

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : COSD

Thème

Etude de l'existence et de la stabilité de certain système
d'évolution

Présenté par :
DERBIKH Amani

Soutenu publiquement le : 02 / 07 /2025

Devant le jury composé de :

Ghennam Karima	M.C.B	Université de Skikda	Président
Hebhoub Fahima	M.C.A	Université de Skikda	Directeur
Far Zina	M.A.A	Université de Skikda	Examineur
Bouhouche Fadila	M.A.A	Université de Skikda	Invité

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu, mon Créateur, de m'avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste mémoire.

*J'adresse mes sincères remerciements à ma directrice de mémoire, **Dr. Hebhoub Fahima**, qui a proposé le thème de ce mémoire. Elle m'a accompagnée par ses orientations, ses précieux conseils, ses encouragements constants et ses remarques pertinentes, depuis le début jusqu'à la fin de ce travail.*

Je ne saurais oublier de remercier chaleureusement les membres du jury, en témoignage de ma reconnaissance pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce mémoire.

*J'exprime également ma plus profonde reconnaissance et ma gratitude sincère à mes parents pour leur soutien constant et inconditionnel. Je remercie aussi l'ensemble de mes enseignants, depuis l'école primaire jusqu'à l'université en particulier mon tout premier enseignant, mon père, Monsieur **Derbikh Kamal**, qui a été le premier à mettre un stylo entre mes mains, à croire en mes capacités, et à veiller sur ma formation avec bienveillance et exigence. Je tiens à adresser une mention spéciale aux enseignants du département de mathématiques pour leur dévouement, leur intégrité et leur précieuse contribution à mon développement scientifique.*

Dédicace

À notre Seigneur, Dieu Tout-Puissant, merci de m'avoir donné la vie, la foi, et d'avoir exaucé mes prières pour y arriver.

À mon cher père Kamel, À toi qui m'as dit un jour que j'étais la prunelle de tes yeux, qui a vu dans mes plus modestes réussites les plus grandes victoires, à l'homme qui a façonné celle que je suis devenue aujourd'hui. Dans ton regard, je lis la fierté, l'amour et la générosité. Merci de m'avoir appris à être cette fille qui ne cesse jamais de vouloir te rendre fier et heureux.

À ma chère mère Hanifa, qui celle dont les paroles m'accompagnent depuis que j'étais petite, toujours présente, courageuse et déterminée, même dans la douleur. Celle qui m'a appris à poursuivre mes rêves malgré les obstacles. Mon ange gardien, ta présence et ton amour continueront d'éclairer mon chemin.

À mes frères, Akram et Mohamed Ramzi, vous êtes mon pilier inébranlable et la sérénité de mes jours, les premiers à m'avoir soutenue. Vous êtes cet espace qui ne se referme jamais, et cette ombre bienveillante qui ne me quitte pas.

À mes oncles Hicham, Manaa, Ali, Ahmed et Yacoub, vous avez été un soutien dans les moments de faiblesse, et une lumière sur les chemins de l'incertitude. Merci pour votre tendresse et votre présence constante. Vous demeurez une source de fierté pour moi.

À mon cher oncle Abdelhak, Tu es parti trop tôt, avant de voir le fruit de mes efforts. Tu as été mon appui, ma force, et ma fierté. Ce modeste accomplissement est une aumône continue pour ton âme, et une flamme de nostalgie qui ne s'éteindra jamais.

Dédicace

À mes tantes Fatiha, Hanan et leurs époux, ainsi que Ghaniya et Rania, vous êtes une source de tendresse et un baume pour les moments de fatigue.

À la chère épouse de mon oncle Rim, unique par sa place et son affection, merci pour la bonté de ton cœur, ta tendresse sincère, et ton soutien constant à mes côtés.

À mes petites cousines, filles de mon oncle et de ma tante : Mennat Allah, Ghofrane et Roufan, Vos rires sèment la joie dans mon cœur, et votre innocence illumine ma vie.

À mes grands-mères et grands-pères : Charif, Mahmoud, Fatima et Fatima, À ceux qui ont semé en moi les valeurs et m'ont entouré(e) d'un amour sincère, Je vous adresse tout mon amour et ma profonde gratitude. Que Dieu accorde Sa miséricorde à ceux qui nous ont quittés et protège ceux qui sont encore parmi nous.

À mes chères amies : Romaissa, Ikram, et Djazia, À celles qui ont partagé avec moi les moments doux et amers, Vous étiez la lumière dans les ténèbres, et le sourire dans les instants de fatigue.

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions un système poreux gonflant couplé à un système thermoélastique avec un amortissement minimal. En utilisant la méthode classique des multiplicateurs, nous stabilisons le système de manière exponentielle sans imposer de restrictions sur les vitesses de propagation des ondes du système. Ce résultat contraste avec ceux obtenus pour des systèmes étroitement liés (comme les systèmes de Timoshenko et les systèmes poreux), où un terme d'amortissement similaire n'est suffisant pour stabiliser exponentiellement le système que si l'on suppose l'égalité des vitesses de propagation des ondes.

Mots clé :

Poreux gonflant, Thermoélasticité, Stabilité exponentielle.

ملخص

في هذا العمل، ندرس نظامًا مساميًا يتمدد مع نظام مرونة حرارية يحتوي على أقل قدر من التخميد. باستخدام طريقة المضاعف القياسية، نقوم بتحقيق استقرار أسي للنظام دون فرض قيود على سرعات الموجات في النظام. وتُعد هذه النتيجة مخالفة لما تم التوصل إليه في أنظمة مشابهة (مثل نظام تيموشينكو والأنظمة المسامية)، حيث يُعد وجود مصطلح تخميد واحد غير كافٍ لتحقيق الاستقرار الأسي إلا إذا تم افتراض تساوي سرعات الموجات.

الكلمات المفتاحية

المواد المسامية المتورمة، المرونة الحرارية، الاستقرار الأسي.

Abstract :

In this work, we study a swelling porous system with thermoelasticity system with minimum damping. Employing the standard multiplier method, we stabilize the system exponentially without imposing restrictions on the wave velocities of the system. This result is contrary to those obtained for closely related systems (like Timoshenko and porous systems) with similar single damping term is sufficient to exponentially stabilize the system unless the assumption of the equality of wave velocities is imposed.

Keywords :

Swelling porous, Thermoelasticity, Exponential stability.

Table des matières

1	Préliminaire	15
1.1	Les espaces de Sobolev	15
1.1.1	L'espace de Sobolev $W^{1,p}$	15
1.1.2	L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$	16
1.1.3	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$	17
1.2	Semi-groupe	17
1.3	Quelques théorèmes utiles	18
1.3.1	Théorème de Hille-Yosida	18
1.3.2	Théorème (Lumer-Phillips)	18
1.3.3	Théorème de Lax Milgram	19
1.3.4	Théorème de Fubini	19
1.4	Quelques inégalités importantes	19
1.4.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz	19
1.4.2	Inégalité de Young	20
1.4.3	Inégalité de Poincaré	20
2	Existence et Unicité de la solution	21

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	9
2.1 Position de problème	21
2.2 Existence et unicité de la solution	23
3 Stabilité Exponentielle	31
3.1 Énergie du système	31
3.2 Construction d'une fonctionnelle de Lyapounov	33
Bibliographie	46

Introduction

Il est impératif d'étudier les caractéristiques des matériaux d'ingénierie pour la conservation de l'énergie, la sécurité, la durabilité environnementale, et l'utilisation efficace de l'isolation thermique dans les applications de génie mécanique et civil ([34]). Comprendre les propriétés thermiques des matériaux, telles que la conductivité thermique et la diffusivité, pourrait fournir des informations supplémentaires sur leur performance thermique sous des conditions de charge élastique où une déformation contrainte induit des contraintes. Plusieurs études ont abordé différentes méthodes pour tester les propriétés thermiques de ces matériaux dans les applications d'ingénierie et de conservation de l'énergie ([22]; [33]; [35]). Il a été établi dans les travaux de [20] et [21] que la compréhension des propriétés thermoélastiques des matériaux améliore leur utilisation efficace pour la stabilité des fondations. Par ailleurs,[17] ont démontré que la présence d'humidité pouvait affecter négativement la vitesse de crête lors de vibrations dynamiques à des températures élevées. Cela pourrait se produire dans le sol sous les fondations structurelles à la suite de séismes, entraînant des contraintes de cisaillement plus importantes en raison des changements thermiques dans les matériaux du sol sous-jacent. Les variations saisonnières telles que l'été et l'hi-

ver peuvent entraîner des modifications du comportement des caractéristiques du sol de la superstructure en raison du gradient de température.

