

Université 20 Août 1955-Skikda

Faculté des Sciences

Département : Physique

Ref :



جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة

كلية العلوم

قسم الفيزياء

المرجع

Thèse  
Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
**Doctorat en sciences**  
Spécialité  
**Physique : Energétique**

**Titre**

**Transfert thermique lors de la solidification  
et la fusion des matériaux à changement  
de phase**

Présentée par :

**Bouteldja Mounir**

Soutenue publiquement le 12 / 11 / 2020

**Devant le jury composé de :**

Mr Omeiri Djamel	Pr	Président	Université du 20 Août 1955 Skikda
Mr Mezaache El Hacene	Pr.	Rapporteur	Université du 20 Août 1955 Skikda
Mr Djezzar Mahfoud	Pr.	Examineur	Université Constantine 1
Mr Laouar Salah	Pr.	Examineur	Université de Oum El Bouagui
Mr Mebarek Oudina Fateh	MC A	Examineur	Université du 20 Août 1955 Skikda
Mr Taibi Tahar	MC A	Examineur	Université Bordj Bouariridj

## **Remerciements**

*Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Recherche sur la Physico-chimie des Surfaces et Interfaces (LRPCSI) de l'Université 20 août 1955 Skikda.*

*Je remercie vivement mon directeur de thèse, monsieur El Hacène MEZAACHE, professeur à l'Université 20 août 1955 Skikda, pour sa confiance, pour sa patience, pour ses conseils et pour son aide.*

*Je remercie infiniment Monsieur Djamel Omeiri, professeur à l'Université 20 août 1955 Skikda, de m'avoir fait l'honneur d'être président du jury de la soutenance*

*Mes sincères remerciements vont aux honorables membres du jury que malgré leurs nombreuses obligations ont accepté d'examiner ce modeste travail et de participer à ma soutenance de thèse. Je leurs exprime mes sincères reconnaissances.*

*A Monsieur Mahfoud DJEZZAR professeur à Université Constantine 1.*

*A Monsieur Salah LAOUAR, Professeur à l'Université de Oum El Bouaghi.*

*A Monsieur Fateh MEBAREK OUDINA, Maître de Conférences à l'Université 20 août 1955 Skikda*

*A Monsieur Tahar TAIBI, Maître de Conférences à l'Université Bordj Bou-Arréridj.*

*Egalement, à Monsieur Abdelghani LAOUER, Maître de Conférences à l'Université de Jijel, pour ses conseils, ses soutiens et pour son aide.*

*Sont nombreux ceux qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail de thèse, je tiens donc à remercier tous.*

## ***Dédicaces***

*Après Dieu, le tout puissant,*

*Je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon père, mon maître dans cette vie qui m'a toujours fait et dit de me prioriser les études. Que Dieu, le miséricordieux, l'accueille dans son vaste et éternel paradis.*

*À ma mère,*

*À ma petite famille, Ma femme,*

*À Mon enfant Abderrahmane.*

*À mes frères et sœurs.*

*À toute ma famille.*

*À mes amis.*

*A mes collègues de travail.*

## النقل الحراري أثناء التصلب والانصهار لمواد متغيرة الطور

### ملخص

المواد المتغيرة الطور (MCP) تستعمل في العديد من المجالات الصناعية من أهمها: التعدين، الصناعات الإلكترونية، الصناعات الغذائية، عند العزل، التكييف والتخزين الحراري...

في هذا العمل قمنا بدراسة حركية لعملية التصلب والانصهار الداخلي أثناء انتقال المادة من حالتها الأساسية السائلة إلى الحالة الصلبة والعكس داخل تجويف يحتوي على مادة قابلة للتغيير. وتعتمد الدراسة على نموذج فيزيائي ثنائي الأبعاد مع الأخذ بعين الاعتبار النقل الحراري عن طريق الحمل الطبيعي والتوصيل الحراري.

في هذا التطبيق، استخدم الماء والعديد من المواد متغيرة الطور، مخزنة في تجويف مستطيل الشكل الهندسي ذو نسبة الارتفاع  $A$ . على سطوح التجويف طبقت على يسار التجويف درجة حرارة ساخنة وعلى يمينه درجة حرارة باردة، في حين تعتبر الأسطح العلوية والسفلية معزولة حرارياً.

تم حل معادلات النموذج الفيزيائي عددياً باستخدام طريقة الحجم المنتهية واعتماداً على البحوث العلمية تم التحقق من صحة النتائج المحصل عليها، بالمقارنة مع المعطيات التجريبية و العددية المنشورة .

في الدراسة العددية قمنا باستخدام الحلول عن طريق برنامج حساب بناءً على طريقة الحجم المنتهية. حيث تم توضيح الظاهرتان الفيزيائيتان كل من : الحمل الحراري الطبيعي في المنطقة السائلة والتوصيل في المادة الصلبة.

يعتمد تحديد آليات النقل أثناء التصلب على دراسة رقمية باستخدام المعلمات التي تتحكم في الظاهرة الفيزيائية، وهو عدد  $Grashof$  ونسبة الارتفاع التجويف  $A$ . وهكذا كان من الممكن أن نرى من خلال مجالات درجة الحرارة والسرعة وعدد نسلت  $Nu$  ، وتطور كميات النقل وتأثير معلمات التحكم على هذه الظواهر.

من وجهة النظر الأساسية والعملية ، تساعد هذه الدراسة على فهم أفضل لظاهرتي التصلب والانصهار. حيث انه سيكون بمثابة مساهمة في تصميم أنظمة التخزين الحراري أو عموماً لجميع الأنظمة التي تستخدم مواد متغيرة الطور للحالات الصلبة و السائلة.

**كلمات البحث:** المواد المتغيرة الطور ، التصلب ، الانصهار ، المرحلة الانتقالية ، النمذجة ، طريقة الحجم المنتهية ، طريقة المحتوى الحراري. تخزين الحرارة ، مبادل حراري

# Transfert thermique lors de la solidification et de la fusion des matériaux à changement de phase

## Résumé

Les matériaux à changement de phase (MCP) sont rencontrés dans de nombreux domaines industriels. En métallurgie : solidification et fusion des métaux purs et des alliages ; en industries électroniques : fabrication des composants ; en agro-alimentaire : séchage et conditionnement ; dans l'habitat : isolation et stockage thermique de la chaleur et du froid, rafraîchissement des habitats, ...

Dans ce travail, nous étudions la cinétique du phénomène de changement de phase liquide - solide (solidification) et solide-liquide (fusion) au sein d'une cavité contenant un matériau à changement de phase. La modélisation physique repose sur une approche bidimensionnelle basé sur la méthode enthalpique et tenant compte du transfert couplé conducto-convectif.

Plusieurs matériaux à changement de phase ont été utilisés : eau, gallium, MCP organique, possédant différents nombres de Prandtl. La cavité est de géométrie rectangulaire ayant un rapport d'aspect  $A$  et dont les surfaces gauche et droite sont maintenues respectivement aux températures chaude et froide alors que les surfaces supérieure et inférieure sont considérées adiabatiques.

Les équations du modèle physique sont résolues numériquement à l'aide de la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus sont validés avec des résultats expérimentaux et numériques de la littérature.

Une étude numérique utilisant les solutions par programme de calcul basée sur la méthode des volumes finis, est rapportée. Deux phénomènes sont distingués la convection naturelle dans la région liquide et la conduction dans le solide.

L'identification des mécanismes de transfert lors de la solidification repose sur une étude numérique utilisant les paramètres de contrôle du phénomène physique, à savoir le nombre de *Grashof* et le rapport d'aspect de la cavité. On a pu ainsi voir à travers les champs de température, de vitesse et le nombre de *Nusselt*, l'évolution des grandeurs de transferts et l'influence des paramètres de contrôle sur ces phénomènes.

D'un point de vue fondamental que pratique, cette étude aide à mieux comprendre le phénomène de solidification et de fusion. Elle servira comme contribution pour la conception des systèmes de stockage du froid ou d'un ordre plus général pour tous les systèmes utilisant un matériau à changement de phase liquide-solide.

**Mots-clés :** *MCP, solidification, fusion, transition de phase, modélisation, volumes finis, méthode enthalpique. Stockage de chaleur, échangeur de chaleur,*

# Heat transfer during solidification and fusion of phase change materials

## Abstract

The phase change materials (PCM) are encountered in many industrial fields. Metallurgy: Melting and solidification of pure metals and alloys; in electronic industries: manufacturing components; in food: drying and packaging, in the home: insulation and thermal storage of heat and cold, refreshing habitats, ...

In this work, we study the kinetics of liquid-solid phase change by solidification, and solid-liquid by melting within a cavity and containing a phase change material. Physical modeling is based on a two-dimensional approach based on the enthalpic method and taking into account coupled conducto-convective transfer. Several phase-change materials were used: water, gallium, organic MCP, with different Prandtl numbers. The cavity is of rectangular geometry having an aspect ratio  $A$  and whose left and right surfaces are maintained respectively at hot and cold temperatures while the upper and lower surfaces are considered adiabatic.

The physical model equations are solved numerically using the finite volume method. The results are validated with experimental and numerical results of the literature. A numerical study using the solutions by calculation program code, which is based on the finite volume method, is reported. Two phenomena are distinguished natural convection in the liquid region and conduction in the solid.

The identification of mechanisms of transfer during solidification and melting is based on a numerical study using the control parameters of the physical phenomenon, namely the Grashof number and the aspect ratio of the cavity. Thus, it was possible to see through the fields of temperature, velocity and Nusselt number, the evolution of the transfer parameters and their effects on these phenomena.

From a fundamental point of view, this study helps to better understand the phenomenon of solidification and melting. It will serve for the design of cold storage systems and in general for all systems using a material phase change liquid-solid.

**Keywords:** PCM, solidification, melting, phase transition, modeling, finite volumes, enthalpic method. heat storage, heat exchanger,

## ***Liste des Figures***

**Figure I.1 :** Représentation du PCM multi-couche [20].

**Figure I.2 :** Représentation rectangulaire multi-couche [21].

**Figure I.3 :** Montage de l'expérience utilisé, [27].

**Figure I.4 :** Echangeur MCP, [28].

**Figure II.1 :** Géométrie du problème physique

**Figure III.1 :** Volume de contrôle typique.

**Figure III.2 :** Volume de contrôle et coordonnées des nœuds

**Figure III.3 :** Algorithme de calcul.

**Figure III.4 :** Variations des composante de la vitesse pour  $Gr = 3,6 \cdot 10^5$  et différents maillages au milieu d'une cavité carrée ( $A=1$ ) : (a) composante verticale  $V$ , (b) composante horizontale  $U$ .

**Figure III.5 :** Comparaison des profils longitudinaux de la température adimensionnelle avec les données expérimentales de *Beckermann* et *Viskanta* [37]. (a)  $t = 10$  min, (b)  $t = 50$  min.

**Figure III.6 :** Comparaison des lignes isenthalpiques, (a) résultats numériques [39] ; (b) présente étude pour  $Gr = 8,5 \times 10^4$

**Figure III.7 :** Comparaison des isothermes : (a) entre les résultats numériques [39] ; (b) présente étude pour  $Gr = 8,5 \times 10^4$

**Figure III.8 :** Comparaison des isocourants : (a) entre les résultats numériques [39] ; (b) présente étude pour  $Gr = 8,5 \times 10^4$

**Figure IV.1 :** Schéma du problème physique.

**Figure IV.2 :** Isothermes (a) et isoenthalpies (b) pour  $Gr = 0$ ,  $A=4$

**Figure IV.3 :** Isothermes associées aux lignes de courants pour différents nombres de Grashof,  $A=1$

**Figure IV.4 :** Variations des composantes de la vitesse adimensionnelle : (a) composante horizontale  $U$  et (b) composante verticale  $V$ , pour  $X = 0,5$  et  $Y = 0,5$ ,  $A=1$

**Figure IV.5 :** Nombre de Nusselt moyen le long des parois verticales chaude et froide pour différents nombres de Grashof : (a)  $Gr = 10^5$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^5$ ,  $A=1$

**Figure IV.6 :** Variation axiale de la température adimensionnelle  $\theta$  au milieu d'une cavité carrée ( $A=1$ ) pour  $Gr = 10^5$ ,  $8 \cdot 10^5$

**Figure IV.7 :** Lignes de courant en régime stationnaire pour une cavité carrée, (a)  $Gr = 10^5$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^5$

**Figures IV.8 :** Fraction liquide en régime stationnaire pour une cavité carrée, (a)  $Gr = 10^5$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^5$

**Figure IV.9 :** Isothermes, en régime stationnaire pour une cavité carrée, (a)  $Gr = 10^5$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^5$

**Figure IV.10 :** Représentation en régime stationnaire pour une cavité rectangulaire,  $A=4$ ,  $Gr = 10^5$  (a) lignes de courant, (b) fraction liquide, et (c) isothermes,

**Figure IV.11 :** Représentation en régime stationnaire pour une cavité rectangulaire,  $A=4$ ,  $Gr = 8 \times 10^5$  (a) lignes de courant, (b) fraction liquide, et (c) isothermes,

**Figure IV.12 :** Isothermes associées aux lignes de courant pour différents rapports d'aspect  $A=0.5$ , (b)  $A=0.75$ , (c)  $A=1$ , (d)  $A=2$ , (e)  $A=3$ , (f)  $A=4$ .

**Figure IV.13 :** Profils de la composante horizontale de la vitesse (a) et de la température (b) au milieu de la cavité pour différents rapports d'aspect  $A$ .

**Figure IV.14 :** Structure des isothermes adimensionnelles pour différentes valeurs du nombre de Grashof : (a)  $Gr = 10^4$ , (b)  $Gr = 5 \cdot 10^5$ , (c)  $Gr = 10^6$  et (d)  $Gr = 5 \cdot 10^6$ .

**Figure IV.15 :** Structure des lignes de courant adimensionnelles pour différentes valeurs du nombre de Grashof : (a)  $Gr = 10^4$ , (b)  $Gr = 5 \cdot 10^5$ , (c)  $Gr = 10^6$  et (d)  $Gr = 5 \cdot 10^6$ .

**Figure IV.16 :** Structure de la fraction liquide pour différentes valeurs du nombre de Grashof : (a)  $Gr = 10^4$ , (b)  $Gr = 5 \cdot 10^5$ , (c)  $Gr = 10^6$  et (d)  $Gr = 5 \cdot 10^6$ .

**Figure V.1 :** Problème physique.

**Figure V.2 :** Evolution temporelle des isothermes : (a)  $t = 10$  min, (b) 20 min, (c) 30 min, (d) 40 min, (e) 50 min, (f) 60 min.

**Figure V.3 :** Evolution temporelle du front de fusion (couleur rouge : fraction liquide, bleu : fraction solide), (a)  $t = 10$  min, (b) 20 min, (c) 30 min, (d) 40 min, (e) 50 min, (f) 60 min.

**Figure V.4 :** Distribution des lignes de courants adimensionnelles pour un temps  $\tau = 0,285$  et pour différents nombres de Grashof  $Gr$  : (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$ , (d)  $10^6$ .

**Figure V.5 :** Evolution de la densité maximale des lignes de courants en fonction du nombre de Grashof.

**Figure V.6 :** Distribution de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.7 :** Distribution de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.8 :** Distribution de la composante horizontale  $U$  de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.9 :** Distribution de la composante verticale  $V$  de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.10 :** Front de fusion adimensionnel pour  $\tau = 0,285$ , et différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.11 :** Front de fusion en fonction des coordonnées d'espace à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.12 :** Distribution de la température adimensionnelle au milieu de la cavité ( $Y/2$ ) à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

**Figure V.13 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 0.25$ .

**Figure V.14 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 0.5$ .

**Figure V.15 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 0.75$ .

**Figure V.16 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant,  $A = 1$ .

**Figure V.17 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 2$ .

**Figure V.18 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 3$ .

**Figure V.19 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $fl$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 4$ .

**Figure V.20 :** Evolution de  $\|\phi_{\max}\|$  en fonction du rapport d'aspect.

**Figure V.21 :** Profil de la température adimensionnelle en fonction du rapport d'aspect  $A$  (0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3, 4) pour :  $Gr = 10^3$ .

## ***Liste des Tableaux***

**Tableau III.1** : Variables et coefficients des équations adimensionnelles,

**Tableau III.2** : Valeur de la fonction  $A(|P|)$  pour différents schémas,

**Tableau III.3** : nombre de *Nusselt* moyen et fonction de courant maximale pour différents maillage

**Tableau III.4** : Propriétés physiques du gallium pur (Cerimele et al. [38]),

**Tableau III.5** : Propriétés physiques de l'aluminium [39],

**Tableau IV.1** : Propriétés physiques de l'eau [31],

**Tableau IV.2** : Propriétés thermo physiques du matériau organique simulé RT27<sup>®</sup> [41],

**Tableau V.1** : lignes de courant en fonction de nombre de *Grashof*,

**Tableau V.2** : lignes de courant en fonction du rapport d'aspect  $A$ .

# TABLES DE MATIERE

<b>Remerciements</b> .....	i
<b>Liste des figures</b> .....	iii
<b>Liste des tableaux</b> .....	vi
<b>Nomenclature</b> .....	vii
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre I : Etude bibliographique</b> .....	3
<b>Chapitre II : Modélisation mathématique</b>	
II.1 Introduction.....	12
II.2 Problème physique.....	12
II.3 Formulation mathématique.....	13
II.3-1 Hypothèse simplificatrice .....	13
II.3-2 Formulation des équations du transport.....	14
II.4 Equations du problème sous forme adimensionnelle.....	16
II.4.1 Equations adimensionnelles.....	18
II.4.2 Conditions initiales et aux limites.....	19
<b>Chapitre III : Méthode numérique et validations</b>	
III .1 Simulation numérique par programme de calcul.....	21
III.1.1 Equations générales de transport.....	21
III.1.2 Formulation générale du problème.....	27
III.1.3 Maillage.....	28
III.1 .4 Discrétisation des équations de conservation.....	29
III.1.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X.....	30
III.1.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y.....	31
III.1.7 Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	32
III.1.8 Résolution du système d'équations.....	33

III.1.9 Algorithme SIMPLE.....	33
III.1.10 Critère de convergence.....	34
III.1.11 Algorithme de calcul.....	36
III.2 Validation numérique .....	37
III.2.1 Effet du maillage sur la solution numérique.....	37
III.2.2 Validation avec des données expérimentales et numériques.....	39
III.2.2.1 Validation avec les données expérimentales .....	39
III.2.2.1 Validation avec les résultats numériques.....	41
<b>Chapitre IV : Solidification des matériaux à changement de phase</b>	
IV.1 Présentation des résultats .....	44
IV.2 Système physique étudié.....	44
IV.3 Cas de la solidification de l'eau.....	45
IV.3. 1-Effet du nombre de Grashof.....	46
IV.3. 2- Effet du rapport d'aspect ou rapport de forme.....	56
IV.4 - Cas de la solidification de La Paraffine RT27 <sup>®</sup> (Rubitherm <sup>®</sup> ).....	59
<b>Chapitre V : Fusion des matériaux à changement de phase</b>	
V.1 -Introduction .....	64
V.2- Formulation du problème de fusion .....	65
V.3 - Discussions des résultats .....	66
V.4 -Etude de l'influence des paramètres de contrôle.....	70
V.4.1- L'effet du nombre de Grashof.....	70
V.4.2- L'effet du rapport d'aspect .....	79
<b>Conclusion</b> .....	88
<b>Références bibliographiques</b> .....	90
<b>Annexes</b> .....	94

## Nomenclature

$A$	rapport d'aspect	-
$a$	élément de la matrice tridiagonale	-
$A P $	fonction d'un schéma numérique	-
$b$	élément de la matrice tridiagonale	-
$C$	rapport des chaleurs spécifiques	-
$c$	élément de la matrice tridiagonale	-
$cp$	chaleur spécifique à pression constante	j/kg.K
$D$	terme de diffusion dans l'équation de discrétisation	-
$dv$	volume infinitésimal	m <sup>3</sup>
$dx$	distance entre deux nœuds consécutifs du maillage suivant $x$	m
$dy$	distance entre deux nœuds consécutifs du maillage suivant $y$	m
$\vec{e}_x$	vecteur unitaire suivant $x$	-
$\vec{e}_y$	vecteur unitaire suivant $y$	-
$F$	terme de convection dans les équations de discrétisation	-
$F_i$	fraction du liquide	-
$g$	accélération de la pesanteur	m/s <sup>2</sup>
$H$	hauteur de la cavité	m
$\bar{H}$	Enthalpie de changement de phase	J/kg
$h$	enthalpie sensible	J/kg
$h_h$	enthalpie sur la paroi chaude	J/kg
$h_c$	enthalpie sur la paroi froide	J/kg
$i$	indice des nœuds dans la direction $x$	-
$i_l$	nombre de nœuds du maillage dans la direction $x$	-
$j$	indice des nœuds dans la direction $y$	-
$k$	conductivité thermique	W/m.K
$K$	conductivité thermique adimensionnelle	-
$L$	chaleur latente de fusion	J/kg
$L_d$	longueur de la cavité	m
$p$	pression	N/m <sup>2</sup>
$P$	pression adimensionnelle	-

$\dot{q}$	génération de chaleur volumique	W/m <sup>2</sup>
$q_j$	densité de flux de chaleur	W/m <sup>2</sup>
$S$	terme source de l'équation d'énergie	-
$S_\phi$	terme source d'une variable dépendante $\phi$	-
$T$	Température	K
$T_h$	température de la paroi chaude	K
$T_c$	température de la paroi froide	K
$T_m$	température de fusion	K
$T$	Temps	S
$U$	vitesse horizontale adimensionnelle	-
$u$	vitesse horizontale	m/s
$V$	vitesse verticale adimensionnelle	-
$v$	vitesse verticale	m/s
$V$	vecteur vitesse	m/s
$X$	coordonnée horizontale adimensionnelle	-
$x$	coordonnée horizontale	m
$Y$	coordonnée verticale adimensionnelle	-
$y$	coordonnée verticale	m

### Symboles Grecs

$\alpha$	diffusivité thermique	m <sup>2</sup> /s
$\Gamma$	coefficient général de diffusion	-
$\Delta V$	dimension d'un volume de contrôle	m <sup>3</sup>
$\Delta X$	dimension d'un volume de contrôle suivant $x$	m
$\Delta Y$	dimension d'un volume de contrôle suivant $y$	m
$\Delta \tau$	incrément adimensionnel du temps	-
$\phi$	variable générale	-
$\theta$	température adimensionnelle	-
$\tilde{h}$	enthalpie adimensionnelle	-
$\mu$	viscosité dynamique	Kg/ms

$\nu$	viscosité cinématique	$\text{m}^2/\text{s}$
$\rho$	masse volumique	$\text{Kg}/\text{m}^3$
$\xi$	terme de Darcy	$\text{Kg}/\text{m}^3\text{s}$
$\zeta$	terme adimensionnel de Darcy	-
$\sigma_{ij}$	contrainte de déformation	$\text{N}/\text{m}^2$
$\tau_{ij}$	contraintes visqueuses	$\text{N}/\text{m}^2$
$\tau$	temps adimensionnel	-
$\Phi$	fonction de dissipation	$\text{W}/\text{m}^3$
$\varphi$	fonction de courant adimensionnelle	-

### Indices

$c$	paroi froide
$h$	paroi chaude
$E$	nœud considéré du côté Est du nœud P
$e$	face Est du volume de contrôle considéré
$N$	nœud considéré du côté Nord du nœud P
$n$	face Nord du volume de contrôle considéré
$P$	nœud considéré du maillage
$S$	nœud considéré du côté Sud du nœud P
$s$	face Sud du volume de contrôle considéré
$w$	face Ouest du volume de contrôle considéré
$W$	nœud considéré du côté Ouest du nœud P

### Opérateurs mathématiques

$\nabla$	Gradient
$\Delta$	Laplacien
$d$	dérivée totale
$\partial$	dérivée partielle
$div$	Divergence

## Nombres adimensionnels

$Pr$	nombre de <i>Prandtl</i>
$Gr$	nombre de <i>Grashof</i>
$Nu$	nombre de <i>Nusselt</i> local
$\overline{Nu}$	nombre de <i>Nusselt</i> moyen
$Ste$	nombre de <i>Stéfan</i> .

## Exposants

$n+1$	correspond au temps $\tau + \Delta\tau$
$n$	correspond au temps $\tau$

---

## Introduction

Les matériaux à changement de phase (MCP) sont rencontrés dans divers domaines industriels. En métallurgie : solidification et fusion des métaux purs et des alliages ; en industries électroniques : fabrication des composants ; en agro-alimentaire : séchage et conditionnement ; dans l'habitat : isolation et stockage thermique de la chaleur et du froid, rafraîchissement des habitats, ....

Ainsi, la récupération de chaleur rejetée par des procédés industriels, le stockage d'énergie solaire durant le jour et le stockage d'énergie électrique pour délester le problème de pointe en utilisant des systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion d'un matériau à changement de phase représentent des moyens efficaces pour économiser de l'énergie dont sa consommation est en croissance permanente. En effet, plusieurs pays ont investi dans le stockage du froid par chaleur latente.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la cinétique du phénomène de solidification interne lors d'un changement de phase liquide-solide au sein d'une cavité. Malgré sa complexité, la modélisation physique repose sur une approche bidimensionnelle. Cette approche est valable pour le cas de la configuration géométrique considérée. Celle-ci consiste en une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A$ , suffisamment large pour pouvoir négliger les effets de bords et admettre que les grandeurs physiques dépendent des deux seules variables d'espace  $(x, y)$ .

Vu la complexité de résolution analytique, la solution est obtenue numériquement. Différentes méthodes numériques sont évoquées dans la littérature, à savoir : (1) les méthodes des différences finies ou volumes finies. Ces méthodes ne sont pas adaptées aux cas limites du phénomène de changement de phase : milieu complètement solide ou complètement liquide. (2) La formulation enthalpique est la plus utilisée, vu sa généralité aux problèmes multidimensionnels et elles ne nécessitent pas de connaître la cinétique de l'interface.

Afin de mieux connaître et d'identifier les mécanismes de transfert de chaleur dans les phases solide et liquide d'un matériau à changement de phase, nous avons opté pour un modèle basé sur la formulation enthalpique. Ce modèle a été testé et vérifié par plusieurs auteurs dans la littérature citée dans la partie bibliographique.

La modélisation physique basée sur la formulation enthalpique, nous a permis de résoudre les équations du modèle dans le cas bidimensionnel, et de valider nos résultats par des travaux expérimentaux et numériques. La thèse est rédigée en cinq chapitres qui se résument comme suit :

Le premier chapitre présente une étude bibliographique portant sur les deux phénomènes réciproques et leurs états d'équilibre à savoir la solidification et la fusion des matériaux à changement de phase, afin de connaître les mécanismes de transfert de chaleur dans les phases solide et liquide de différents types de MCP. Nous citons également les différentes méthodes numériques et analytiques évoquées dans la littérature.

Le chapitre 2 est une description détaillée du modèle physique entrepris dans notre étude, ainsi que les différents MCP utilisés, les propriétés physico-chimiques, les conditions initiales et aux limites.

Le chapitre 3 présente la solution numérique appliquée pour résoudre le système des équations aux dérivées partielles, par l'élaboration d'un code de calcul, basé sur la formulation enthalpique choisie. Cette méthode est détaillée dans ce chapitre ainsi que l'algorithme de calcul. Ce chapitre traite également, l'effet du maillage et son adaptation au phénomène de changement de phase. Deux validations sont présentées par comparaison avec des résultats expérimentaux et numériques de la littérature.

Le chapitre quatre présente les résultats numériques discutant le phénomène de la solidification des matériaux régissant le transfert thermique avec changement de phase solide-liquide. Les résultats numériques présentés traitent la situation physique et l'influence des paramètres de contrôle du phénomène représenté par le nombre de *Grashof* caractérisant la convection naturelle, ainsi que l'influence du facteur de forme A de la cavité.

Le dernier chapitre traite le phénomène inverse qui est la fusion des matériaux à changement de phase par l'application de la formulation enthalpique utilisée pour localiser et contrôler le front de fusion pour les différents matériaux (MCP organique, eau et aluminium).

## ***CHAPITRE I***

### **Etude bibliographique**

#### **Introduction**

Le niveau de plus en plus élevé d'émissions des gaz à effet de serre associée à la hausse globale des prix des carburants même si les fluctuations se produisent sont les principales raisons derrière les efforts consacrés à améliorer l'utilisation des différentes sources d'énergie de préférences renouvelables.

Actuellement, les spécialistes de la science de la thermique et énergétique sont à la recherche :

- des stratégies visant à réduire la demande d'énergie.
- des techniques pour accroître l'efficacité énergétique des systèmes.
- des sources d'énergie nouvelles et renouvelables pour remplacer les combustibles fossiles limitées et nuisibles.
- des méthodes pour assurer la sécurité des approvisionnements.

L'une des options pour améliorer l'efficacité énergétique est de développer des dispositifs de stockage d'énergie afin de réduire l'inadaptation entre l'offre et la demande. De tels dispositifs et systèmes améliorent également les performances et la fiabilité en réduisant les charges de pointe permettant de travailler dans une plage optimale et peu coûteuse. Ainsi, ils jouent un rôle prépondérant dans la conservation de l'énergie qui peut être stockée sous différentes formes : mécanique, électrique et thermique.

Le stockage d'énergie est considéré actuellement comme un moyen de mieux gérer la demande d'énergie, dans plusieurs situations où l'énergie solaire est utilisée, dès que la demande et l'offre en termes d'énergie sont dépassées par rapport au temps. Le stockage d'énergie thermique est généralement réalisé sous deux formes :

- stockage par chaleur sensible, où on utilise un matériau ayant une grande capacité thermique, tels que l'eau, les briques de céramique, les pierres, ... Ces inconvénients sont liés à l'utilisation des systèmes de stockage volumineux. La grande marge de température exige aussi une isolation thermique parfaite du système.

- stockage par chaleur latente de fusion, où un matériau à changement de phase (MCP) est utilisé. Malgré le coût économique et parfois l'indisponibilité des matériaux, ce type offre plus d'avantages thermiques : faible plage de température de fonctionnement, une grande capacité de stockage par unité de masse ou de volume

En ce qui concerne la modélisation physique du transfert de chaleur dans les matériaux à changement de phase, différentes approches ont été utilisées pour gouverner tout le milieu d'étude concernant les deux phases liquide et solide. On distingue généralement deux approches physiques différentes : (i) modélisation à phases séparées utilisant des équations de conservation pour chacune des phases couplées aux équations de bilan à l'interface. Ce type de formulation est appelée *formulation classique de Stefan* (**Bricard et Gobin [1]**). Parmi les méthodes utilisant cette première formulation, on distingue la méthode de la capacité thermique et celle de la conductivité thermique [2] (ii) modélisation généralisée où les équations de conservation et les conditions aux limites sont appliquées à tout le domaine comportant les deux phases solide et liquide. Pour cette deuxième formulation, la méthode la plus utilisée est dite enthalpique [3-4].

Bien que les matériaux à changement de phase (MCP) et leurs diverses applications ont fait l'objet d'études par plusieurs auteurs à savoir : **Sharma et Buddhi [5]**, **Sethi [6]**, **Farid [7]**, **Regin et Saini [8]**, **Dhaidan [9]**, en particulier **Verma [10]** et **Mondal [11]**, l'incorporation de ces matériaux dans une application particulière demande une analyse qui permettra de déterminer et d'améliorer correctement les performances des systèmes pour justifier les coûts supplémentaires et faire les contrôles nécessaires.

La modélisation mathématique des systèmes de stockage d'énergie thermique est nécessaire pour une conception optimale. Notamment en ce qui concerne l'étude de la cinétique de changement de phase et l'évaluation de la durée de transition de phase où les simulations sont d'une importance capitale.

Il existe différents types de matériaux de stockage thermique qu'il soit par chaleur sensible ou latente. Généralement le choix d'un MCP pour une application donnée est dicté par plusieurs paramètres, principalement sa stabilité chimique, sa capacité thermique de stockage et sa température de changement de phase pour un volume optimal et une masse réduite du MCP.

Dans la littérature, on distingue trois types d'approches pour : la modélisation du MCP : approches théoriques, approches numériques, et approches orientés vers les simulations de stockage de l'énergie thermique.

Les solutions analytiques des problèmes de transferts dans les MCP demeurent restreintes aux géométries simples. Ainsi, la voie numérique est généralement sollicitée pour résoudre ce type de phénomène.

Tout d'abord, nous présentons la description physique et mathématique initiale du phénomène : le problème de Stefan. Ensuite, les descriptions mathématiques utilisées pour la modélisation numérique en utilisant soit la formulation enthalpique et/ou la méthode de capacité thermique, considérées par les auteurs comme les principales contributions de la plupart des travaux récents.

## I. LE PROBLÈME DE STEPHAN

La transition de phase solide-liquide d'un matériau est décrite par un type particulier de problèmes aux limites pour les équations différentielles partielles, où l'interface peut se déplacer avec le temps. Cette question a d'abord été étudiée par Clapeyron et Lamé en 1831, lors de l'analyse de la formation et du refroidissement de la croûte terrestre. Dans ce cas, le problème a été simplifié à partir d'une géométrie sphérique à une géométrie unidimensionnelle semi-infinie. D'autres travaux ont traité également le problème de Stefan unidimensionnel dont les solutions analytiques disponibles concernent les milieux unidimensionnels infinis ou semi-infinis pour des conditions initiales et aux limites simples et pour des propriétés thermiques constantes.

## II. SOLUTION NUMERIQUE

Le problème de la prédiction du comportement des systèmes à changement de phase est difficile à cause de sa nature non linéaire et de la mobilité des interfaces, pour laquelle le taux de déplacement est contrôlé par la chaleur latente dissipée ou absorbée. L'équation suivante, dite condition Stephan, décrit ce phénomène :

$$L \rho \left( \frac{d s(t)}{dt} \right) = k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial t} \right) - k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial t} \right)$$

Où  $L$  est la chaleur latente de fusion,  $\rho$  est la masse volumique,  $s(t)$  est la position de l'interface,  $k$  est la conductivité thermique,  $t$  est le temps et  $T$  est la température. Les indices  $s$  et  $l$  font référence respectivement à la phase solide et liquide.

Dans cette formulation, la position de l'interface et sa vitesse ne sont pas connues. En plus, à l'interface des deux phases, les gradients de température ou des densités de flux sont discontinus.

En introduisant la méthode enthalpique, le problème de changement de phase est beaucoup plus simple puisque l'équation applicable est la même pour les deux phases. Les conditions d'interface sont automatiquement obtenues et créent une zone entre les deux phases. Cette zone permet d'éviter les fortes discontinuités qui peuvent créer des instabilités numériques. En conséquence, l'épaisseur et la qualité de la discrétisation de l'interface sont essentielles pour la performance du modèle. La formulation enthalpique peut traiter les deux phénomènes de changement de phase. Elle a été appliquée avec succès pour divers problèmes de changement de phase [13-16].

La fonction d'enthalpie statique  $h$ , définie comme une variable en fonction de la température, est donnée par **Voller** [17]. Pour un processus de changement de phase, la conservation de l'énergie peut être exprimée aussi en termes d'enthalpie totale et la température (chapitre II):

Pour garder une représentation raisonnable des processus physiques qui se produisent au front de fusion, la densité de maillage du modèle doit être suffisamment élevée pour couvrir sans problème l'interface solide-liquide. Toutefois, cette forte densité n'est pas nécessaire ailleurs dans le domaine numérique. Par conséquent, il est naturel d'adapter la densité de la grille du maillage pour améliorer l'efficacité de calcul.

