

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

N<sup>o</sup> : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Étude de Problèmes Dynamiques Non Linéaires et de Chaos Déterministe

Option: COSD

Par:

*1. Mezdour Cheima*

Encadré par: Bencharif Karima

MAA U. SKIKDA

Devant le jury:

**Président:** Ghennam Karima  
**Examineur:** *Chougui Zoulika*

MCB U.SKIKDA  
MCB U.SKIKDA

Année: 2021/2022



# Remerciement



Grand merci à Allah Miséricordieux, le tout puissant qui m'a donné la force, la persévérance et la patience d'accomplir mon travail. Ma gratitude, Nos vifs remerciements mon encadreur :Karima Bencharif, pour tous ses judicieux conseils, son temps qu'elle nous consacré et pour ses orientations. Je tiens à remerciens l'ensemble des membres du jury qui j'ont fait l'immense plaisir d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer mon travail. un grand merci à tous les enseignants du département de mathématique qui ont été impliqués d'une manière d'une autre dans la formation en master et en licence J'exprime également mes remerciements à ma familles, mais amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la cristallisation de ces souvenirs, ainsi qu'à la réussite de cette merveilleuse année universitaire



# *Dédicace*

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.*

*Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et  
Teconnaissance*

*A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de  
l'amour et de la vivacité.*

*A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé  
avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et  
qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon  
parcours.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus  
de succès.*

*Merci!*

*Cheima & Mezdour* 

## Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire concerne l'étude d'un système chaotique d'ordre fractionnaire.

Nous définissons d'abord la notion de la théorie du chaos et quelques autres notions concepts à l'étude (sensibilité aux condition initiales, l'attracteur étrange, l'exposant de Lyapunov).

Ensuite, nous donnons des notions de base sur les dérivées fractionnaires.

Enfin, on a étudié le système chaotique d'ordre fractionnaire :son point d'équilibre, leur stabilité.

**Mots clé :** Chaos, exposant de Lyapunov, dérivée fractionnaire.

## Abstract

The work discussed in this memoir concerns the study of a chaotic fractional order system.

We first define the notion of chaos theory and same other notions concepts study (sensitivity to initial conditions, the strange attractor, the Lyapunov exponent).

then, we give basic notions on fractional derivatives.

Finally, we studied the chaotic system of fractional order :its equilibrium point, their stability

**Key words:** Chaos, Lyapunov exponent, fractional derivative.

## ملخص

يتعلق العمل الذي تم تناوله في هذه المذكرة بدراسة نظام فوضوي ذو الدرجة الكسرية.  
نعرف أولاً مفهوم نظرية الفوضوي و بعض المفاهيم الأخرى قيد الدراسة (الحساسية لشروط الاولية، الجاذب الغريب، الأس ليابونوف).  
بعد ذلك، نعطي مفاهيم أساسية حول المشتقات الكسرية.  
أخيراً، درسنا النظام الفوضوي لدرجة الكسرية :نقطة التوازن و استقرارها.

**الكلمات المفتاحية :** الفوضوي، الأس ليابونوف، المشتق الكسري

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Notations</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 théorie du chaos</b>	<b>3</b>
1.1 Définition du chaos . . . . .	3
1.1.1 Définition mathématique . . . . .	3
1.1.2 Historique sur le chaos . . . . .	3
1.1.3 Définition l'attracteur . . . . .	4
1.2 les Différents types d'attracteurs : . . . . .	4
1.2.1 Définition de portrait de phase . . . . .	5
1.3 Caractéristique du chaos . . . . .	5
1.3.1 Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	5
1.3.2 L'attracteur étrange . . . . .	6
1.3.3 Les bifurcations . . . . .	7
1.3.4 Diagramme de bifurcation . . . . .	7
1.4 Les quantificateur du chaos . . . . .	7
1.4.1 l'exposant de Lyapunov . . . . .	7
1.4.1.1 Exposant de Lyapunov pour une application unidi- mensionnelle . . . . .	8