Il est crucial de proposer des solutions pour comprendre la complexité du gonflement des milieux poreux à l'aide de formulations mathématiques, car cela permet aux scientifiques et aux ingénieurs de bien comprendre le comportement des sols gonflants sous diverses conditions de charge et d'amortissement. Mathématiquement, le système fondamental d'équations régissant les sols thermoélastiques poreux gonflants (voir [15]; [25]) est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} - \beta_1 \Theta_x + \xi(u_{xt} - v_{xt}) - \alpha u_{xxt} = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} - \beta_2 \Theta_x - \xi(u_{xt} - v_{xt}) = 0, \\ \rho \Theta_t - \mu_2 \Theta_{xx} - \beta_1 u_{xt} - \beta_2 v_{xt} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où les variables inconnues $u, v, \Theta : (0, L) \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ respectivement, symbolisent le déplacement du fluide, le matériau solide élastique, et la variation de température. Les paramètres positifs ρ_1, ρ_2 désignent les densités relatives à z et u , respectivement, et ρ désigne la capacité thermique. Les autres paramètres $\xi, \alpha, a_i, \mu_i, \beta_i, i = 1, 2$ sont des constantes satisfaisant

$$a_i > 0, \mu_i > 0, \beta_i > 0, \xi > 0, \alpha > 0, a_1 \mu_1 > a_2^2$$

. Dans [26], l'auteur a considéré (1) dans le cas isotherme, $\Theta = 0$, ce qui nécessite que $\beta_1 = \beta_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} + \xi(u_{xt} - v_{xt}) - \alpha u_{xxt} = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} - \xi(u_{xt} - v_{xt}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

En utilisant la méthode classique de l'énergie, il a démontré que le système (2) décroît de manière exponentielle. De plus, en appliquant le théorème de Hurwitz, il

a montré que le système (2) avec $\xi = 0$ décroît également de façon exponentielle. Il est évident que le système (1), dans son cas thermique général, est exponentiellement stable. Concernant encore le cas $\xi = 0$, mentionnons le travail de [36]. Ils ont étudié le système (2) avec $\xi = 0$ et ont remplacé le terme $-\alpha u_{xxt}$ par $\alpha(x)u_t$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} + \alpha(x)u_t = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

et ils ont stabilisé le système de manière exponentielle via la méthode spectrale. [28] ont récemment travaillé sur le système (2) avec $\xi = \alpha = 0$ et une rétroaction non linéaire $\alpha(t)g(v_t)$ ajoutée à la deuxième équation, c'est-à-dire...

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} + \alpha(t)g(v_t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Ils ont obtenu un résultat de stabilité exponentielle sous l'hypothèse d'égalité des vitesses de propagation des ondes, c'est-à-dire :

$$\frac{a_1}{\rho_1} = \frac{\mu_1}{\rho_2} \quad (5)$$

De plus, dans [7] le même résultat de stabilité exponentielle pour le système (4) a été démontré indépendamment de l'hypothèse (5). Dans un travail similaire, [6] le système (4) a été traité en remplaçant la rétroaction non linéaire par un amortissement viscoélastique représenté par $\int_0^t g(t-s)v_{xx}(s)ds$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} + \int_0^t g(t-s)v_{xx}(s)ds = 0 \end{cases} \quad (6)$$

et il a obtenu un résultat de stabilité générale sans imposer l'hypothèse d'égalité

des vitesses d'ondes du système.

Dans ce mémoire, nous traitons un problème qui a été étudié dans [11], il s'agit d'un système thermoélastique classique poreux en gonflement indépendant, avec des termes d'amortissement minimaux.

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0 & \in (0, L) \times [0, \infty[\\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} - \beta_2 \Theta_x = 0 & \in (0, L) \times [0, \infty[\\ \rho \Theta_t - \mu_2 \Theta_{xx} - \beta_2 v_{xt} = 0 & \in (0, L) \times [0, \infty[\end{cases} \quad (7)$$

Sous les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0(x), \\ v_t(x, 0) = v_1(x), \Theta(x, 0) = \Theta_0(x), \quad x \in (0, L) \end{cases} \quad (8)$$

et les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = \Theta_x(0, t) = \Theta_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, \infty[. \quad (9)$$

Nous utilisons la méthode classique de l'énergie pour démontrer un résultat de stabilité exponentielle, indépendamment des vitesses d'ondes du système. Ce résultat est inattendu, contrairement à celui obtenu pour des systèmes similaires tels que les milieux poreux thermoélastiques, où la stabilité exponentielle dépend des vitesses d'ondes. Par exemple, dans l'étude de [13], Casas et Quintanilla ont considéré

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu_1 u_{xx} - b v_x + \beta \Theta_x = 0, \\ j v_{tt} - \alpha v_{xx} + b u_x + \zeta v - m \theta = 0, \\ a \Theta_t - \mu_2 \Theta_{xx} + \beta u_{xt} + m v_t = 0 \end{cases} \quad (10)$$

et ont démontré une décroissance lente des solutions. Le même résultat a été obtenu par [23] lorsque le terme γv_{xxt} a été ajouté à l'équation de déplacement du fluide dans (10). Cependant, [32] ont étendu le résultat de décroissance lente obtenu par [13] à une stabilité exponentielle, sous l'hypothèse d'égalité des vitesses d'onde du système. Un résultat analogue a été obtenu par [5]. Pour le système thermoélastique de Timoshenko, nous mentionnons le résultat de [31], où ils ont considéré

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + v)_x = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} + k(u_x + v) + \gamma \Theta_x = 0, \\ \rho \Theta_t - \mu_2 \Theta_{xx} + \gamma v_{xt} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

et il a démontré un résultat de stabilité exponentielle grâce à l'hypothèse $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Voir [19] pour un résultat similaire. Dans tous ces systèmes, on constate que les résultats de stabilité exponentielle dépendent de l'égalité des vitesses d'onde du système.

Ce manuscrit est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles pour notre travail.

Dans le premier chapitre, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant la théorie de semi groupe.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de stabilité exponentielle de la solution en utilisant la méthode du multiplicateur.

Préliminaire

Rappels et notations

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces de Sobolev, semi-groupe, quelques théorèmes utiles et quelques inégalités importantes, que nous utiliserons dans ce mémoire.

1.1 Les espaces de Sobolev

1.1.1 L'espace de Sobolev $W^{1,p}$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non borné et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.1 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par :*

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \mid \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}. \quad (1.1)$$

On pose $H^1(I) = W^{1,2}(I)$,

pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$.

Notation

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{1/p}$).

L'espace H^1 est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Proposition 1.1 *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.1.2 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$

Définition 1.2 *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$, l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$.

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$

Définition 1.3 Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que si et seulement s'ils existent m fonctions $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$ telles que :

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

où $D^j \varphi$ désigne la dérivée de l'ordre j de φ , lorsque $u \in W^{m,p}(I)$, on peut donc considérer les dérivées successives $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$ jusqu'à l'ordre m , on les note $Du, D^2u, \dots, D^m u$. l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.2 Semi-groupe

Définition 1.4 Une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'éléments $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour $t \geq 0$ forme un semi-groupe de classe C_0 dans X (ou semi-groupe fortement continu), si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $S(0) = I$ (identité dans $\mathcal{L}(X)$).

2. $S(t + s) = S(t)S(s)$ pour tout $t, s \geq 0$ (propriété algébrique).
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\|_X$ pour tout $x \in X$ (propriété topologique).

1.3 Quelques théorèmes utiles

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.1 (Hille-Yosida) Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A)),$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(donne initiale)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

1.3.2 Théorème (Lumer-Phillips)

Théorème 1.2 Soit $A : D(A) \rightarrow H$ un opérateur linéaire de domaine dense dans H . Alors, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions si et seulement si :

1. A est dissipatif.
2. il existe un $\lambda > 0$ tel que $\text{Im}(\lambda I - A) = H$.

1.3.3 Théorème de Lax Milgram

Théorème 1.3 Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que :

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, v) - (\varphi, v) = \text{Min}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - (\varphi, v) \right\}.$$

1.3.4 Théorème de Fubini

Théorème 1.4 On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

1.4 Quelques inégalités importantes

1.4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace vectoriel, Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive [i.e. $(u, v) \geq 0, \forall u \in H$ et $(u, v) > 0$

si $u \neq 0$]. Rappelons qu'un produit scalaire vérifie Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

1.4.2 Inégalité de Young

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall (f, g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f^p| dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g^q| dx.$$

Si $p = q = 2$ on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f^2| dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g^2| dx.$$

1.4.3 Inégalité de Poincaré

On suppose que I est borné.

Alors il existe une constante C (dépendant de $|I|$) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(I)$.

Existence et Unicité de la solution

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de poreux thermoelastique gonflant.

