeory and Applications of fractional Dfferential Equations,(Amsterdam :Elsevier),2006.

[20] Khelili Besma, Sur quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problèmes de Cauchy inverses. Thèse de Doctorat,université Badji Mokhtar annaba, 2018.

[21] M. Kern. Problèmes inverses aspects numériques. Lecture, école superieure d'ingénieurs Léonard de vinci, (2002-2003).

[22] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation, Comput. Math. Phys. 31, 45-52, (1991).

[23] M.V. Klibanov, F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation, SIAM J. Appl. Math. 51, 1653-1675, (1991).

[24] Kirsch, A. : An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer, New York, 1996.

[25] A. Kirsch, An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer (2011).

[26] R. Lattès, J.L. Lions. Méthode de Quasi-réversibilité et Applications, Dunod, (1967).

[27] Liu JJ and Yamamoto M A backward problem for the time-fractioonal diffusion equation Appl. Anal, 2010, 89 1769-88.

[28] podlubny I, Fracional Differential Equatins :an Introduction to fractional Derivatives, Fractional Differential equations,to Methods of their solution and som of their applications,(New York :Academic), 1999.

[29] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky & I.A. Vasin, Methods for solving inverse problems in mathematical physics, p. cm.Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 222, Marcel Dekker (2000).

[30] Lakhdari, N, Boussetila, N : An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem, Boundary Value Problems 2015, 2015 :55.

[31] Lakhdari, A. and Boussetila, N. (2015) An Iterative Regularization Method for an Abstract Ill-Posed Biparabolic Problem. Boundary Value Problems, 55, 1-17. http ://dx.doi.org/10.1186/s13661-015-0318-4.

[32] M. T. Nair. Linear operator equations : approximation and regularization. World Scientific, (2009).

[33] Sakamoto K and Yamamoto M 2011 Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems J. Math. Anal. Appl. 382 426–47.

[34] K. Sakamoto, M. Yamamoto, Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, J. Math. Anal. Appl. 382 (1) (2011) 426–447.

[35] A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Walter de Gruyter Berlin New York, (2007).

[36] R. E. Showalter, “The final value problem for evolution equations,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 47, no. 3, pp. 563–572, 1974.

[37] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. Solutions of Ill-posed Problems, Winston and Sons, (1977).

[38] N.Ja.Vilenkin. Functional analysis, Wolters-Noordhoff Publishing, (1972).

[39] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. Introduction à l'analyse fonctionnelle. Les Presses de l'Université du Québec, (1981).

[40] Wang l and Liu J 2012 Data regularization for a backward time-fracional diffusion problem comput.Math.Appl.64 3613–26.

[41] Wang l and Liu J 2013 Total variation regularization for a backward time-fractional diffusion problem Inverse problems 29 115013.

[42] Wang J G,Wei T and Zhou YB 2015 Optimal error bound and simplified Tikhonov regularization method for a backward problem for the time-fracional diffusion equation Jcomput.Appl.Math.279 277–92.

[43] Wang J G, Zhou Y B and Wei T 2013 A posteriori regularization parameter choice rule for the quasi-boundary value method for the backward time-fraction diffusion problem Appl. Math. Lett. 26 741–7

[44] Wei CHENG, Chu Li FU, OM : A Modified Tikhonov Regularization Method for an Axisymmetric Backward Heat Equation, Acta Mathematica Sinica, English Series, Nov., 2010, Vol. 26, No. 11, pp. 2157–2164.

[45] Yang M and Liu J 2013 Solving a final value fractional diffusion problem by boundary condition regularization Appl. Numer. Math. 66 45–58.