1.4.1.2	Exposant de Lyapunov pour une application multi- dimensionnelles . . . . .	9
1.4.2	Dimension Fractale . . . . .	10
1.4.2.1	la dimension de Lyapunov : . . . . .	10
1.5	L'attracteur de Lorenz . . . . .	11
1.5.1	Calcul des points d'équilibres . . . . .	13
1.5.2	Stabilité des points d'équilibres . . . . .	14
1.6	Conclusion . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Dérivées Fractionnaires</b>	<b>18</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Fonctions spécifiques pour la fractionnaire . . . . .	18
2.2.1	Fonction Gamma . . . . .	18
2.2.2	Fonction Bêta : . . . . .	19
2.2.3	La fonction Mittag-Leffler : . . . . .	20
2.3	Diverses approches de la dérivation fractionnaire . . . . .	20
2.3.1	Approche de Grünwald-Letnikov . . . . .	20
2.3.2	Approche de Riemann Liouville . . . . .	22
2.4	Dérivée au sens de Rimann-Liouville . . . . .	27
2.5	Approche de Caputo . . . . .	27
2.6	Propriétés et analyse comparative . . . . .	28
2.7	Exemple de fonction non-causales . . . . .	30
2.8	Transformation de dérivées fractionnaire . . . . .	32
2.8.1	Transformée de Laplace . . . . .	32
2.8.2	Transformée de Fourier . . . . .	34
2.8.3	Transformée de Fourier du convolution . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Les Systèmes Chaotique à dérivées d'ordre Fractionnaire</b>	<b>37</b>
3.1	introduction . . . . .	37
3.2	Équations Fractionnaires . . . . .	37
3.2.1	Problème de Cauchy . . . . .	38
3.3	Équation différentielle fractionnaire linéaire . . . . .	38

3.3.1	Équation différentielle fractionnaire de forme plus générale . . .	38
3.4	Les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire . . . . .	40
3.4.1	Points d'équilibre et région de stabilité . . . . .	40
3.4.2	Stabilité des systèmes linéaires autonomes . . . . .	41
3.5	Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz . . . . .	43
3.6	Stabilité des systèmes non autonomes (version fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov) . . . . .	44
3.6.1	La stabilité généralisée au sens de Mittag-Leffler . . . . .	45
3.7	Application sur la régularisation insuline-glucose . . . . .	45
3.7.1	Préliminaires . . . . .	47
3.7.2	Méthode numérique . . . . .	49
3.7.3	Application sur la régularisation insuline-glucose. . . . .	50
3.7.4	FoGIRM avec des ordres incommensurables . . . . .	51
	<b>Annexe</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

## TABLE DES FIGURES

1.1	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	6
1.2	l'attracteur de lorenz (R=50) . . . . .	12
1.3	l'attracteur de lorenz (R=28) . . . . .	12
1.4	l'attracteur de lorenz (R=10) . . . . .	13
3.1	Schéma des principales composantes du GIRM . . . . .	47
3.2	Portraits de phase d'un système chaotique ou des projections diffé- rentes, sous réserve $(x_0.y_0.z_0) = (0.53, 1.31, 1.03)$ et les paramètres indiqués dans le tableau 2. . . . .	50
3.3	Diagramme de bifurcation et trajectoires spatiales d'un système in- commensurable . . . . .	53
3.4	Diagramme de bifurcation et trajectoires spatiales d'un système in- commensurable . . . . .	53
3.5	LEs du système incommensurables . . . . .	54
3.6	LEs du système incommensurables . . . . .	54

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>
$\mathbb{R}$	les nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	les nombres Positive réels
$\mathbb{R}^*$	les numbers réels non nuls
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des nombres entiers non nuls.
$\mathbb{Z}_-$	ensembles des entiers négatifs .
$\Gamma(\alpha)$	La fonction Gamma.
$B(p, q)$	La fonction Bêta.
$\mathcal{F}[f]$	La transformée de fourier de la fonction $f$
$E(x)$	La partie entière de $x$ .
$D_{RL}^\alpha$	dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
$D_C^\alpha$	dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha$ .
R-L	Riemann-Liouville.

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

La découverte de la théorie du chaos a été une révolution scientifique dans la mesure où des systèmes déterministes pouvait se révéler profondément hiératique et difficilement prévisibles.

En effet, ces systèmes chaotiques ont une grande sensibilité aux conditions initiales (une petite imprécision dans l'état initial du système peut engendrer un état final totalement imprévisible), On peut toute fois fournir une représentation visuelle des trajectoires, sous la forme d'attracteurs étranges.

la théorie du chaos est une théorie mathématique qui trouve des application dans différent domaines comme la biologie, l'économie, l'astrophysique, la météorologie, la médecine et même la psychologie et le flux et le reflux de la vie.

Dans la théorie du chaos il a été observé que le chaos se produit dans les systèmes dynamique d'ordre 3 ou plus, Avec l'introduction des systèmes d'ordre fractionnaire, certains chercheurs étudient le chaos dans le système d'ordre total inférieur à 3.