2.1 Position de problème

Soit

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} - \beta_2 \Theta_x = 0 \\ \rho \Theta_t - \mu_2 \Theta_{xx} - \beta_2 v_{xt} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

sous les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x); v(x, 0) = v_0(x). \quad x \in (0, L) \\ v_t(x, 0) = v_1(x); \Theta(x, 0) = \Theta_0(x). \quad x \in (0, L) \end{cases} \quad (2.2)$$

et les conditions de Dirichlet-Newman :

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = \Theta_x(0, t) = \Theta_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.3)$$

De plus, en intégrant de la troisième équation du système, on trouve

$$\begin{aligned}\rho \int_0^L \Theta_t dx + \mu_2 \int_0^L \Theta_{xx} dx - \beta_2 \int_0^L v_{tx} dx &= 0 \\ \rho \int_0^L \Theta_t dx + [\mu_2 \Theta_x]_0^L - [\beta_2 v_t]_0^L &= 0\end{aligned}$$

grâce aux conditions initiales, on obtient

$$\int_0^L \Theta_t dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_0^L \Theta dx = 0$$

d'où

$$\int_0^L \Theta(x, t) = Cst = \int_0^L \Theta_0 dx$$

et si on pose

$$\theta_t = \Theta_t(x, t) - \frac{1}{L} \int_0^L \Theta_0 dx$$

on obtient

$$\int_0^L \theta_t dx = 0.$$

Par conséquent, l'utilisation de l'inégalité de Poincaré pour la fonction θ est garanti. De plus, il est évident que $\theta_t = \Theta_t$, $\theta_x = \Theta_x$, et $\theta_{xx} = \Theta_{xx}$. En conséquence le système (2.1), (2.2) – (2.3) se transforme en :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - \mu_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} - \beta_2 \theta_x = 0 \\ \rho \theta_t - \mu_2 \theta_{xx} - \beta_2 v_{xt} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Sous les conditions de Dirichlet Newman :

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x); v(x,0) = v_0(x). & x \in (0, L) \\ v_t(x,0) = v_1(x); \theta(x,0) = \Theta_0(x) - \frac{1}{L} \int_0^L \Theta_0(x) dx. & x \in (0, L) \end{cases}$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Forme matricielle du système :

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.3) nous utilisons la théorie du semi-groupe.

Soit $X = (u; u_t; v; v_t; \theta)^T$ où $u_1 = u_t$ et $v_1 = v_t$ le système (2.1)-(2.3) prend la forme :

$$\begin{cases} X'(t) + AX = 0 & t \geq 0. \\ X(0) = X_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0)^T \end{cases}$$

où l'opérateur $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est défini comme suit :

$$AX = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -\frac{a_1}{\rho_1} u_{xx} - \frac{a_2}{\rho_1} v_{xx} \\ -v_1 \\ -\frac{\mu_1}{\rho_2} v_{xx} - \frac{a_2}{\rho_2} u_{xx} - \frac{\beta_2}{\rho_2} \theta_x \\ -\frac{\mu_2}{\rho} \theta_{xx} - \frac{\beta_2}{\rho} v_{xt} \end{pmatrix}$$

et \mathcal{H} est un espace de Hilbert donné par

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L)$$

où

$$L_*^2(0, L) = \{w \in L^2(0, L) = \int_0^L w(s) ds = 0\}.$$

et

$$H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L).$$

L'espace \mathcal{H} est muni du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle X, \bar{X} \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \int_0^L u_1 \bar{u}_1 dx + \rho_2 \int_0^L v_1 \bar{v}_1 dx + \rho \int_0^L \theta \bar{\theta} dx + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{\mu_1} \right) \int_0^L u_x \bar{u}_x dx \\ & + \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{\mu_1}} u_x + \sqrt{\mu_1} v_x \right) \left(\frac{a_2}{\sqrt{\mu_1}} \bar{u}_x + \sqrt{\mu_1} \bar{v}_x \right) dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

et le domaine de l'opérateur A est donné par :

$$D(A) = \{ X \in \mathcal{H} : u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); v \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); \theta \in H_*^2(0, L) \cap H_*^1(0, L) \}$$

tel que

$$H_*^2(0, L) : \{ w \in H^2(0, L) = w_x(0) = w_x(L) = 0 \}.$$

Le théorème suivant donne le résultat d'existence et d'unicité de la solution du système précédent

Théorème 2.1 Soit $X_0 \in \mathcal{H}$; alors il existe une solution unique $\bar{X} \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du problème(2.1)- (2.3). De plus, si $\bar{X}_0 \in D(A)$, alors

$$X \in C(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$$

Démonstration

On utilise l'approche du semi groupe. Pour celà nous devons montrer que A est maximale monotone.

1. A monotone : pour $X = (u, u_1, v, v_1, \theta)^T \in D(A)$, montrons que :

$$\langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

En utilisant (2.5) on trouve :

$$\begin{aligned} \langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} &= -a_1 \int_0^L u_{xx} u_1 dx - \mu_1 \int_0^L v_1 v_{xx} dx - a_2 \int_0^L u_{xx} v_1 dx \\ &- \beta_2 \int_0^L \theta_x v_1 dx - \mu_2 \int_0^L \theta_{xx} \theta dx - \beta_2 \int_0^L v_{1x} \theta dx - \left(a_1 - \frac{a_2^2}{\mu_1} \right) \int_0^L u_x u_{1x} dx \\ &- \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{\mu_1}} u_x + \sqrt{\mu_1} v_x \right) \left(\frac{a_2}{\sqrt{\mu_1}} u_{1x} + \sqrt{\mu_1} v_{1x} \right) dx \end{aligned}$$

Après simplification et grâce à la formule d'intégration par partie et les conditions aux limites, on obtient :

- $a_1 \int_0^L u_{xx} u_1 dx = a_1 [u_1 u_x]_0^L - a_1 \int_0^L u_x u_{1x} dx$
 $= -a_1 \int_0^L u_x u_{1x} dx$
- $a_2 \int_0^L u_{xx} \cdot v_1 dx = a_2 [v_1 \cdot u_x]_0^L - a_2 \int_0^L u_x \cdot v_{1x} dx$
 $= -a_2 \int_0^L u_x v_{1x} dx$
- $\mu_1 \int_0^L v_{xx} v_1 dx = a_1 [v_1 v_x]_0^L - a_1 \int_0^L v_x v_{1x} dx$
 $= -\mu_1 \int_0^L v_x v_{1x} dx$
- $\beta_2 \int_0^L \theta_x v_1 dx = \beta_2 [v_1 \cdot \theta]_0^L - \beta_2 \int_0^L v_{1x} \theta dx$
 $= -\beta_2 \int_0^L v_{1x} \theta dx$
- $\mu_2 \int_0^L \theta_{xx} \cdot \theta dx = -\mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx$

Donc

$$\langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} = \mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx \geq 0$$

d'où A est monotone.

2. $A + I$ est surjectif :

Soit $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)^T \in \mathcal{H}$, on cherche $X = (u, u_1, v, v_1, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$.

tel que :

$$(I + A)X = G \quad (2.6)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} u - u_1 = g_1 \\ u_1 - \frac{a_1}{\rho_1} u_{xx} - \frac{a_2}{\rho_2} v_{xx} = g_2 \\ v - v_1 = g_3 \\ v_1 - \frac{\mu_1}{\rho} v_{xx} - \frac{a_2}{\rho_2} u_{xx} - \frac{\beta_2}{\rho_2} \theta_x = g_4 \\ \theta - \frac{\mu_2}{\rho} \theta_{xx} - \frac{\beta_2}{\rho} v_{1x} = g_5 \end{cases}$$

A partir de la première équation et la troisième équation, nous avons :

$$\begin{cases} u_1 = g_1 - u \\ v_1 = g_3 - v \end{cases} \quad (2.7)$$

remplaçons par u_1, v_1 dans les autres équations :

$$g_1 - u - \frac{a_1}{\rho_1} u_{xx} - \frac{a_2}{\rho_2} v_{xx} = g_2 \quad (2.8)$$

$$g_3 - v - \frac{\mu_1}{\rho} v_{xx} - \frac{a_2}{\rho_2} u_{xx} - \frac{\beta_2}{\rho_2} \theta_x = g_4 \quad (2.9)$$

$$\theta - \frac{\mu_2}{\rho}\theta_{xx} - \frac{\beta_2}{\rho}g_{3x} + \frac{\beta_2}{\rho}v_x = g_5 \quad (2.10)$$

Multiplions les équations (2.8),(2.9),(2.10) respectivement par $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}$ et en intégrant par partie, on trouve :

$$\begin{cases} - \int_0^L u\bar{u}dx - \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_{xx}\bar{u}dx - \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L v_{xx}\bar{u}dx = \int_0^L (g_2 - g_1)\bar{u}dx \\ - \int_0^L v\bar{v}dx - \frac{\mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_{xx}\bar{v}dx - \frac{a_2}{\rho_2} \int_0^L u_{xx}\bar{v}dx - \frac{\beta_2}{\rho_2} \int_0^L \theta_x\bar{v}dx = \int_0^L (g_4 - g_3)\bar{v}dx \\ \int_0^L \theta\bar{\theta}dx - \frac{\mu_2}{\rho} \int_0^L \theta_{xx}\bar{\theta}dx - \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L v_x\bar{\theta}dx = \int_0^L (g_5 - g_{3x})\bar{\theta}dx \end{cases} \quad (2.11)$$

la formulation variationnelle associée de (2.11) prend la forme :

$$B((u, v, \theta), (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta})) = L(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}) \quad (2.12)$$

où B est une forme bilinéaire de $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{aligned} B((u, v, \theta), (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta})) &= \int_0^L u\bar{u}dx + \int_0^L v\bar{v}dx + \int_0^L \theta\bar{\theta}dx - \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x\bar{u}_x dx \\ &- \frac{\mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_x\bar{v}_x dx - \frac{\mu_2}{\rho} \int_0^L \theta_x\bar{\theta}_x dx - \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L v_x\bar{u}_x dx - \frac{a_2}{\rho_2} \int_0^L u_x\bar{v}_x dx \\ &- \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L \theta\bar{v}_x dx - \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L v_x\bar{\theta} dx. \end{aligned}$$

L est une application linéaire :

$$L(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}) = \int_0^L (g_2 - g_1)\bar{u}dx + \int_0^L (g_4 - g_3)\bar{v}dx + \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L (g_5 - g_{3x})\bar{\theta}dx$$

Définision l'espace :

$$\mathcal{V} = [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)]$$

muni de la norme

$$\|(u, v, \theta)\|_{\mathcal{V}} = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2$$

et appliquons le théorème de Lax-Miligrane pour montrer l'existence de la solution de (2.12).