### **III. Modèles collectés de la littérature sur le stockage et déstockage de l'énergie par chaleur latente :**

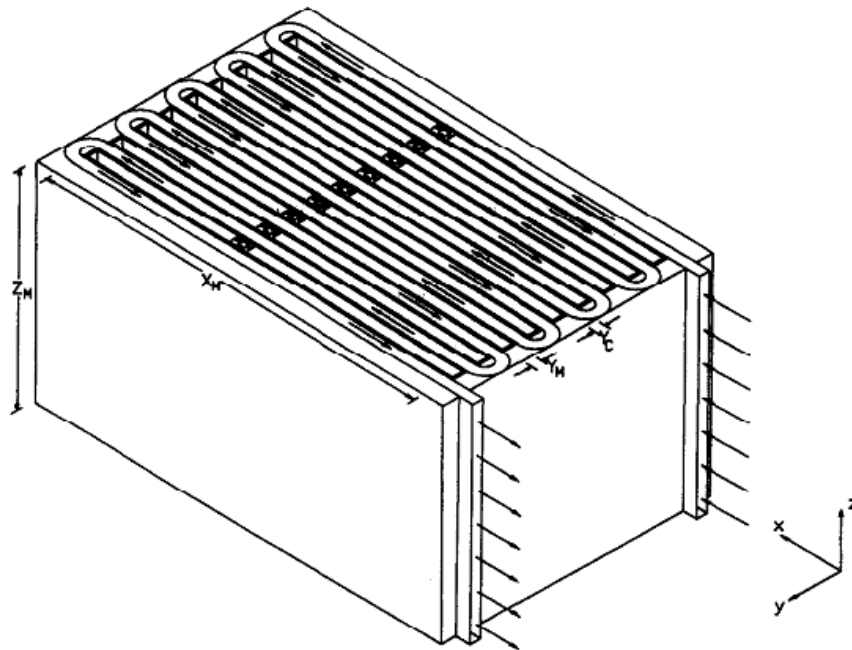
A ce sujet, nous passons en revue la littérature scientifique sur des modèles numériques du MCP utilisés dans les applications de stockage thermique.

#### **A- Géométrie Rectangulaire :**

**Lacroix et al.** [18-19] ont proposé une solution du phénomène de fusion dans une cavité rectangulaire en présence de la convection naturelle en utilisant une méthodologie

similaire à la technique de maillage mobile. Les résultats de ces simulations indiquent que la fraction liquide est plus importante au fond de la cavité qu'au sommet. Le processus de fusion est essentiellement régi par le nombre Stefan. Il est également fortement influencé par les dimensions latérales de la cavité. L'importance de la convection implique également que l'efficacité du système est augmentée lorsque la chaleur est concentrée sur quelques endroits au lieu d'être réparties sur toute la surface.

**Brousseau et Lacroix [20]** ont étudié les performances d'une unité de stockage MCP multicouches. Le modèle est basé sur l'équation de conservation d'énergie pour le MCP et pour le HTF (fluide de transfert de chaleur). Ce modèle montre que la fusion et la solidification cyclique donne des distributions complexes des isothermes dans le MCP avec de multiples fronts de phase.



**Figure I.1** : représentation du MCP multi- couches [20].

**Costa [21]** ont étudié numériquement la fusion dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle. L'approche enthalpique est utilisée. Trois MCP étaient analysés : paraffine (n-octadécane) et deux métaux (le gallium et l'étain). Les résultats des simulations sont comparés aux données expérimentales. Dans le cas de l'octadécane, il y a une faible concordance avec les résultats expérimentaux. Dans la zone supérieure, le liquide fusionné remplit la cavité et accélère la fusion dans cette zone.

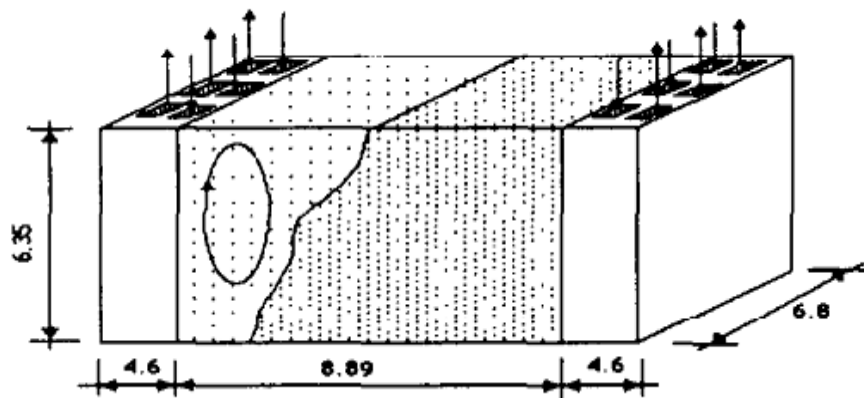


Figure I.2 : représentation article [21].

### B- Géométrie Sphérique :

La géométrie sphérique représente un cas intéressant pour les applications de stockage de chaleur, étant donné que les sphères sont souvent utilisées dans les lits garnis. En raison de la complexité de tels systèmes, il est souvent plus efficace de modéliser d'abord le comportement d'une sphère individuelle, pour décrire ensuite la modélisation de lit garni.

**Barba et Spriga [22]** ont étudié le comportement des hydrates de sel encapsulés, utilisés dans le stockage de l'énergie latente dans un système de transfert de chaleur d'un réservoir d'eau chaude sanitaire. Ils observent que le temps le plus court pour la solidification complète est fournie par de petites capsules sphériques, avec un nombre élevé de Jacob et de conductivité thermique.

Une solution analytique simple a été obtenue en **Fomin et Saitoh [23]** pour décrire le processus de fusion dans une capsule sphérique. Sa précision est estimée à 10-15% par comparaison à la solution numérique. Cette solution est susceptible d'être utile lors de l'évaluation des systèmes de stockage d'énergie thermique qui contiennent des milliers de capsules. Une analyse similaire a été effectuée pour les capsules elliptiques et aplaties qui enregistrent un taux de transfert de chaleur plus important que celle de la capsule sphérique.

### C- Autres travaux expérimentaux et numériques

**Bedecarrats et Dumas [24]** ont mené des travaux expérimentaux portant sur le processus de cristallisation d'un nodule ou d'un nombre réduit de nodules afin d'identifier la nature et l'importance du phénomène de surfusion (retard de cristallisation). Le

processus destockage thermique est réalisé par la transformation de changement de phase solide-liquide d'un matériau MCP encapsulé dans des nodules sphériques. Un modèle, basé sur une combinaison de l'équation de l'énergie et de la théorie de nucléation est validé par les expériences, et fournit des informations sur la cinétique de changement de phase.

**Fourcade et Nörtershäuser [25]** ont présenté une modélisation tridimensionnelle du comportement du MCP par une méthode enthalpique. Le MCP considéré est à base d'alliages moléculaires (MCPAM) constitués de chaînes carbonées longues qui emmagasinent une quantité importante d'énergie lors du changement de phase solide-liquide, du fait de leur enthalpie de fusion élevée. Une étude préliminaire unidimensionnelle a été conduite en vue d'une validation du modèle par comparaison à une solution analytique. Ensuite, simulations tridimensionnelles ont été réalisées.

**Khudhair et Farid [26]** ont examiné et analysé des systèmes destockage d'énergie thermique intégrant un MCP pour une utilisation dans les applications du bâtiment.

**Zhang et Bejan [27]** ont étudié expérimentalement la fusion d'un MCP dans une longue enceinte verticale de 74 cm de hauteur et de 14.6 cm d'épaisseur. L'enceinte est chauffée uniformément par des éléments électriques attachés sur un côté, et refroidie par un courant d'alcool sur le côté opposé. Les auteurs rapportent que la fusion du MCP se fait principalement par convection naturelle faiblement turbulente. Ils ont aussi proposé une corrélation du nombre de *Nusselt* à la paroi chauffée.

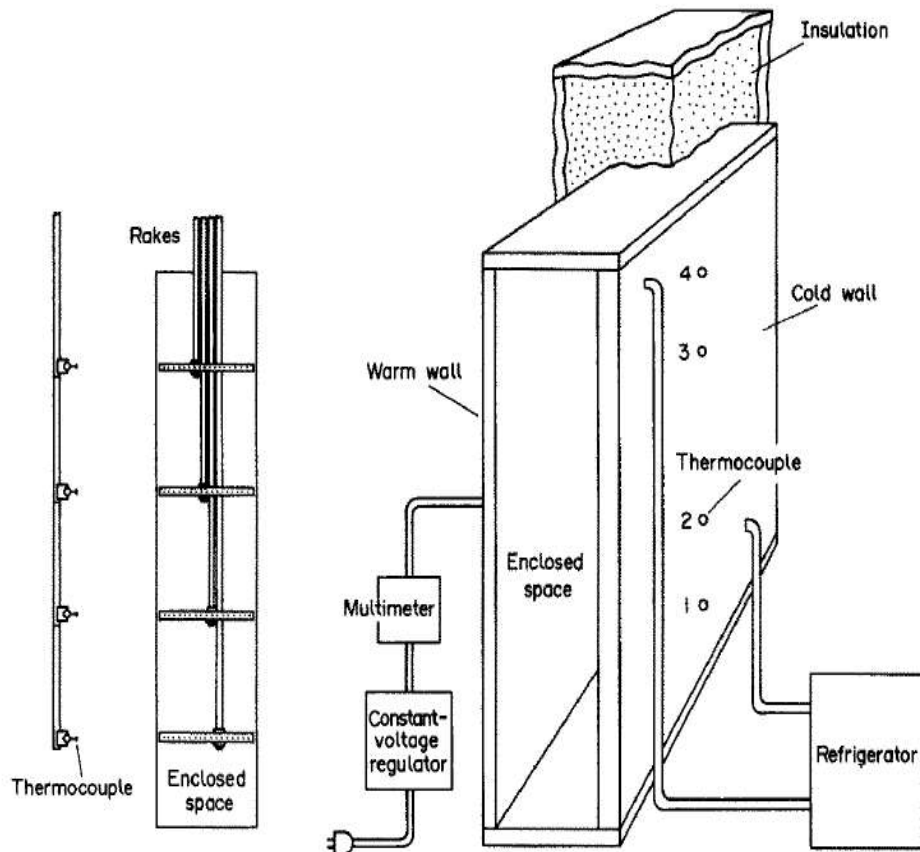


Figure I.3 Montage expérimental [27]

**Hirata et Nishida [28]** ont considéré la fusion dans un échangeur de chaleur à calandre. Le MCP est contenu à l'intérieur d'un tube alors que l'espace annulaire entre les deux tubes est divisé en trois compartiments où le fluide caloporteur circule pour assurer une température uniforme sur la surface de contact. Ils ont analysé la fusion du MCP par un modèle analytique basé sur la conductivité thermique équivalente. Ainsi, ils ont discuté et proposé une corrélation de la conductivité thermique équivalente.

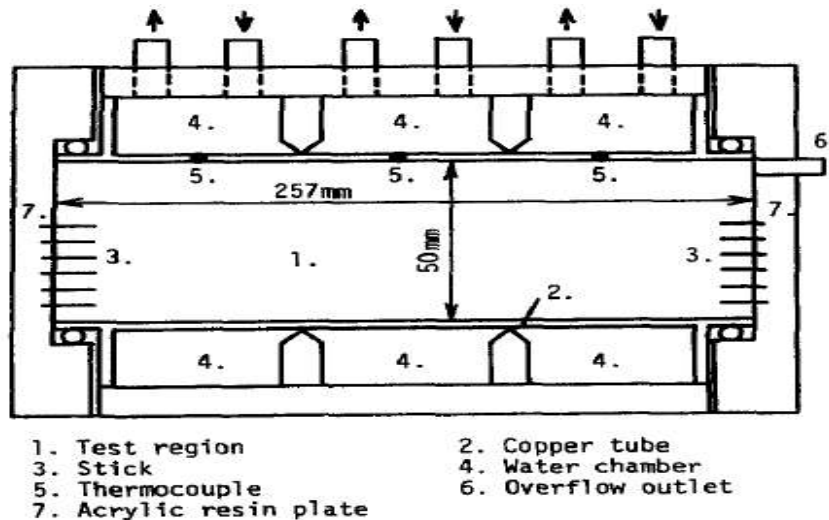


Figure I.4 : échangeur MCP [28].

Fath [29] a examiné les performances d'un échangeur de chaleur à calandre horizontal dans lequel le MCP se trouve du côté calandre et le fluide caloporteur circule à l'intérieur du tube. Il a utilisé un MCP dont la température de fusion est de  $50^{\circ}\text{C}$ . Un modèle analytique basé sur l'approximation quasi stationnaire est développé pour prédire les performances du système.

## Conclusion

La partie bibliographique entreprise révèle que les solutions analytiques ou semi-analytiques des problèmes de changement de phase sont très limitées et concernent les géométries simples soumises aux conditions aux limites uniformes et constantes. La méthode des volumes finis basée sur une formulation enthalpique reste la mieux adaptée pour traiter le changement de phase des substances pures et/ou des alliages.

Ces méthodes de calcul nécessitent un développement des travaux expérimentaux afin de les valider et de les généraliser.

En ce qui concerne les systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente, la littérature a été principalement consacrée aux systèmes de stockage d'énergie thermique, telle que l'énergie solaire. Peu de travaux sont consacrés au stockage d'énergie électrique par chaleur latente. Ce dernier type de stockage peut contribuer à la résolution du problème le plus fréquent de pointe électrique qui frappe la majorité des pays.

## CHAPITRE II

### Modélisation mathématique

#### II.1 Introduction

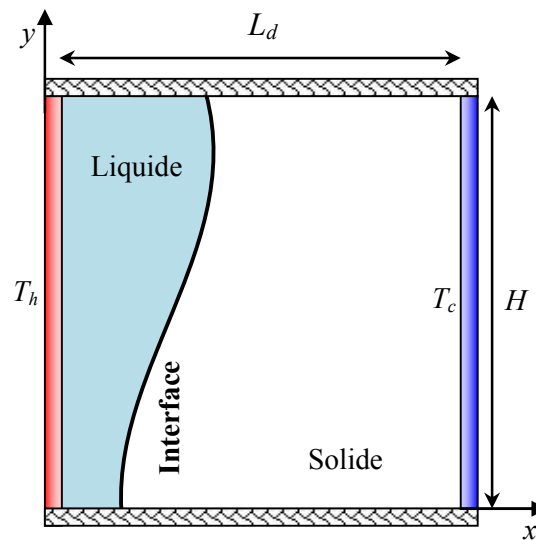
Cette étude a pour objectifs d'examiner le transfert couplé de chaleur entre les deux modes : conduction dans la phase solide et la convection naturelle dans la phase liquide, lors de la solidification et la fusion d'un matériau à changement de phase solide-liquide dans une cavité, en mettant l'accent sur les paramètres importants de contrôle appelés facteur de forme et nombre de *Grashof*.

La modélisation mathématique est basée sur les principes fondamentaux régissant les modes de transport de chaleur et de quantité de mouvement. Sachant que le transfert de chaleur aura lieu chaque fois qu'un gradient de température est présent à l'intérieur d'un système. Par contre le cas du changement de phase solide-liquide ou liquide-solide d'un matériau pur s'effectue à une température constante dite température de changement de phase, définie par une production ou une consommation de l'énergie dans la zone de changement de phase. Ce qui entraîne la discontinuité des gradients thermiques qui s'établissent dans chaque phase de part et d'autre de l'interface.

La cinétique de l'interface va définir le sens du changement de phase soit fusion ou solidification. En convection naturelle, le mouvement du fluide est induit par les différences de densité résultant des gradients de température dans le fluide. Le coefficient de transfert de chaleur pour ce régime peut être lié à la flottabilité et aux propriétés thermiques du fluide à travers les nombres de *Grashof* et de *Prandtl*.

#### II.2 Problème physique

Le système physique considéré est une cavité rectangulaire de longueur  $L_d$  et de hauteur  $H$ , dont le rapport d'aspect qui engendre la configuration rectangulaire est  $A = L_d / H$ . L'enceinte contient un MCP caractérisée par un nombre de Prandtl  $Pr$ . Les parois verticales de l'enceinte sont isothermes et soumises respectivement aux températures chaude  $T_h$  et froide  $T_c$ , qui encadrent la température de fusion  $T_m$  ( $T_c < T_m < T_h$ ). Par ailleurs, les deux parois horizontales sont adiabatiques et rigides (**figure II.1**).



**Figure II.1** : Géométrie du problème physique

Lors de la solidification, le MCP est initialement liquide à la température  $T_0$  supérieure à celle de changement de phase  $T_m$  ( $T_0 > T_m$ ). A un instant donné, la température de l'une des parois verticales est maintenue à  $T_h$ , alors que la température de l'autre paroi est maintenue à la température  $T_c$ . Le gradient de température dans l'enceinte entraîne un mouvement de convection naturelle et le MCP liquide se rapproche vers la paroi relativement froide et se solidifie. La forme et la position de l'interface solide/liquide dépendent des conditions aux limites, de la géométrie et des dimensions de l'enceinte.

Notons que, lors de la fusion, le MCP est initialement solide à une température  $T_0$  inférieure à celle de changement de phase  $T_m$  ( $T_0 < T_m$ ).

## II.3. Formulation mathématique

### II.3.1. Hypothèses simplificatrices

Dans cette étude, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie sont simplifiées en tenant compte des hypothèses suivantes :

- L'écoulement est bidimensionnel et instationnaire.
- Le fluide est supposé newtonien.
- Le fluide est considéré pur, homogène et isotrope à propriétés physiques constantes où chaque phase est caractérisée par ses propriétés physiques ( $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $k$ ).

- La dissipation visqueuse est supposée négligeable.
- L'approximation de *Boussinesq* est valide :

### II. 3.2 Formulation des équations de transport

Le problème de changement de phase (solidification / fusion) est formulé en utilisant la méthode enthalpique. Sous les hypothèses prescrites, les équations du modèle exprimées en système de coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Equation de quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + S_u \quad (\text{II.2})$$

Equation de quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + S_v \quad (\text{II.3})$$

Equation d'énergie :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uh)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vh)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans ces équations,  $\mathbf{u}$  est la composante de vitesse suivant l'axe  $x$ ,  $\mathbf{v}$  la composante de vitesse suivant l'axe  $y$ ,  $\rho$  la densité volumique de masse du MCP,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $p$  la pression,  $\mathbf{g}$  l'accélération gravitationnelle et  $k$  la conductivité thermique.

Notons que l'enthalpie  $\mathbf{H}$  du volume de contrôle soumis au changement de phase est égale à la somme de l'enthalpie thermique sensible ( $h$ ) et l'enthalpie thermique latente ( $\Delta H$ ), définies par :

$$\mathbf{H} = h + \Delta H \quad (\text{II.5})$$

$$h = h_{\text{ref}} + \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p dT \quad (\text{II.6})$$

$$\Delta H = \phi L \quad (\text{II.7})$$

Où  $h_{ref}$  est l'enthalpie de référence à la température de référence  $T_{ref}$ ,  $c_p$  la chaleur spécifique,  $L$  la chaleur latente du MCP.

Dans l'équation de quantité de mouvements ((II.2),(II.3)), l'approximation de *Boussinesq* est introduite pour tenir compte des effets de flottabilité ou de convection naturelle lors de la fusion du MCP [9] :

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 - \beta (T - T_{ref}) \right] \quad (\text{II.8})$$

Où la température de référence  $T_{ref}$  est donnée par :  $T_{ref} = T_c$  pour la solidification et  $T_{ref} = T_m$  pour la fusion.

Où les termes sources ou termes de Darcy  $S_u$  et  $S_v$  sont détaillés dans la référence [30-31] et définis comme suit :

$$\begin{aligned} S_u &= -A(\phi)u \\ S_v &= -A(\phi)v \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Où  $\phi$  est le rapport entre le volume du MCP subissant un changement de phase au volume total d'un volume de contrôle de calcul. C'est à dire, c'est la fraction volumique de changement de phase au niveau d'un volume de contrôle. Elle est définie par :

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } h < c_s T_m & \text{Phase solide} \\ (h - c_s T_m) / l & \text{si } c_s T_m < h < c_s T_m + 1 & \text{interface} \\ 1 & \text{si } h \geq c_s T_m + 1 & \text{Phase liquide} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Avec  $A$  la fonction de porosité, définie par [33]:

$$A(\phi) = \frac{C(1-\phi)^2}{\phi^3 + \varepsilon} \quad (\text{II.11})$$

$C$  est une constante qui reflète la morphologie de la zone pâteuse (interface). Il décrit à quel point la vitesse est réduite à zéro lorsque le matériau se solidifie. Cette constante est située entre  $10^4$ - $10^7$ , donc  $10^5$  est considéré pour ce travail [32].  $\varepsilon$  est un petit nombre (0,001) pour empêcher la division par zéro.

L'expression de la température est déduite de l'équation (II.5) et s'exprime par :

$$T = \begin{cases} h/c_s & \text{Phase solide} \\ T_m & \text{interface} \\ [h + T_m(c_l - c_s) - l]/c_l & \text{Phase liquide} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

#### II.4 Equations du problème sous forme adimensionnelle [33-34]

Les variables adimensionnelles sont introduites pour réduire le nombre de paramètres et faciliter notre étude. Pour cela, nous avons pris les grandeurs de références par rapport auxquelles toutes les variables seront normalisées.

Les grandeurs de références sont :

Temps caractéristique (s)	$\frac{H^2}{\nu_l}$
Longueur caractéristique (m)	$H$
Vitesse caractéristique (m/s)	$\frac{\nu_l}{H}$
Enthalpie caractéristique (J/kg)	$\Delta h = (h_h - h_c)$
Température caractéristique (K)	$\Delta T = (T_h - T_c)$
Pression caractéristique (Pa)	$\rho_0 \left( \frac{\nu_l}{H} \right)^2$
Conductivité thermique (W/m.K)	$k_l$
Capacité thermique massique (J/kg.K)	$c_l$
Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)	$\nu_l$

Les grandeurs adimensionnelles sont :

Coordonnée axiale  $X = x / H$

Coordonnée transversale  $Y = y / H$

Temps  $\tau = t / \left( \frac{H^2}{\nu_l} \right)$

Composante axiale de la vitesse  $U = u / (\nu_l / H)$

Composante transversale de la vitesse  $V = v / (\nu_l / H)$

Pression  $P = p / \rho (\nu_l / H)^2$

Enthalpie sensible  $\hat{h} = \frac{(h - h_c)}{(h_h - h_c)}$

Température  $\theta = \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)}$

Conductivité  $K = k / k_l$

Capacité thermique massique  $C = c / c_l$

Nombre de Prandtl  $Pr = \nu_l / \alpha_l$

Nombre de Grashof  $Gr = \frac{\rho_0 g \beta_l [T_h - T_c] H^3}{\nu_l^2}$

$h_c$  et  $h_h$  sont les enthalpies sensibles du MCP à l'état initial, évaluées respectivement à la température de la paroi froide et chaude.

#### II.4.1 Equations adimensionnelles

Les équations adimensionnelles donnant la vitesse, la température et la pression dans le domaine rectangulaire  $(0 \leq X \leq A, 0 \leq Y \leq 1)$  sont déterminées en effectuant la substitution des grandeurs mentionnées dans les tableaux ci-dessus et en effectuant le développement mathématique nécessaire. On obtient :

##### Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.13})$$

##### Equations de quantité de mouvement suivant X

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial (UU)}{\partial X} + \frac{\partial (UV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} + S_U \quad (\text{II.14})$$

##### Equation de quantité de mouvement suivant Y

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial (UV)}{\partial X} + \frac{\partial (VV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} + S_V + Gr\theta \quad (\text{II.15})$$

##### Equation de l'énergie

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial (Uh)}{\partial X} + \frac{\partial (Vh)}{\partial Y} = \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K}{C.Pr} \frac{\partial h}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K}{C.Pr} \frac{\partial h}{\partial Y} \right) \right] + S_h \quad (\text{II.16})$$

Où les termes sources des équations adimensionnelles de quantité de mouvement et de la chaleur sont définies par :

$$S_U = \frac{H^3}{\nu_l^2 \rho_0} S_u \quad (\text{II.17})$$

$$S_V = \frac{H^3}{\nu_l^2 \rho_0} S_v \quad (\text{II.18})$$

$$S_h = -\frac{1}{(h_h - h_c)} \frac{\partial(\phi L)}{\partial \tau} \quad (\text{II.19})$$

### II.3.2 Conditions initiales et aux limites

$$(X, Y) = (0, A)$$

- à  $\tau = 0$ :  $U = V = 0$ ,  $\theta = \hbar = 1$  (cas solidification)
- à  $\tau = 0$ :  $U = V = 0$ ,  $\theta = \hbar = 0$  (cas fusion)
- à  $\tau > 0$ :
  - $X = 0$ :  $U = V = 0$ ,  $\hbar = 1$  (surface chaude)
  - $X = A$ :  $U = V = 0$ ,  $\hbar = 0$  (surface froide)
  - $Y = 0$ :  $U = V = 0$ ,  $\partial \hbar / \partial Y = 0$  (surface adiabatique inférieure)
  - $Y = 1$ :  $U = V = 0$ ,  $\partial \hbar / \partial Y = 0$  (surface adiabatique supérieure)

Avant de terminer ce chapitre portant sur la modélisation mathématique, nous donnons la définition de deux nombres adimensionnels utilisés dans la discussion des résultats de simulations des prochains chapitres :

- Le nombre de Stefan (*Ste*) qui représente le rapport entre l'enthalpie spécifique sensible et celle de changement de phase :

$$Ste = c_l \Delta T / l \quad (\text{II.20})$$

Où : la différence de température associée au terme du changement d'état est :

$$\Delta T = T_h - T_m \quad (\text{II.21})$$

- Les nombres de *Nusselt* locaux  $Nu$   $Nu$  et moyens  $\overline{Nu}$  à travers les parois chaude et froide qui sont définis par :

**Paroi chaude :**

$$Nu_h = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{x=0} \quad (\text{II.22})$$

$$\overline{Nu}_h = \int_0^1 Nu \, dY \quad (\text{II.23})$$

**Paroi froide :**

$$Nu_c = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{x=L_d} \quad (\text{II.24})$$

$$\overline{Nu}_c = \int_0^1 Nu \, dY \quad (\text{II.25})$$

## *CHAPITRE III*

### Méthode numérique et validations

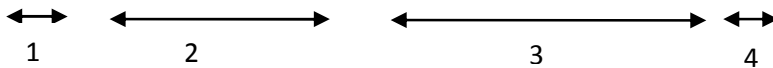
#### III.1 Simulation numérique par programme de calcul

La forme finale de notre modèle mathématique régissant la convection naturelle dans la région liquide et la conduction dans la phase solide est un système d'équations aux dérivées partielles, elliptiques et non linéaires d'une part, complexes et couplées d'autre part. Ces raisons ont fait que la résolution par voie analytique est pratiquement impossible. Dans ce cas, le recours aux méthodes numériques est indispensable. Parmi ces méthodes numériques de discrétisation, on cite la méthode des différences finies, des éléments finis et des volumes finis. La méthode que nous avons utilisée dans notre étude est celle des volumes finis. Cette méthode consiste à intégrer les équations de transport sur un ensemble discret des volumes finis jointifs appelés volumes de contrôle. Elle permet une discrétisation conservative de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie dans tous les volumes de contrôle, et donc à travers tout le domaine de calcul. Elle permet aussi un traitement plus correct des milieux hétérogènes et facilite la linéarisation des termes sources s'ils ne sont pas (Versteeg [35], Patankar [36]).

##### III.1.1 Equation générale de transport

L'équation générale de transport d'une variable ( $\Phi$ ) pour un écoulement bidimensionnel et incompressible s'écrit dans le système cartésien comme suit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) + S_{\Phi} \quad (\text{III.1.1})$$



1 : terme transitoire. 2 : terme convectif. 3 : terme diffusif. 4 : terme source.

Avec :

$U$  : composante horizontale de vitesse.  $V$  : composante verticale de vitesse.  $\Gamma_{\Phi}$  : coefficient de diffusion.

Pour notre problème, la définition des grandeurs  $\Phi$ ,  $\Gamma$  et  $S_{\Phi}$  est donnée dans le **tableau III.1.1** :

Tableau III.1.1 : Variables et coefficients des équations adimensionnelles

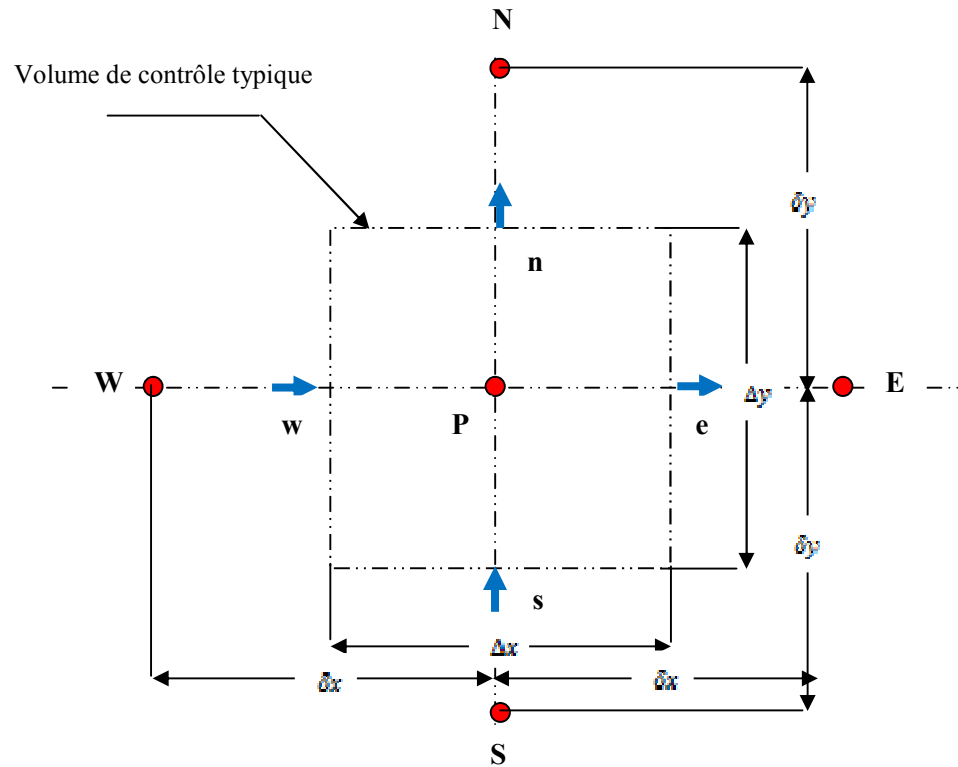
Equation	$\Phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	$U$	1	$-\frac{\partial P}{\partial X} + S_x$
Quantité de mouvement suivant Y	$V$	1	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + Gr.\theta + S_y$
Energie	$h$	$\frac{K}{C.Pr}$	$\frac{1}{(h_h - h_c)} \frac{\partial(\phi L)}{\partial \tau}$

L'équation III.1.1 peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} = S_\phi$$

Où  $J_x$  et  $J_y$  sont les flux totaux (convectif et diffusif) définis par :

$$J_x = U\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \qquad J_y = V\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y}$$



**Figure III.1** : Volume de contrôle typique

L'intégration de l'équation III.1.1 correspondant à la variable  $\Phi$  sur le volume de contrôle typique figure III.1 s'exprime par :

$$\int_{w_s}^e \int_{s_w}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right) dXdY + \int_{w_s}^e \int_{s_w}^n \left( \frac{\partial J_X}{\partial X} \right) dXdY + \int_{w_s}^e \int_{s_w}^n \left( \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right) dXdY = \int_{w_s}^e \int_{s_w}^n S_\phi dXdY \quad (\text{III.1.2})$$

**(A) terme transitoire**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \Big|_P \Delta X \Delta Y = \frac{\Phi_P^{k+1} - \Phi_P^k}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y$$

**(B) flux total**

$$\int_{w_s}^e \int_{s_w}^n \left[ \frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right] dXdY = [(J_{Xe} - J_{Xw}) \Delta Y + (J_{Yn} - J_{Ys}) \Delta X]$$

Avec :

$$J_{Xe} = (U\phi)_e - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e \quad J_{Xw} = (U\phi)_w - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w$$

$$J_{Yn} = (V\phi)_n - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n \quad J_{Ys} = (V\phi)_s - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s$$

**(C) terme source**

$$\int_{s_w}^n \int_{w_s}^e S_\phi dXdY = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y$$

$\overline{S_\phi}$  : est la valeur moyenne du terme source sur ce volume.

Après intégration, l'équation III.1.2 devient comme suit :

$$\frac{\Phi_P^{k+1} - \Phi_P^k}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y + [(J_{Xe} - J_{Xw}) \Delta Y + (J_{Yn} - J_{Ys}) \Delta X] = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \quad (\text{III.1.3})$$

Il faudra exprimer les termes des flux convectifs et diffusifs aux interfaces du volume de contrôle. A cet effet, différents schémas de discrétisations (différence centrées, loi de puissance, hybride,...) peuvent être utilisés, notamment :

### a) Schéma aux différences centrées (CDS)

Pour évaluer le flux convectif à l'interface, la variation de la variable  $\phi$  entre deux nœuds adjacents s'exprime par un profil linéaire. Les faces  $(e, w, n, s)$  se trouvent au milieu de  $(E, W, N, S)$ . Les termes convectifs des variables généralisées  $\phi$  se présentant par interpolation comme suit :

$$\begin{cases} (U\phi)_e = U_e\phi_e \\ (U\phi)_w = U_w\phi_w \\ (V\phi)_n = V_n\phi_n \\ (V\phi)_s = V_s\phi_s \end{cases} \begin{cases} \phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \\ \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P) \\ \phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \\ \phi_s = \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P) \end{cases}$$

Les parties diffusives sont évaluées en approximant les dérivées par les différences centrées, ce qui donne :

$$\begin{cases} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta X)_e} \\ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta X)_w} \\ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n = \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta Y)_n} \\ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_s = \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta Y)_s} \end{cases}$$

Remplaçons les formules précédentes dans l'équation III.1.3, on obtient :

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + b$$

Où :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \cdot \begin{cases} A_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ A_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ A_N = D_n - \frac{F_n}{2} \\ A_S = D_s + \frac{F_s}{2} \end{cases} \begin{cases} A_E = D_e \left(1 - \frac{Pe_e}{2}\right) \\ A_W = D_w \left(1 + \frac{Pe_w}{2}\right) \\ A_N = D_n \left(1 - \frac{Pe_n}{2}\right) \\ A_S = D_s \left(1 + \frac{Pe_s}{2}\right) \end{cases}$$

$$b = \left( \overline{S_\phi} + \frac{\Phi_P^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y \begin{cases} D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta X)_e} \Delta Y \\ D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta X)_w} \Delta Y \\ D_n = \frac{\Gamma_n}{(\delta Y)_n} \Delta X \\ D_s = \frac{\Gamma_s}{(\delta Y)_s} \Delta X \end{cases} \begin{cases} F_e = U_e \Delta Y \\ F_w = U_w \Delta Y \\ F_n = U_n \Delta X \\ F_s = U_s \Delta X \end{cases} \begin{cases} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{cases}$$

$A_E, A_W, A_N, A_S$  et  $A_P$  sont les coefficients correspondant respectivement aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud et centre du volume. Les coefficients  $A_i$  doivent avoir le même signe positif (la deuxième règle de base pour la méthode des volumes finis) mais certaines relations peuvent créer des coefficients négatifs, alors ces dernières sont exprimés en fonction du nombre de **Peclet** ( $Pe$ ).