Dans les domaines des système dynamique et de la théorie de contrôle, un système d'ordre fractionnaire est un système dynamique qui peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre non entier.

On dit que tels systèmes ont une dynamique fractionnaire.

Des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire sont utilisées pour décrire des objets qui peuvent être caractérisés par la non-localité de la loi de puissance, la dépendance à longue portée de la loi de puissance, la dépendance à longue portée de la loi de puissance ou des propriétés fractales.

Dans ce travail nous avons fait une application du chaos dans le cas fractionnaire. La première partie a fait l'objet d'une initiation à la théorie du chaos avec les quantificateurs et comme exemple le modèle de Lorenz.

La deuxième la dérivé fractionnaire.

Et enfin à la troisième les systèmes dynamiques modélisés par des systèmes d'équations différentielles fractionnaires, et pour application la modélisation du taux de glycémie et d'insuline dans le sang, et le diabète.

## 1.1 Définition du chaos

### 1.1.1 Définition mathématique

un système dynamique chaotique un système déterministe régi par des loi mathématiques (équation différentielles ou dérivées partielles ) qui est imprévisible après un temps caractéristique et identifié par des quantificateur et a un comportement à la limite aléatoire.

Il est caractérisé par :

- La sensibilité au conditions initiales mesure par l'exposant de Lyapunov.
- A un attracteur étrange dans un domaine borné au portrait de phase de volume nul.
- La dimension de cet attracteur est fractal.
- Le système est dissipatif.

### 1.1.2 Historique sur le chaos

Dans l'usage courant, le chaos signifie un état de désordre. cependant, dans la théorie de chaos, le terme est défini plus précisément. La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines

comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie la météorologie, la sociologie et la philosophie.

À la fin du XIXe siècle, Henri Poincaré a découvert le phénomène de sensibilité aux conditions initiales pour la première fois, puis a été redécouvert un grand nombre en 1963 par Edward Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants principalement dans le domaine des mathématiques.

La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales produisant des résultats très divergents pour de tels systèmes dynamiques, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, sans éléments aléatoires impliqués, ce comportement est connu sous le nom de chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.

### 1.1.3 Définition l'attracteur

L'ensemble  $A$  est un attracteur si :

1. Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ .
2.  $\bigcap_{t \leq 0} \varphi_t(V) = A$ .
3. Il existe une orbite dense dans  $A$ .

## 1.2 les Différents types d'attracteurs :

Il ya deux types d'attracteurs : Les attracteurs réguliers. Les attracteurs étranges ou chaotique.

**Attracteur réguliers :** Les attracteur réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotique, et peuvent être de trois sortes : Un attracteur réduit à un point fixe, c'est le plus simple attracteur. Un attracteur formant une courbe fermée

est appelé cycle limite. L'attracteur "tour" représente les mouvements résultat de deux ou plusieurs oscillation indépendants que l'on appelle par fois "mouvements quasi périodique".

**Attracteur étranges :** Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, on observe que la trajectoire dans l'espace des phases reste confinée dans une région bien définie, après une période transitoire de durée variable.

### 1.2.1 Définition de portrait de phase

On appelle portrait de phase, l'ensemble des trajectoires de phase décrites par un système, pour différents conditions initiales.

## 1.3 Caractéristique du chaos

### 1.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

les systèmes chaotiques sont extrêmement sensibles aux perturbations, on peut illustré ce fait par l'effet papillon, découvert par Poincaré est popularisé par le météorologue Edward Lorenz. L'évolution d'un système dynamique chaotique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes a ces données initiales divergents exponentiellement par suit les deux trajectoires sont incomparables, ce qui rend les systèmes chaotiques imprédictible a long terme.