Tout d'abord, on commence par :

1) La continuité de la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} |B(Y, \bar{Y})| &= \left| \int_0^L u\bar{u}dx + \int_0^L v\bar{v}dx + \int_0^L \theta\bar{\theta}dx - \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x\bar{u}_x dx \right. \\ &\quad - \frac{\mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_x\bar{v}_x dx - \frac{\mu_2}{\rho} \int_0^L \theta_x\bar{\theta}_x dx - \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L v_x\bar{u}_x dx - \frac{a_2}{\rho_2} \int_0^L u_x\bar{v}_x dx \\ &\quad \left. - \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L \theta\bar{v}_x dx - \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L v_x\bar{\theta} dx \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^L |u\bar{u}|dx + \int_0^L |v\bar{v}|dx + \int_0^L |\theta\bar{\theta}|dx + \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L |u_x\bar{u}_x|dx \\ &\quad + \frac{\mu_1}{\rho_2} \int_0^L |v_x\bar{v}_x|dx + \frac{\mu_2}{\rho} \int_0^L |\theta_x\bar{\theta}_x|dx + \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L |v_x\bar{u}_x|dx + \frac{a_2}{\rho_2} \int_0^L |u_x\bar{v}_x|dx \\ &\quad + \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L |\theta\bar{v}_x|dx + \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L |v_x\bar{\theta}|dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy schwartz et l'inégalité de Poincaré on a :

$$\begin{aligned} |B(Y, \bar{Y})| &\leq \|u\| \|\bar{u}\| + \|v\| \|\bar{v}\| + \|\theta\| \|\bar{\theta}\| + \frac{a_1}{\rho_1} \|u_x\| \|\bar{u}_x\| + \frac{\mu_1}{\rho_2} \|v_x\| \|\bar{v}_x\| \\ &\quad + \frac{\mu_2}{\rho} \|\theta_x\| \|\bar{\theta}_x\| + \frac{a_2}{\rho_1} \|v_x\| \|\bar{u}_x\| + \frac{a_2}{\rho_2} \|u_x\| \|\bar{v}_x\| + \frac{\beta_2}{\rho} \|\theta\| \|\bar{v}_x\| + \frac{\beta_2}{\rho} \|v_x\| \|\bar{\theta}\| \\ &\leq c \|(u, v, \theta)\|_{\mathcal{V}} \|(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta})\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

tel que :

$$c = \max \left\{ 1, \frac{a_1}{\rho_1}, \frac{\mu_1}{\rho_2}, \frac{\mu_2}{\rho}, \frac{a_2}{\rho_1}, \frac{a_2}{\rho_2}, \frac{\beta_2}{\rho} \right\}.$$

Donc $B(.,.)$ est continue.

2) La coercivité de la forme bilinéaire :

on a :

$$\begin{aligned} |B((u, v, \theta), (u, v, \theta))| &= \left| \int_0^L u^2 dx + \int_0^L v^2 dx + \int_0^L \theta^2 dx + \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_1}{\rho} \int_0^L v_x^2 dx + \frac{\mu_2}{\rho} \int_0^L \theta_x^2 dx \right| \\ &\geq \min \left\{ 1, \frac{a_1}{\rho_1}, \frac{\mu_1}{\rho}, \frac{\mu_2}{\rho} \right\} \|(u, v, \theta)\|_{\mathcal{V}} \\ &\geq c \|(u, v, \theta)\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Donc $B(.,.)$ coercive.

3) La continuité de la forme bilinéaire :

$L(.)$ continue, alors :

$$\beta > 0 : |L(\bar{Y})| \leq \beta \|\bar{Y}\|_{\mathcal{V}} \quad \forall \bar{Y} \in \mathcal{V}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy schwartz, on trouve :

$$\begin{aligned} |L(Y)| &= \left| \int_0^L (g_2 - g_1) \bar{u} dx + \int_0^L (g_4 - g_3) \bar{v} dx + \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L (g_5 - g_{3x}) \bar{\theta} dx \right| \\ &\leq \int_0^L |(g_2 - g_1) \bar{u}| dx + \int_0^L |(g_4 - g_3) \bar{v}| dx + \frac{\beta_2}{\rho} \int_0^L |(g_5 - g_{3x}) \bar{\theta}| dx \\ &\leq \|(g_2 - g_1)\| \|\bar{u}\| + \|(g_4 - g_3)\| \|\bar{v}\| + \frac{\beta_2}{\rho} \|(g_5 - g_{3x})\| \|\bar{\theta}\| \\ &\leq \beta \|(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta})\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

où $\beta = \max \left\{ \|(g_2 - g_1)\|, \|(g_4 - g_3)\|, \frac{\beta_2}{\rho} \|(g_5 - g_{3x})\| \right\}$

Donc $L(\cdot)$ est continue.

D'après le théorème de Lax-Miligram on conclut que le problème (2.12) admet une solution unique, $Y \in \mathcal{V}$. En appliquant la régularité elliptique classique, il s'ensuit de (2.11) que $(u, v, \theta) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_*^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$. Par conséquent, l'opérateur $I + A$ est surjectif. En conséquence, le résultat du Théorème 2.1 découle du théorème de Hille-Yosida.

Stabilité Exponentielle

Dans ce chapitre, nous montrons que le système (2.1)-(2.3) est dissipatif et qu'il est exponentiellement stable en se basant sur la méthode de l'énergie.

3.1 Énergie du système

Lemme 3.1 *L'énergie du système (2.1)-(2.3) est donnée par :*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 u_t^2 + a_1 u_x^2 + \rho_1 v_t^2 + \mu_1 v_x^2 + \rho \theta^2 + 2a_2 u_x v_x] dx \quad (3.1)$$

De plus

$$E'(t) = -\mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Démonstration

Multiplions (2.1)₁ par u_t et intégrons par partie par rapport à x sur $(0,L)$, en prenons en compte les conditions aux bords, on obtient :

$$\rho_1 \int_0^L u_{tt} \cdot u_t dx - a_1 \int_0^L u_{xx} \cdot u_t dx - a_2 \int_0^L v_{xx} \cdot u_t dx = 0$$

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx - a_1 [u_x u_t]_0^L + a_1 \int_0^L u_x \cdot u_{tx} dx + a_2 \int_0^L v_x \cdot u_{tx} dx = 0$$

et on a

$$a_1 \int_0^L u_x \cdot u_{tx} dx = \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx$$

et comme

$$v_x \cdot u_{tx} dx = \frac{d}{dt} [u_x v_x] - u_x \cdot v_{tx}$$

alors

$$a_2 \int_0^L v_x \cdot u_{tx} dx = a_2 \frac{d}{dt} \int_0^L u_x v_x dx - a_2 \int_0^L u_x \cdot v_{tx} dx$$

et on obtient

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx + a_2 \frac{d}{dt} \int_0^L u_t v_x dx - a_2 \int_0^L u_x v_{tx} dx = 0 \quad (3.3)$$

Multiplions l'équation (2.1)₃ par v_t , et intégrons par partie par rapport à x sur $(0, L)$, on trouve :

$$\rho_2 \int_0^L v_{tt} \cdot v_t dx - \mu_1 \int_0^L v_{xx} \cdot v_t dx - a_2 \int_0^L u_{xx} \cdot v_t dx - \beta_2 \int_0^L \theta_x v_t dx = 0$$

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^2 dx + a_2 \int_0^L u_x \cdot v_{tx} dx + \beta_2 \int_0^L v_{tx} \cdot \theta dx = 0 \quad (3.4)$$

Multiplions l'équation (2.1)₃ par θ , et intégrons par partie par rapport à x sur $(0, L)$, on trouve :

$$\rho \int_0^L \theta_t \theta dx - \mu_2 \int_0^L \theta_{xx} \theta dx - \beta_2 \int_0^L v_{xt} \theta dx = 0$$

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta^2 dx + \mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx - \beta_2 \int_0^L v_{xt} \theta dx = 0 \quad (3.5)$$

Maintenant nous additionnons les égalités ((3.3), (3.4), (3.5)), nous obtenons

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx + a_2 \frac{d}{dt} \int_0^L u_t v_x dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_t^2 dx$$

$$+\frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta^2 dx + \mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L \rho_1 u_t^2 dx + a_1 \int_0^L u_x^2 dx + \rho_2 \int_0^L v_t^2 dx + \mu_1 \int_0^L v_x^2 dx + \rho \int_0^L \theta^2 dx \right. \\ & \left. + 2a_2 \int_0^L u_x v_x dx \right\} = -\mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

ce qui fait que :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 u_t^2 + a_1 u_x^2 + \rho_1 v_t^2 + \mu_1 v_x^2 + \rho \theta^2 + 2a_2 u_x v_x] dx$$

et

$$E'(t) = -\mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx \leq 0.$$

Ainsi le système (2.1) est dissipatif.