Où  $P_e, P_w, P_n, P_s$  désignent le rapport du flux convectif au flux diffusif aux différents faces du volume de contrôle.  $b$  : est un terme source supposé être constant dans le volume de contrôle.  $F_e, F_w, F_n, F_s$  et  $D_e, D_w, D_n, D_s$  désignent respectivement les flux convectifs et diffusifs aux faces Est, Ouest, Nord, Sud du volume de contrôle.  $D_i$  est toujours positif et  $F_i$  peut être positif ou négatif selon le sens de l'écoulement. Pour que ces coefficients soient positifs, le nombre  $Pe$  doit être dans l'intervalle  $[-2, 2]$ . L'application de ce schéma n'est avantageuse que si  $|Pe| \leq 2$ . Ceci est réalisé avec un maillage raffiné.

### b) Schémaamont (upwind) (UPS)

Ce schéma est le plus simple. Dans le cas où la convection est dominante, il suppose que la valeur  $\phi$  aux faces du volume est celle du nœud voisin. On a donc simplement :

$$\phi_e = \phi_P \text{ pour } F_e > 0$$

$$\phi_e = \phi_E \text{ pour } F_e < 0$$

$$\phi_w = \phi_W \text{ pour } F_w > 0$$

$$\phi_w = \phi_P \text{ pour } F_w < 0$$

Cette condition peut être exprimée par l'opérateur  $\|A, B\| = \max(A, B)$ , le schéma upwind s'écrit alors :

$$\begin{cases} F_e \phi_e = \phi_P \|F_e, 0\| - \phi_E \| -F_e, 0\| \\ F_w \phi_w = \phi_W \|F_w, 0\| - \phi_P \| -F_w, 0\| \\ F_n \phi_n = \phi_P \|F_n, 0\| - \phi_N \| -F_n, 0\| \\ F_s \phi_s = \phi_S \|F_s, 0\| - \phi_P \| -F_s, 0\| \end{cases}$$

En substituant l'expression précédente dans III.1.3, l'équation de discrétisation devient :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad b = \left( \bar{S}_\phi + \frac{\Phi_P^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E = D_e + \| -F_e, 0\| \\ A_W = D_w + \| F_w, 0\| \\ A_N = D_n + \| -F_n, 0\| \\ A_S = D_s + \| F_s, 0\| \end{cases}$$

Tous les coefficients de discrétisation de ce schéma sont positifs, ce qui fait que ce schéma est inconditionnellement stable.

### c) Schéma hybride (HDS)

Ce schéma est basé sur une simplification de la variation de  $A_e / D_e$  en fonction de  $Pe$ . Il est la combinaison des deux schémas (centrée, upwind). En appliquant ce schéma, la variable généralisée  $\phi$  aux différentes interfaces du volume de contrôle prendra la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_e = \alpha_e \phi_P + (1 - \alpha_e) \phi_E \\ \phi_w = \alpha_w \phi_W + (1 - \alpha_w) \phi_P \\ \phi_n = \alpha_n \phi_P + (1 - \alpha_n) \phi_N \\ \phi_s = \alpha_s \phi_S + (1 - \alpha_s) \phi_P \end{cases}$$

Les coefficients  $\alpha_i (i = e, w, n, s)$  sont définis par :

$$\alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad Pe < -2 \quad \rightarrow \quad \text{Schéma Upwind}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad |Pe| \leq 2 \quad \rightarrow \quad \text{Schéma centré}$$

$\alpha_i = 1$  pour  $Pe > 2 \rightarrow$  Schéma Upwind

En substitution les valeurs prises par  $\phi$  dans l'équation III.1.3, on aura

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad A_P = A_E + A_W + A_N + A_S, \quad b = \left( \bar{S}_\phi + \frac{\Phi_P^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y$$

avec :

$$\begin{cases} A_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \\ A_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \\ A_N = \left\| -F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0 \right\| \\ A_S = \left\| -F_s, D_s - \frac{F_s}{2}, 0 \right\| \end{cases}$$

#### d) Schéma de la loi de puissance (PLDS)

Une bonne approximation polynomiale de la solution exacte est donnée par le schéma (PLDS) (*Power Law Differentiating Scheme*) développé par **Patankar (1980) [36]**, qui s'écrit pour le coefficient  $A_E$  comme suit:

$$\begin{aligned} A_E &= -Pe D_e \quad \text{pour } Pe < -10 \\ A_E &= \left( (1 + 0.1Pe)^5 - Pe \right) D_e \quad \text{pour } -10 \leq Pe \leq 0 \\ A_E &= (1 - 0.1Pe) D_e \quad \text{pour } 0 \leq Pe \leq 10 \\ \frac{A_E}{D_e} &= 0 \quad \text{pour } Pe > 10 \end{aligned}$$

L'équation de discrétisation de ce schéma s'écrit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad b = \left( \bar{S}_\phi + \frac{\Phi_P^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y$$

avec :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e \left\| 0, (1 - 0.1|P_e|)^5 \right\| + \left\| 0, -F_e \right\| \\ A_W &= D_w \left\| 0, (1 - 0.1|P_w|)^5 \right\| + \left\| 0, F_w \right\| \\ A_N &= D_n \left\| 0, (1 - 0.1|P_n|)^5 \right\| + \left\| 0, -F_n \right\| \\ A_S &= D_s \left\| 0, (1 - 0.1|P_s|)^5 \right\| + \left\| 0, F_s \right\| \end{aligned}$$

### III.1.2 Formulation générale du problème

Les coefficients  $A_E, A_W, A_N, A_S$  et  $A_P$  peuvent se mettre sous la forme généralisée suivante :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| \end{aligned}$$

L'équation de discrétisation devient :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_W \phi_W + b \quad A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad b = \left( \frac{S_\phi}{\Delta\tau} + \frac{\Phi_P^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y$$

Les expressions de  $A(|P|)$  correspondant aux différents schémas sont résumées dans le tableau ci-dessous :

**Tableau III.2** Valeur de la fonction  $A(|P|)$  pour différents schémas

Schéma	$A( P )$
Upwind	1
Hybrid	$\text{MAX}(0, 1 - 0.5 P ) = \ 0, 1 - 0.5 P \ $
Différence centrée	$1 - 0.5 P $
Puissance	$\text{MAX}(0, (1 - 0.1 P )^5) = \ 0, (1 - 0.1 P )^5\ $

Dans notre étude, on a utilisé le schéma numérique aux différences centrées (CDS), qui donne une bonne approximation polynomiale de la solution exacte, ainsi une bonne caractéristique de stabilité et de précision, comparativement aux autres schémas. En plus il a été largement utilisé.

### III .1.3 Maillage

Un exemple du maillage est illustré dans la Figure III.1.1. Nous avons choisi un maillage dans les volumes de contrôle sont rectangulaires et de dimensions  $\Delta X \Delta Y$ . Chaque volume de contrôle est localisé à l'aide des indices  $(i, j)$ . Au milieu de chaque volume de

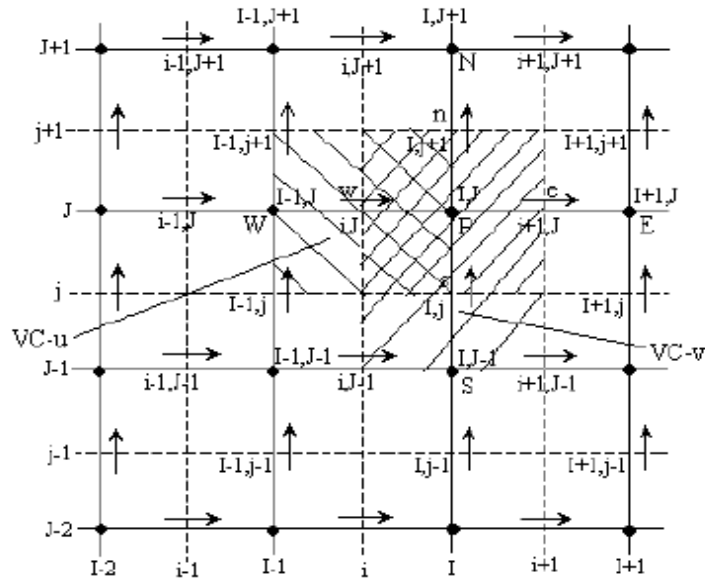
contrôle sont stockées les quantités scalaires ( $P$ ,  $h$  et  $\theta$ ). Par contre, les quantités vectorielles ( $U$ ,  $V$ ) sont localisées aux interfaces e, w, n et s des volumes de contrôle. Les volumes de contrôle utilisés pour l'expression du bilan des quantités scalaires sont des volumes de contrôles typiques (Figure III.1.1). Les volumes de contrôles décalés vers la droite et vers le haut sont utilisés pour l'expression de bilan des flux des quantités vectorielles (Figure III.1.2).

### III .1.4 Discrétisation des équations de conservation

Pour la discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, on utilise le nouveau système de notation. Sur la figure III.1.2, les lignes continues sont numérotées par les lettres majuscules.

Dans la direction X, la numérotation est I-1, I, I+1, et dans la direction Y est J-1, J, J+1, etc. Les lignes pointillées qui définissent les interfaces sont numérotées avec les lettres minuscules, i-1, i, i+1, pour la direction X et j-1, j, j+1, pour la direction Y.

Les nœuds scalaires sont localisés à l'intersection des deux lignes du maillage et ils sont identifiés par deux lettres majuscules (le point P de la Figure III.1.2 est identifié par (I, J)). La composante « U » de la vitesse est stocké aux points des interfaces 'e' et 'w' des volumes de contrôle scalaires. Ces points sont localisés à l'intersection d'une ligne définissant la frontière du volume de contrôle et une ligne du maillage. Ces points sont identifiés par une combinaison des lettres minuscules et lettres majuscules (par exemples, le point de l'interface 'w' autour du point P est identifié par (i, J). de même, la composante V de la vitesse est identifiée par une combinaison des lettres majuscules et lettres minuscules (le point de l'interface 's' est identifiée par (I, j)).



**Figure III.2** Volumes de contrôle et coordonnées des nœuds

Dans tout ce qui suit, seules les grandeurs physiques définies à l'instant  $\tau$  seront affectées de l'exposant  $k$  ( $\phi^k$ ). Les grandeurs correspondantes à l'instant  $\tau + \Delta\tau$  n'auront pas d'exposant.

### III .1.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $X$

L'intégration de l'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant  $X$  sur un volume de contrôle décalé vers la droite donne l'équation algébrique suivante :

$$A_p(i, J)U(i, J) = A_E(i, J)U(i+1, J) + A_W(i, J)U(i-1, J) + A_N(i, J)U(i, J+1) + A_S(i, J)U(i, J-1) + b_U(i, J) \quad (\text{III.1.4})$$

Avec :

$$A_E(i, J) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_W(i, J) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$$

$$A_N(i, J) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S(i, J) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$A_p(i, J) = A_E(i, J) + A_W(i, J) + A_N(i, J) + A_S(i, J) + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau}$$

$$b_U(i, J) = \left( \overline{S_U} + \frac{U_{i,J}^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y + [P(I, J) - P(I+1, J)] \Delta Y$$

Les flux convectifs :

$$F_e = \frac{1}{2}(F_{i+1,J} + F_{i,J}) \quad F_w = \frac{1}{2}(F_{i,J} + F_{i-1,J}) \quad F_n = \frac{1}{2}(F_{I,j+1} + F_{I-1,j+1}) \quad F_s = \frac{1}{2}(F_{I,j} + F_{I-1,j})$$

Les flux diffusifs :

$$D_e = \Gamma_{U,e} \frac{\Delta Y}{\Delta X_e} \quad D_w = \Gamma_{U,w} \frac{\Delta Y}{\Delta X_w} \quad D_n = \Gamma_{U,n} \frac{\Delta X}{\Delta Y_n} \quad D_s = \Gamma_{U,s} \frac{\Delta X}{\Delta Y_s}$$

Le terme source de la correction de vitesse dans la phase solide [3]:

$$S_U(i, J) = -\xi \frac{[1 - f(I, J)]^2}{f^3(I, J) + \varepsilon} U(i, J)$$

### III .1.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y

L'intégration de l'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant Y sur un volume de contrôle décalé vers le haut donne l'équation algébrique :

$$A_p(I, j)V(I, j) = A_E(I, j)V(I+1, j) + A_W(I, j)V(I-1, j) + A_N(I, j)V(I, j+1) + A_S(I, j)V(I, j-1) + b_V(I, j) \quad (\text{III.1.5})$$

Avec :

$$A_p(I, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_w(I, j) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$$

$$A_n(I, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_s(I, j) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$A_p(I, j) = A_E(I, j) + A_W(I, j) + A_N(I, j) + A_S(I, j) + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta\tau}$$

$$b_V(i, J) = \left( \overline{S_V} + \frac{V_{i,J}^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y + Gr \frac{\theta(I, J) + \theta(I, J+1)}{2} \Delta X \Delta Y + [P(I, J) - P(I, J+1)] \Delta X$$

Le terme source pour la correction de vitesse dans la phase solide [3] :

$$S_V(I, j) = -\xi \frac{[1 - fl(I, J)]^2}{fl^3(I, J) + \varepsilon} V(I, j)$$

Les flux convectifs

$$F_e = \frac{1}{2}(F_{i+1, j} + F_{i+1, j-1}) \quad F_w = \frac{1}{2}(F_{i, j} + F_{i, j-1}) \quad F_n = \frac{1}{2}(F_{i, j} + F_{i, j+1}) \quad F_s = \frac{1}{2}(F_{i, j} + F_{i, j-1})$$

Les flux diffusifs

$$D_e = \Gamma_{V, e} \frac{\Delta Y}{\delta X_e} \quad D_{V, w} = \Gamma_w \frac{\Delta Y}{\delta X_w} \quad D_{V, n} = \Gamma_n \frac{\Delta X}{\delta Y_n} \quad D_{V, s} = \Gamma_s \frac{\Delta X}{\delta Y_s}$$

### III .1.7 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'intégration de l'équation adimensionnelle de l'énergie (sous forme enthalpique) sur un volume de contrôle typique (figure III.I.1), donne l'équation algébrique suivante :

$$A_P(I, J)h(I, J) = A_E(I, J)h(I+1, J) + A_W(I, J)h(I-1, J) + A_N(I, J)h(I, J+1) + A_S(I, J)h(I, J-1) + b_h(I, J) \quad (\text{III.1.6})$$

Avec :

$$A_E(I, J) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_W(I, J) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$$

$$A_N(I, J) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S(I, J) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$A_P(I, J) = A_E(I, J) + A_W(I, J) + A_N(I, J) + A_S(I, J) + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau}$$

$$\begin{aligned}
b_n(I, J) = & \left( \bar{S}_h + \frac{\bar{h}_{i,j}^k}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y + D_e [(\bar{h}_s(I+1, J) - \bar{h}(I+1, J)) - (\bar{h}_s(I, J) - \bar{h}(I, J))] \\
& - D_w [(\bar{h}_s(I, J) - \bar{h}(I, J)) - (\bar{h}_s(I-1, J) - \bar{h}(I-1, J))] \\
& - D_n [(\bar{h}_s(I, J+1) - \bar{h}(I, J+1)) - (\bar{h}_s(I, J) - \bar{h}(I, J))] \\
& - D_s [(\bar{h}_s(I, J) - \bar{h}(I, J)) - (\bar{h}_s(I, J-1) - \bar{h}(I, J-1))] \\
& + \frac{\bar{h}^n(I, J)}{\Delta\tau} \Delta X(I) \Delta Y(J)
\end{aligned}$$

Où  $K_e, K_w, K_n$  et  $K_s$  sont respectivement les conductivités thermiques aux interfaces e, w, n et s du volume de contrôle, et sont données en détail dans la référence [35-36].

Les flux convectifs :

$$F_e = U(i, J) \Delta Y \quad F_w = U(i-1, J) \Delta Y \quad F_n = V(I, j-1) \Delta X \quad F_s = V(I, j) \Delta X$$

Les flux diffusifs :

$$D_e = \frac{C}{\text{Pr}} \left[ K_e \frac{\Delta Y}{\delta X_e} \right] \quad D_w = \frac{C}{\text{Pr}} \left[ K_w \frac{\Delta Y}{\delta X_w} \right] \quad D_n = \frac{C}{\text{Pr}} \left[ K_n \frac{\Delta X}{\delta Y_n} \right] \quad D_s = \frac{C}{\text{Pr}} \left[ K_s \frac{\Delta X}{\delta Y_s} \right]$$

### III.1.8 Résolution du système d'équations

La résolution du système d'équations (III.1.4), (III.1.5) et (III.1.6) n'est pas facile, car les coefficients  $A_e, A_w, A_n, A_s$  et  $A_p$  des équations discrétisées de quantité de mouvement suivant  $X, Y$  dépendent respectivement des variables  $U, V$  (des équations non linéaires), et les termes sources des équations discrétisées de quantité de mouvement contiennent un gradient de pression, or jusqu'à présent nous n'avons pas une équation qui gère cette variable. La résolution est donc possible grâce à un algorithme développé par Patankar [36] dit « *Algorithme SIMPLE* ». Les abréviations des premières lettres des mots suivants :

*Semi-Implicit-Method-for-Pressure-Linked-Equation.*

### III .1.9 L'algorithme SIMPLE

L'algorithme SIMPLE est une procédure itérative pour calculer la pression en utilisant le maillage déplacé. Cette procédure commence par l'estimation de la pression .On pose que  $p^*$  est le champ de pression estimé. Donc, dans l'algorithme *SIMPLE*, la vitesse  $(U, V)$  et la pression  $(P)$  sont composées par des valeurs estimées et des valeurs de corrections:

$$P = P^* + P' ; \quad U = U^* + U' \quad ; \quad V = V^* + V'$$

La séquence des opérations essentielles constituant l'algorithme *SIMPLE* est la suivante :

- Donner un champ de pression  $P^*$
- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir les vitesses  $U^*$  et  $V^*$
- Résoudre l'équation de correction de pression  $P'$
- Corriger la pression  $P = P^* + P'$
- Corriger les vitesses  $U = U^* + U'$ ,  $V = V^* + V'$
- Résoudre les équations discrétisées des autres variables dépendantes telle que la température, l'enthalpie.
- Remplacement de l'ancien champ de pression par le nouveau et retournés à l'étape (2)

Les calculs seront répétés jusqu'à atteindre à la convergence de toutes les variables.

Dans le cas où ce processus itératif est divergent, nous utilisons un coefficient de sous relaxation pour stabiliser les calculs.

Cet algorithme est basé sur les équations suivantes [36] :

- **Equations du champ de la vitesse estimée**

$$A_p(i, J)U^*(i, J) = A_E(i, J)U^*(i+1, J) + A_W(i, J)U^*(i-1, J) + A_N(i, J)U^*(i, J+1) \\ + A_S(i, J)U^*(i, J-1) + b_U(i, J)$$

$$A_p(I, j)V^*(I, j) = A_E(I, j)V^*(I+1, j) + A_W(I, j)V^*(I-1, j) + A_N(I, j)V^*(I, j+1) \\ + A_S(I, j)V^*(I, j-1) + b_V(I, j)$$

- **Equation de correction de pression**

$$A_p P'(I, J) = A_E P'(I+1, J) + A_W P'(I-1, J) + A_N P'(I, J+1) + A_S P'(I, J-1) + b_p(I, J)$$

Avec :

$$A_p = A_E + A_W + A_S + A_N$$

$$b_p = (U^*(i, J) - U^*(i-1, J))\Delta Y - (V^*(I, j) - V^*(I, j-1))\Delta X$$

$$A_E = d_e \Delta Y \quad A_W = d_w \Delta Y \quad A_S = d_s \Delta X \quad A_N = d_n \Delta X$$

$$d_e = \frac{\Delta Y}{A_E(i, J)} \quad d_w = \frac{\Delta Y}{A_W(i, J)} \quad d_s = \frac{\Delta X}{A_S(I, j)} \quad d_n = \frac{\Delta X}{A_N(I, j)}$$

- **Equation de corrections des vitesses**

$$U'(i, J) = \frac{\Delta Y}{A_p(i, J)} [P'(I, J) - P'(I+1, J)]$$

$$V'(I, j) = \frac{\Delta X}{A_p(I, j)} [P'(I, J) - P'(I, J+1)]$$

### III.1.10 Critère de convergence

La convergence de nos calculs est vérifiée pour chaque incrément de temps par des les flux de chaleur au niveau de la paroi verticale chaude et de l'interface.

Pour la surface latérale chaude :

$$q_1 = \sum_{J=2}^{J-1} K(2, J) \frac{\theta(1, J) - \theta(2, J)}{X(2) - X(1)} \Delta Y$$

Pour la surface latérale froide :

$$q_2 = \sum_{J=2}^{il-1} K(il-1, J) \frac{\theta(il-1, J) - \theta(il, J)}{X(il) - X(il-1)} \Delta Y$$

Soit, numériquement :

$$|q_1 - q_2| \leq \varepsilon$$

Avec :

$$(10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-4})$$

### III.1.11 Algorithme de calcul

Notre programme de calcul a été élaboré en langage *Fortran 90*. Les différentes étapes de calcul sont schématisées dans la figure suivante :

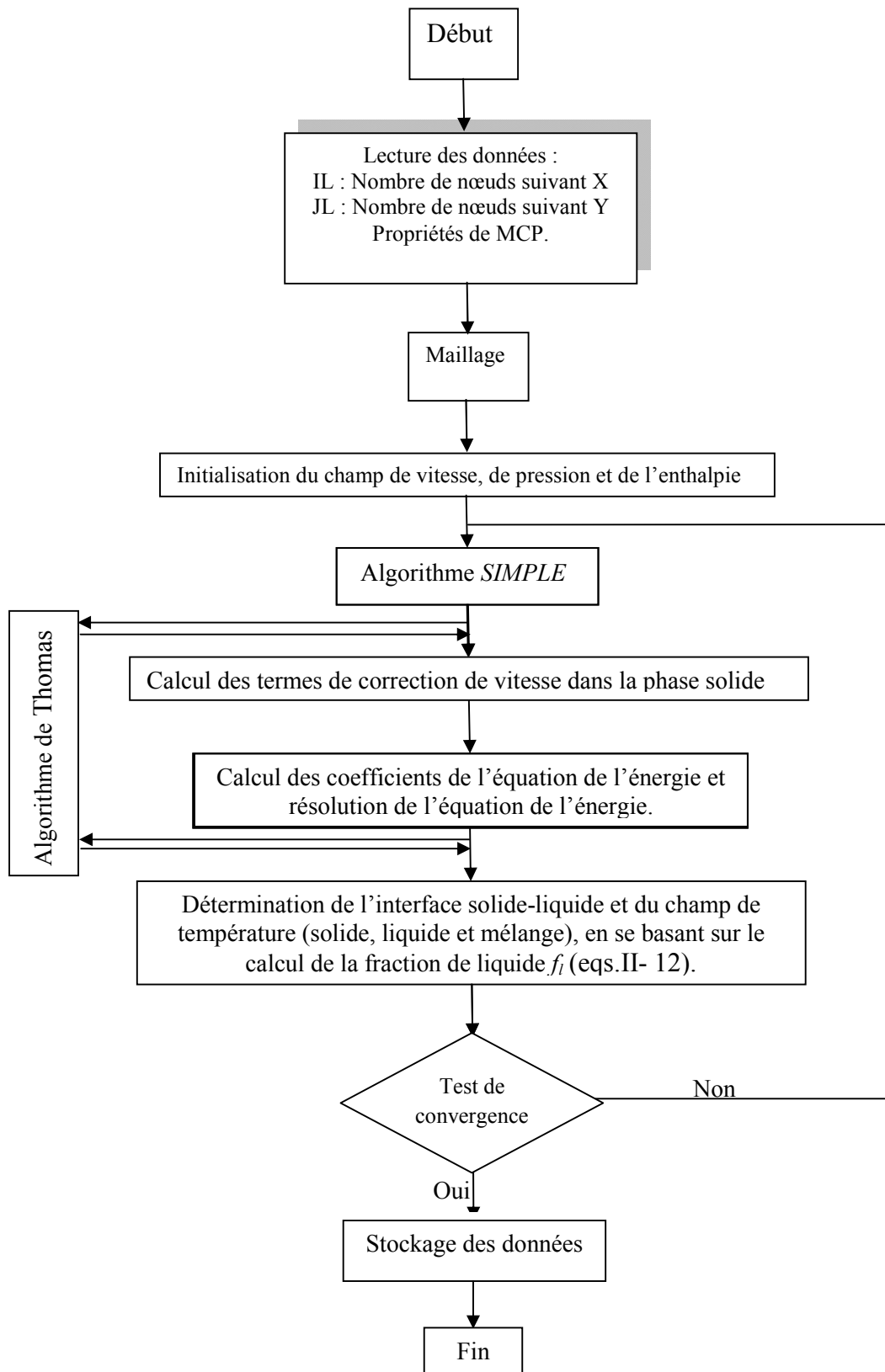


Figure III.3 Algorithme de calcul

## III.2 Validation numérique

### III.2.1 Effet du maillage sur la solution numérique

Les figures III.4 illustrent le maillage optimal utilisé  $164 \times 64$  pour mieux visualiser le phénomène de changement de phase solidification/fusion et représenter les lignes de courant et les isothermes. Un incrément de temps adimensionnel  $\Delta\tau = 10^{-5}$  a été considéré pour tout le calcul. La représentation graphique est obtenue en utilisant les logiciels graphiques : Tec plot 14.0, Origin 6.0.

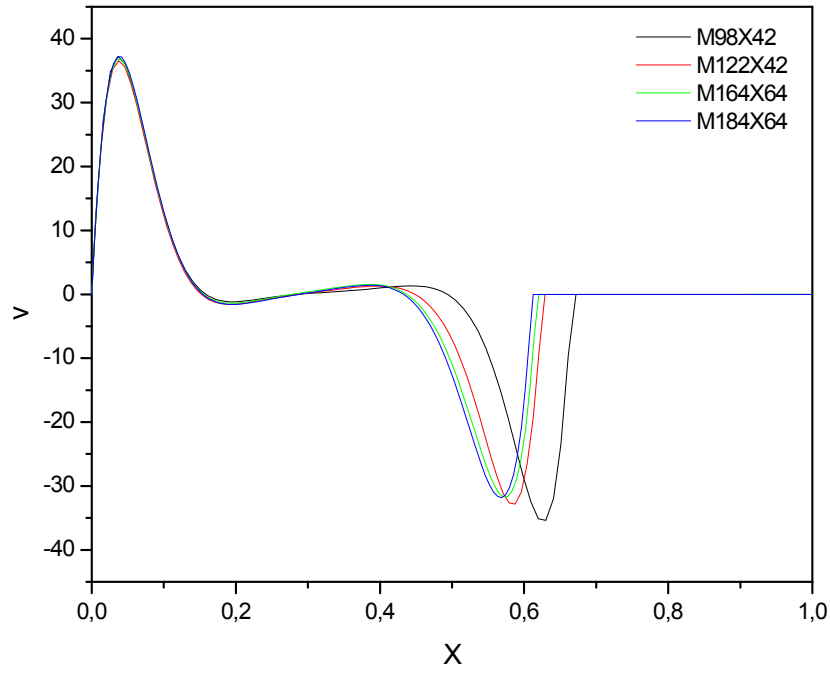
Pour montrer l'effet de l'adaptation du maillage sur les solutions numériques, nous avons testé quatre maillages uniformes, à savoir les maillages :  $98 \times 42$ ,  $122 \times 42$ ,  $164 \times 64$ , et  $184 \times 64$  nœuds, pour une cavité carrée de rapport d'aspect  $A=1$ . Le nombre de *Grashof* est fixé à  $Gr = 3,6 \cdot 10^{+5}$

En régime d'écoulement établi, on a présenté la variation des composantes de vitesse horizontale et verticale aux positions respectives  $X=0.5$ ,  $Y=0.5$  d'une cavité carrée. Les quatre maillages testés  $98 \times 42$ ,  $122 \times 42$ ,  $164 \times 64$ , et  $184 \times 64$  correspondent respectivement aux figures III.4a-b. Ces figures montrent une allure identique pour les quatre maillages, à l'exception de la différence qui apparaisse pour la composante de la vitesse verticale  $V$ , dans la région  $0,5 < X < 0,65$  située au niveau de l'interface solide/liquide.

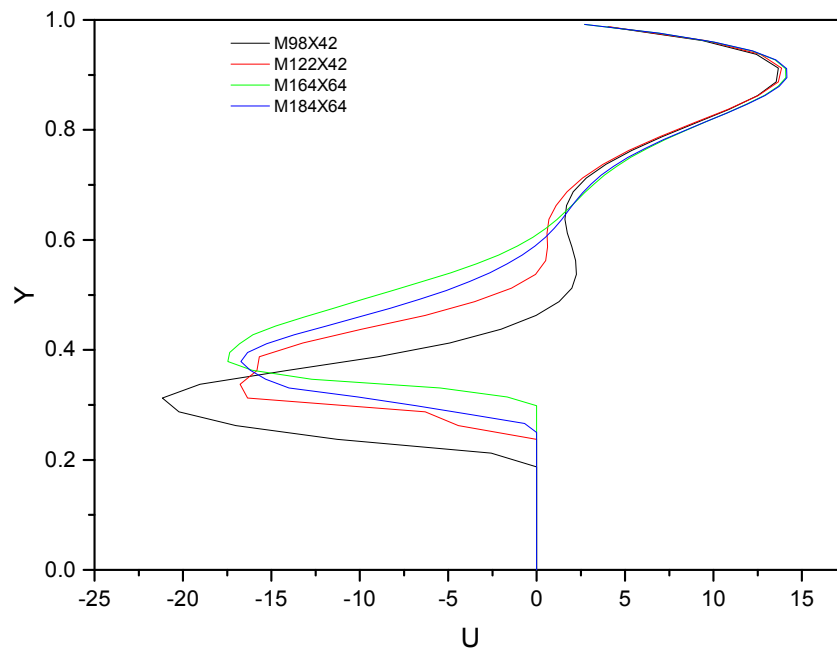
Le choix du maillage optimal ( $164 \times 64$ ) est réalisé en se basant sur un deuxième critère qui consiste à calculer le nombre de Nusselt moyen au niveau de la paroi chaude ainsi que la fonction de courant maximale (Tableau III.3).

Tableau III-3 : nombre Nusselt moyen et fonction de courant maximal pour différents maillage.

Grid		98 x 42	122 x 42	164 x 64	184 x 64
$A = 1$	$\ \varphi_{\max}\ $	3	3	2.8	2.8
	$\overline{Nu_c}$	1.70	1.69	1.75	1.85
$A = 4$	$\ \varphi_{\max}\ $	4.2	4	3.8	3.8
	$\overline{Nu_c}$	1.72	1.87	2.66	3.63



(a)



(b)

**Figure III.4** : Variations des composantes de la vitesse au milieu de la cavité, pour  $Gr = 3,6 \cdot 10^{+5}$  et différents maillages pour une cavité carrée ( $A = I$ ): (a) composante verticale  $V$ , (b) composante horizontale  $U$

## III.2.2 Validations avec les données expérimentales et numériques

### III.2.2.1 –Validation avec les données expérimentales

Pour valider le programme de calcul, nos résultats sont comparés aux données expérimentales obtenues par *Beckermann* et *Viskanta* [37] concernant la solidification des matériaux purs, où l'interface est isotherme. Une enceinte carrée à parois rigides est considérée, remplie de gallium dont les propriétés sont présentées dans le tableau III.4

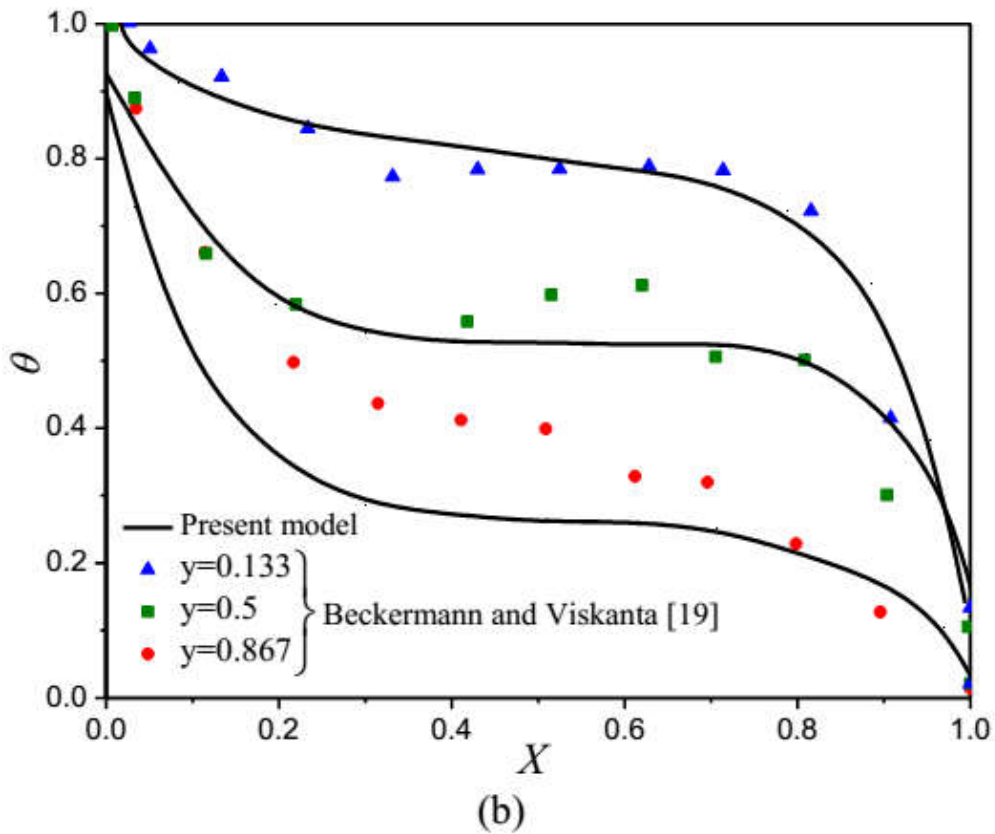
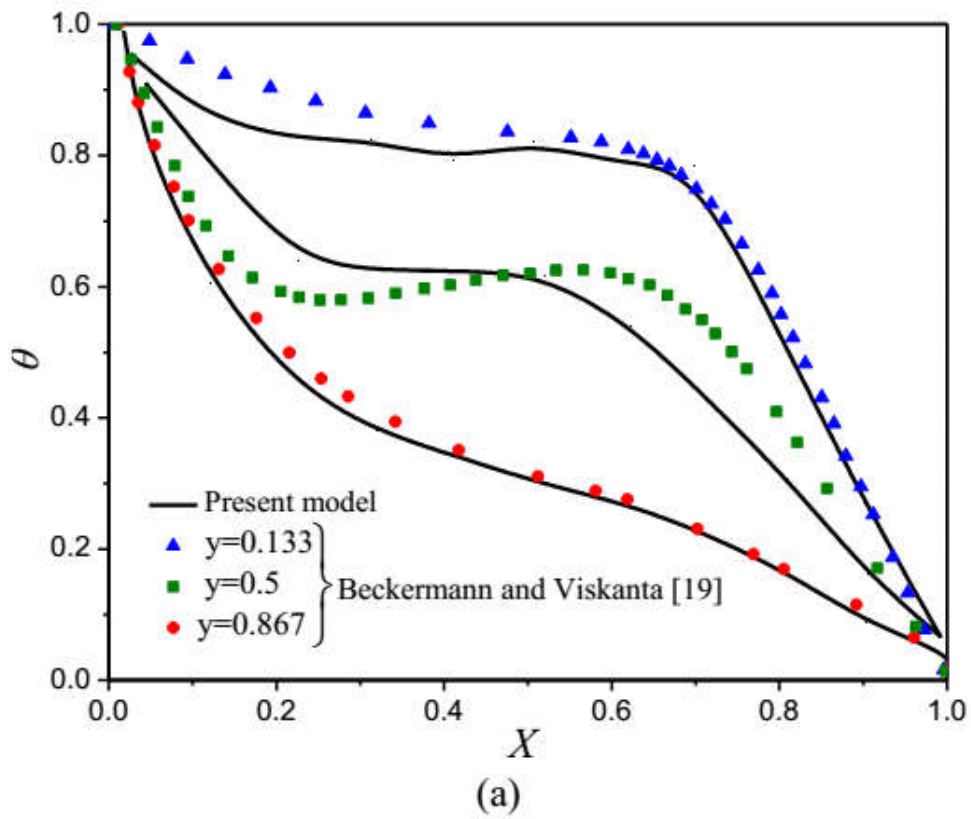
**Tableau III.4** : Propriétés physiques du gallium pur [38]

Propriété	Valeur	Unité
conductivité thermique du liquide, $k_l$	32	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
chaleur spécifique du liquide, $c_l$	381,5	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
chaleur latente de solidification, $L$	$8,016 \cdot 10^{+3}$	$\text{J.kg}^{-1}$
densité volumique du liquide, $\rho_l$	$6,093 \cdot 10^{+3}$	$\text{kg.m}^{-3}$
viscosité cinématique, $\nu$	$2,97 \cdot 10^{-7}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
température de la paroi chaude, $T_h$	312,98	K
température de fusion, $T_m$	302,78	K
température de la paroi froide, $T_c$	297,98	K
hauteur de la cavité, $H$	0.01	m
nombre de Prandtl, Pr	0.0208	--

Les hypothèses de l'auteur [37] ont été pris en compte : les propriétés physiques suivantes sont considérées constantes en phase liquide et solide :

$$(\rho_l = \rho_s = \rho, k_l = k_s = k \text{ et } c_l = c_s = c).$$

La figure III.5 présente une comparaison des profils de la température adimensionnelle aux différentes positions  $Y = 0.133$ ,  $Y = 0.5$  et  $Y = 0.867$  aux temps adimensionnels  $\tau = 1,782$  ( $t = 10$  min) et  $\tau = 8,91$  ( $t = 50$  min). On constate que les résultats numériques concordent bien avec les résultats expérimentaux de *Beckermann* et *Viskanta* [37]. Il est également à noter que dans la région supérieure  $Y = 0.867$ , à  $t = 50$  min, un faible écart est observée entre les résultats de cette comparaison.