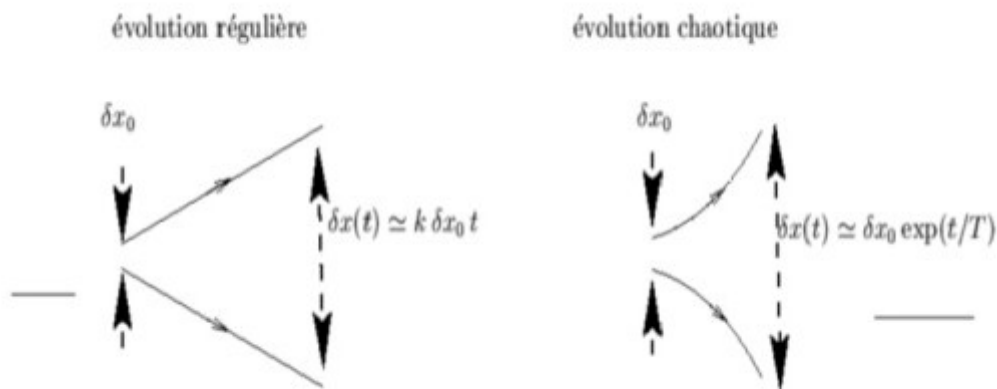


FIGURE 1.1 – Sensibilité aux conditions initiales

### 1.3.2 L'attracteur étrange

Le terme d'attracteur étrange a été utilisé pour la première fois par David Ruelle et Floris Takens en 1971, afin de décrire l'attracteur obtenu par une série de bifurcations d'un système modélisant le courant d'un liquide. En fait, avant l'article de Ruelle et Takens, des attracteurs avaient déjà fait l'objet de publications, mais ils sont restés ignorés. La structure géométrique des trajectoires générées par un système chaotique est extrêmement complexe à cause des étirements, repliements et contractions s'opérant dans une région bornée de l'espace d'état.

En effet cette appellation d'attracteur étrange fait appel à leurs propriétés peu communes, qui sont :

- Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent par s'écarter l'une de l'autre.
- La dimension  $d$  de l'attracteur est fractale (non entière) avec  $2 < d < n$ ,  $n$  est la dimension de l'espace des phases.
- Dans l'espace des phases, l'attracteur est de volume nul.
- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.

### 1.3.3 Les bifurcations

La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement de la valeur d'un des paramètres du système, qu'on appelle paramètre de bifurcation ou de contrôle. Par exemple déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur, ... La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

### 1.3.4 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre de contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Pour les systèmes continus, un certain type de discrétisation est demandée, en général à l'aide d'une section de Poincaré. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre .

## 1.4 Les quantificateur du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont non chaotiques, donc on a choisi de mettre en œuvre deux méthodes les plus couramment utilisées qui, d'ailleurs sont complémentaires : l'exposant de Lyapunov est la dimension fractale et autres quantificateurs comme l'entropie.

### 1.4.1 l'exposant de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux petites variations de leurs conditions initiales ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions.

Le mathématicien russe Alexander Lyapunov s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantité permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites

variations peuvent s'amplifier cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degrés de sensibilité d'un système dynamique et un mesure quantitative possible du chaos.

### 1.4.1.1 Exposant de Lyapunov pour une application unidimensionnelle

Considérons un système dynamique décrit par une application discrète  $f$  (c'est à dire  $x_n = f(x_{n-1})$ ) et soit  $x_0$  une condition initiale, perturbons  $x_0$  par l'adjoint d'une très petite erreur  $\varepsilon$  et on observe le comportement des trajectoires  $x_0$  et  $\bar{x}_n$  issues des deux conditions initiales  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$ .

Supposons qu'elles s'écartent en moyenne exponentiellement c'est à dire il existe un réel  $\lambda$  tel que après  $n$  itérations

on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \approx \varepsilon e^{n\lambda}$$

d'où

$$n\lambda \approx \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour  $\varepsilon \rightarrow 0$

on a :

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

finalement pour  $n \rightarrow +\infty$  on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

### 1.4.1.2 Exposant de Lyapunov pour une application multidimensionnelles

Dans ce paragraphe nous allons généraliser les concepts du paragraphe précédent a des trajectoires multidimensionnelles de type :

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, x_{n+1} = f(x_n),$$

comme précédemment on s'intéresse a :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \approx \varepsilon \times e^{n\lambda}$$

écrivons un développement en série limitée d'ordre 1 de  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x'_0$  :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\approx f^n(x_0) - f^n(x'_0) \\ &\approx \frac{f^n(x_0)}{dx} \times (x - x'_0) \\ &\approx J(x_0)J(x_1)\dots\dots J(x_n)(x_0 - x'_0) \\ &\approx \prod_{i=0}^{i=n} J(x_i)(x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

on note  $\prod_{i=0}^{i=n} J(x_i)$  par  $J^n(x_0)$ , ainsi :  $x_n - x'_n \approx J^n(x_0)(x - x'_0)$

ou  $J^n(x_0)$  représente la matrice jacobienne de  $f^n(\cdot)$  au point  $x_0$ . Il s'agit d'une matrice carrée  $P \times P$ , si elle est diagonalisable, alors il existe un matrice inversible  $P_p$  telle que :  $D_p^n = P_p^{-1} J^n P_p$  est une matrice diagonale des valeurs propres  $q_i(f^k(x_0)) (i = 1, \dots, p)$  de  $J^n$  on définit alors les p exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{j=n} \log q_i(f^k(x_0)).$$

## 1.4.2 Dimension Fractale

Cette méthode correspond à une mesure de la dimension de l'attracteur reconstruit du système étudié nous pouvons calculer la dimension de l'attracteur du système étudié et ainsi déterminer si oui ou non il est construit de manière fractale. Si, à l'issue du calcul, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange.