Stabilité exponentielle

Pour Prouver cette décroissance exponentielle, nous avons besoin de construire une fonction de Lyapounov équivalente à l'énergie, pour cela nous avons besoin de quelques lemmes importants.

3.2 Construction d'une fonctionnelle de Lyapounov

Lemme 3.2 Soit (u, v, θ) la solution du problème (2.1), alors la fonctionnelle F_1 définie par

$$F_1(t) = a_2 \rho_2 \int_0^L (v_t u - u_t v) dx.$$

vérifie

$$F_1'(t) \leq -\frac{a_2^2}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \left(\frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right)^2 \right) \int_0^L v_x^2 dx + \beta_2^2 c_p \int_0^L \theta_x^2 dx \quad \forall t \geq 0 \quad (3.6)$$

Démonstration

Dérivons $F_1(t)$

$$F_1'(t) = a_2 \rho_2 \int_0^L v_{tt} u - a_2 \rho_2 \int_0^L u_{tt} v dx$$

et on a

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\rho_1} [a_1 u_{xx} + a_2 v_{xx}]. \\ v_{tt} = \frac{1}{\rho_2} [\mu_1 v_{xx} + a_2 u_{xx} + \beta_2 \theta_x]. \end{cases}$$

donc

$$F_1'(t) = a_2 \int_0^L [\mu_1 v_{xx} + a_2 u_{xx} + \beta_2 \theta_x] u dx - a_2 \rho_2 \int_0^L \frac{1}{\rho_1} [a_1 u_{xx} + a_2 v_{xx}] v dx \quad (3.7)$$

Une intégration par partie donne :

$$\bullet a_2 \int_0^L \mu_1 v_{xx} \cdot u dx = a_2 \mu_1 [v_x \cdot u]_0^L + a_2 \mu_1 \int_0^L v_x u_x dx = a_2 \mu_1 \int_0^L v_x \cdot u_x dx$$

$$\bullet a_2^2 \int_0^L u_{xx} \cdot u dx = a_2^2 [u_x \cdot u]_0^L + a_2^2 \int_0^L u_x^2 dx = -a_2^2 \int_0^L u_x^2 dx$$

$$\bullet \beta_2 \int_0^L \theta_x \cdot u dx = \beta_2 \int_0^L \theta \cdot u_x dx$$

$$\bullet \frac{a_2 \rho_2}{\rho_1} a_1 \int_0^L u_{xx} \cdot v dx = \frac{a_2 \rho_2}{\rho_1} a_1 [u_x \cdot v]_0^L + \frac{a_2 \rho_2}{\rho_1} a_1 \int_0^L u_x \cdot v_x dx = \frac{a_2 \rho_2}{\rho_1} a_1 \int_0^L u_x \cdot v_x dx$$

$$\bullet \frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} \int_0^L v_{xx} \cdot v dx = \frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} \int_0^L v_x^2 dx$$

Donc

$$F_1'(t) = -a_2^2 \int_0^L u_x^2 dx + \frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} \int_0^L v_x^2 dx + a_2 \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right) \int_0^L u_x \cdot v_x dx - a_2 \beta_2 \int_0^L u_x \theta dx \quad (3.8)$$

Appliquons l'inégalité de Young :

$$a_2 \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right) \int_0^L u_x \cdot v_x dx \leq \frac{a_2^1}{4} \int_0^L u_x^2 dx + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right)^2 \int_0^L v_x^2 dx \quad (3.9)$$

et en appliquant l'inégalité de Young, puis l'inégalité de Poincaré, on constate que :

$$-a_2\beta_2 \int_0^L \theta \cdot u_x dx \leq \frac{a_2^2}{4} \int_0^L u_x^2 dx + \beta_2^2 c_p \int_0^L \theta_x^2 dx \quad (3.10)$$

En substituant les inégalités précédentes (3.9) et (3.10) dans (3.8) on obtient (3.6).

Lemme 3.3 Soit (u, v, θ) la solution du problème (2.1), la Fonctionnelle F_2 définie par :

$$F_2(t) = \rho_2 \int_0^L v_t v dx - \frac{a_2}{a_1} \rho_1 \int_0^L u_t v dx$$

satisfies pour tout $\epsilon_1 > 0$

$$F_2'(t) \leq -\frac{1}{2} \left(\mu_1 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L v_x^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2}{4a_1^2 \epsilon_1} \right) \int_0^L v_t^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\beta_2 c_p}{2c} \int_0^L \theta_x^2 dx. \quad (3.11)$$

Démonstration

Dérivons $F_2(t)$

$$F_2'(t) = \rho_2 \left[\int_0^L v_{tt} \cdot v + v_t^2 dx \right] - \frac{a_2^2}{a_1} \rho_1 \left[\int_0^L u_{tt} \cdot v_t - u_t v_t dx \right]$$

$$F_2'(t) = \int_0^L (\mu_1 v_{xx} + a_2 u_{xx} + \beta_2 \theta_x) \cdot v dx + \rho_2 \int_0^L v_t^2 dx - \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L (a_1 u_{xx} + a_2 v_{xx}) dx - \frac{a_2^2}{a_1} \rho_1 \int_0^L u_t v_t dx.$$

Une intégration par partie nous donne :

$$\bullet \mu_1 \int_0^L v_{xx} \cdot v dx = \mu_1 [v_x \cdot v]_0^L - \mu_1 \int_0^L v_x^2 dx = -\mu_1 \int_0^L v_x^2 dx$$

$$\bullet a_2 \int_0^L u_{xx} \cdot v dx = a_2 [u_x \cdot v]_0^L - a_2 \int_0^L u_x \cdot v_x dx = -a_2 \int_0^L u_x \cdot v_x dx$$

$$\bullet \beta_2 \int_0^L \theta_x \cdot v dx = -\beta_2 \int_0^L \theta \cdot v_x dx$$

$$\bullet -a_2 \int_0^L u_{xx} \cdot v dx = a_2 \int_0^L u_x \cdot v_x dx - a_2 [u_x \cdot v_x]_0^L = -a_2 \int_0^L v_x \cdot u_x dx$$

$$\bullet -\frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L v_{xx} \cdot v dx = -\frac{a_2^2}{a_1} [v_x \cdot v]_0^L + \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L v_x^2 dx = \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L v_x^2 dx$$

Donc

$$F_2'(t) = -\left(\mu_1 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) \int_0^L v_x^2 dx + \rho_2 \int_0^L v_t^2 dx - \frac{a_2 \rho_1}{a_1} \int_0^L u_t v_t dx - \beta_2 \int_0^L v_x \theta dx$$

Appliquons l'inégalité de young et l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned} -\frac{a_2 \rho_1}{a_1} \int_0^L u_t v_t dx &\leq \epsilon_1 \int_0^L u_t^2 dx + \frac{a_2^2 \rho_1^2}{4a_1^2 \epsilon_1} \int_0^L v_t^2 dx \\ -\beta_2 \int_0^L v_x \theta dx &\leq \delta_1 \int_0^L v_x^2 dx + \frac{\beta_2^2 c_p}{4\delta_1} \int_0^L \theta_x^2 dx \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_2'(t) \leq -\left(\mu_1 - \frac{a_2^2}{a_1} - \delta_1\right) \int_0^L v_x^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L u_t^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2}{4a_1^2 \epsilon_1}\right) \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\beta_2^2 c_p}{4\delta_1} \int_0^L \theta_x^2 dx$$

Maintenant, utilisons le fait que $a_1 \mu_1 \geq a_2^2$ et en choisissant $\delta_1 = \frac{(\mu_1 - \frac{a_2^2}{a_1})}{2}$, on conclut

(3.11)