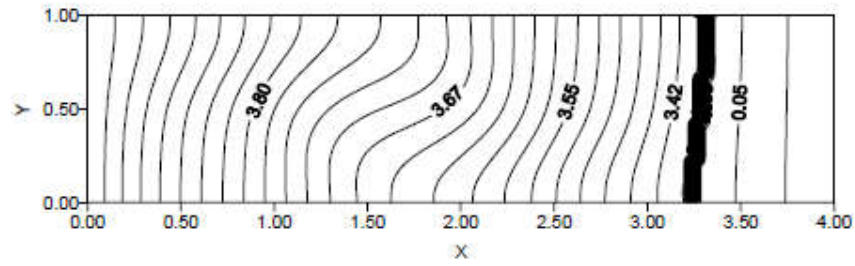
**Figure III.5 :** Comparaison des profils longitudinaux de la température adimensionnelle avec les données expérimentales de Beckermann et Viskanta [37].  
 (a)  $t = 10$  min, (b)  $t = 50$  min

### III.2.2 Validation avec des résultats numériques

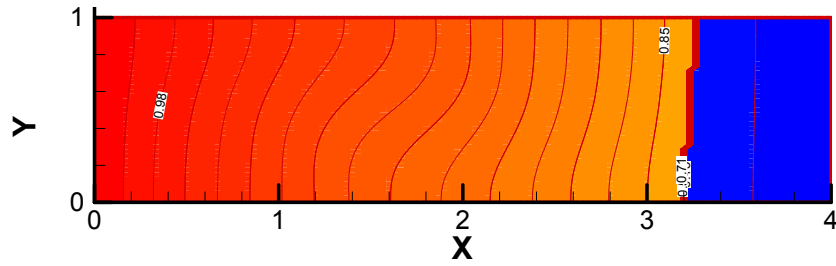
Les comparaisons numériques concernent la solidification d'un matériau à changement de phase. On considère l'aluminium (Al), initialement liquide à une température  $T_0$  supérieur à sa température de fusion  $T_m$ . La cavité est rectangulaire, avec un rapport de forme  $A = 4$ . Les parois verticales gauche et droite sont isothermes et soumises respectivement aux températures chaude  $T_h$  et froide  $T_c$  qui encadrent la température de changement de phase  $T_m$  ( $T_c < T_m < T_h$ ). Les parois horizontales sont adiabatiques. Les propriétés de l'aluminium sont données dans le tableau III.5. Les figures III.6-8 présentent une comparaison, en régime d'écoulement stationnaire des profils adimensionnels des lignes de courant, des isothermes et des isoenthalpies, pour un nombre de Grashof  $Gr = 8,5 \cdot 10^{+4}$ . Un accord satisfaisant avec les résultats numériques de **Bouabdallah [39]** et les résultats de simulations du code actuel est observé.

**Tableau III.5 :** Propriétés physiques de l'aluminium [39]

Propriété	Symbole	Valeur	Unité
conductivité thermique phase liquide	$k_l$	92	W/m.K
conductivité thermique phase solide	$k_s$	209	W/m.K
viscosité cinématique	$\nu$	$4,92 \cdot 10^{-7}$	$m^2/s$
densité volumique liquide	$\rho_l$	2359	$Kg/m^3$
densité volumique solide	$\rho_s$	2570	$Kg/m^3$
chaleur spécifique liquide	$C_l$	1086	j/kg.k
chaleur spécifique solide	$C_s$	1066	J/Kg.K
diffusivité thermique	$\alpha$	$3,59 \cdot 10^{-5}$	$m^2/s$
coefficient d'expansion thermique	$\beta$	$4 \cdot 10^{-5}$	$K^{-1}$
chaleur latente de fusion	$L$	$3,97 \cdot 10^{+5}$	$J.kg^{-1}$
température de fusion	$T_m$	933	K
température paroi chaude	$T_h$	1000	K
température paroi froide	$T_c$	925	K

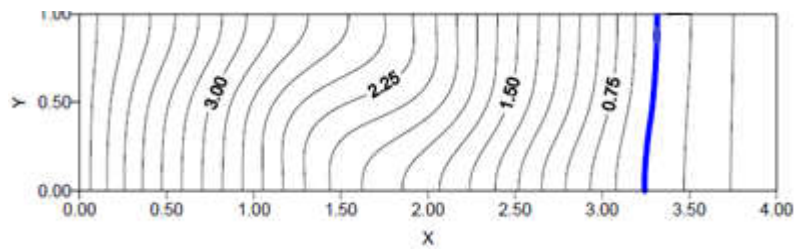


(a)

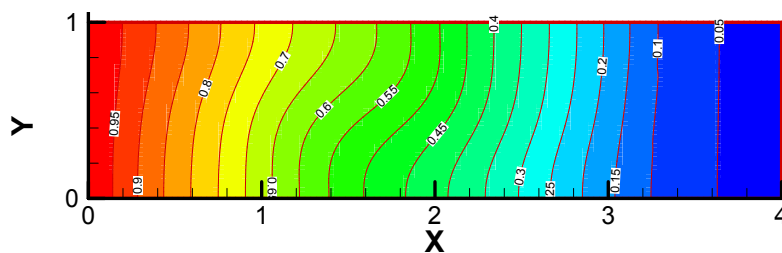


(b)

**Figure III.6 :** Comparaison des isoenthalpies, (a) résultats numérique [39] ; (b) présente étude pour  $Gr = 8.5 \times 10^4$

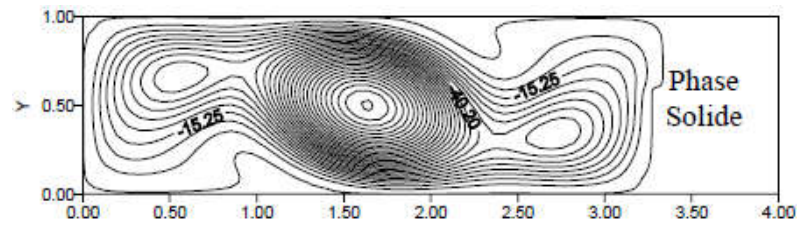


(a)

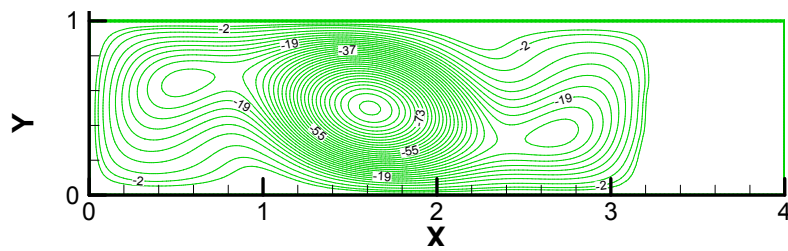


(b)

**Figure III.7 :** Comparaison des isothermes : (a) résultats numériques [39] ; (b) présente étude pour  $Gr = 8.5 \times 10^4$



(a)



(b)

**Figure III.8** : Comparaison des iso-courants (a) résultats numériques [39] ; (b) présente étude pour  $Gr = 8.5 \times 10^{+4}$

## CHAPITRE IV

### Solidification Des Matériaux A Changement De Phase

#### IV.1 Présentation des résultats

Les équations adimensionnelles (II.13-II.16) du modèle mathématique font apparaître la dépendance de notre problème aux grandeurs suivantes : le nombre de Grashof,  $Gr$ , le nombre de Prandtl,  $Pr$ , et le rapport d'aspect,  $A$ , et un autre paramètre qui ne figure pas dans ces équations qui est le nombre de Stefan  $Ste$ , défini dans l'équation (II.1).

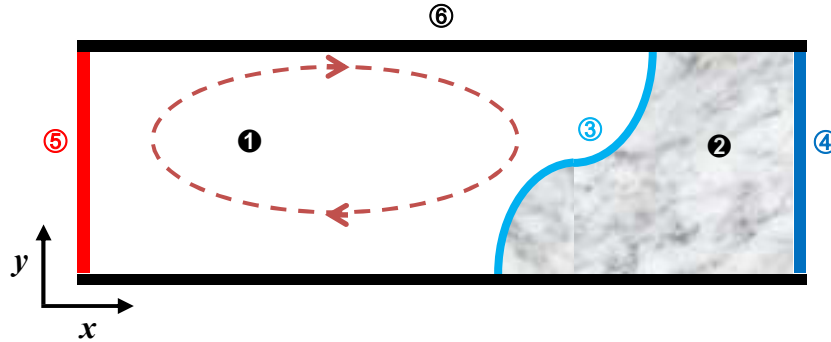
L'exécution du code de calcul a été faite sur un micro-ordinateur, Intel Pentium i5 de fréquence 3.6 GHz et de 8 Go de mémoire.

Dans ce chapitre, on a étudié le phénomène physique de solidification d'un matériau à changement de phase, et déterminé le front de solidification ainsi que la visualisation de l'écoulement de convection naturelle lors d'un changement de phase d'un fluide, contenu dans une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A$ . Le front de solidification et les lignes de courant sont déterminés en fonction du nombre de Grashof caractérisant l'écoulement dans la phase liquide. La structure de l'écoulement et le champ thermique ont été représentés par des contours des lignes de courant, des isothermes ainsi que des courbes d'évolutions temporelles de la température  $\theta$  et des lignes de courants  $\varphi$ , de la composante de vitesse horizontale  $U$  et verticale  $V$ .

#### IV.2 Système physique étudié

Le système physique considéré, schématisé sur la figure IV.1, est une cavité rectangulaire avec un rapport d'aspect  $A$ . La cavité contient un matériau à changement de phase caractérisé par un nombre de Prandtl  $Pr$ . Les parois verticales de l'enceinte sont

isothermes et soumises aux températures chaude  $T_h$  et froides  $T_c$ , respectivement, qui encadrent la température de fusion  $T_m$  ( $T_c < T_m < T_h$ ). De plus, les deux parois horizontales sont adiabatiques.



**Figure IV.1.** Schéma du problème physique : ① Liquide, ② Solide, ③ Interface, ④ Paroi froide, ⑤ Paroi chaude, ⑥ parois adiabatiques.

### IV.3 Cas de la Solidification de l'eau

L'étude numérique a pour but de déterminer le front de changement de phase ainsi que la visualisation de l'écoulement de convection naturelle lors de la solidification d'un matériau à changement de phase contenu dans une cavité rectangulaire. Le front de solidification, les isothermes et les lignes de courants sont déterminés en fonction du nombre de *Grashof*, caractérisant le transfert par convection naturelle de la phase liquide. Les conditions de calcul sont les suivantes :

$$T_c = -10 \text{ °C}, T_m = 0 \text{ °C}, T_h = 10 \text{ °C}.$$

Les propriétés physiques sont données dans le **tableau IV.1**. Initialement, l'enceinte est maintenue à une température supérieure à la température de fusion ( $T_0 > T_m$ ). C'est-à-dire égale à la température de la surface chaude. Cet état initial d'équilibre subit une évolution temporelle en imposant des conditions thermiques aux parois latérales de la cavité rectangulaire ( $T_c < T_m < T_h$ ). Le système physique évolue ensuite vers un nouveau état d'équilibre reflétant la stabilité du système qui est l'état de stabilité stationnaire. Les

discussions et l'analyse des résultats ont été développées pour un domaine décrit par une cavité rectangulaire.

**Tableau IV.1** Propriétés physiques de l'eau [31]

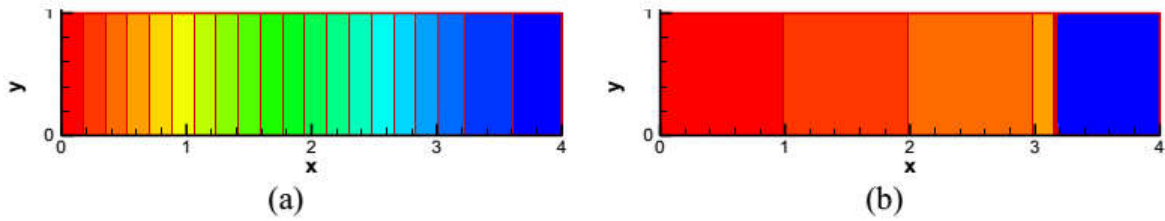
Propriété	Symbole	Solide (s)	Liquide (l)	Unité
conductivité thermique	$k$	2,26	0,6	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
viscosité cinématique	$\nu$	-	$1,0032 \cdot 10^{-6}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
densité volumique	$\rho$	916,8	999,8	$\text{kg m}^{-3}$
chaleur spécifique	$c$	2060	4182	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
diffusivité thermique	$\alpha$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,435 \cdot 10^{-7}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
coefficient d'expansion thermique	$\beta$	-	$6,734 \cdot 10^{-5}$	$\text{K}^{-1}$
chaleur latente de fusion	$L$	335		$\text{kJ kg}^{-1}$
nombre de Prandtl	Pr		6,9	-
température de changement phase	$T_m$	273,15		K

### IV.3.1- Effet du nombre Grashof

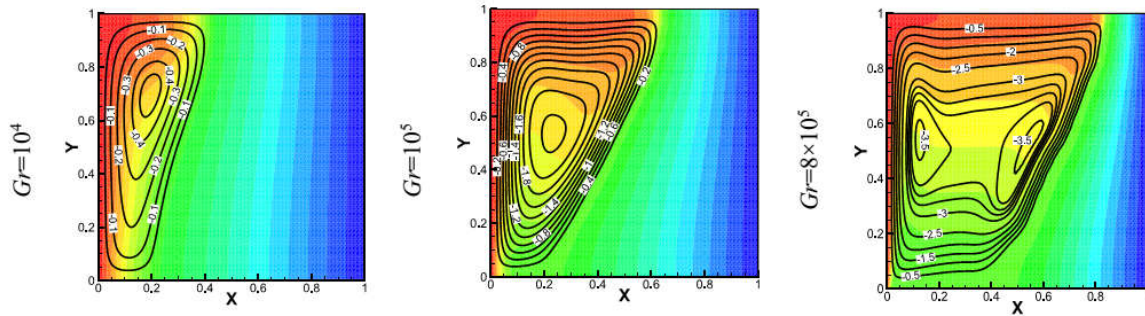
L'influence du nombre de Grashof caractérisant le phénomène de la convection naturelle dans la phase liquide pour une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A$  est examinée. Le domaine d'investigation du nombre de Grashof comporte les valeurs  $10^{+5}$  et  $8 \cdot 10^{+5}$ . Le front de solidification et les lignes de courant sont déterminés et illustrés selon le nombre de Grashof caractérisant l'écoulement dans la phase liquide. La structure et le comportement thermique de l'écoulement étaient représentés par des contours des lignes de courant, les isoenthalpies et les isothermes. Dans ce contexte, une discussion et une analyse des résultats ont été développées.

La **figure IV.2** montre que, dans le cas de la conduction dominante, supposé être le cas idéal, les isothermes interceptent les parois horizontales sous forme de lignes droites parallèles. Il s'ensuit de même pour le cas de la distribution des isoenthalpies à l'interface liquide-solide, visualisée par une épaisseur plus étroite.

La structure de la température adimensionnelle couplée aux lignes de courant est illustrée par la **figure IV.3**.



**Figure IV.2** Isothermes (a) et isoenthalpies (b) pour  $Gr = 0$ ,  $A=4$



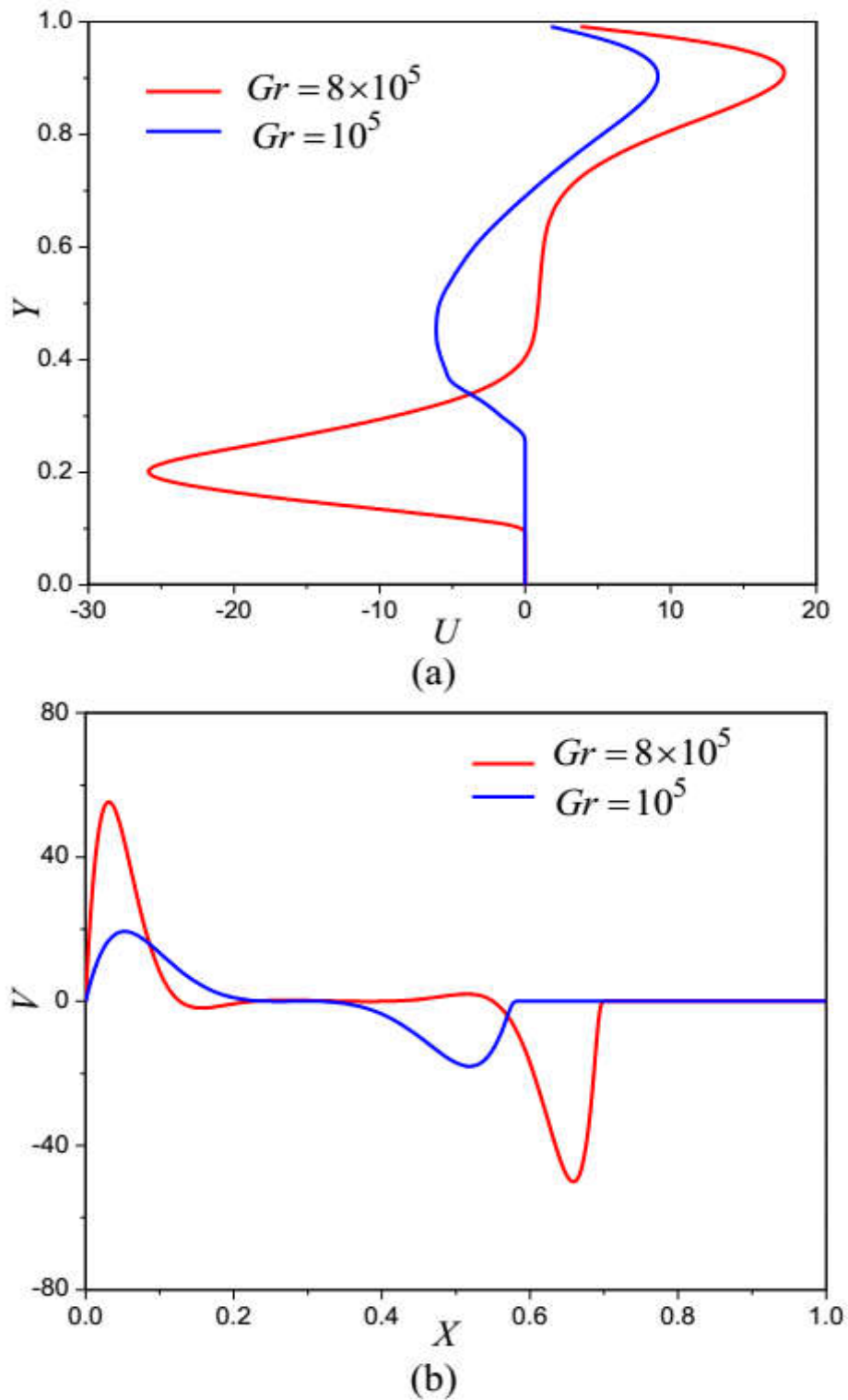
**Figure IV.3** Isothermes associées aux lignes de courants pour différents nombres de *Grashof*,  $A=1$

Les contours de la fonction de courant représentés dans la **figure IV.3** présentent une structure unicellulaire pour un nombre *Grashof*,  $Gr = 10^{+5}$  dont le maximum  $\|\varphi_{\max}\| = 2,2$  est situé au centre de la partie liquide de la cavité ( $0,1 \leq X \leq 0,3$ ). Augmenter le nombre *Grashof* de  $10^{+4}$  à  $8 \times 10^{+5}$  provoque une modification de la structure unicellulaire de l'écoulement vers une structure contenant deux cellules. Il est également à noter que l'écoulement est dirigé de la région chaude (paroi chaude) vers la région froide (phase solide). Ces cellules génèrent un mouvement de recirculation et un important transport convectif dans le centre de chaque cellule. Ces processus peuvent être expliqués par l'augmentation du débit, ce qui conduit les particules à réduire leurs courses, permettant l'apparition d'une petite zone de recirculation.

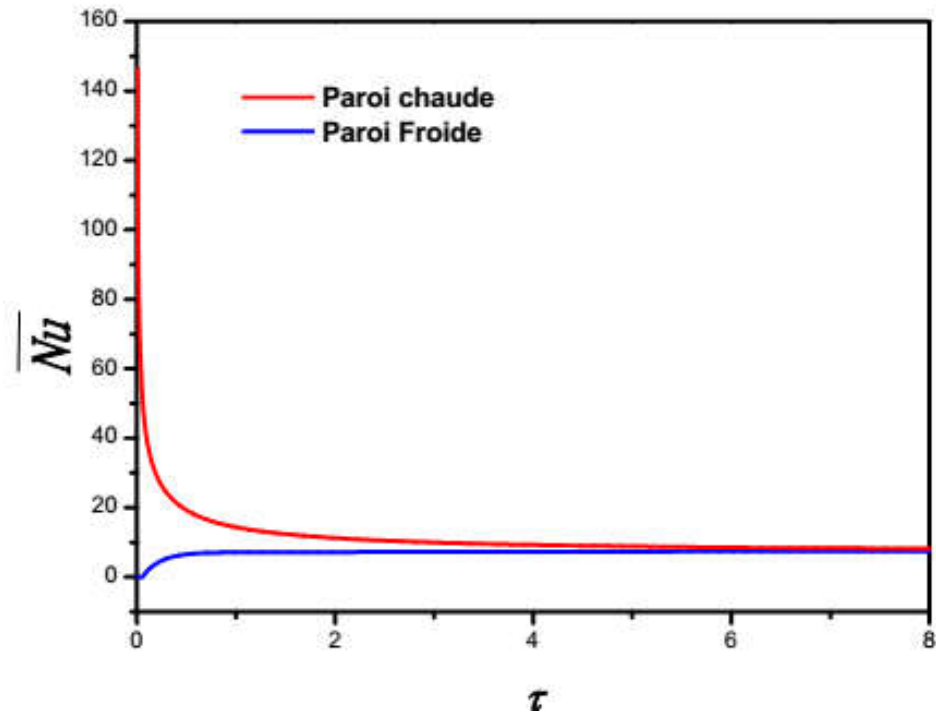
La condition adiabatique imposée aux parois horizontales est bien illustré. En effet, chaque isotherme intercepte la surface adiabatique à angle droit. A proximité des parois chaude et froide, la température devient plus uniforme à cause de la condition isotherme

imposée aux parois verticales. Les isothermes près de la paroi froide se composent de lignes presque droites s'étendant uniformément dans une direction parallèle à cette paroi. Ainsi, le transfert de chaleur est de nature conductive. Dans la zone fluide :  $0,5 < X < 0,65$ , la courbure des isothermes, principalement pour  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$ , illustre clairement l'effet important de la convection naturelle. C'est aussi noté que l'augmentation du nombre de *Grashof* avait pour effet d'augmenter la déformation des isothermes, en particulier autour de l'interface (solide / liquide). En outre, la région proche de la paroi froide (région solide) se caractérise par un gradient de température relativement faible par rapport à celui de la région liquide. La convection naturelle affecte directement la forme de l'interface en provoquant des déformations illustrées au fond de la cavité. Avec l'augmentation du nombre de *Grashof* de  $10^{+4}$  à  $8 \times 10^{+5}$ , le transfert convectif devient dominant. L'effet de la convection naturelle est clairement visible sur les isothermes et tend à changer leurs apparences.

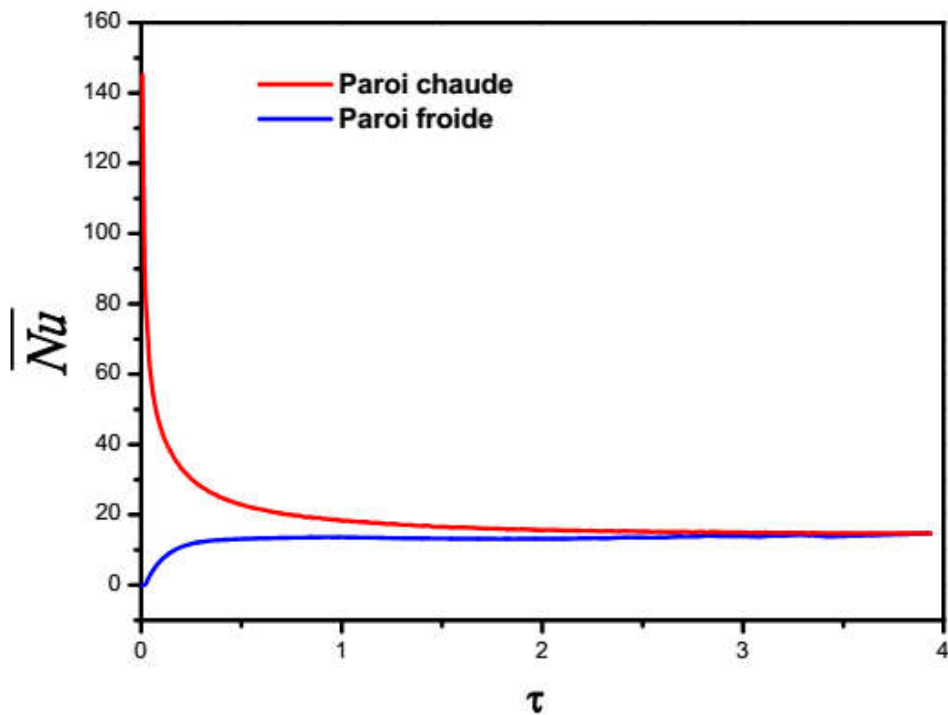
Les composantes horizontale et verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction des coordonnées adimensionnelles sont représentées dans la **figure IV.4**. Il apparaît que ces profils ont la même allure. Il est également à noter que pour différents nombres de *Grashof*, les composantes  $U$  et  $V$  changent leurs directions. La composante verticale subit une grande variation identiquement à la composante horizontale. Cela peut s'expliquer par l'important gradient de température qui induit les forces gravitationnelles, et qui génère une convection significative dans le fluide. Ce qui explique l'augmentation du transfert de chaleur par convection naturelle résultant de l'augmentation du nombre de *Grashof* de  $10^{+5}$  à  $8 \times 10^{+5}$ .



**Figure IV.4 :** Variations des composantes de la vitesse adimensionnelle : (a) composante horizontale  $U$  et (b) composante verticale  $V$ , pour  $X = 0,5$  et  $Y = 0,5$ ,  $A=1$



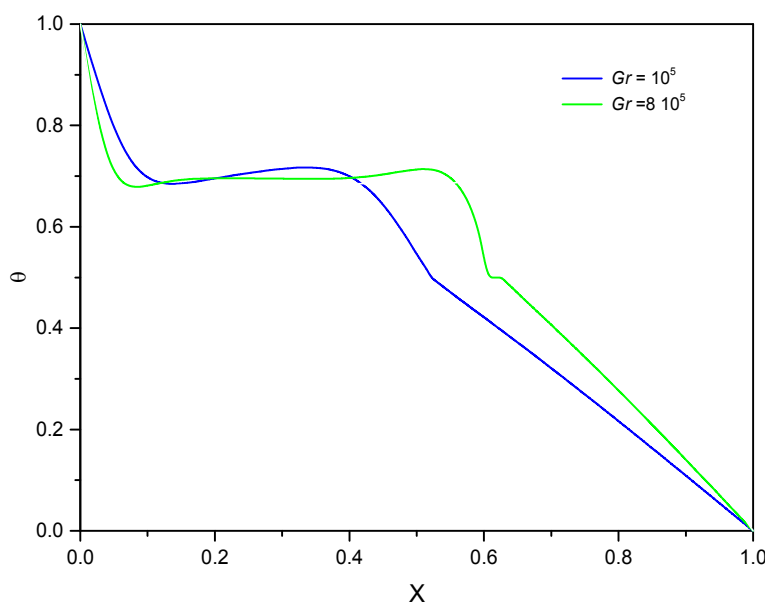
(a)



(b)

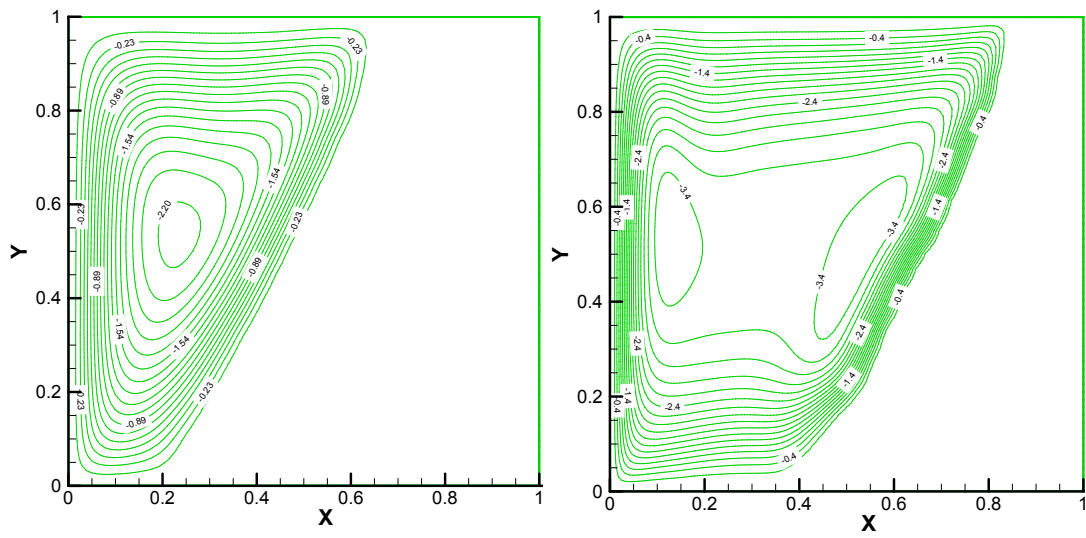
**Figure IV.5 :** Nombre de *Nusselt* moyen le long des parois verticales chaude et froide pour différents nombres de *Grashof*: (a)  $Gr = 10^5$ , (b)  $Gr = 8 \times 10^5$ ,  $A=1$

La **figure IV.5** montre l'évolution du nombre *Nusselt* moyen en fonction du temps adimensionnel. Le nombre de *Nusselt* moyen ( $\overline{Nu}$ ) est représenté le long des parois verticales chaude et froide, pour deux nombres de *Grashof*,  $Gr = 10^{+5}$  et  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$ . Ces variations illustrent les échanges d'énergie au niveau des deux parois et montrent que l'équilibre thermique est atteint lorsque  $\tau > 10$  pour  $Gr = 10^{+5}$  et  $\tau > 3,9$  pour  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$ . Ces résultats sont vérifiés, en fait, lorsque le nombre *Grashof* augmente, le temps écoulé pour atteindre l'état d'équilibre diminue suite à l'énergie importante échangée. Il est également à noter que le nombre *Nusselt* dépend du nombre de *Grashof*, soit une valeur élevée par rapport à la précédente : 7,595 pour  $Gr = 10^{+5}$  et = 14,640 pour  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$ .