Lemme 3.4 Soit (u, v, θ) la solution du problème (2.1), la Fonctionnelle F_3 définie par :

$$F_3(t) = -\rho \int_0^L v_t dx \int_0^L \theta_t(y) dy dx$$

Satisfait pour $\epsilon_2, \epsilon_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -\frac{\beta_2}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L u_x^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L v_x^2 dx \\ & + \left(\frac{\rho \beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho^2 a_2^2 c_p^2}{4\epsilon_2 \rho_2^2} + \frac{\rho^2 \mu_1^2 c_p^2}{4\epsilon_3 \rho_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2\beta_2} \right) \int_0^L \theta_x^2 dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Démonstration

Dérivons $F_3(t)$:

$$F_3'(t) = -\rho \int_0^L v_{tt} \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx - \rho \int_0^L v_t \left(\int_0^x \theta_t(y) dy \right) dx$$

et on a

$$\begin{cases} v_{tt} = \frac{1}{\rho_2} [\mu_1 v_{xx} + a_2 v_{xx} + \beta_2 \theta_x] \\ \theta_t = \frac{1}{\rho} [\mu_2 \theta_{yy} + \beta_2 v_{yt}] \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} F_3'(t) = & -\frac{\rho \mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_{xx} \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx - \frac{\rho}{\rho_2} a_2 \int_0^L u_{xx} \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx - \\ & \frac{\rho \beta_2}{\rho_2} \int_0^L \theta_x \cdot \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx - \rho \int_0^L v_t \left[\int_0^x \frac{1}{\rho} [\mu_2 \theta_{yy} - \beta_2 v_{yt}] dy \right] dx \end{aligned}$$

on intègre par partie en tenant en compte les conditions aux limites :

$$\bullet \frac{\rho \mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_{xx} \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx = \frac{\rho \mu_1}{\rho_2} [v_x \cdot \theta]_0^L - \frac{\rho \mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_x \cdot \theta dx = -\frac{\rho \mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_x \cdot \theta dx$$

$$\bullet \frac{\rho a_2}{\rho_2} \int_0^L u_{xx} \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx = \frac{\rho a_2}{\rho_2} [u_x \cdot \theta]_0^L - \frac{\rho a_2}{\rho_2} \int_0^L u_x \cdot \theta dx = -\frac{\rho a_2}{\rho_2} \int_0^L u_x \cdot \theta dx$$

- $\frac{\rho\beta_2}{\rho_2} \int_0^L \theta_x \left[\int_0^x \theta(y) dy \right] dx = \frac{\rho\beta_2}{\rho_2} [\theta_x \cdot \theta]_0^L - \frac{\rho\beta_2}{\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx = -\frac{\rho\beta_2}{\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx$
- $-\mu_2 \int_0^L v_t \left[\int_0^x \theta_{yy}(y) dy \right] dx = -\mu_2 \int_0^L v_t \theta_x dx$
- $-\beta_2 \int_0^L v_t \left[\int_0^x v_{ty}(y) dy \right] dx = -\beta_2 \int_0^L v_t^2 dx.$

Donc

$$F_3'(t) = -\beta_2 \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\rho\beta_2}{\rho_2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\rho a_2}{\rho_2} \int_0^L u_x \cdot \theta dx \\ + \frac{\rho\mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_x \cdot \theta dx + -\mu_2 \int_0^L v_t \theta_x dx$$

Appliquons l'inégalité de Young, puis l'inégalité de Poincaré :

$$\frac{\rho a_2}{\rho_2} \int_0^L u_x \theta dx \leq \epsilon_2 \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\rho^2 a_2^2 c_p}{4\epsilon_2 \rho_2^2} \int_0^L \theta_x^2 dx \\ \frac{\rho\mu_1}{\rho_2} \int_0^L v_x \theta dx \leq \epsilon_3 \int_0^L v_x^2 dx + \frac{\rho_2 \mu_1^2 c_p}{4\epsilon_3 \rho_2^2} \int_0^L \theta_x^2 dx \\ -\mu_2 \int_0^L v_t \theta_x dx \leq \frac{\beta_2}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\mu_2^2}{2\beta_2} \int_0^L \theta_x^2 dx.$$

Par remplacement, on arrive à

$$F_3'(t) \leq -\frac{\beta_2}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L u_x^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L v_x^2 dx + \\ \left(\frac{\rho^2 a_2^2 c_p}{4\epsilon_2 \rho_2^2} + \frac{\rho\beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho_2 \mu_1^2 c_p}{4\epsilon_3 \rho_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2\beta_2} \right) \int_0^L \theta_x^2 dx$$

Lemme 3.5 Soit (u, v, θ) la solution du problème (2.1), la Fonctionnelle F_4 définie par :

$$F_4(t) = - \int_0^L u_t u dx$$

Satisfait

$$F_4'(t) \leq - \int_0^L u_t^2 dx + \frac{2a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu_1}{4\rho_1} \int_0^L v_x^2 dx \quad (3.13)$$

Démonstration

Dérivons $F_4(t)$:

$$F_4'(t) = - \int_0^L (u_{tt}u + u_t^2) dx = - \int_0^L u_{tt}u dx - \int_0^L u_t^2 dx$$

et on a

$$u_{tt} = \frac{1}{\rho_1} [a_1 u_{xx} + a_2 v_{xx}]$$

$$F_4'(t) = - \frac{1}{\rho_1} \int_0^L [a_1 u_{xx} + a_2 v_{xx}] u dx - \int_0^L u_t^2 dx$$

une intégration par partie nous donne :

- $-\frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_{xx} \cdot u dx = -\frac{a_1}{\rho_1} [u_x \cdot u]_0^L + \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx = \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx$
- $-\frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L v_{xx} \cdot u dx = -\frac{a_2}{\rho_1} [v_x \cdot u]_0^L + \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L v_x \cdot u_x dx = \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L v_x u_x dx$

donc

$$F_4'(t) = - \int_0^L u_t^2 dx + \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L u_x v_x dx.$$

Appliquons l'inégalité de Young sur le dernier terme

$$\frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L u_x v_x dx \leq \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{a_2^2}{4a_1 \cdot \rho_1} \int_0^L v_x^2 dx$$

et comme $a_1 \mu_1 > a_2^2$

$$\frac{a_2}{\rho_1} \int_0^L u_x v_x dx \leq \frac{a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu_1}{4\rho_1} \int_0^L v_x^2 dx$$

d'où :

$$F_4'(t) \leq - \int_0^L u_t^2 dx + \frac{2a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu_1}{4\rho_1} \int_0^L v_x^2 dx$$

.

Maintenant nous pouvons donner une expression d'une fonctionnelle de Lyapunov.

Fonction de Lyapunov

Soit L la fonctionnelle de Lyapunov défini par

$$L(t) = NE(t) + \sum_{i=1}^4 N_i F_i(t)$$

$$L(t) = NE(t) + N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + N_4 F_4(t)$$

et le lemme suivant affirme son équivalence avec l'énergie

Lemme 3.6 *Pour N suffisamment grand, la fonctionnelle*

$$L(t) = NE(t) + N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + N_4 F_4(t)$$

où N et N_i sont des nombres réels positifs, satisfait

$$c_1 E(t) \leq L(t) \leq c_2 E(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (3.14)$$

Démonstration

Soit $H(t) = L(t) - NE(t)$, alors

$$|H(t)| = |L(t) - NE(t)| = |N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + N_4 F_4(t)|$$

Si on remplace par les $F_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ on obtient :

$$\begin{aligned} H(t) = & N_1 \left(a_2 \rho_2 \int_0^L (v_t u - u_t v) dx \right) + N_2 \left(\rho_2 \int_0^L v_t v dx - \frac{a_2}{a_1} \rho_1 \int_0^L u_t v dx \right) \\ & + N_3 \left(-\rho \int_0^L v_t \int_0^x \theta(y) dy dx \right) + N_4 \left(-\int_0^L u_t u dx \right) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |H(t)| \leq & N_1 (a_2 \rho_2) \int_0^L |v_t u| dx + N_1 (a_2 \rho_2) \int_0^L |u_t v| dx + N_2 \rho_2 \int_0^L |v_t u| dx \\ & + N_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \rho_1 \right) \int_0^L |u_t v| dx + N_3 \rho \int_0^L |v_t \int_0^x \theta(y) dy| dx + N_4 \int_0^L |u_t v| dx \end{aligned}$$

et grâce aux inégalités de Young et de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
N_1(a_2\rho_2) \int_0^L v_t u dx &\leq \frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} \int_0^L u_x^2 dx \\
N_1(a_2\rho_2) \int_0^L u_t v dx &\leq \frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} \int_0^L v_x^2 dx \\
N_2 \rho_2 \int_0^L v_t v dx &\leq \frac{N_2 \rho_2}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{N_2 \rho_2}{2} \int_0^L v_x^2 dx \\
N_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \rho_1 \right) \int_0^L u_t v dx &\leq \frac{N_2 \frac{a_2}{a_1} \rho_1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{N_2 \frac{a_2}{a_1} \rho_1}{2} \int_0^L v_x^2 dx \\
N_3 \rho \int_0^L (v_t \int_0^x \theta(y) dy) dx &\leq \frac{N_3 \rho}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{N_3 \rho}{2} \int_0^L \theta^2 dx \\
N_4 \int_0^L u_t u dx &\leq \frac{N_4}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{N_4}{2} \int_0^L u_x^2 dx
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|H(t)| &\leq \left[\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \rho_2}{2} + \frac{N_3 \rho}{2} \right] \int_0^L v_t^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \frac{a_2}{a_1} \rho_1}{2} + \frac{N_4}{2} \right) \int_0^L u_t^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_4}{2} \right) \int_0^L u_v^2 dx + \left(\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \frac{a_2}{a_1} \rho_1}{2} \right) \int_0^L v_x^2 dx \\
&\quad + \frac{N_3 \rho}{2} \int_0^L \theta^2 dx + 2 \left(\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} \right) \int_0^L u_x v_x dx.
\end{aligned}$$

on pose :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \rho_2}{2} + \frac{N_3 \rho}{2} \right] &= \sigma_1 \\
\left[\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \frac{a_2}{a_1} \rho_1}{2} + \frac{N_4}{2} \right] &= \sigma_2 \\
\left[\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_4}{2} \right] &= \sigma_3 \\
\left[\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \rho_2}{2} + \frac{N_2 \frac{a_2}{a_1} \rho_1}{2} \right] &= \sigma_4
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{N_3 \rho}{2} \right] = \sigma_5$$

$$2 \left[\frac{N_1 a_2 \rho_2}{2} \right] = \sigma_6$$

on conclut que :

$$|H(t)| \leq \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) \int_0^L v_t^2 + v_x^2 + u_t^2 + u_x^2 + \theta^2 + 2u_x v_x dx$$

$$\leq cE(t)$$

par conséquent :

$$L(t) - NE(t) \leq cE(t)$$

$$-cE(t) \leq L(t) - NE(t) \leq cE(t)$$

$$(N - c)E(t) \leq L(t) \leq (N + c)E(t)$$

Si on prend :

$$c_1 = N - c \quad \text{et} \quad c_2 = N + c$$

tel que $N > c$ on obtient :

$$c_1 E(t) \leq L(t) \leq c_2 E(t) \tag{3.15}$$

Théorème 3.1 *Le système (2.1)-(2.3) est exponentiellement stable, ce qui signifie, il existe des constantes $k_0; k_1 > 0$, tel que l'énergie du système (2.1)-(2.3) définie par (3.1) satisfait*

$$E(t) \leq k_0 e^{-k_1 t}$$

Démonstration

Dérivons $L(t)$ et utilisons les estimations (3.2),(3.6),(3.11),(3.12) et (3.13) :

$$L'(t) = NE'(t) + N_1F'_1(t) + N_2F'_2(t) + N_3F'_3(t) + N_4F'_4(t).$$

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & N \left[-\mu_2 \int_0^L \theta_x^2 dx \right] + N_1 \left[-\frac{a_2^2}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \left(\frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right)^2 \right) \int_0^L v_x^2 dx \right. \\ & \left. + \beta_2 c_p \int_0^L \theta_x^2 dx \right] + N_2 \left[-\frac{m_0}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L u_t^2 dx + \left(\frac{\rho_2 + a_2^2 \rho_1^2}{4a_1^2 \epsilon_1} \right) \int_0^L u_t^2 dx \right. \\ & \left. + \left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2}{4a_1^2 \epsilon_1} \right) \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\beta_2 c_p}{2m_0} \int_0^L \theta_x^2 dx \right] + N_3 \left[-\frac{\beta_2}{2} \int_0^L v_t^2 dx \right. \\ & \left. + \epsilon_2 \int_0^L u_x^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L v_x^2 dx + \left(\frac{\rho \beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho^2 a_2^2 c_p^2}{4\epsilon_2 \rho_2^2} + \frac{\rho^2 \mu_1^2 c_p^2}{4\epsilon_3 \rho_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2\beta_2} \right) \right] \int_0^L \theta_x^2 dx \\ & + N_4 \left[-\int_0^L u_t^2 dx + \frac{2a_1}{\rho_1} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu_1}{4\rho_1} \int_0^L v_x^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -N_4 \int_0^L u_t^2 dx - \left[\frac{a_2^2}{2} N_1 - \epsilon_2 N_3 - \frac{2a_1}{\rho_1} \right] \int_0^L u_x^2 dx \\ & - \left[\frac{m_0}{2} N_2 - \left(\frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right)^2 \right) N_1 - \frac{\mu_1}{2\rho_1} \right] \int_0^L v_x^2 dx \\ & - \left[\mu_2 N - \beta_2^2 c_p N_1 - \frac{\beta_2^2 c_p}{2m_0} N_2 - N_3 \left(\frac{\mu_2^2}{2\beta_2} + \frac{\rho \beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho^2 a_2^2 c_p}{4\epsilon_2 \rho_2^2} + \frac{\rho^2 \mu_1^2 c_p}{4\epsilon_3 \rho_2^2} \right) \right] \int_0^L \theta_x^2 dx \\ & - \left[\frac{\beta_2}{2} N_3 - \left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2}{4a_1^2 \epsilon_1} \right) N_2 \right] \int_0^L v_t^2 dx. \end{aligned}$$

Commençons par choisir ces quantités :

$$N_4 = 2 \quad ; \quad \epsilon_1 = \frac{1}{N_2} \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{a_2^2 N_1}{4N_3} \quad ; \quad \epsilon_3 = \frac{m_0 N_2}{4N_3}$$

donc

$$L'(t) \leq -\int_0^L u_t^2 dx - \left[\frac{m_0}{4} N_2 - \left(\frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right) \right) N_1 - \frac{\mu_1}{2\rho_1} \right] \int_0^L v_x^2 dx$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\mu_2 N - \beta_2^2 c_p N_1 - \frac{\beta_2^2 c_p}{2m_0} N_2 - N_3 \left(\frac{\mu_2^2}{2\beta_2} + \frac{\rho \beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho^2 c_p N_3}{\rho_2^2 N_1} + \frac{\rho^2 \mu_1 c_p N_3}{m_0 \rho_2^2 N_2} \right) \right] \int_0^L \theta_x^2 dx \\
& - \left[\frac{a_2^2}{4} N_1 - \frac{4a_1}{\rho_1} \right] \int_0^L u_x^2 dx - \left[\frac{\beta_2}{2} N_3 - \left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2 N_2}{4a_1^2} \right) N_2 \right] \int_0^L v_t^2 dx.
\end{aligned}$$

choisissons maintenant N, N_1, N_2 et N_3 de sorte que :

$$\begin{cases}
\frac{m_0}{2} N_2 - \left(\frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right)^2 \right) N_1 - \frac{\mu_1}{2\rho_1} > 0 \\
\mu_2 N - \beta_2^2 c_p \varepsilon_1 - \frac{\beta_2^2 c_p}{2m_0} \varepsilon_2 - \left(\frac{\mu_2^2}{2\beta_2} + \frac{\rho \beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho^2 c_p N_3}{\rho_2^2 N_1} + \frac{\rho_2 \mu_2^2 c_p N_3}{m_0 \rho_2^2 \varepsilon_2} \right) N_3 > 0 \\
\frac{a_2^2}{4} N_1 - \frac{4a_1}{\rho_1} > 0 \\
\frac{\beta_2}{2} N_3 - \left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2 N_2}{4a_1^2} \right) N_2 > 0
\end{cases}$$

donc Commençons par choisir N_1 :

$$N_1 = 4a_2^{-2} \left(\frac{4a_1}{\rho_1} + 1 \right)$$

puis,

$$N_2 = 4m_0^{-1} \left(\left(\frac{a_2^2 \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - \mu_1 \right)^2 \right) N_1 + \frac{\mu_1}{2\rho_1} + 1 \right)$$