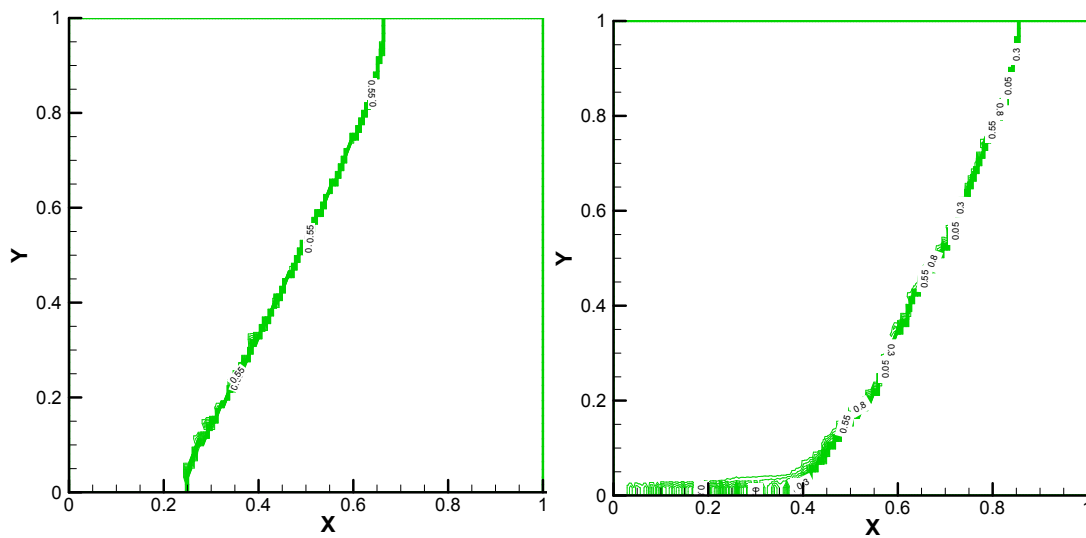


**Figure IV.6 :** Variation axiale de la température adimensionnelle  $\theta$  au milieu d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) pour  $Gr = 10^{+5}$ ,  $8 \cdot 10^{+5}$

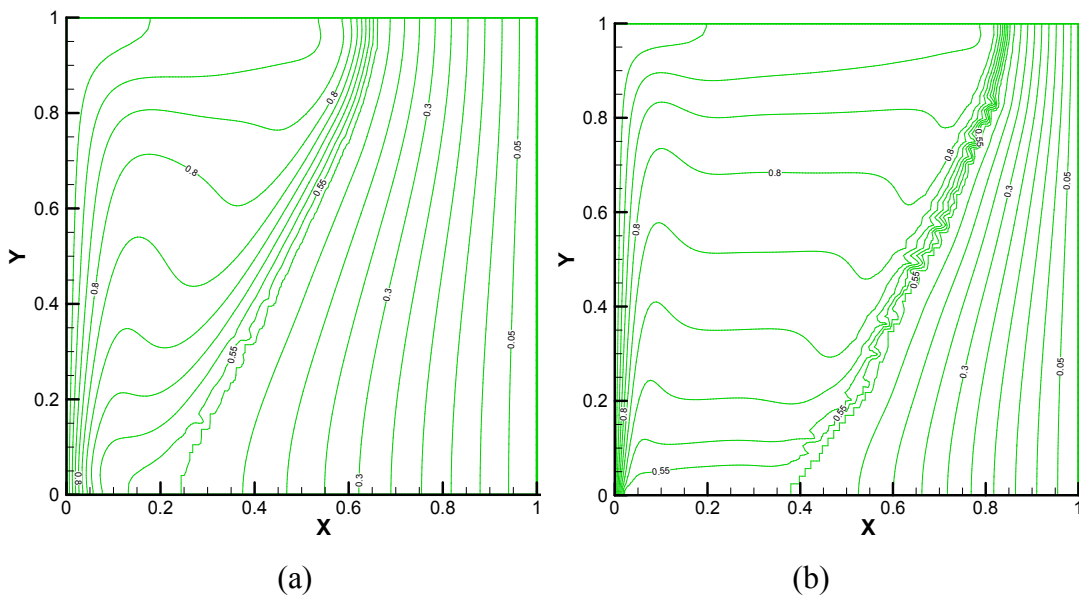
La **figure IV.6** illustre la variation de la température adimensionnelle  $\theta$  au milieu de la cavité. Il apparaît que ces profils présentent les mêmes allures. Nous remarquons aussi que pour les différents nombres de *Grashof*, les changements constatés au niveau des températures peuvent être expliqués par les gradients horizontaux importants de température qui sont à l'origine des forces de gravité, et qui engendrent des mouvements convectifs importants au sein du fluide. Ce qui explique l'augmentation du taux de transfert de chaleur par convection naturelle, imposé par l'augmentation du nombre *Grashof*.



**Figure IV.7 :** Lignes de courant en régime stationnaire pour une cavité carrée,  
(a)  $Gr = 10^{+5}$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$



**Figure IV.8 :** Fraction liquide en régime stationnaire pour une cavité carrée,  
(a)  $Gr = 10^{+5}$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$



**Figure IV.9** : Isothermes, en régime stationnaire pour une cavité carrée,  
(a)  $Gr = 10^{+5}$ , (b)  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$

Les contours des lignes de courant, la structure de la fraction liquide et les isothermes sont illustrés respectivement par les **figures IV.7, IV.8 et IV.9**.

Pour les contours de la fonction de courant Figure IV.7, une structure unicellulaire naissante pour le nombre de Grashof,  $Gr = 10^5$ , dont le maximum  $\|\varphi_{\max}\| = 2,2$  est située au centre de la partie liquide de la cavité ( $0,1 < X < 0,3$ ). L'augmentation du nombre de Grashof, de  $Gr = 10^{+5}$  à  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$ , provoque un changement de la structure unicellulaire de l'écoulement vers une structure contenant trois cellules : une cellule principale située au centre de la partie liquide ( $0,1 < X < 0,8$ ) et deux cellules internes arrangées à gauche et à droite. On remarque aussi que l'écoulement s'effectue de la région chaude (paroi chaude) vers la région froide (phase solide). Ces cellules engendrent ainsi un mouvement de recirculation et un transport convectif important situé au centre de chacune d'elles. Ces processus peuvent être expliqués par l'augmentation du débit, qui mène les particules à

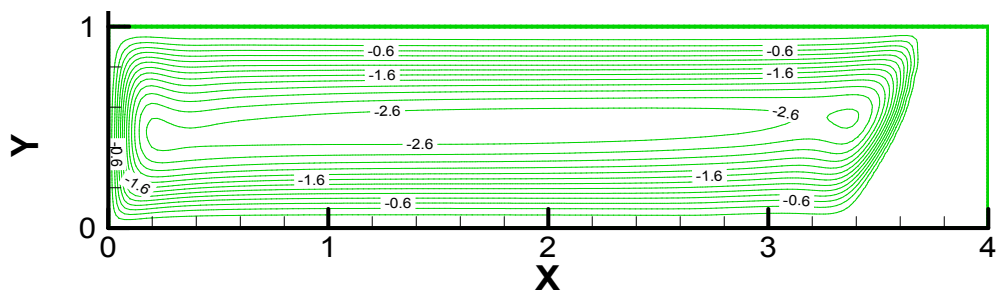
diminuer leurs parcours, ce qui permet l'apparition de petite zone de recirculation (les deux cellules gauche et droite).

Pour le nombre de Grashof,  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$  (figure **IV.8**), l'effet de la convection naturelle influe directement sur la forme de l'interface en entraînant une déformation marquée dans le bas de la cavité.

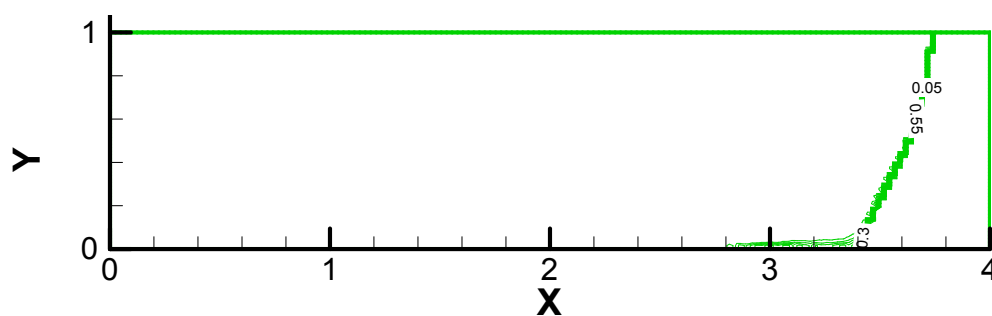
A l'interface, la concentration des lignes de la fraction liquide, désignant l'interface liquide-solide, dans un intervalle très petit, montre que le gradient d'enthalpie à l'interface est très important et égal à la chaleur latente de fusion. Loin de l'interface, le gradient devient très faible (presque négligeable). L'interface peut être représentée par l'isotherme  $T = 273K$  (température de solidification) dont sa valeur adimensionnelle est égale à 0,5 étant donné que l'eau est le matériau considéré.

Avec l'augmentation du nombre de Grashof de  $10^{+5}$  à  $8 \cdot 10^{+5}$ , le transfert convectif de l'écoulement domine dans la cavité. Cet effet de la convection naturelle est nettement remarquable sur les isothermes ayant tendance à modifier leurs allures (**figure IV.9**).

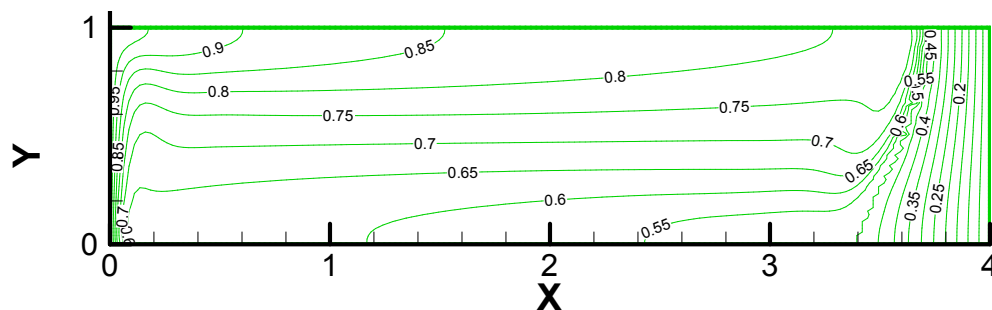
Les isothermes sont schématisées par les figures **IV.09 a-b**, **IV.10 c**, **IV.11 c**. La condition adiabatique imposée aux parois horizontales est bien illustrée. En effet, chaque isotherme intercepte la frontière adiabatique à angle droit. Au voisinage des parois chaude et froide, la température devient de plus en plus uniforme à cause de conditions isothermes imposées aux limites verticales. Les isothermes proches de la paroi froide sont constituées par des lignes presque droites, parallèles à cette paroi. Ainsi, le transfert de chaleur est de nature conductif. Dans la zone fluide, ( $0 < X < 0,65$ ) la courbure des isothermes, principalement pour  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$  illustre en toute évidence, l'effet important de la convection naturelle. On note également que l'augmentation du nombre de Grashof a pour effet d'accroître la déformation des isothermes, surtout au voisinage de l'interface (**solide/liquide**). Par ailleurs, la région proche de la paroi froide (partie solide), est caractérisée par un gradient de température relativement faible par rapport à celui dans la partie liquide.



(a)  $\|\varphi_{\max}\| = 2,73$  et  $\Delta\varphi = 0,2$

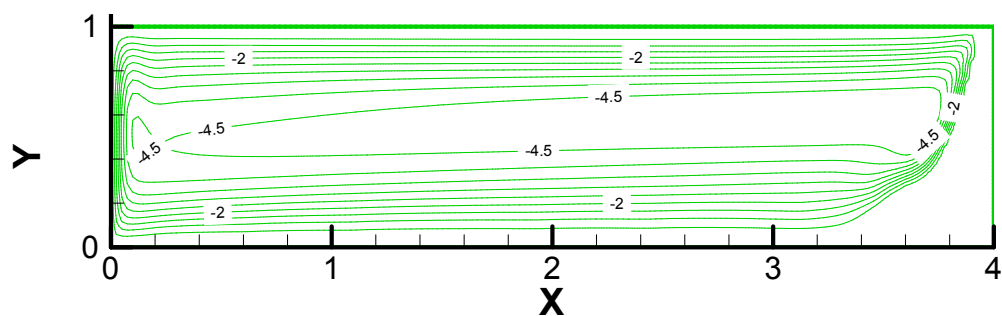
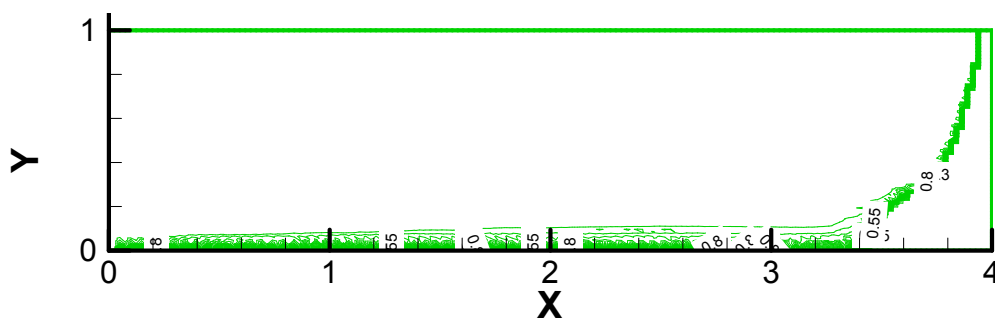
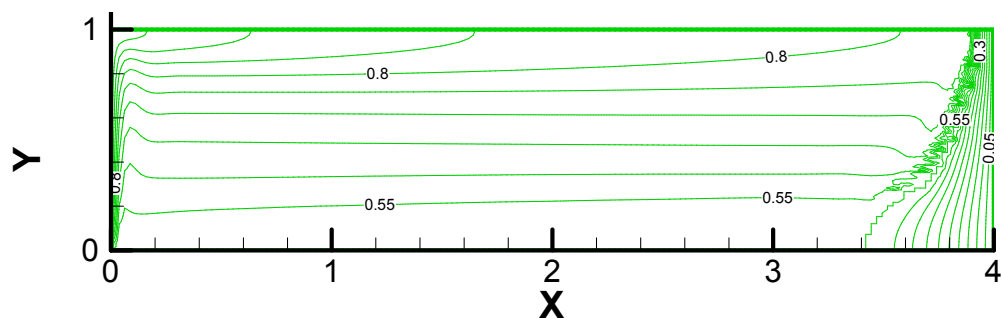


(b)  $\Delta f_l = 0,05$ .



(c)  $\Delta\theta = 0,05$ .

**Figure IV.10 :** Représentation en régime stationnaire pour une cavité rectangulaire,  $A=4$ ,  $Gr = 10^{+5}$  (a) lignes de courant, (b) fraction liquide, (c) isothermes,

(a)  $\|\varphi_{\max}\| = 5$  et  $\Delta\varphi = 0,5$ (b)  $\Delta f_l = 0,05$ .(c)  $\Delta\theta = 0,05$ .

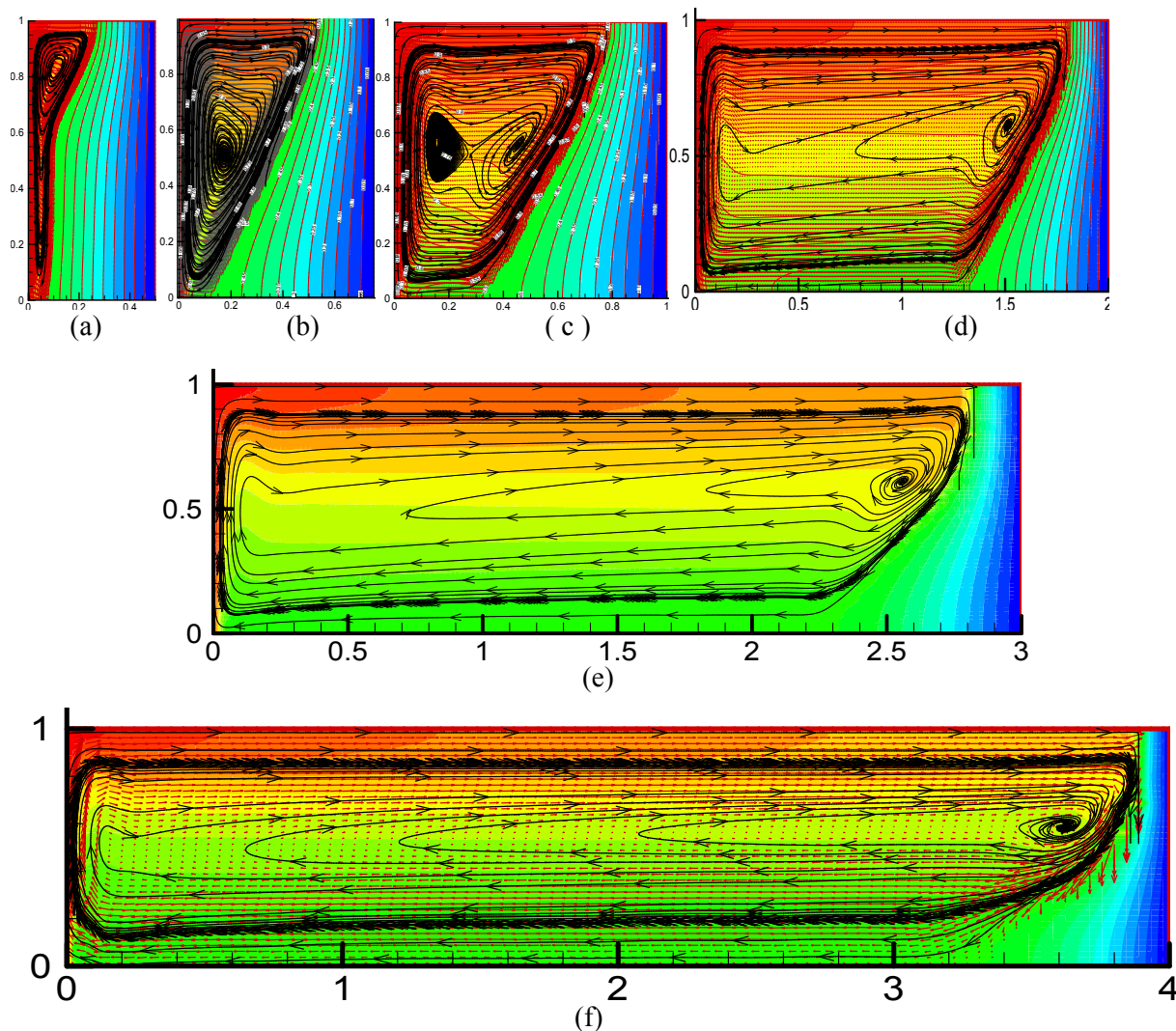
**Figure IV.11:** Représentation en régime stationnaire pour une cavité rectangulaire,  $A=4$ ,  $Gr = 8 \cdot 10^{+5}$ , (a) lignes de courant, (b) fraction liquide, (c) isothermes,

### IV.3. 2 Effet du rapport d'aspect ou facteur de forme

Dans cette étude numérique, l'influence du facteur de forme sur le transfert de chaleur et la structure de l'écoulement pour le phénomène de solidification dans une cavité rectangulaire est examiné pour un nombre de *Grashof*  $Gr = 3.6 \times 10^{+5}$

En état d'équilibre stationnaire, la structure des isothermes couplés aux lignes de courant est illustrée dans la **figure IV.12**, pour différents facteurs d'aspect :  $A=0.5$ ,  $A=0.75$ ,  $A=1$ ,  $A=2$ ,  $A=3$  et  $A=4$ .

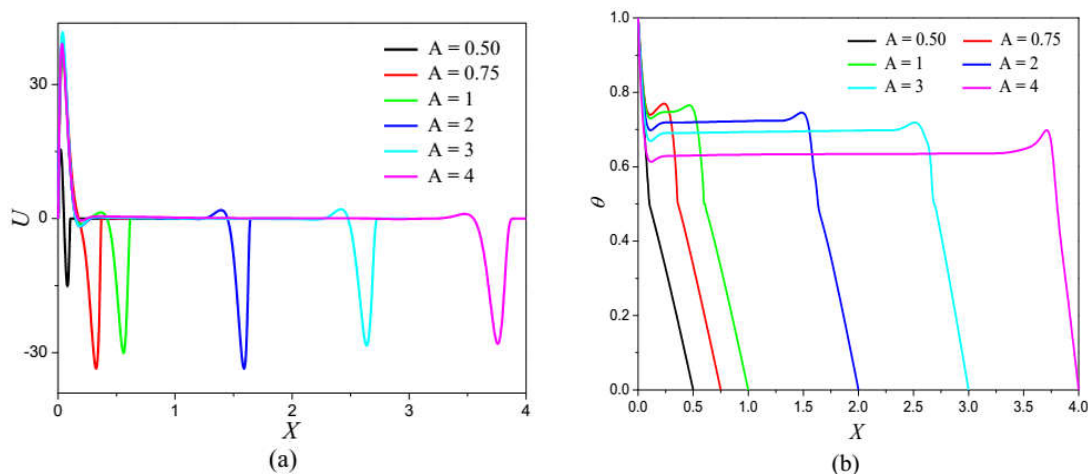
Pour les faibles valeurs de  $A$  ( $A=0.5$ ,  $A=0.75$ ), une structure unicellulaire située au centre de la région liquide de la cavité est observée. Dans ce cas, le transfert de chaleur est principalement conductif.



**Figure IV.12** : Isothermes associées aux lignes de courant pour différents rapports d'aspect  $A=0.5$ , (b)  $A=0.75$ , (c)  $A=1$ , (d)  $A=2$ , (e)  $A=3$ , (f)  $A=4$

L'augmentation du rapport d'aspect de 1 à 4 provoque un élargissement de la structure unicellulaire de l'écoulement à une structure contenant deux cellules : une cellule principale située au centre de la partie liquide et une autre interne plus ou moins petite tel que représentées dans les **Figure IV.12**. Ces cellules génèrent ainsi un mouvement de recirculation et un important transport convectif lorsque le rapport d'aspect ( $A$ ) devient

important. Ces processus peuvent s'expliquer par l'augmentation du débit, qui conduit les particules à diminuer leur course favorisant le transfert convectif vers une convection naturelle dominante. En effet l'impact de l'augmentation du rapport d'aspect génère la déformation des isothermes, en particulier à l'interface. Dans la zone liquide, les courbures des isothermes dépendent principalement de la distance des deux parois chaude et froide en fonction de l'augmentation du rapport d'aspect ( $A$ ), illustrant ainsi l'effet important de la convection naturelle. Aussi, il convient de noter que le rapport d'aspect ( $A$ ) a une influence directe sur la structure de l'écoulement. Il génère un grand débit convectif dans la zone fluide, ce qui entraîne directement une déformation marquée au fond de la cavité. L'augmentation de  $A$  a une influence similaire à celle du nombre de *Grashof*, engendre les mêmes conséquences et favorise le transfert convectif dans la partie liquide dans la cavité qui peut être le type de transfert dominant.



**Figure IV-13** : Profils de la composante horizontale de la vitesse (a) et de la température (b) au milieu de la cavité pour différents rapports d'aspect  $A$

La figure IV.13 illustre les variations de la composante horizontale  $U$  de la vitesse adimensionnelle et de la température adimensionnelle  $\theta$  en fonction de la coordonnée  $X$ . Ces profils ont pratiquement les mêmes allures. Il est également à noter que pour les différents rapports d'aspect  $A$  (0,5, 0,75, 1, 2, 3, 4), la composante de la vitesse  $U$  change de direction. Ceci peut être expliqué par l'importance du gradient de température

horizontale qui génère des mouvements convectifs importants dans le fluide ayant pour conséquence l'augmentation du taux de transfert de chaleur par convection naturelle.

#### IV.4 – Cas de la solidification de la paraffine RT27<sup>®</sup> (Rubitherm<sup>®</sup>)

L'étude du transfert de chaleur lors de la solidification d'un matériau à changement de phase contenu dans une cavité rectangulaire est présentée. Le fluide est un matériau organique généralement utilisé en tant que matériau régulateur de la température dans le domaine de l'habitat appelé **RT27<sup>®</sup>** [40-41] du fabricant allemand *Rubitherm<sup>®</sup>*.

**Tableau IV.2** : Propriétés thermo physiques du matériau organique simulé RT27<sup>®</sup> [41]:

Propriétés du MCP	Symbole	État solide (s)	État liquide (l)	Unité
Capacité calorifique	$C$	2,4	1,8	kJ/kg.K
Conductivité thermique	$K$	0,15	0,24	W/m.K
Masse volumique	$\rho$	760	870	kg/m <sup>3</sup>
Viscosité dynamique	$\mu$	$3,2 \times 10^{-3}$		kg/m.s
Coefficient d'expansion thermique	$\beta$	$0,5 \times 10^{-3}$		K <sup>-1</sup>
Température de solidification	$T_m$	301,15	à 303,15	K
Chaleur latente	$L$		179	kJ/kg

L'étude numérique vise la détermination du front de solidification ainsi que la visualisation de l'écoulement de convection naturelle lors de la solidification d'un matériau à changement de phase contenu dans une cavité carrée. Le front de solidification, les isothermes  $\theta$ , et les lignes de courant sont déterminés en fonction du nombre de *Grashof*, caractérisant l'écoulement dans la phase liquide. Les conditions de calcul sont les suivantes :  $T_c=27^\circ\text{C}$ ,  $T_m=29^\circ\text{C}$ ,  $T_h=37^\circ\text{C}$ .

Initialement, l'enceinte est maintenue à une température supérieure à la température de changement de phase, égale à la température de la surface chaude. Cet état d'équilibre initial subit une évolution temporelle en imposant les conditions aux limites thermiques extérieures. Le système physique évolue alors, vers un nouvel état d'équilibre traduisant la stabilité du système. La discussion et l'analyse des résultats ont été développées pour un domaine d'investigation du nombre de *Grashof* comportant les valeurs  $Gr=10^{+4}$ ,  $5.10^{+5}$ ,  $10^{+6}$  et  $5.10^{+6}$ .

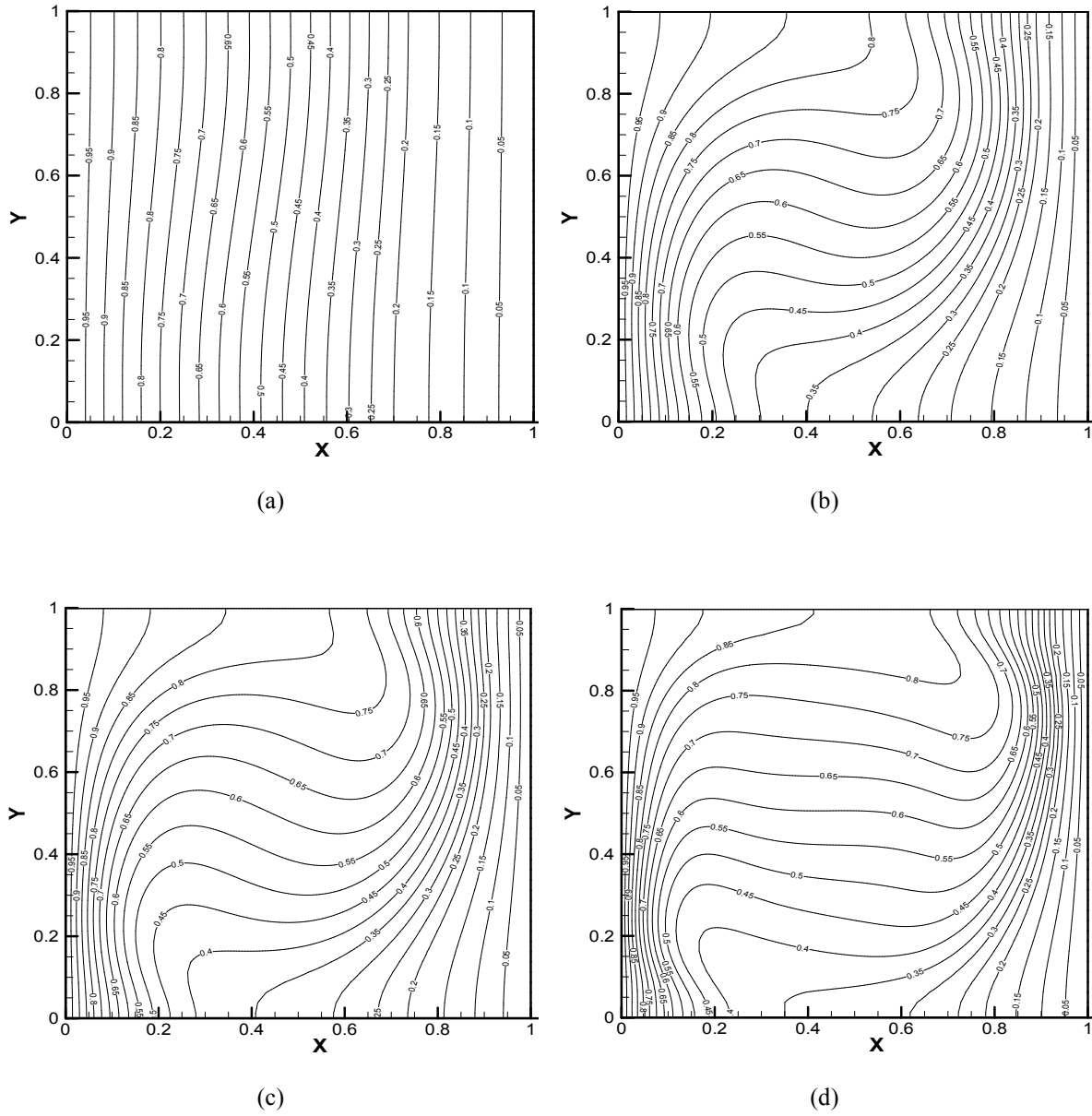
Les résultats numériques obtenus concernent la structure de la fraction liquide, les contours des lignes de courant adimensionnelles, et les isothermes. Elles sont illustrées par les figures **IV-14**, **15** et **16**.

Les isothermes sont schématisées par la figure **IV.14**. La condition adiabatique imposée aux parois horizontales est bien illustrée. En effet, chaque isotherme intercepte la frontière adiabatique à angle droit. Au voisinage des parois chaude et froide, la température devient de plus en plus uniforme à cause des conditions isothermes imposées aux limites verticales. Les isothermes proches de la paroi froide sont constituées par des lignes presque droites, parallèles à cette paroi. Ainsi, le transfert de chaleur est de nature conductif. Dans la zone fluide :  $0 < X < 0,8$ , la courbure des isothermes, principalement pour  $Gr = 5 \cdot 10^5$  à  $Gr = 5 \cdot 10^6$  illustre en toute évidence, l'effet important de la convection naturelle. On note également que l'augmentation du nombre de *Grashof* a pour effet d'accroître la déformation des isothermes, surtout au voisinage de l'interface (solide/liquide). Par ailleurs, la région proche de la paroi froide (partie solide), est caractérisée par un gradient de température relativement faible par rapport à celui dans la partie liquide. Avec l'augmentation du nombre de *Grashof* de  $10^4$  à  $5 \cdot 10^6$ , le transfert convectif de l'écoulement domine dans la cavité. Cet effet de la convection naturelle est nettement remarquable sur les isothermes ayant tendance à modifier leurs allures.

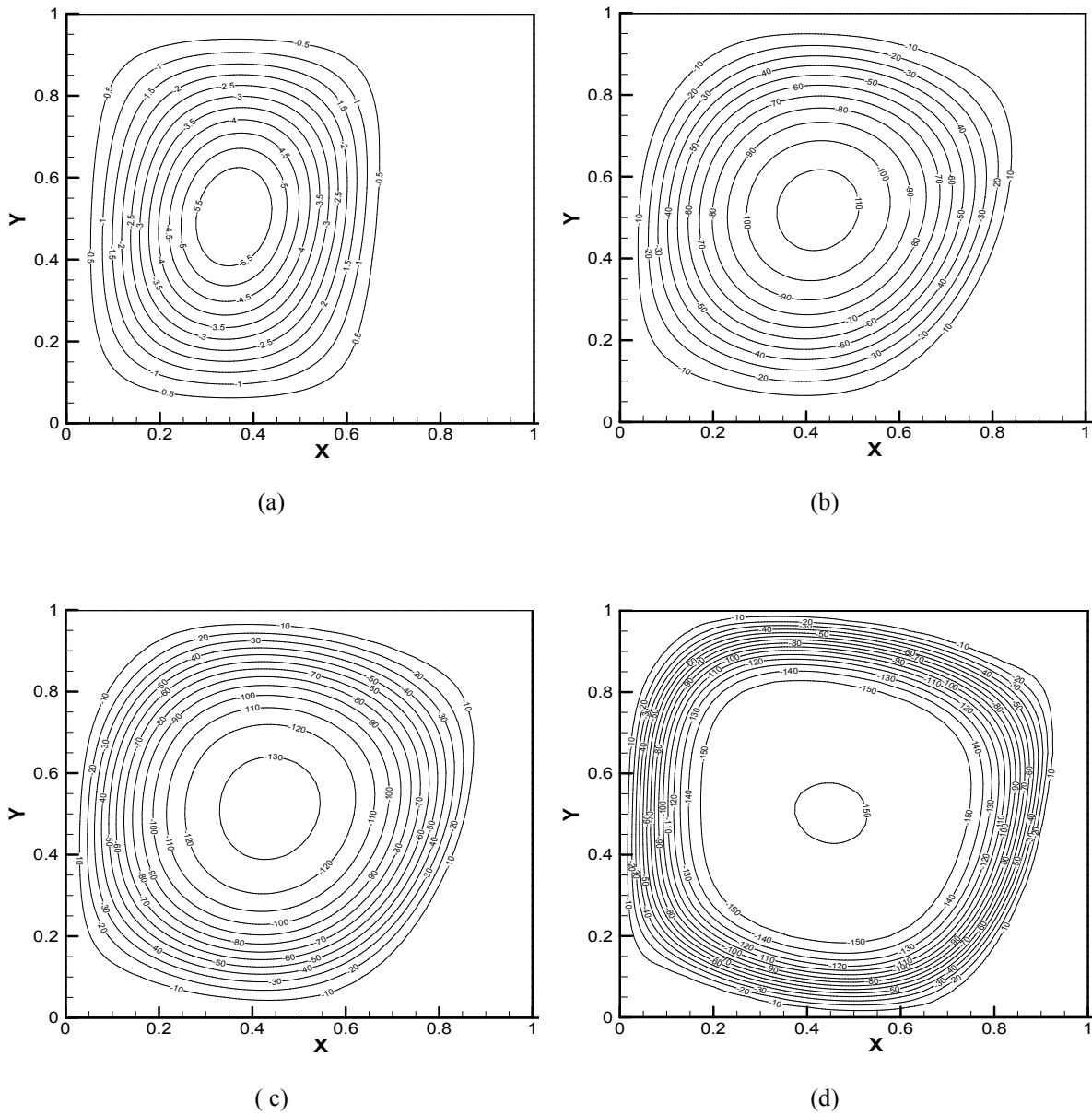
Pour les contours de la fonction de courant illustrés par les figures **IV.15**, une structure unicellulaire naissante pour le nombre de *Grashof*,  $Gr = 10^5$ , dont le maximum  $|\varphi_{\max}| = 5,5$  est située au centre de la partie liquide de la cavité ( $0,3 < X < 0,5$ ). L'augmentation du nombre de *Grashof*, de  $10^4$  à  $5 \cdot 10^6$ , provoque un élargissement de la structure unicellulaire de l'écoulement. On remarque aussi que l'écoulement s'effectue de la région chaude (paroi chaude) vers la région froide (phase solide). Ces cellules engendrent ainsi un mouvement de recirculation et un transport convectif important situé au centre de chacune d'elles. Ces processus peuvent être expliqués par l'augmentation du débit qui entraîne l'atténuation des trajectoires des particules.

Pour les différents nombre de *Grashof* de  $10^4$  à  $5 \cdot 10^6$ , comme le montre la figure **IV.16**, l'effet de la convection naturelle influe directement sur la forme de l'interface en entraînant une déformation marquée dans le bas de la cavité. A l'interface, la concentration des lignes de la fraction liquide, désignant l'interface liquide-solide, dans un intervalle très petit, montre que le gradient d'enthalpie à l'interface est très important et égale à la chaleur

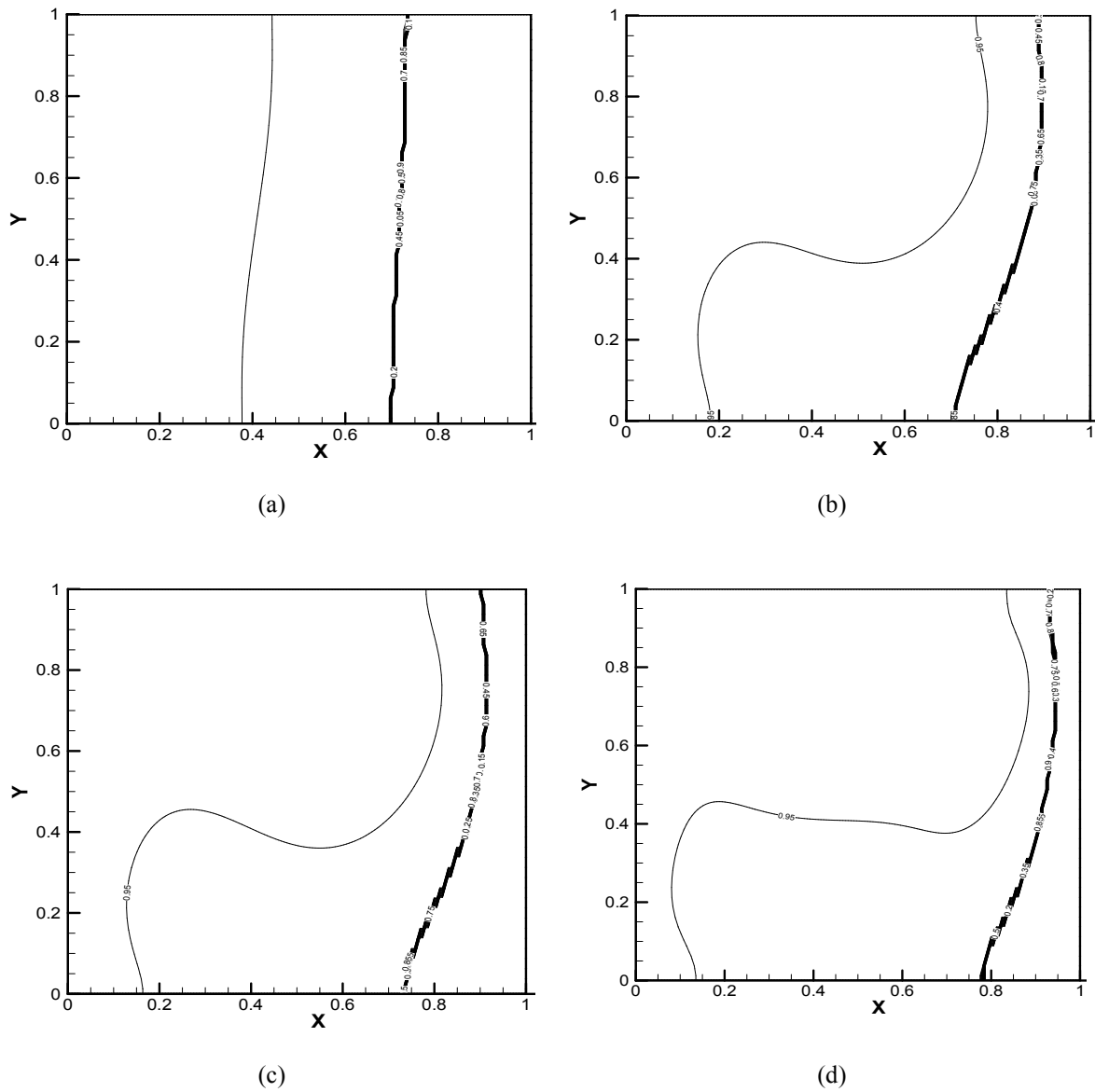
latente de fusion. Loin de l'interface, le gradient devient très faible (presque négligeable). L'interface peut être représentée par l'isotherme  $T=302,15\text{K}$  (température de solidification) dont sa valeur adimensionnelle est égale à 0,2 étant donné que le **RT27** est le matériau considéré dans cette étude.



**Figure IV.14** : Structure des isothermes adimensionnelles pour différentes valeurs du nombre de Grashof : (a)  $Gr = 10^4$ , (b)  $Gr = 5 \cdot 10^5$ , (c)  $Gr = 10^6$  et (d)  $Gr = 5 \cdot 10^6$



**Figure IV.15 :** Structure des lignes de courant adimensionnelles pour différentes valeurs du nombre de *Grashof*: (a)  $Gr = 10^{+4}$ , (b)  $Gr = 5 \cdot 10^{+5}$ , (c)  $Gr = 10^{+6}$  et (d)  $Gr = 5 \cdot 10^{+6}$



**Figure IV.16 :** Structure de la fraction liquide pour différentes valeurs du nombre de *Grashof*: (a)  $Gr = 10^4$ , (b)  $Gr = 5 \cdot 10^5$ , (c)  $Gr = 10^6$  et (d)  $Gr = 5 \cdot 10^6$

## CHAPITRE V

### Fusion des matériaux à changement de phase

#### V.1 introduction :

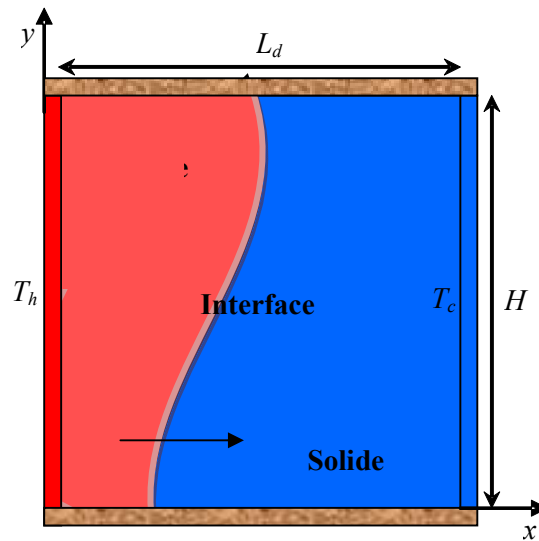
La fusion d'un matériau à changement de phase a lieu dans une plage de température définie où il y'a coexistence des phases solide et liquide. Dans un intervalle de température, la chaleur latente est absorbée en fonction des proportions et des propriétés des constituants du matériau. Le processus de fusion peut être illustré par la figure V.1.

Les hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons sont identiques à celles des précédentes études de la solidification, c'est-à-dire que les transferts thermiques par convection dans la région liquide, et conduction dans la région solide sont pris en compte.

Par ailleurs, dans ce dernier chapitre, on a considéré le même matériau à changement de phase utilisé pour le cas de la solidification qui est de l'eau, dont les propriétés physiques sont mentionnées dans le *chapitre II*, ceci est venu pour voir la cinétique de la fusion et la comparer avec celle de la solidification qui dépende de plusieurs facteurs à savoir : une simulation numérique du phénomène de changement de phase précisément la fusion au sein d'une enceinte rectangulaire ayant un rapport d'aspect  $A=1$ , et un nombre de Grashof  $Gr = 3,6 \cdot 10^{+5}$  caractérisant le transfert convectif de chaleur en phase liquide. Les conditions de calcul sont les suivantes :  $T_c = -3 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_m = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_h = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Ces conditions aux limites sont exposées de part et d'autre sous des conditions de températures uniformes c'est-à-dire la paroi latérale droite soumise à une température froide  $T_f$ , tandis que la paroi latérale gauche soumise à une température chaude  $T_c$  supérieure à la

température de fusion  $T_f$ . Les parois latérales horizontales sont thermiquement isolées ou soumises à des conditions adiabatiques. Initialement, le MCP considéré contenu dans l'enceinte est à l'état solide et maintenu à une température inférieure à la température de fusion ( $T_0 < T_m$ ) supposée égale à la température de la surface froide. Cet état initial d'équilibre subit une évolution temporelle en imposant les conditions aux limites thermiques aux parois latérales de la cavité rectangulaire ( $T_c < T_m < T_h$ ). Le système physique évolue ensuite vers un nouvel état d'équilibre reflétant la stabilité du système. Les propriétés thermo-physiques sont indiquées au tableau du chapitre précédent **tableau IV.3**. L'enceinte typique est illustrée par la **figure V.1** de hauteur  $H$ , de largeur  $L_d$ .



**Figure V.1** : Problème physique.

## V.2. Formulation du problème de fusion :

La méthode utilisée est la méthode enthalpique combinant le transfert thermique relié au changement de phase par le biais d'un terme source dans les équations de quantités de

mouvements. Il n'est donc pas nécessaire de calculer explicitement la position du front de fusion. Les équations utilisées du problème de changement de phase sont résolues dans tout le domaine de calcul, y compris la région solide. Ceci peut être fait entre autres au moyen d'un terme source dans les équations du mouvement. Il devient ainsi possible d'utiliser un maillage rectangulaire et fixe dans l'espace physique. Cette méthode est validée à maintes reprises dans la littérature [27, 31, 42, 43, 44, 45] pour des problèmes de changement de phase en présence du phénomène de la convection.

### V.3. Résultats et discussion :

Le système physique considéré est initialement maintenu à une température inférieure à la température de fusion ( $T_0 < T_m$ ). Cet état d'équilibre initial subit une évolution temporelle vers un nouvel état d'équilibre en imposant les conditions thermiques ( $T_c < T_m < T_h$ ). Le système physique atteint un nouvel équilibre thermique appelé la fusion totale selon notre cas et les conditions imposées. Le comportement thermique de l'écoulement, lors des présentes simulations, était représenté par des contours des lignes de courant, des isothermes et la fraction liquide.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la solution instationnaire de l'écoulement bidimensionnel généré par le transfert thermique, afin de déterminer en fonction du temps le déplacement du front de fusion pour différents temps choisis : (a) : 10 min, (b) : 20 min, (c) : 30min, (d) : 40 min, (e) : 50 min, (f) : 60min.

La figure V.2 représente la variation temporelle en fonction des coordonnées spatiales de la température pour le cas d'une cavité carrée. Ce qui est remarquable, la quasi uniformisation

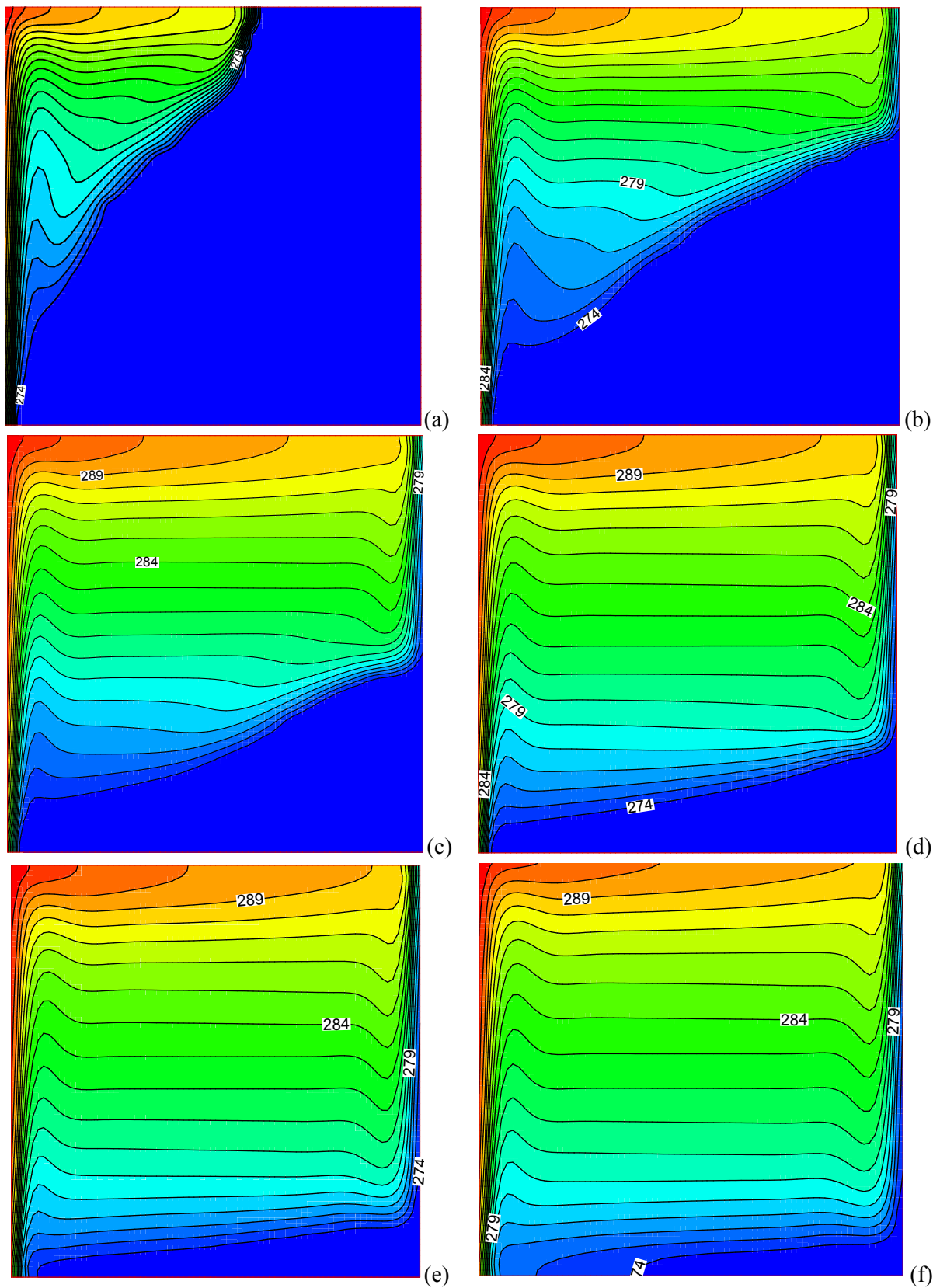
des profils de la température au niveau de la région liquide, principalement due au mouvement et au transfert de chaleur dominant par convection naturelle.

Le champ thermique est illustré par les isothermes. Les conditions adiabatiques imposées aux parois horizontales sont bien illustrées où chaque isotherme intercepte la frontière adiabatique à angle droit. Au voisinage des parois chaude et froide la température devient de plus en plus uniforme à cause des conditions isothermes imposées aux limites verticales.

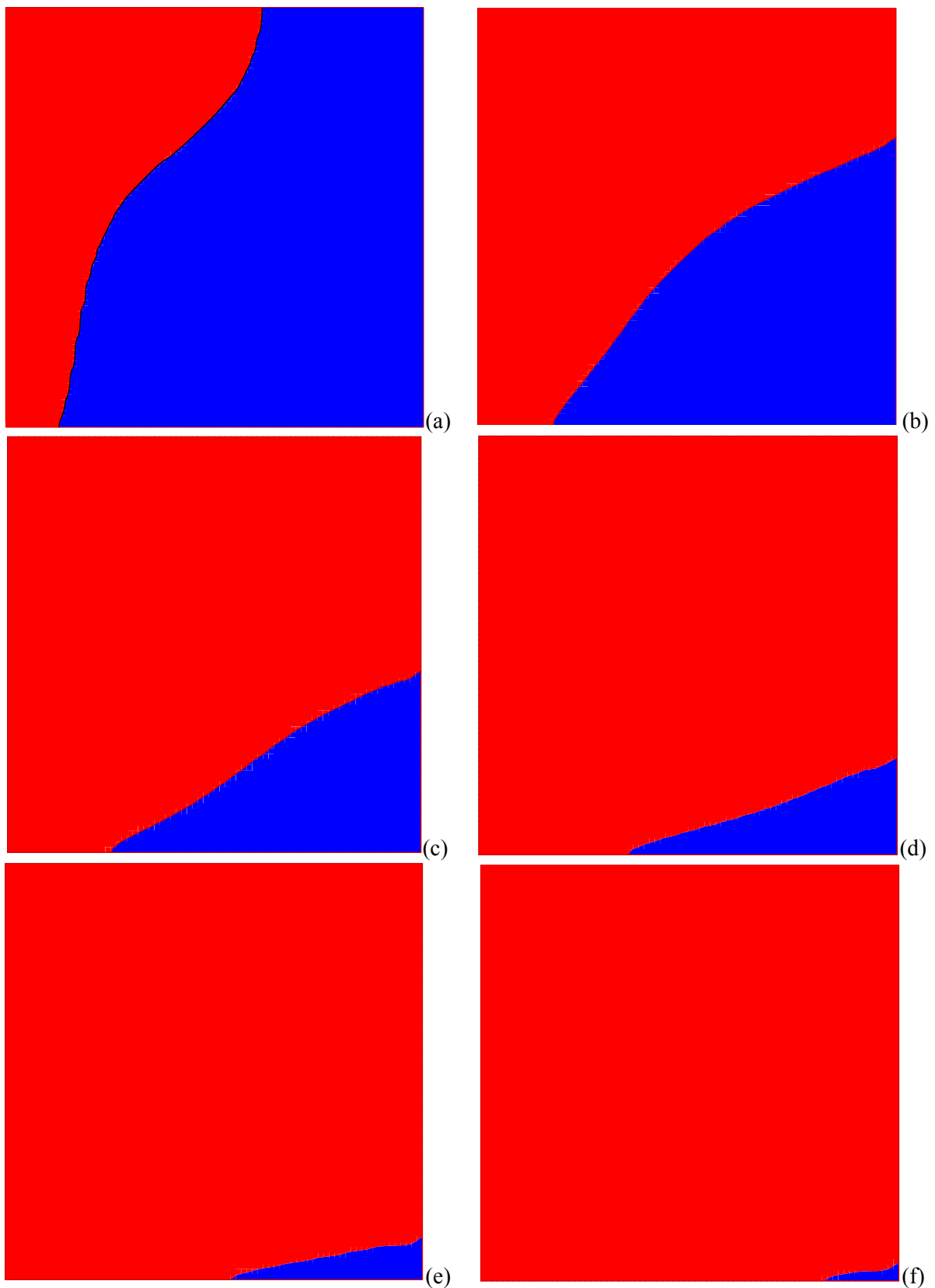
Les isothermes proches des parois chaude et froide sont constituées par des lignes presque droites, parallèles à ces parois suite au seul mode de transfert de chaleur par conduction. Par contre, dans la zone fluide, on voit clairement la courbure des isothermes surtout pour illustrer l'effet important du transfert convectif.

Cette évolution instationnaire montre que le front de fusion se déplace de la paroi gauche considérée chaude vers celle de la droite considérée froide jusqu'à la disparition totale du MCP solide.

La vitesse de déplacement du front traduisant la cinétique de changement de phase est moins importante au début du processus de fusion de l'eau suite au seul mode de transfert de chaleur entre la paroi chaude et le MCP par conduction qui est le mode dominant. Ensuite, on assiste à une accélération de la cinétique de fusion sous l'effet de la convection naturelle qui contribue au transfert de chaleur et devient de plus en plus le mode dominant, induisant le déplacement du front de fusion vers un régime établi stationnaire.



**Figure V.2** Evolution temporelle des isothermes : (a)  $t = 10$  min, (b) 20 min, (c) 30 min, (d) 40 min, (e) 50 min, (f) 60 min.



**Figure V-3.** Evolution temporelle du front de fusion (couleur rouge : fraction liquide, bleu : fraction solide),  
(a)  $t = 10$  min, (b) 20 min, (c) 30 min, (d) 40 min, (e) 50 min, (f) 60 min.

## V.4. Etude de l'influence des paramètres de contrôle :

### V.4.1 – L'effet du nombre de Grashof :

Les simulations numériques illustrent clairement le phénomène physique de la fusion d'un matériau à changement de phase. L'eau contenue dans une cavité carrée ( $A = 1$ ) est choisie en tant que MCP. Les conditions aux limites de température imposées aux parois chaude et froide de la cavité sont les mêmes utilisées précédemment.

Le domaine d'investigation du nombre de Grashof concerne les valeurs :  $10^{+3}$ ,  $10^{+4}$ ,  $10^{+5}$ , à  $10^{+6}$ . Les résultats numériques obtenus concernant l'influence du nombre de Grashof sur les grandeurs thermiques et dynamiques dans un temps adimensionnel  $\tau = 0,285$  (30 min), la structure de l'écoulement et la fraction liquide, représentés par les figures **V4-V12**.

La figure **V.4** présente la fonction de courant adimensionnelle  $\varphi$ . Nous remarquons qu'à faible nombre de Grashof, les lignes de courant présentent une seule cellule dont la valeur  $|\varphi_{\max}| = 0,2$  qui s'élargit et s'élève à des valeurs plus grandes jusqu'à la naissance de nouvelles cellules gauche et droite ayant une densité  $|\varphi_{\max}| = 4,5$ . Cette élévation est proportionnelle à l'augmentation du nombre de *Grashof*, comme indiqué dans le **tableau V-1** et/ou la figure **V.5**.

La figure **V.6** présente la variation longitudinale de la composante verticale  $V$  de la vitesse tandis que la figure **V.7** présente la distribution transversale de la composante horizontale  $U$ . On a constaté que les deux composantes de vitesse subissent un changement des directions. En plus la composante verticale, subit une forte variation que celle de l'horizontale. Ceci peut être expliqué par l'importance des gradients de température qui sont à l'origine des forces de gravité, et qui engendrent des mouvements convectifs importants au sein du fluide. Ce qui

explique l'augmentation du taux de transfert de chaleur par convection naturelle, imposé par l'augmentation du nombre de *Grashof* de  $10^{+3}$ ,  $10^{+4}$ ,  $10^{+5}$ , et  $10^{+6}$ .

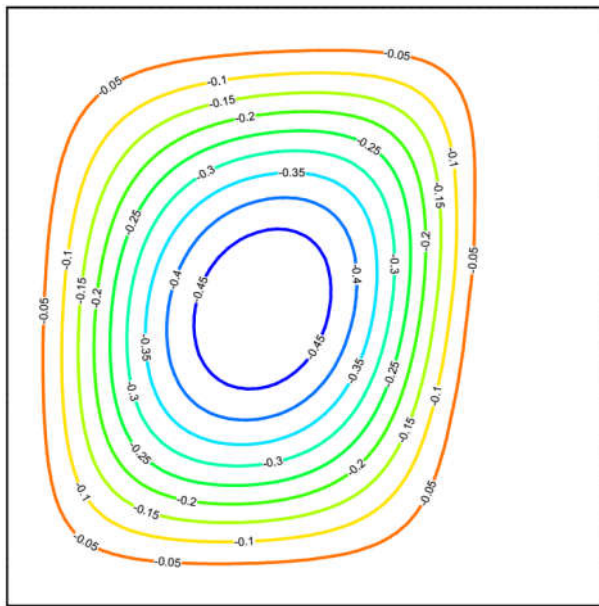
Les figures **V.8** et **V.9** donnent une représentation bidimensionnelle des composantes **U** et **V** de la vitesse. Les mêmes constatations qu'aux figures précédentes sont observées. En plus, elles illustrent clairement l'effet de l'augmentation du nombre de *Grashof* sur les composantes de vitesse des particules fluides.

La figure **V.10** montre l'interface séparant les zones solide et liquide du PCM. Cette interface est caractérisée par l'iso-enthalpie adimensionnel  $h = 0,5$ , tel que définie par la formulation enthalpique lors du chapitre II. L'interface est bien illustrée dans la figure **V-11**. L'impact de l'augmentation du nombre de *Grashof* de  $10^{+3}$  à  $10^{+6}$ , est su par l'accélération du processus de changement de phase favorablement vers la fusion. Ceci traduit clairement la quantité d'énergie échangée par augmentation du nombre de *Grashof*. L'augmentation du taux de transfert de chaleur par convection naturelle, créent une quantité de mouvement convectif importante au sein du fluide est explique bien l'approche fondamentale du phénomène de transfert thermique par changement de phase.

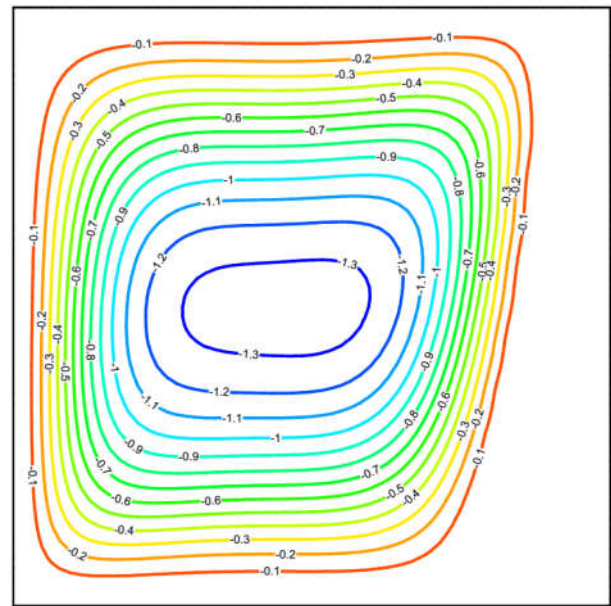
La figure **V.11** fournit une présentation bidimensionnelle du front de fusion à l'instant  $\tau = 0,285$ , pour les différents nombres de *Grashof*.

Le profil de température au milieu de la cavité carrée étudiée est tracé dans la **figure V.12**, Il montre des allures identiques pour les quatre cas considérés :  $Gr = 10^{+3}$ ,  $10^{+4}$ ,  $10^{+5}$ , et  $10^{+6}$ .

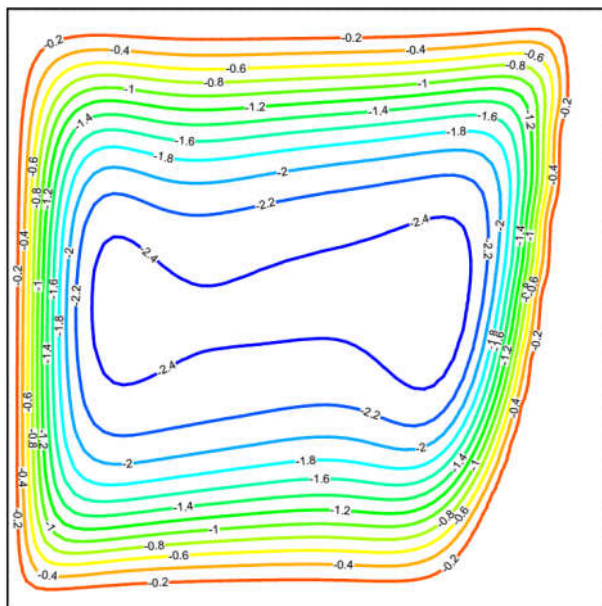
Il est bien remarquable que l'augmentation du nombre de *Grashof* influence le profil de la température qui a tendance à prendre une forme plus courbée au milieu de la cavité. Ce comportement traduit bien le phénomène de transfert de chaleur qui devient fortement convectif avec l'augmentation du nombre de *Grashof* de  $10^{+3}$  à  $10^{+6}$ .



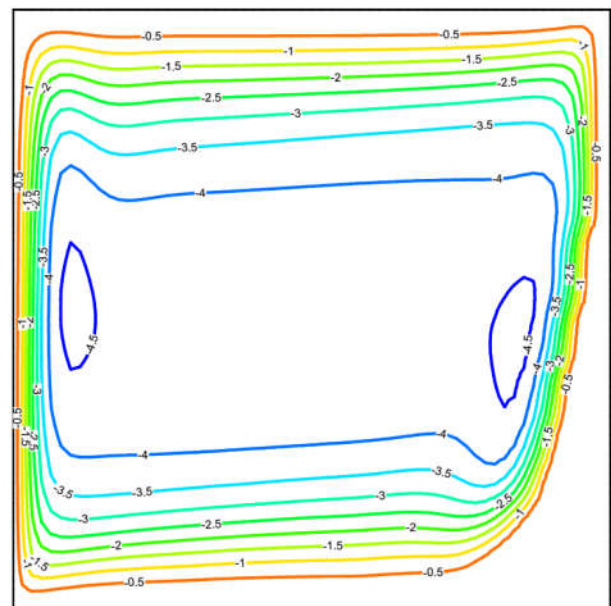
(a)



(b)



(c)

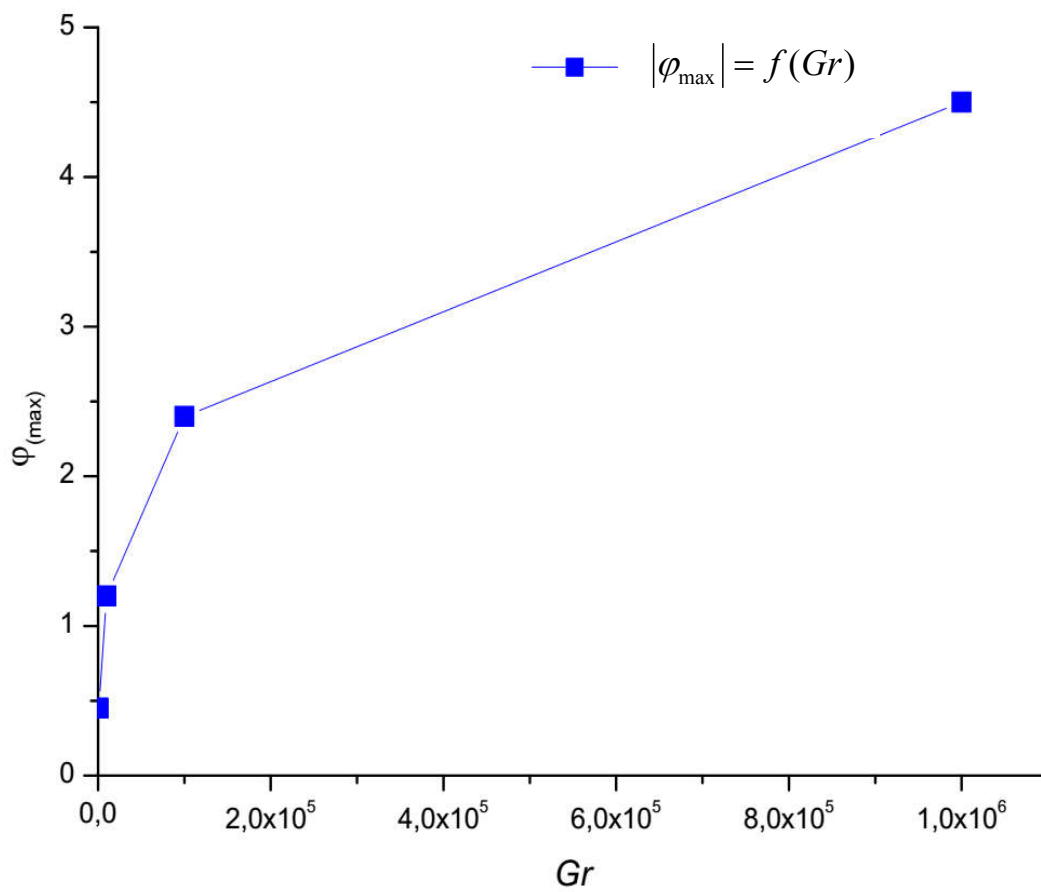


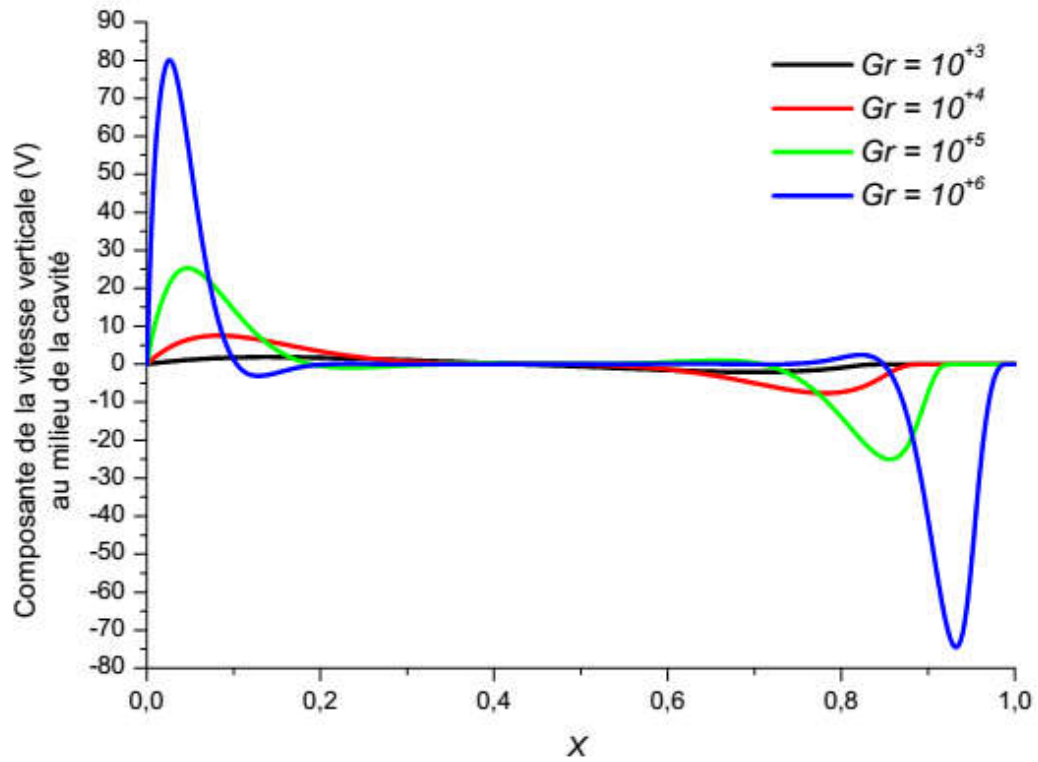
(d)

**Figure V.4 :** Distribution des lignes de courants adimensionnelles pour un temps  $\tau = 0,285$  et pour différents nombres de Grashof  $Gr$  : (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$ , (d)  $10^6$ .