Après

$$N_3 = 2\beta_2^{-1} \left(\left(\rho_2 + \frac{a_2^2 \rho_1^2 N_2}{4a_1^2} \right) N_2 + 1 \right)$$

et finalement on doit choisir N suffisamment grand pour vérifier

$$N > \mu_2^{-1} \left(\beta_2^2 c_p \varepsilon_1 + \frac{\beta_2^2 c_p}{2m_0} \varepsilon_2 + \left(\frac{\mu_2^2}{2\beta_2} + \frac{\rho \beta_2 c_p}{\rho_2} + \frac{\rho^2 c_p N_3}{\rho_2^2 N_1} + \frac{\rho_2 \mu_2^2 c_p N_3}{m_0 \rho_2^2 \varepsilon_2} \right) N_3 + c_p \right)$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré :

$$- \int_0^L \theta^2 dx \leq \frac{-1}{c_p} \int_0^L \theta_x^2 dx$$

il s'avère que

$$L'(t) \leq - \int_0^L \left(u_x^2 + v_x^2 + u_t^2 + v_t^2 + \theta^2 \right) dx \quad \forall t > 0$$

puis aussi l'inégalité de Young nous conduit à remarquer que

$$E(t) \leq c' \int_0^L \left(u_x^2 + v_x^2 + u_t^2 + v_t^2 + \theta^2 \right) dx$$

ce qui implique

$$- \int_0^L \left(u_x^2 + v_x^2 + u_t^2 + v_t^2 + \theta^2 \right) dx \leq \frac{1}{c'} E(t)$$

par conséquent

$$L'(t) \leq -c_3 E(t) \quad \forall t > 0$$

A partir de (3.15) :

$$L'(t) \leq -k_1 L(t).$$

avec : $k_1 = \frac{c_3}{c_2}$

Une simple intégration, nous conduit à :

$$L(t) \leq L_0 e^{-k_1 t}$$

et finalement d'après aussi (3.15) on abouti à :

$$E(t) \leq k_0 E(0) e^{-k_1 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons analysé le travail de [11] où on a utilisé la méthode de l'énergie (également connue sous le nom de méthode du multiplicateur) pour obtenir un résultat de décroissance exponentielle pour un système thermoélastique poreux en gonflement, où la conduction thermique est contrôlé par la loi classique de Fourier. Les résultats sont obtenus sans imposer les restrictions bien connues sur les vitesses d'ondes ni aucune autre relation entre les coefficients du système. Ainsi, les résultats actuels contribuent de manière significative à la théorie relative aux comportements asymptotiques des milieux élastiques poreux en gonflement et améliorent les travaux antérieures présents dans la littérature.

Bibliographie

- [1] Al-Mahdi, A.M., Al-Gharabli, M.M., Alahyane, M., 2021. *Theoretical and numerical stability results for a viscoelastic swelling porous-elastic system with past history. AIMS Mathe.* 6 (11), 11921–11949.
- [2] Al-Mahdi, A.M., Messaoudi, S.A., Al-Gharabli, M.M., 2022a. *A stability result for a swelling porous system with nonlinear boundary dampings. J. Function Spaces* 22.
- [3] Al-Mahdi, A.M., Al-Gharabli, M.M., Alahyane, M., 2022b. *Theoretical and computational results of a memory-type swelling porous-elastic system. Mathe. Comput. Appl.* 27 (2), 27.
- [4] Al-Mahdi, A.M., Al-Gharabli, M.M., Apalara, T.A., 2022c. *On the stability result of swelling porous-elastic soils with infinite memory. Applicable Anal.*, 1–17
Apalara, T.A., 2019. *On the stability of porous-elastic system with microtemperatures. J. Therm. Stresses* 42 (2), 265–278.

- [5] Apalara, T.A., 2019. *On the stability of porous-elastic system with microtemperatures*. *J. Therm. Stresses* 42 (2), 265–278.
- [6] Apalara, T.A., 2020. *General stability result of swelling porous elastic soils with a viscoelastic damping*. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 71 (6), 1–10.
- [7] Apalara, T., Soufyane, A., Afilal, M., Alahyane, M., 2021a. *A general stability result for swelling porous elastic media with nonlinear damping*. In : *Applicable Anal.*, pp. 1–16.
- [8] Apalara, T.A., Yusuf, M.O., Salami, B.A., 2021b. *On the control of viscoelastic damped swelling porous elastic soils with internal delay feedbacks*. *J. Mathe. Anal. Appl.* 504 (2), 125429.
- [9] Apalara, T.A., Soufyane, A., Afilal, M., 2022a. *On well-posedness and exponential decay of swelling porous thermoelastic media with second sound*. In : *J. Mathe. Anal. Appl.*, p. 126006.
- [10] Apalara, T.A., Raposo, C.A., Ige, A., 2022b. *Thermoelastic timoshenko system free of second spectrum*. *Appl. Mathe. Lett.* 126, 107793.
- [11] Apalara, T.A., Yusuf, M.O , Mukiawa, S.E , Almutair, O.B , 2023

- Exponential stabilization of swelling porous systems with thermoelastic damping.*
J. King Saud Univ – Sci. 35
- [12] Baibeche, S., Bouzettouta, L., Guesmia, A., Abdelli, M., 2022. *Well-posedness and exponential stability of swelling porous elastic soils with a second sound and distributed delay term.* *J. Math. Comput. Sci.* 12, pp. Article-ID.
- [13] Casas, P.S., Quintanilla, R., 2005. *Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures.* *Int. J. Eng. Sci.* 43 (1–2), 33–47.
- [14] Choucha, A., Boulaaras, S.M., Ouchenane, D., Cherif, B.B., Abdalla, M., 2021. *Exponential stability of swelling porous elastic with a viscoelastic damping and distributed delay term.* *J. Function Spaces* 2021.
- [15] Eringen, A.C., 1994. *A continuum theory of swelling porous elastic soils.* *Int. J. Eng. Sci.* 32 (8), 1337–1349.
- [16] Feng, B., Ramos, A., Júnior, D., Freitas, M., Barbosa, R., 2022. . *A new stability result for swelling porous elastic media with structural damping.* *ANNALI DELL'UNIVERSITA'DI FERRARA*, pp. 1–14.
- [17] Ghorbani, J., Nazem, M., Carter, J., Airey, D., 2017. . *A numerical study of the effect of moisture content on induced ground vibration during dynamic compaction.*

- In : International Conference on Performance-based Design in Earthquake Geotechnical Engineering 2017, International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE).*
- [18] Haïm.Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Dunod, PARIS-France,1999.*
- [19] Júnior, D.d.S.A., Santos, M., Rivera, J.M., 2014. *Stability to 1-d thermoelastic timoshenko beam acting on shear force. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 65 (6), 1233–1249.*
- [20] Liu, C., Hu, X., Yao, R., Han, Y., Wang, Y., He, W., Fan, H., Du, L., 2020. *Assessment of soil thermal conductivity based on bpnn optimized by genetic algorithm. Adv. Civil Eng. 2020.*
- [21] López-Acosta, N.P., Zaragoza-Cardiel, A.I., Barba-Galdámez, D.F., 2021. *Determination of thermal conductivity properties of coastal soils for gshps and energy geostructure applications in mexico. Energies 14 (17), 5479.*
- [22] Low, J., Loveridge, F., Powrie, W., 2013. *Measuring soil thermal properties for use in energy foundation design. In : Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Paris, France, pp. 2–6.*

- [23] Pamplona, P.X., Rivera, J.E.M., Quintanilla, R., 2009. *Stabilization in elastic solids with voids*. *J. Mathe. Anal. Appl.* 350 (1), 37–49.
- [24] Pazy, A. *Semigroupes of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*.Spring, New York(1983).
- [25] Quintanilla, R., 2002. *On the linear problem of swelling porous elastic soils with incompressible fluid*. *Int. J. Eng. Sci.* 40 (13), 1485–1494.
- [26] Quintanilla, R., 2002. *Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation*. *J. Comput. Appl. Math.* 145 (2), 525– 533 .
- [27] Quintanilla, R., 2004. *Exponential stability of solutions of swelling porous elastic soils*. *Meccanica* 39 (2), 139–145.
- [28] Ramos, A., Freitas, M., Almeida Jr, D., Noé, A., Santos, M.D., 2020. . *Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping*. *J. Mathe. Phys.* 61 ((10) 101505), 1–10.
- [29] Ramos, A., Almeida Júnior, D., Freitas, M., Noé, A., Santos, M.D., 2021. . *Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms*. *J. Mathe. Phys.* 62 (2), 021507.

- [30] Ramos, A., Apalara, T., Freitas, M., Araújo, M., 2022. *Equivalence between exponential stabilization and boundary observability for swelling problem. J. Mathe. Phys.* 63 (1), 011511.
- [31] Rivera, J.E.M., Racke, R., 2002. *Mildly dissipative nonlinear timoshenko systems—global existence and exponential stability. J. Mathe. Anal. Appl.* 276 (1), 248–278.
- [32] Santos, M., Campelo, A., Oliveira, M., 2019. *On porous-elastic systems with fourier law. Applicable Anal.* 98 (6), 1181–1197.
- [33] Sundberg, J., 1988. *Thermal properties of soils and rocks.*
- [34] Thomas, H.R., Rees, S.W., 2009. *9. Measured and simulated heat transfer to foundation soils. Géotechnique* 59 (4), 365–375.
- [35] Upadhyay, S., Chandra, H., Joshi, M., Joshi, D.P., 2011. *Thermoelastic properties of minerals at high temperature. Pramana* 76 (1), 183–188.
- [36] Wang, J.-M., Guo, B.-Z., 2006. *On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping. IMA J. Appl. Mathe.* 71 (4), 565–582.

-
- [37] Youkana, A., Al-Mahdi, A.M., Messaoudi, S.A., 2022. . *General energy decay result for a viscoelastic swelling porous-elastic system. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 73 (3), 1–17.
- [38] Zheng, S., Liu, Z. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, p. 224. Chapman Hall/CRC, Boca Raton (1999).