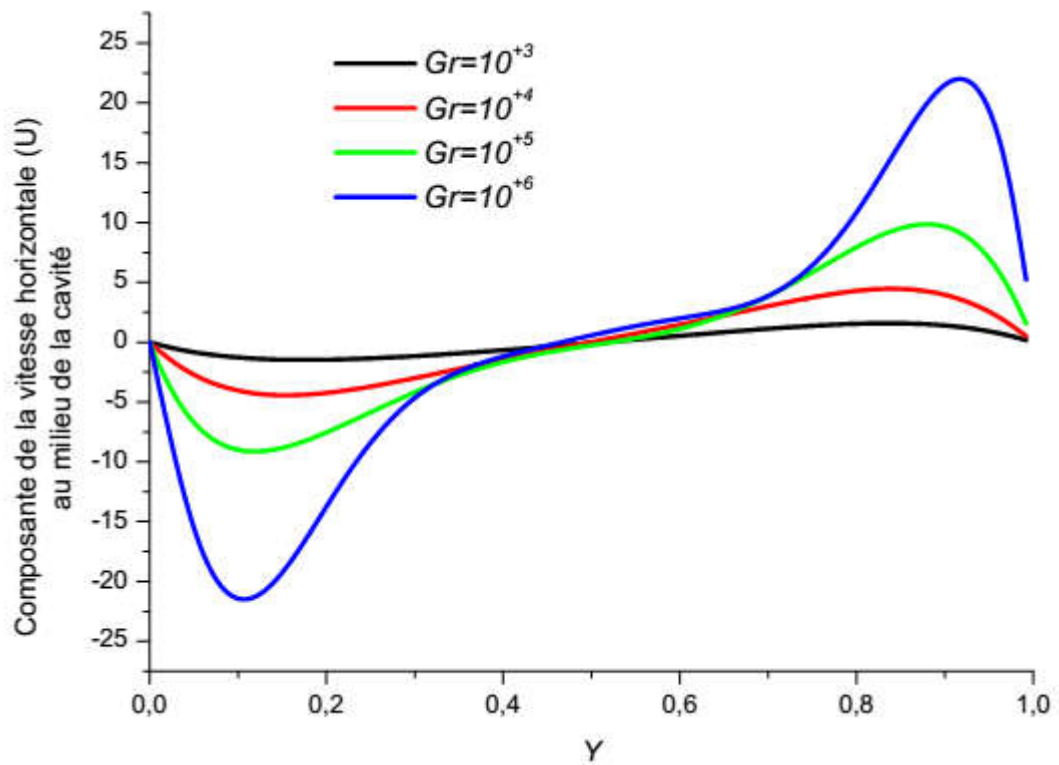
**Tableau V.1** : fonction de courant maximale  $|\varphi_{\max}|$  en fonction du nombre de *Grashof*

$Gr$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$ \varphi_{\max} $	0.45	1.2	2.4	4.5

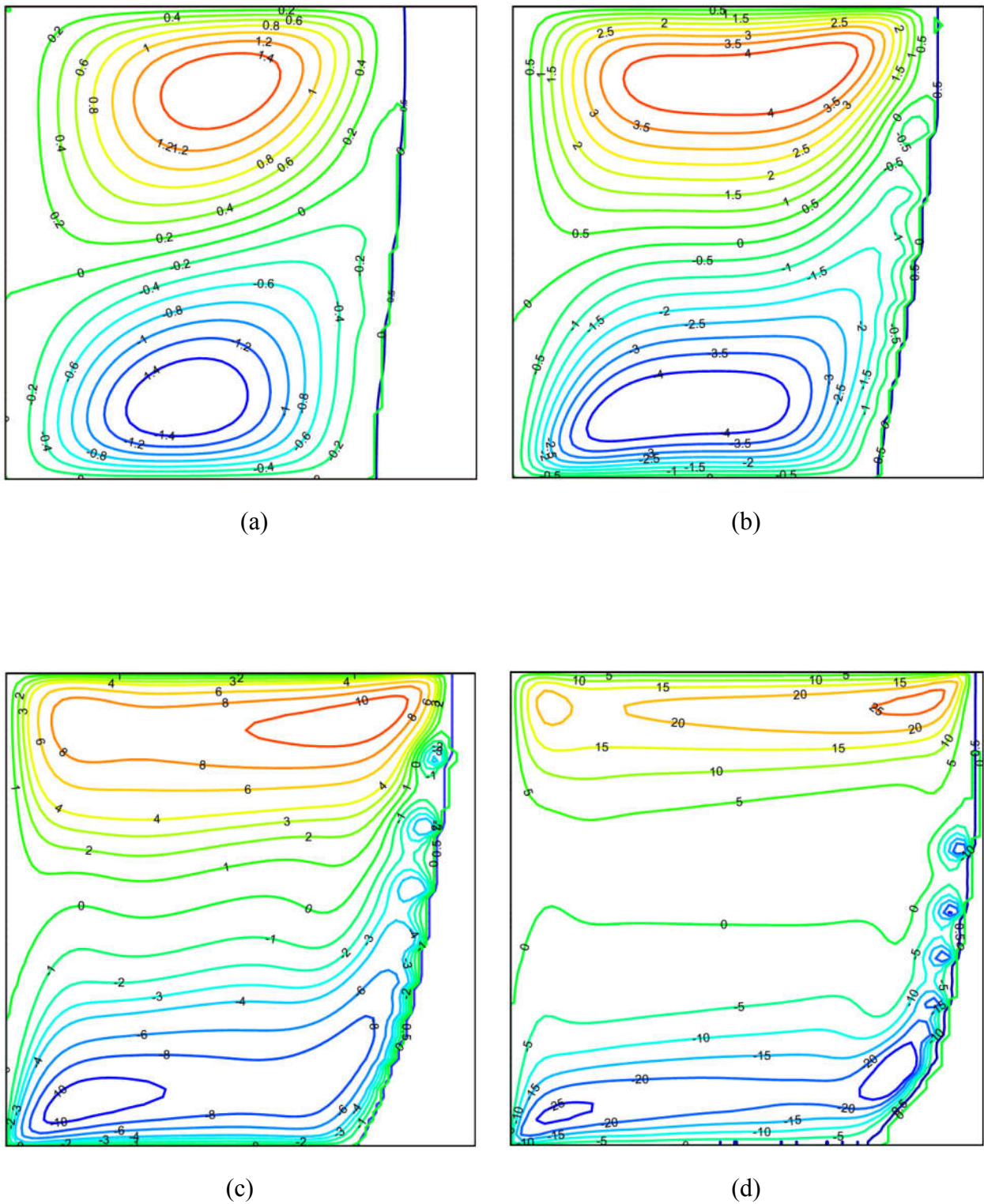
**Figure V.5** : Variation de la fonction de courant maximale  $|\varphi_{\max}|$  en fonction du nombre de Grashof.



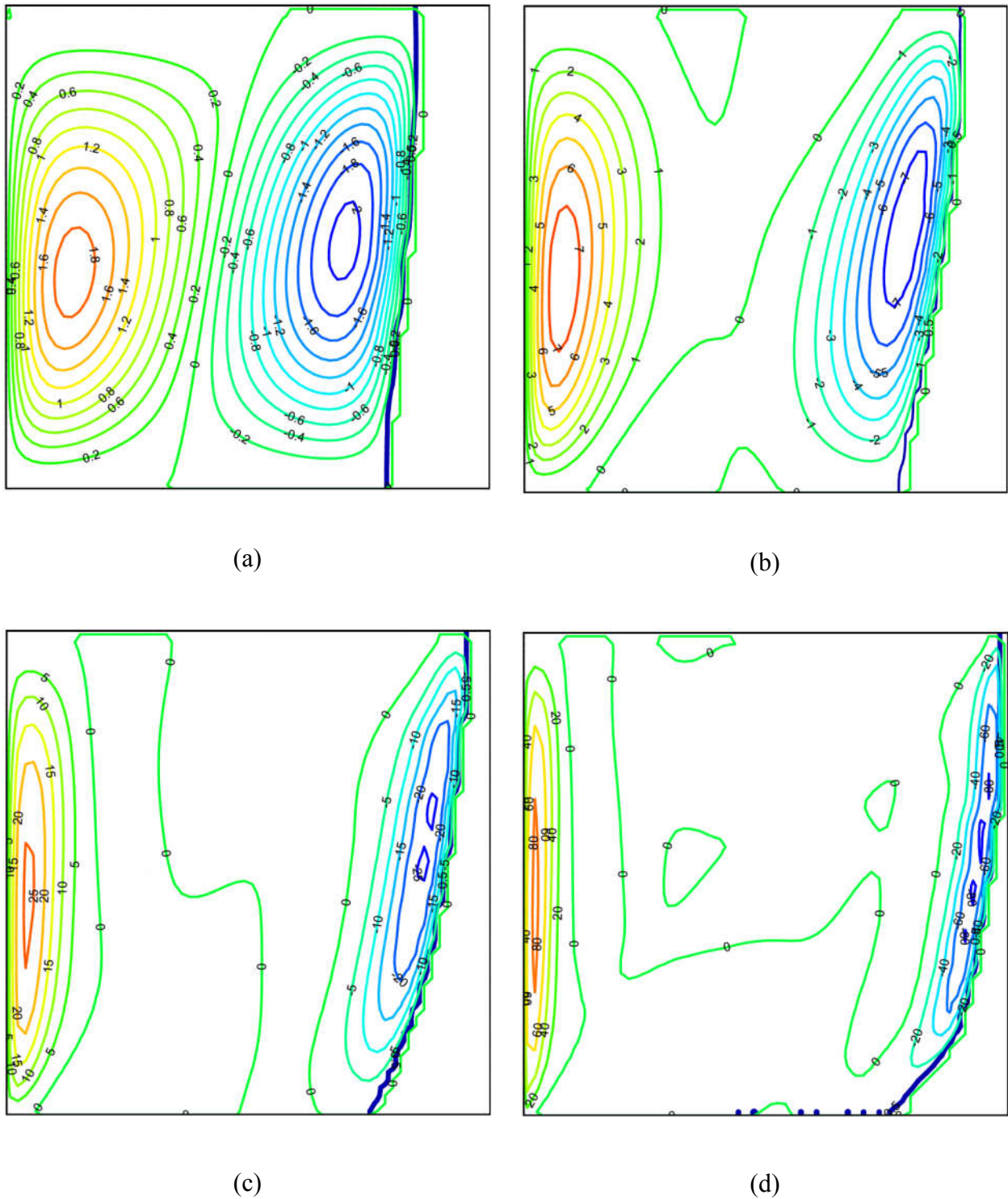
**Figure V.6 :** Distribution de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .



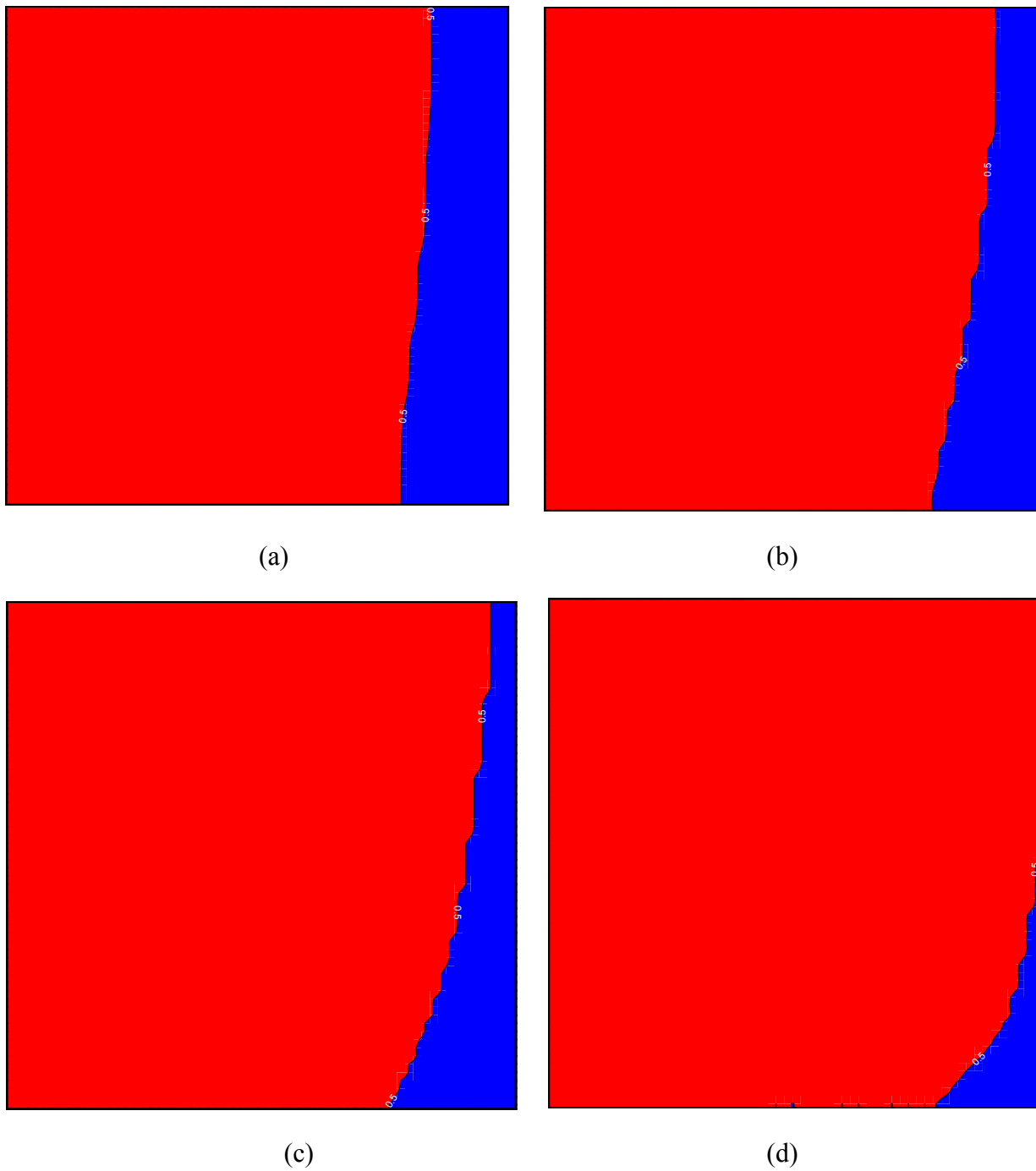
**Figure V.7 :** Distribution de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .



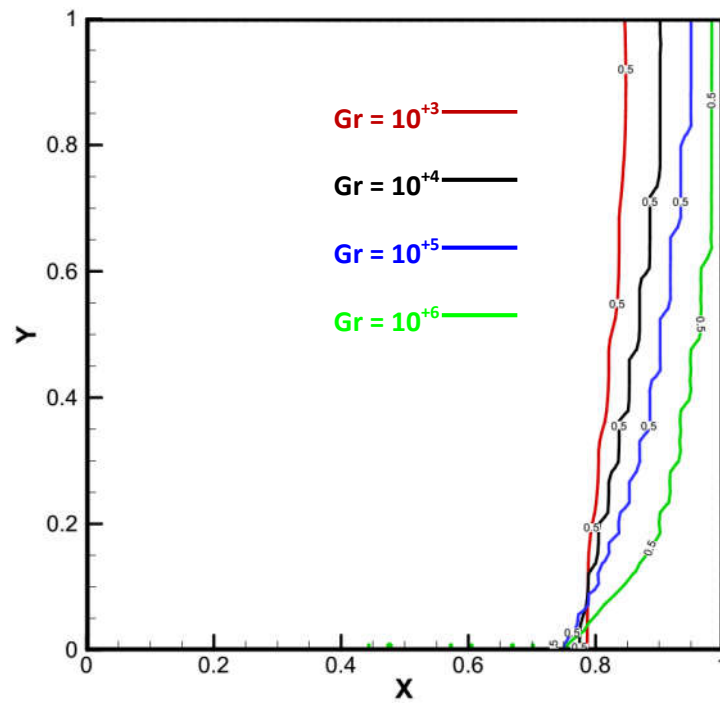
**Figure V.8** : Distribution de la composante horizontale  $U$  de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr$  : (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$ , (d)  $10^6$ .



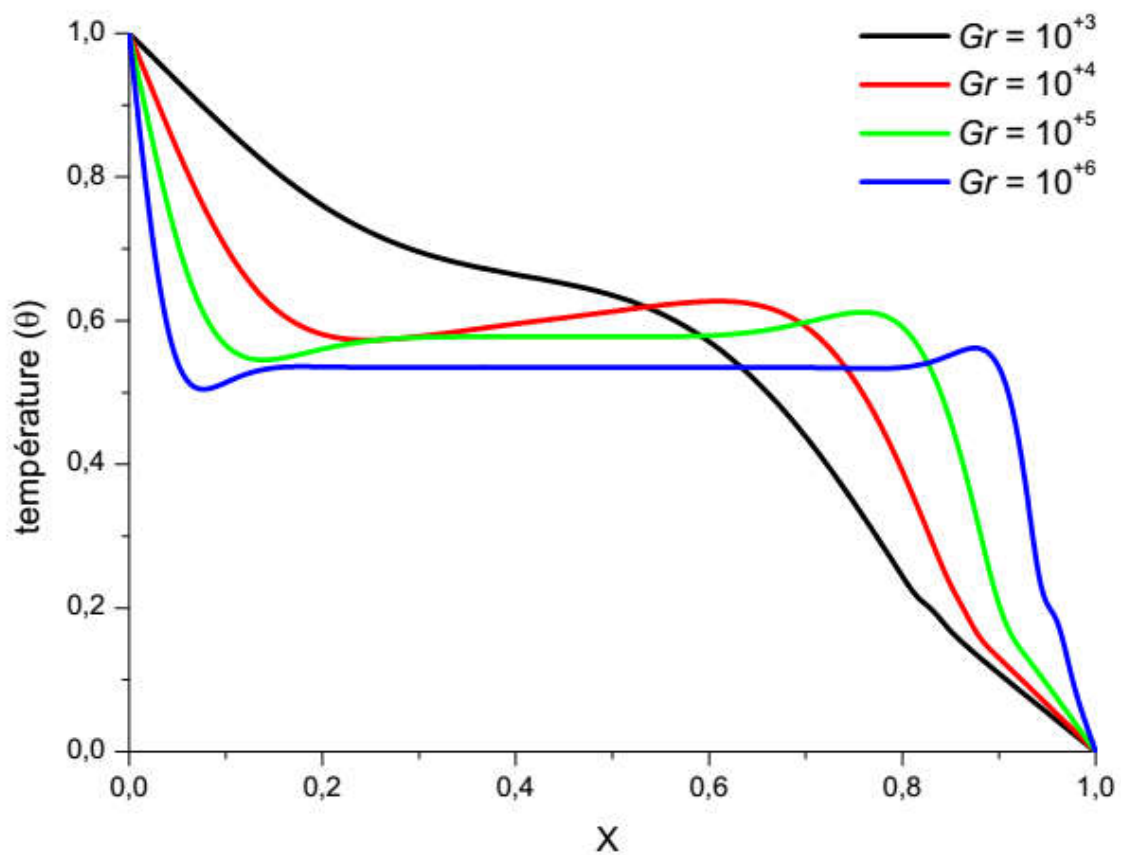
**Figure V.9 :** Distribution de la composante verticale  $V$  de la vitesse adimensionnelle à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof : (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$ , (d)  $10^6$



**Figures V.10** : Front de fusion adimensionnel pour  $\tau = 0,285$ , et différents nombres de Grashof  $Gr$  : (a)  $10^{+3}$ , (b)  $10^{+4}$ , (c)  $10^{+5}$ , (d)  $10^{+6}$ .



**Figure V.11 :** Front de fusion en fonction des coordonnées d'espace à  $\tau = 0,285$ , pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .



**Figure V.12 :** Distribution de la température adimensionnelle au milieu de la cavité ( $Y/2$ ) à  $\tau = 0,285$  pour différents nombres de Grashof  $Gr : 10^3, 10^4, 10^5$ , et  $10^6$ .

#### V.4.2 – L'effet du rapport d'aspect (facteur de forme) A :

Le cas échéant présenté par les résultats figurés ci-dessous montrent l'effet de la variation d'un second paramètre de contrôle dit : le rapport d'aspect d'une enceinte rectangulaire soumise à des conditions de température uniforme, chaude à la paroi gauche et froide à la paroi droite, tandis que les deux parois latérales supérieure et inférieure sont soumises à des conditions adiabatiques.

La structure de la fraction liquide, les isothermes et les contours des lignes de courant adimensionnelles, sont illustrés par les figures V.13-V.21. Ces figures montrent les profils prédites numériquement pour les six cas de facteurs de forme. Il apparaît que ces profils présentent les mêmes allures. Nous remarquons aussi que pour les différents rapports d'aspect  $A = 0.25 ; 0.5 ; 0.75 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$ , les profils tracés sont quasi similaires en passant d'un facteur de forme à un autre. Ce qui est remarquable que la fusion est présente avec une forte progression pour le cas des facteurs de forme élevés. Puisque, les mouvements convectifs importants engendrés au sein du fluide expliquent l'augmentation du taux de transfert de chaleur par convection naturelle de plus en plus que le rapport d'aspect devient grand.

Comme on peut le voir, il n'y a pas beaucoup de différence entre les profils démontrés dans le processus de fusion des six cas. Les profils ne sont pas aussi alignés suite à la variation de la largeur de la cavité objet de l'impact de rapport d'aspect (A), mais une tendance générale peut encore être observée. Les différences peuvent être plus prononcées lorsque le rapport d'aspect (A) de la cavité est plus grand. Pour les faibles rapports d'aspect (valeurs inférieures à 1), le temps de fusion instantané est affecté par le retard au processus de changement de phase favorisé par le transfert thermique par conduction dans la partie solide qui est d'ordre dominant, comme on peut le voir.

Il est évident que la forme de la cavité influence l'évolution des lignes de courant qui expriment la densité d'écoulement des particules de la matière au cours du processus de fusion. Les cas de rapport d'aspect élevé affichent initialement des valeurs de densité des lignes de courant faibles en s'éloignant du centre de la cavité, qui augmentent progressivement à mesure que la fraction de fusion augmente sous l'effet du rapport d'aspect. Ces valeurs élevées des densités des lignes de courant entraînent un plus grand transfert de chaleur vers le solide, lui permettant de fondre plus rapidement.

Il est important de noter que la position de l'interface solide-liquide se déplace de la gauche vers la droite suivant le gradient de température imposé initialement, à mesure que le rapport d'aspect ( $A$ ) augmente de **0.25 à 4**.

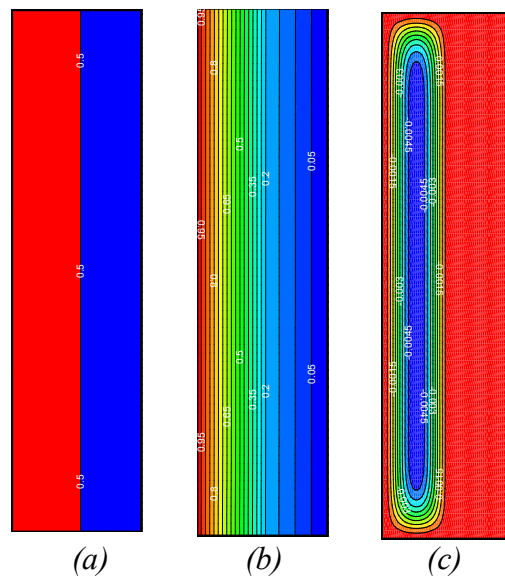
Pour les contours de la fonction de courant, une structure unicellulaire pour la plupart des rapports d'aspects présentés dans les figures **V.13-V19**, dû au faible nombre de *Grashof* utilisé  $Gr = 10^{+3}$ , dont la valeur maximale de la fonction de courant  $|\varphi_{\max}|$  de chacun des facteurs est illustrée dans le tableau V.2, ou la figure V.20. Nous notons que  $|\varphi_{\max}|$  s'accroît avec une tendance quasi linéaire avec l'augmentation du rapport d'aspect sous l'effet de la convection naturelle, excepté pour le cas  $A = 4$  où on a une décroissance significative.

L'augmentation du rapport d'aspect  $A$  de **0.25 à 4** provoque un changement de la forme de la structure unicellulaire de l'écoulement située au centre de la zone liquide de la cavité. On remarque aussi que l'écoulement s'effectue de la région chaude (paroi chaude) vers la région froide (phase solide). Ces cellules engendrent ainsi un mouvement de recirculation et un transport convectif important situé au centre de chacune d'elles. Ces processus peuvent être expliqués par l'augmentation du débit lors de l'augmentation du rapport d'aspect.

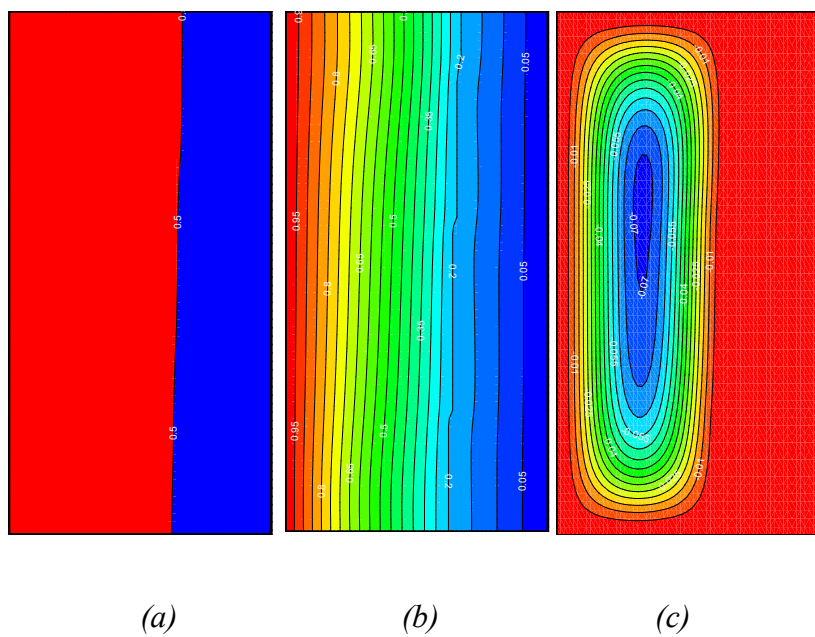
En ce qui concerne les isothermes schématisées par les figures **V.13-V19**, la condition adiabatique imposée aux parois horizontales est bien illustrée où chacune des isothermes intercepte la limite adiabatique d'un angle droit. Auprès des parois chaude et froide, la température se présente plus uniforme à cause de conditions isothermes imposées aux limites verticales. Les isothermes proches de la paroi froide sont constituées par des lignes presque droites, parallèles à cette paroi. Ainsi, le transfert de chaleur est de nature conductive. Dans la zone fluide, la courbure des isothermes, est principalement remarquable pour les cas d'un rapport d'aspect  $A \geq 0,75$  et illustre en toute évidence l'effet important de la convection naturelle.

On note également que l'augmentation du rapport d'aspect ( $A$ ) de **0,25** à **4**, a pour effet d'accroître la déformation des isothermes, surtout au voisinage de l'interface (solide/liquide). Par ailleurs, la région proche de la paroi froide (partie solide), est caractérisée par un gradient de température relativement faible par rapport à celui dans la partie liquide.

De plus en plus que le rapport d'aspect devient grand, la distribution de la température prend une valeur supérieure à la valeur de température de changement de phase. Ce phénomène est conduit par le mode de transfert par convection naturelle localisé dans la région liquide entraînant un mouvement des particules de fluide selon la grandeur de Grashof.



**Figure V.13 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 0.25$



**Figure V.14 :** Distributions de : (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 0.5$

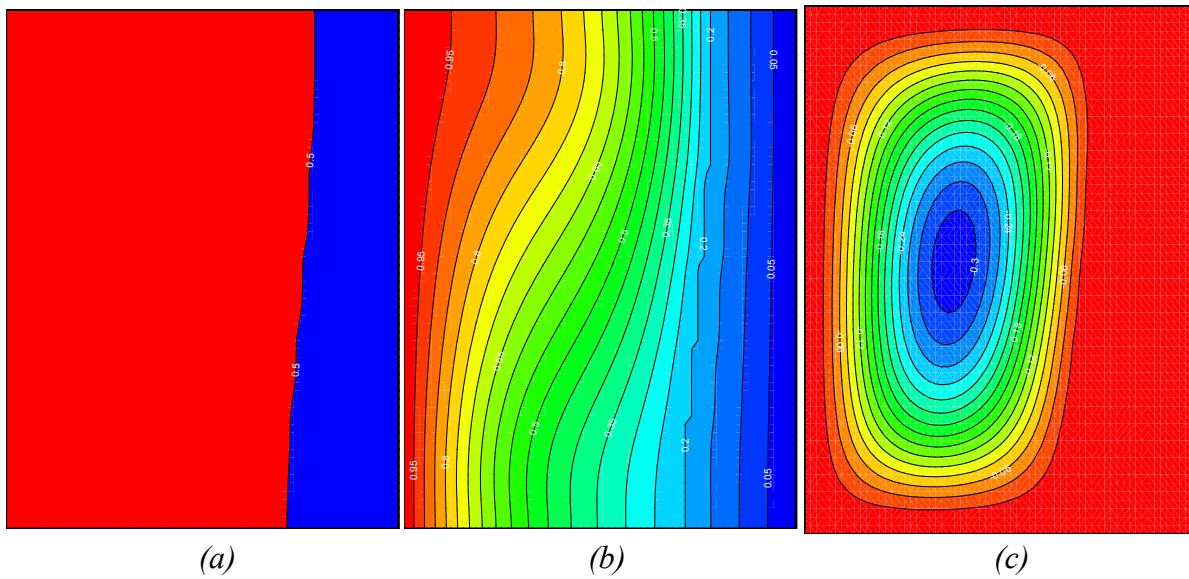


Figure V.15 : Distributions de (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 0.75$

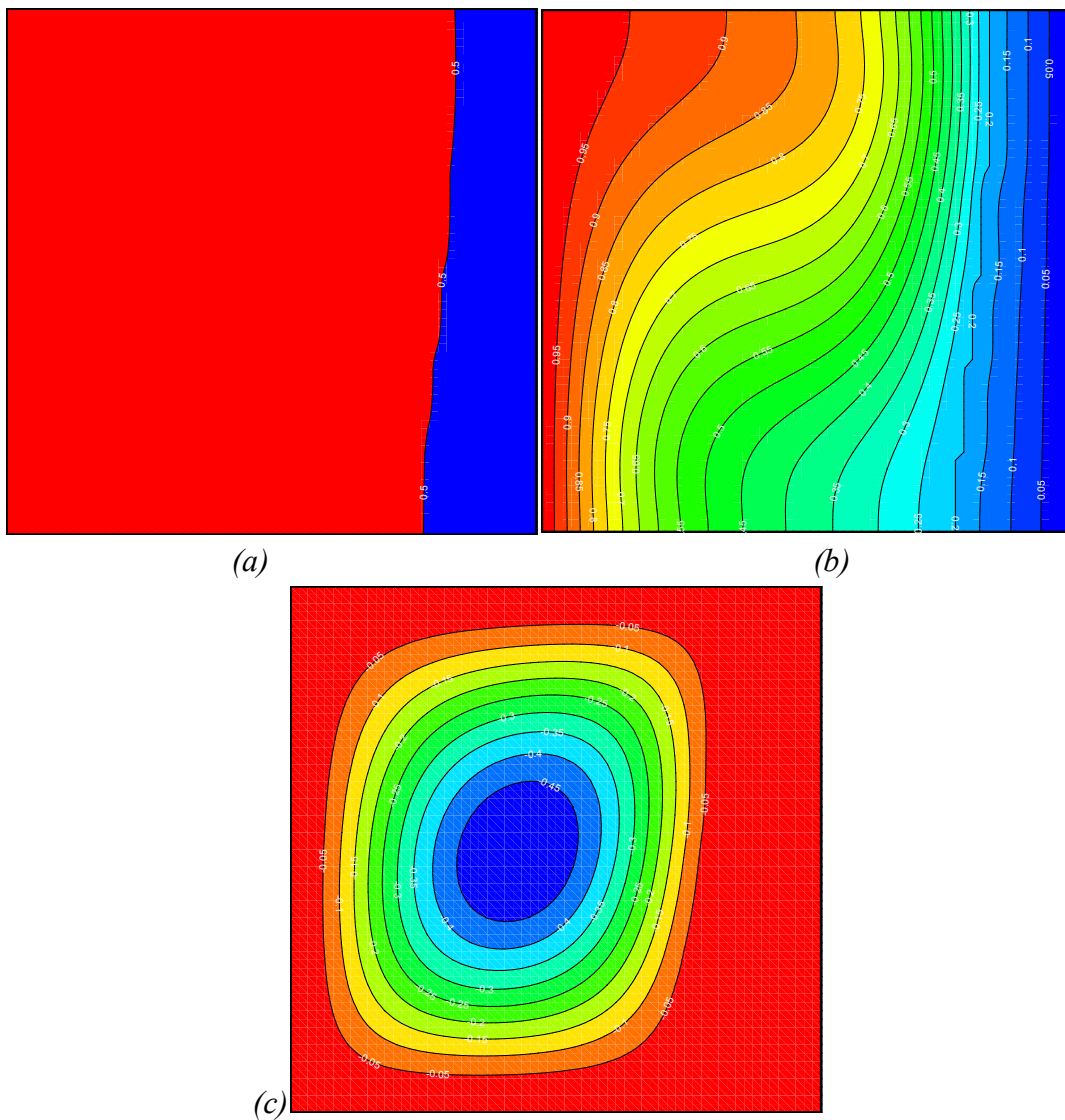
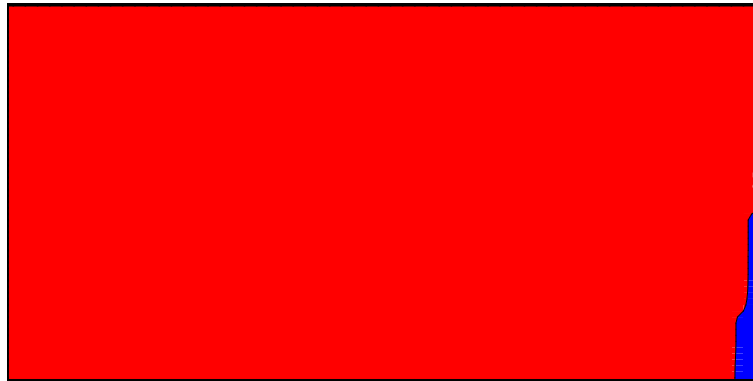
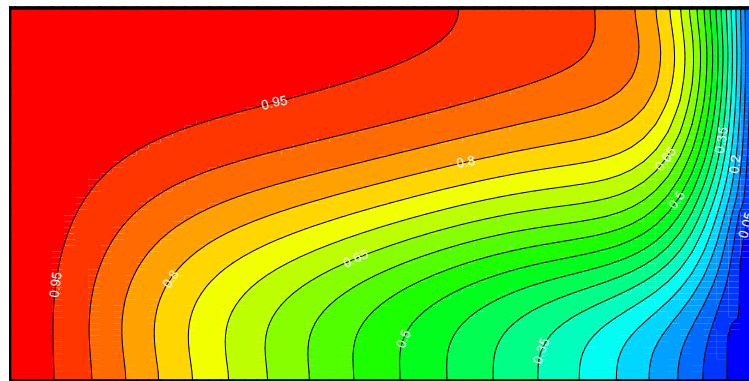


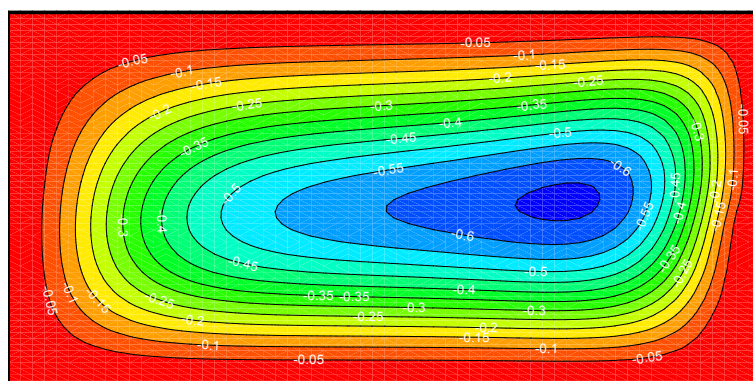
Figure V.16 : Distributions de (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant ,  $A = 1$



(a)



(b)

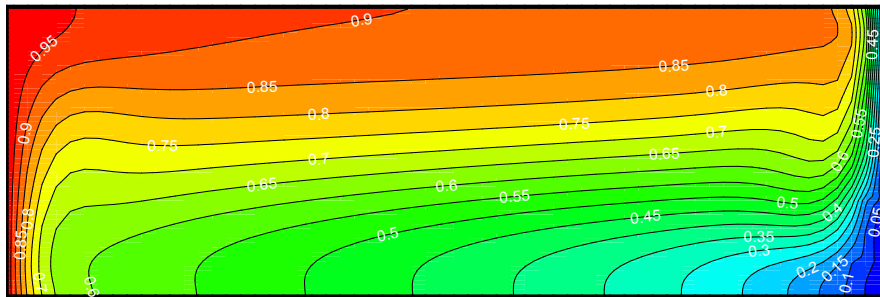


(c)

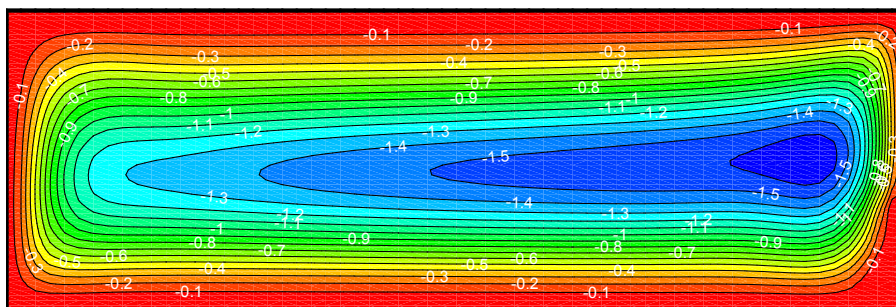
**Figure V.17 :** Distributions de (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 2$ .



(a)



(b)

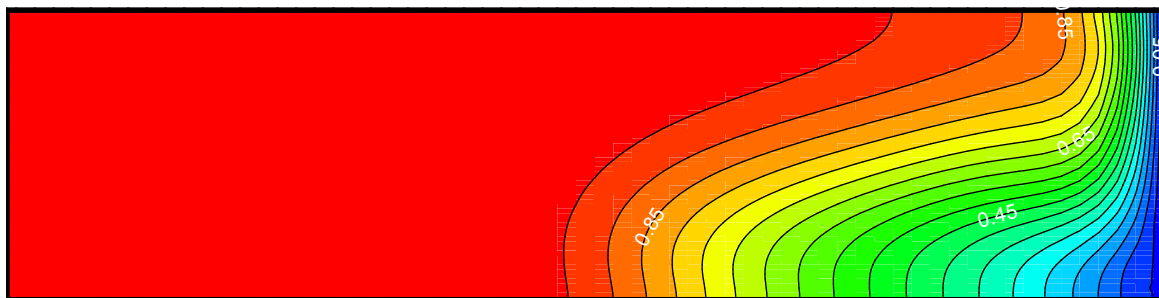


(c)

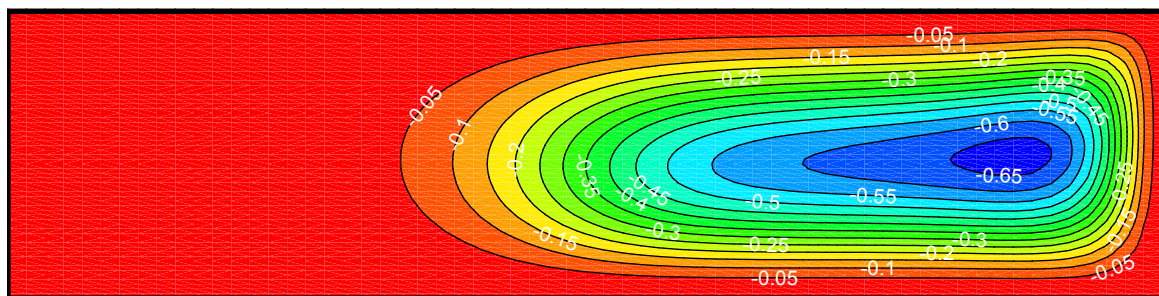
**Figure V.18 :** Distributions de (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 3$ .



(a)



(b)

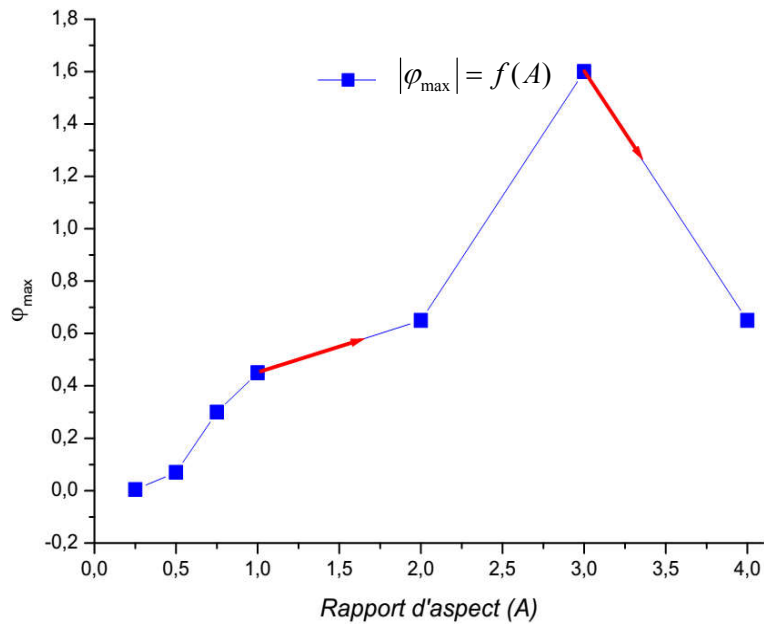


(c)

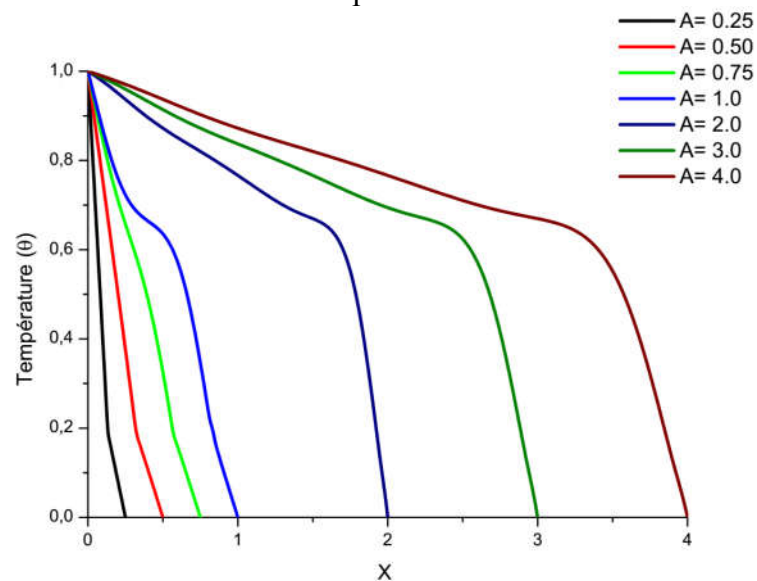
**Figure V.19** Distributions de : (a) fraction liquide  $f_l$ , (b) température  $\theta$  et (c) lignes de courant pour  $A = 4$

**Tableau V.2 :** Variation de la fonction de courant maximale  $|\varphi_{\max}|$  en fonction du rapport d'aspect  $A$ .

<b>A</b>	<b>0.25</b>	<b>0.5</b>	<b>0.75</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$ \varphi_{\max} $	0.0045	0.07	0.3	0.45	0.65	1.6	0.65



**Figure V.20 :** Variation de la fonction de courant maximale  $|\varphi_{\max}|$  en fonction du rapport d'aspect  $A$



**Figure V.21 :** Profil de la température adimensionnelle en fonction du rapport d'aspect  $A$  (0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3, 4) pour :  $Gr = 10^{+3}$

## Conclusion

Une étude numérique a été réalisée sur le transfert de chaleur lors d'un changement de phase liquide/solide d'un fluide (l'eau) à l'intérieur d'une enceinte à parois rigides pour le cas d'une cavité rectangulaire ayant le rapport d'aspect  $A = L_d/H$ . Les parois verticales de l'enceinte sont isothermes et soumises respectivement aux températures chaude  $T_h$  et froide  $T_c$  ( $T_h > T_c$ ), qui encadrent la température de fusion  $T_m$ , ( $T_c < T_m < T_h$ ). Par ailleurs, les parois horizontales sont adiabatiques.

La méthode des volumes finis avec une formulation enthalpique a été utilisée pour discrétiser les équations régissant le système, en prenant compte des modes de transfert par conduction et par convection, et le transfert de chaleur à changement de phase d'un MCP enveloppé dans une cavité. La validation du programme de calcul a été faite avec des expériences et des travaux numériques cités dans la littérature. Différents matériaux ont été envisagés et un bon accord a été obtenu.

Les effets de la convection naturelle et le rapport de forme de la cavité sur processus de solidification et de fusion de l'eau (MCP) contenue dans une cavité rectangulaire ont été étudiés numériquement.

Les résultats obtenus ont montré que la cinétique de la solidification ou de la fusion d'un matériau à changement de phase est fortement influencée par certains paramètres de contrôle tel que : le rapport d'aspect, le nombre de *Grashof*.

**Le changement des conditions aux limites et initiale sont aussi les facteurs clés pour s'orienter d'un phénomène à un autre et vis-versa (solidification/fusion). Donc, il y a lieu de varier la température initiale du système MCP étudié.** De point de vu physique, le phénomène réagit selon le gradient thermique imposé au niveau des parois. La région proche de la paroi froide (région solide) se caractérise par un gradient de température relativement faible par rapport à celui de la région liquide.

Les effets des paramètres de contrôle du phénomène de changement de phase considéré ont été étudiés dans un domaine du nombre de *Grashof* ( $Gr$ ) de  $10^{+3}$  à  $10^{+6}$ , et pour un rapport d'aspect ( $A$ ) de 0.25 à 4.

Les simulations réalisées montrent que si le rapport d'aspect devient grand, le processus transfert de chaleur entre les deux parois devient moins favorable pour le cas de la solidification. Par conséquent, le processus de solidification sera très lent. Concernant le nombre de *Grashof*, plus ce nombre est grand, son influence sur le processus de solidification devient important, induisant un retard remarquable dû au transfert de chaleur par convection.

L'augmentation des paramètres de contrôle ( $A$ ), ( $Gr$ ) a une influence similaire sur le processus de changement de phase par fusion. Concernant le rapport d'aspect, l'effet est remarquable jusqu'à ( $A = 3$ ), et au delà de ce rapport, le processus de fusion est atténué. Contrairement, pour les grandes valeurs du nombre de *Grashof*, le processus de fusion s'accélère en faveur du transfert par convection naturelle qui domine le transfert thermique.

Bien que l'approche bidimensionnelle utilisée dans la modélisation est objective, on s'attend à ce que les résultats d'une simulation numérique tridimensionnelle, que nous recommandons, confirment les résultats qualitatifs obtenus dans ce travail. Peut-être aussi prendre en compte les effets de l'inclinaison de la cavité dans des conditions aux limites fixes ou variables du domaine étudié. Notons aussi que la tendance pratique de la recherche scientifique actuelle et future vise l'amélioration de la conductivité thermique par le développement de nouveaux matériaux à changement de phase à base de nanoparticules pour arriver à améliorer le transfert de chaleur et réduire la durée de changement de phase, paramètres clés dans les systèmes de stockage thermique.

## Références bibliographiques

- [1] A. Bricard, D. Gobin. "Transfert de chaleur avec changement d'état solide-liquide", *Technique de l'Ingénieur*, BE 8240, pp. 1-14, 2001.
- [2] A. Maha, Thèse de doctorat, "Nouveaux composants actifs pour la gestion énergétique de l'enveloppe légère des bâtiments. Couplage matériaux à changement de phase, super-isolation, apports solaires", pp. 78-80, 2005.
- [3] N. Hannoun, V. Alexiades, T.Z. Mai, "A reference solution for phase change with convection", *Int. J. Numer. Mech. Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [4] T.J. Scanlon, M.T. Stickland, "A Numerical analysis of buoyancy-driven melting and freezing", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 429-436, 2004.
- [5] A Sharma, C.R. Chena, D. Buddhi, "Review on thermal energy storage with phase change materials and applications", *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 13, pp. 318-345, 2009
- [6] V.P. Sethi, S.K. Sharma, "Survey and evaluation of heating technologies for worldwide agricultural greenhouse applications", *Solar Energy* 82, pp. 832–859, 2008
- [7] M M. Farid, F. A. Hamad, "phase change cool storage using dimethyl-sulfoxide", *Energy Convers.* 7, Vol. 39, No. 8, pp. 819–826, 1998.
- [8] A. Felix Regin, S.C. Solanki, " Heat transfer characteristics of thermal energy storage system using PCM capsules: A review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 12, (2008) 2438–2458.
- [9] N.S. Dhaidan, J.M. Khodadadi, "Melting and convection of phase change materials in different shape containers: A review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 43, pp. 449–477, 2015.
- [10] P. Verma, Varun, S.K. Singal, "Review of mathematical modeling on latent heat thermal energy storage systems using phase-change material", *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 12", pp. 999–1031, 2008.
- [11] S. Mondal, "Phase change materials for smart textiles-An overview", *Applied Thermal Engineering* 28, pp. 1536–1550, 2008.
- [12] A.F. Regin, S.C. Solanki, "Heat transfer characteristics of thermal energy storage system using PCM capsules: A review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 12, pp. 2438–2458, 2008.
- [13] M. Zhanhu, Y. Zhanga, "Solid velocity correction schemes for a temperature transforming model for convection phase change", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 16, No. 2, pp. 204-225, 2006.

- [14] S. Jana, "A numerical method to compute solidification and melting processes", *Applied Mathematical Modelling* 31, pp. 93–119, 2007
- [15] M. Ulvrová, "Numerical modelling of convection interacting with a melting and solidification front: Application to the thermal evolution of the basal magma ocean", *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 206–207, pp. 51–66, 2012.
- [16] B. Ghasemi, M. Molki, "Melting of unfixed solids in square cavities", *Int. J. Heat and Fluid Flow* 20, pp 446-452, 1999.
- [17] V.R. Voller, C. Prakash, "Fast implicit finite difference Method for the analysis of phase change problems", *Numerical Heat Transf. part B*, vol. 17, pp: 155-169, 1990.
- [18] M. Lacroix, "Contact melting of a phase change material inside a heated parallelepipedic capsule ", *Energy Conversion & Management* 42, pp, 35-47, 2001.
- [19] B. Binet, M. Lacroix, "étude numérique de la fusion dans des enceintes rectangulaires chauffées uniformément ou discrètement par les parois latérales conductrices", *Rev. Gén. Therm. Vol 37*, pp, 607-620, 1998.
- [20] P. Brousseau, M. Lacroix, "study of the thermal performance of a multi-layer pcm storage unit", *Energy Convers. Mgmt*, Vol. 37, No. 5, pp. 599-609, 1996
- [21] M. Costa et al., "Numerical simulation of solid-liquid phase change phenomena", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 91, pp,1123-1134, 1991.
- [22] A. Barba, M. Spiga, "Discharge mode for encapsulated PCMs in storage tanks", *Solar Energy* 74, pp, 141–148, 2003.
- [23] S.A. Fomin, T.S. Saitoh, "Melting of unfixed material in spherical capsule with nonisothermal wall", *Int. J. Heat Mass Transfer* 42, pp, 4197-4205, 1999.
- [24] J.P. Bedecarrats, J.P. Dumas, "Study of the crystallization of nodules containing a phase change material for cool thermal storage", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Volume 40, pp. 149-157, 1996.
- [25] H. Fourcade, " Etude numérique d'un matériau à changement de phase solide liquide, pour une application au matériel de télécommunication ", *France Telecom R&D*, 2007.
- [26] A.M. Khudhair, M.M. Farid, "A review on energy conservation in building applications with thermal storage by latent heat using phase change materials", *Energy Conversion and Management*, 45, pp. 263-275, 2004.
- [27] Z. Zhang, A. Bejan, "Melting in an enclosure heated at constant rate", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.32, No. 6, pp.1063-1071, 1989.
- [28] T. Hirata, K. Nishida, "An analysis of heat transfer using equivalent thermal conductivity of the liquid phase during melting inside an isothermally heated horizontal cylinder", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No 9, pp. 1663-1670, 1989.

- [29] H.E.S. Fath, "Heat exchanger performance for latent heat thermal energy storage system", *Energy Convers. Mgmt.*, Vol. 31, No. 2, pp. 149-155. 1991.
- [30] H. Murakami, "Modelling of turbulent flow heat transfer and solidification in a twin roll caster", PhD thesis, McGill University, Canada, 1993.
- [31] T. Michalek, T.A. Kowalewski, "Simulations of the water freezing process", *Numerical Benchmarks Task Quarterly*, Vol.7, No 3, 389-408, 2003.
- [32] S.A. Fomin, A.V. Wilchinsky, "Shape-factor effect on melting in an elliptic capsule", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, pp, 3045–3054, 2002.
- [33] M. Tegger M, E. Mezaache, "Numerical investigation of total solidification time of a liquid phase change material enclosed in rectangular cavities", *International Review of Physics* 6(2): 158-164, 2012.
- [34] V. Alexiades, N. Hannoun, T.Z. Mai, "Tin melting: effect of grid size and scheme on the numerical solution", *Electronic Journal of Differential Equations, Conference* 10, pp. 55–69, 2003.
- [35] H.K. Versteeg, W. Malalasekera, "An introduction to computational fluid dynamics-the finite volume method", John Wiley & Sons Inc, New York, 1995.
- [36] S.V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", MacGraw-Hill, New York, 1980.
- [37] C. Beckermann, R. Viskanta, "Effect of solid subcooling on natural convection melting of a pure metal". *International Journal of Heat and Mass Transfer* 111: 416-423. 1989.
- [38] M.M. Cerimele, D. Mansutti, F. Pistelle "Numerical modeling of liquid/solid phase transitions analysis of gallium melting test". *Computers and Fluids* 31: 437-451. 2002.
- [39] S Bouabdallah. Etude de l'instabilité hydrodynamique et thermique lors d'un changement de phase avec et sans champ magnétique, Thèse de Magister, Université Mentouri Constantine, Algérie, 2006.
- [40] M Bouteldja, "Transfert de chaleur lors la solidification d'un matériau organique à changement de phase" 18<sup>ième</sup> journées internationales de la thermique JITH2017.
- [41] V. Dubovsky, E. Assis, E. Kochavi, G. Ziskind, R. Letan, "Study of solidification in vertical cylindrical shells", *5th European Thermal-Sciences Conference*, The Netherlands, 2008.
- [42] V.R. Voller, C. Prakash, "A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems", *Int. Heat Mass Transfer*, Vol.30, No.8, 1709-1719, 1987.
- [43] E. Semma, M.E. Ganaoui, "Simulation numérique de la convection thermique en présence d'une interface Solide/Liquide en croissance dirigée horizontale", XV<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3-7 Septembre 2001.

[44] K.K. Rathore, S. Srinivasa, "An analysis of freezing of viscous liquids in cylindrical containers ", Part A: Effects of natural convection, International Journal of Dynamics of Fluids, Vol.2, No.1. 2006.

[45] V. Alexiades, N. Hannoun, T.Z. Mai, "Tin melting: effect of grid size and scheme on the numerical solution", Electronic Journal of Differential Equations, Conference 10, pp. 55–69, 2003.

## ANNEXE A : Equations adimensionnelles

L'adimensionnalisation des équations est obtenue en se basant sur les grandeurs définies dans au chapitre II.

### 1- Équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

L'équation adimensionnelle est déduite ainsi :

$$\frac{\partial U(\frac{v_l}{H})}{\partial XH} + \frac{\partial V(\frac{v_l}{H})}{\partial YH} = 0$$

$$\left(\frac{v_l}{H^2}\right) \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right] = 0 \quad \left(\frac{v_l}{H^2}\right) \neq 0$$

Donc :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

### 2- Équation de mouvement suivant x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v_l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + S_u$$

Où :

$$S_u = -\xi \frac{(1-f)^2}{(f^3 + \varepsilon)} u$$

Pour adimensionnaliser, on procède ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\frac{v_l}{H})}{\partial \tau(\frac{H^2}{v_l})} + U(\frac{v_l}{H}) \frac{\partial U(\frac{v_l}{H})}{\partial XH} + V(\frac{v_l}{H}) \frac{\partial U(\frac{v_l}{H})}{\partial YH} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \rho \left(\frac{v_l}{H}\right)^2 \frac{\partial P}{\partial XH} + v_l \left( \frac{\partial^2 U(\frac{v_l}{H})}{\partial (XH)^2} + \frac{\partial^2 U(\frac{v_l}{H})}{\partial (YH)^2} \right) + S_u \end{aligned}$$

$$\frac{v_l^2}{H^3} \left[ \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = - \left( \frac{v_l^2}{H^3} \right) \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{v_l^2}{H^3} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\xi}{\rho_0} \frac{(1-f^2)}{(f^3 + \varepsilon)} U \frac{v_l}{H} \quad (1)$$

$$\frac{\partial UU}{\partial X} = U \frac{\partial U}{\partial X} + U \frac{\partial U}{\partial X} = 2U \frac{\partial U}{\partial X} \Rightarrow U \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{2} \frac{\partial UU}{\partial X} \quad (2)$$

$$\frac{\partial UV}{\partial Y} = V \frac{\partial U}{\partial Y} + U \frac{\partial V}{\partial Y} \Rightarrow V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial UV}{\partial Y} - U \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (3)$$

On remplace (2) et (3) dans (1) et on divise par  $\left(\frac{v_l^2}{H^3}\right)$  :

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial UU}{\partial X} + \left\{ \frac{\partial UV}{\partial Y} - U \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} \right] = - \frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right) + \frac{\xi}{\rho_0} \frac{H^2 (1-f^2)}{v_l (f^3 + \varepsilon)} U$$

$$S_U = \frac{\xi}{\rho_0} \frac{H^2 (1-f^2)}{v_l (f^3 + \varepsilon)} U$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial UU}{\partial X} + \frac{\partial UV}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial X} + U \frac{\partial V}{\partial Y} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right) + S_U$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial X} \right) = 0 \text{ et } U \neq 0$$

C'est-à-dire :

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial UU}{\partial X} + \frac{\partial UV}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right) + S_U$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial UU}{\partial X} + \frac{\partial UV}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + S_U$$

### 3- Équation de mouvement suivant y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + v_l \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_c) + S_v$$

Avec :

$$S_v = -\xi \frac{(1-f^2)}{(f^3 + \varepsilon)} v$$

Pour l'adimensionnalisation, on procède de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V \left( \frac{v_l}{H} \right)}{\partial \tau \left( \frac{H^2}{v_l} \right)} + U \left( \frac{v_l}{H} \right) \frac{\partial V \left( \frac{v_l}{H} \right)}{\partial XH} + V \left( \frac{v_l}{H} \right) \frac{\partial V \left( \frac{v_l}{H} \right)}{\partial YH} \\ = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P \rho \left( \frac{v_l}{H} \right)^2}{\partial YH} + v_l \left( \frac{\partial^2 V \left( \frac{v_l}{H} \right)}{\partial (XH)^2} + \frac{\partial^2 V \left( \frac{v_l}{H} \right)}{\partial (YH)^2} \right) + g\beta(T_h - T_c) \cdot \theta \\ - \frac{\xi (1 - f^2)}{\rho (f^3 + \varepsilon)} V \left( \frac{v_l}{H} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial VV}{\partial Y} = V \frac{\partial V}{\partial Y} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = 2V \frac{\partial V}{\partial Y} \Rightarrow V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{2} \frac{\partial VV}{\partial Y} \quad (2'')$$

$$\frac{\partial UV}{\partial X} = V \frac{\partial U}{\partial X} + U \frac{\partial V}{\partial X} \Rightarrow V \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial UV}{\partial X} - U \frac{\partial V}{\partial X} \quad (3'')$$

On remplace (2'') et (3'') dans (1'') et on divise sur  $\left( \frac{v_l^2}{H^3} \right)$  :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \left\{ \frac{\partial UV}{\partial X} - V \frac{\partial U}{\partial X} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial VV}{\partial Y} \right] \\ = - \frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right) + \frac{g\beta(T_h - T_c) \cdot \theta}{\left( \frac{v_l^2}{H^3} \right)} + \frac{\xi H^2 (1 - f)^2}{\rho_0 v_l (f^3 + \varepsilon)} V \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial X} \right) = 0 \text{ et } U \neq 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial VU}{\partial X} + \frac{\partial VV}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{g\beta(T_h - T_c)}{\left( \frac{v_l^2}{H^3} \right)} \cdot \theta + S_v$$

$$\text{Avec : } Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c) \cdot H^3}{v_l^2}$$

Alors l'équation de mouvement suivant Y s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial VU}{\partial X} + \frac{\partial VV}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Gr \cdot \theta + S_v$$

#### 4- Équation d'énergie

L'équation dimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial [\rho(h + \phi L)]}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Pour un fluide incompressible:  $\rho = \text{cte}$

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\rho} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\rho} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Par substitution des grandeurs adimensionnelles :

$$X = \frac{x}{H} \quad Y = \frac{y}{H} \quad \tau = \frac{t}{H^2 / \nu_l}$$

On obtient :

$$\nu_l \frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + H \frac{\partial(uh)}{\partial X} + H \frac{\partial(vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{k}{\rho} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{k}{\rho} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

Soit:

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + \frac{H}{\nu_l} \frac{\partial(uh)}{\partial X} + \frac{H}{\nu_l} \frac{\partial(vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{k}{\rho \nu_l} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{k}{\rho \nu_l} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

En utilisant les grandeurs adimensionnelles de référence (vitesse, conductivité thermique, capacité thermique, nombre de Prandtl) définies par :

$$V_{ref} = \frac{\nu_l}{H} \quad K = \frac{k}{k_l} \quad C = \frac{c}{c_l} \quad Pr = c_l \frac{\mu_l}{k_l}$$

On obtient:

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + \frac{1}{V_{ref}} \frac{\partial(uh)}{\partial X} + \frac{1}{V_{ref}} \frac{\partial(vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{k}{\rho \nu_l} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{k}{\rho \nu_l} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

Soit:

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + \frac{\partial(Uh)}{\partial X} + \frac{\partial(Vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{k}{\rho \nu_l} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{k}{\rho \nu_l} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

Ou:

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + \frac{\partial(Uh)}{\partial X} + \frac{\partial(Vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{k}{\mu_l} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{k}{\mu_l} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + \frac{\partial(Uh)}{\partial X} + \frac{\partial(Vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K c_l}{c_l \frac{\mu_l}{k_l}} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K c_l}{c_l \frac{\mu_l}{k_l}} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

Soit:

$$\frac{\partial(h+\phi L)}{\partial \tau} + \frac{\partial(Uh)}{\partial X} + \frac{\partial(Vh)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K c_l}{Pr} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K c_l}{Pr} \frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$

En introduisant l'enthalpie sensible adimensionnelle, définie par:

$$\dot{h} = \frac{h - h_c}{h_h - h_c}$$

Ce qui donne :

$$h = h_c + \dot{h}(h_h - h_c) \quad T = \frac{1}{c} [h_c + \dot{h}(h_h - h_c)] \quad \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{(h_h - h_c)}{c} \frac{\partial \dot{h}}{\partial X} \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{(h_h - h_c)}{c} \frac{\partial \dot{h}}{\partial Y}$$

Par substitution, on obtient :

$$(h_h - h_c) \frac{\partial \dot{h}}{\partial \tau} + \frac{\partial(\phi L)}{\partial \tau} + h_c \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + (h_h - h_c) \left[ \frac{\partial(U\dot{h})}{\partial X} + \frac{\partial(V\dot{h})}{\partial Y} \right] = (h_h - h_c) \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K}{CPr} \frac{\partial \dot{h}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K}{CPr} \frac{\partial \dot{h}}{\partial Y} \right) \right]$$

Après simplification :

$$\frac{\partial \dot{h}}{\partial \tau} + \frac{1}{(h_h - h_c)} \frac{\partial(\phi L)}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\dot{h})}{\partial X} + \frac{\partial(V\dot{h})}{\partial Y} = \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K}{CPr} \frac{\partial \dot{h}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K}{CPr} \frac{\partial \dot{h}}{\partial Y} \right) \right]$$

Soit la forme finale :

$$\frac{\partial \dot{h}}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\dot{h})}{\partial X} + \frac{\partial(V\dot{h})}{\partial Y} = \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{CPr}} \frac{\partial \dot{h}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{CPr}} \frac{\partial \dot{h}}{\partial Y} \right) \right] + \mathbf{S}_h$$

$$\mathbf{S}_h = - \frac{1}{(h_h - h_c)} \frac{\partial(\phi L)}{\partial \tau}$$

## النقل الحراري أثناء التصلب والانصهار لمواد متغيرة الطور

المواد المتغيرة الطور (MCP) تستعمل في العديد من المجالات الصناعية من أهمها: التعدين، الصناعات الإلكترونية، الصناعات الغذائية، عند العزل، التكييف والتخزين الحراري... في هذا العمل قمنا بدراسة حركية لعمليتي التصلب والانصهار الداخلي أثناء انتقال المادة من حالتها الأساسية السائلة إلى الحالة الصلبة والعكس داخل تجويف يحتوي على مادة قابلة للتغيير. وتعتمد الدراسة على نموذج فيزيائي ثنائي الأبعاد مع الأخذ بعين الاعتبار النقل الحراري عن طريق الحمل الطبيعي والتوصيل الحراري. في هذا التطبيق، استخدم الماء والعديد من المواد متغيرة الطور، مخزنة في تجويف مستطيل الشكل الهندسي ذو نسبة الارتفاع  $A$ . على سطح لتجويف طبقت على يسار التجويف درجة حرارة ساخنة وعلى يمينه درجة حرارة باردة، في حين تعتبر الأسطح العلوية والسفلية معزولة حرارياً. تم حل معادلات النموذج الفيزيائي عددياً باستخدام طريقة الحجوم المنتهية واعتماداً على البحوث العلمية المنشورة تم التحقق من صحة النتائج المحصل عليها، بالمقارنة مع النتائج التجريبية و العددية المنشورة. في الدراسة العددية قمنا باستخدام الحلول عن طريق برنامج حساب بناءً على طريقة الحجوم المنتهية. حيث تم توضيح الظاهرتان الفيزيائيتان كل من: الحمل الحراري الطبيعي في المنطقة السائلة والتوصيل في المادة الصلبة. يعتمد تحديد آليات النقل أثناء التصلب على دراسة رقمية باستخدام المعلمات التي تتحكم في الظاهرة الفيزيائية، وهو عدد  $Grashof$  ونسبة الارتفاع التجويف  $A$ . وهكذا كان من الممكن أن نرى من خلال مجالات درجة الحرارة والسرعة وعدد نسلت  $Nu$ ، وتطور كميات النقل وتأثير معلمات التحكم على هذه الظواهر. من وجهة النظر الأساسية والعملية، تساعد هذه الدراسة على فهم أفضل لظاهرتي التصلب والانصهار. حيث انه سيكون بمثابة مساهمة في تصميم أنظمة التخزين الحراري أو عموماً لجميع الأنظمة التي تستخدم مواد متغيرة الطور للحالات الصلبة والسائلة.

### Transfert thermique lors de la solidification et de la fusion des matériaux à changement de phase

Les matériaux à changement de phase (MCP) sont rencontrés dans de nombreux domaines industriels. En métallurgie : solidification et fusion des métaux purs et des alliages ; en industries électroniques : fabrication des composants ; en agro-alimentaire : séchage et conditionnement ; dans l'habitat : isolation et stockage thermique de la chaleur et du froid, rafraichissement des habitats, ...

Dans ce travail, nous étudions la cinétique du phénomène de changement de phase liquide - solide (solidification) et solide-liquide (fusion) au sein d'une cavité contenant un matériau à changement de phase. La modélisation physique repose sur une approche bidimensionnelle basé sur la méthode enthalpique et tenant compte du transfert couplé conducto-convectif.

Plusieurs matériaux à changement de phase ont été utilisés : eau, gallium, MCP organique, possédant différents nombres de Prandtl. La cavité est de géométrie rectangulaire ayant un rapport d'aspect  $A$  et dont les surfaces gauche et droite sont maintenues respectivement aux températures chaude et froide alors que les surfaces supérieure et inférieure sont considérées adiabatiques.

Les équations du modèle physique sont résolues numériquement à l'aide de la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus sont validés avec des résultats expérimentaux et numériques de la littérature.

Une étude numérique utilisant les solutions par programme de calcul basée sur la méthode des volumes finis, est rapportée. Deux phénomènes sont distingués la convection naturelle dans la région liquide et la conduction dans le solide.

L'identification des mécanismes de transfert lors de la solidification repose sur une étude numérique utilisant les paramètres de contrôle du phénomène physique, à savoir le nombre de  $Grashof$  et le rapport d'aspect de la cavité. On a pu ainsi voir à travers les champs de température, de vitesse et le nombre de  $Nusselt$ , l'évolution des grandeurs de transferts et l'influence des paramètres de contrôle sur ces phénomènes.

D'un point de vue fondamental que pratique, cette étude aide à mieux comprendre le phénomène de solidification et de fusion. Elle servira comme contribution pour la conception des systèmes de stockage du froid ou d'un ordre plus général pour tous les systèmes utilisant un matériau à changement de phase liquide-solide.

### Heat transfer during solidification and fusion of phase change materials

The phase change materials (PCM) are encountered in many industrial fields. Metallurgy: Melting and solidification of pure metals and alloys; in electronic industries: manufacturing components; in food: drying and packaging, in the home: insulation and thermal storage of heat and cold, refreshing habitats, ...

In this work, we study the kinetics of liquid-solid phase change by solidification, and solid-liquid by melting within a cavity and containing a phase change material. Physical modeling is based on a two-dimensional approach based on the enthalpic method and taking into account coupled conducto-convective transfer. Several phase-change materials were used: water, gallium, organic MCP, with different Prandtl numbers. The cavity is of rectangular geometry having an aspect ratio  $A$  and whose left and right surfaces are maintained respectively at hot and cold temperatures while the upper and lower surfaces are considered adiabatic.

The physical model equations are solved numerically using the finite volume method. The results are validated with experimental and numerical results of the literature. A numerical study using the solutions by calculation program code, which is based on the finite volume method, is reported. Two phenomena are distinguished natural convection in the liquid region and conduction in the solid.

The identification of mechanisms of transfer during solidification and melting is based on a numerical study using the control parameters of the physical phenomenon, namely the Grashof number and the aspect ratio of the cavity. Thus, it was possible to see through the fields of temperature, velocity and Nusselt number, the evolution of the transfer parameters and their effects on these phenomena.

From a fundamental point of view, this study helps to better understand the phenomenon of solidification and melting. It will serve for the design of cold storage systems and in general for all systems using a material phase change liquid-solid.