Plusieurs dimensions ont été proposées, on cite quelques une : il ya la dimension de Kolmogorov, dimension de Corrélacion et dimension de Lyapunov, il ya une différence légère entre chacune de ces dimension, mais elles caractérisent toutes l'attracteur étrange avec la dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes :

- $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$
- $A = 0 \Rightarrow d(A) = 0$
- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$

### 1.4.2.1 la dimension de Lyapunov :

Paramètre permettant de mesure la dimension du chaos. Généré la dimension de Lyapunov est plus ou moins grande : pour des système non retardés (dimension finie) tels que les système de Lorenz ou Rossler, la dimension de Lyapunov est au maximum égale au nombre de variables du système (dimension faible) alors que pour les systèmes à retard (dimension infinie) la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée[1].

Classant les exposants de Lyapunov  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

La dimension de Lyapunov  $D_L$  est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}.$$

Où j est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0.$$

## 1.5 L'attracteur de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard[2].

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et le célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$\sigma$  ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égal à 10 dans les simulations),  $b = \frac{8}{3}$  et  $r$  est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs du paramètres de contrôle.

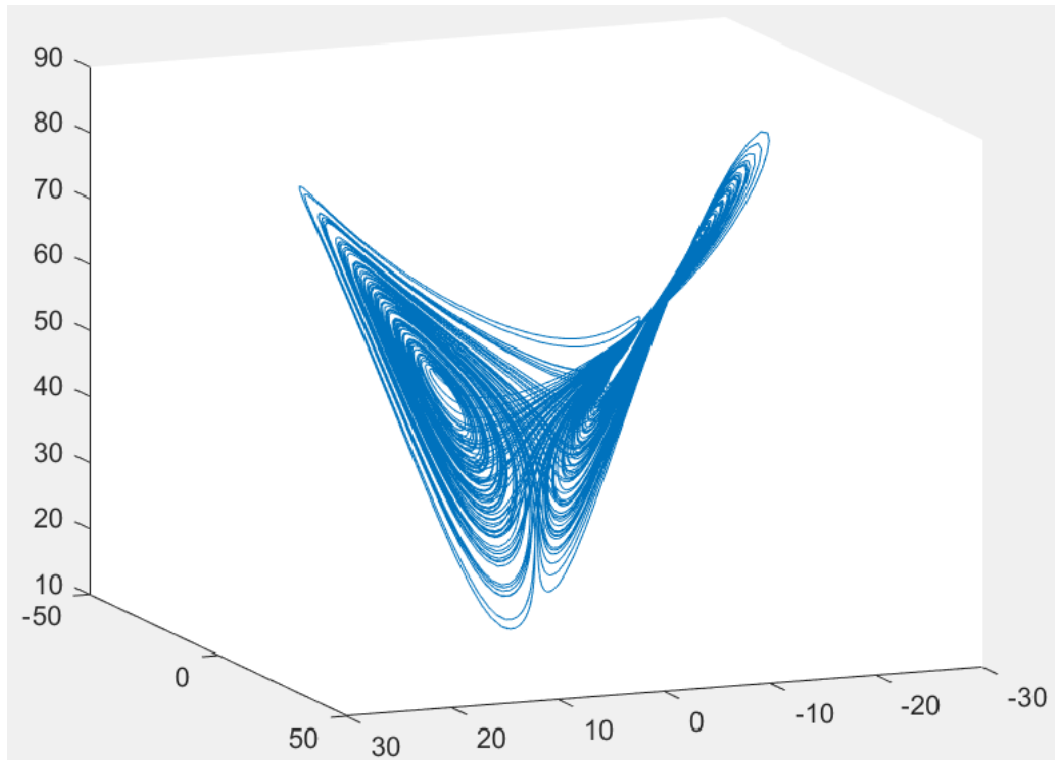


FIGURE 1.2 – l'attracteur de lorenz ( $R=50$ )

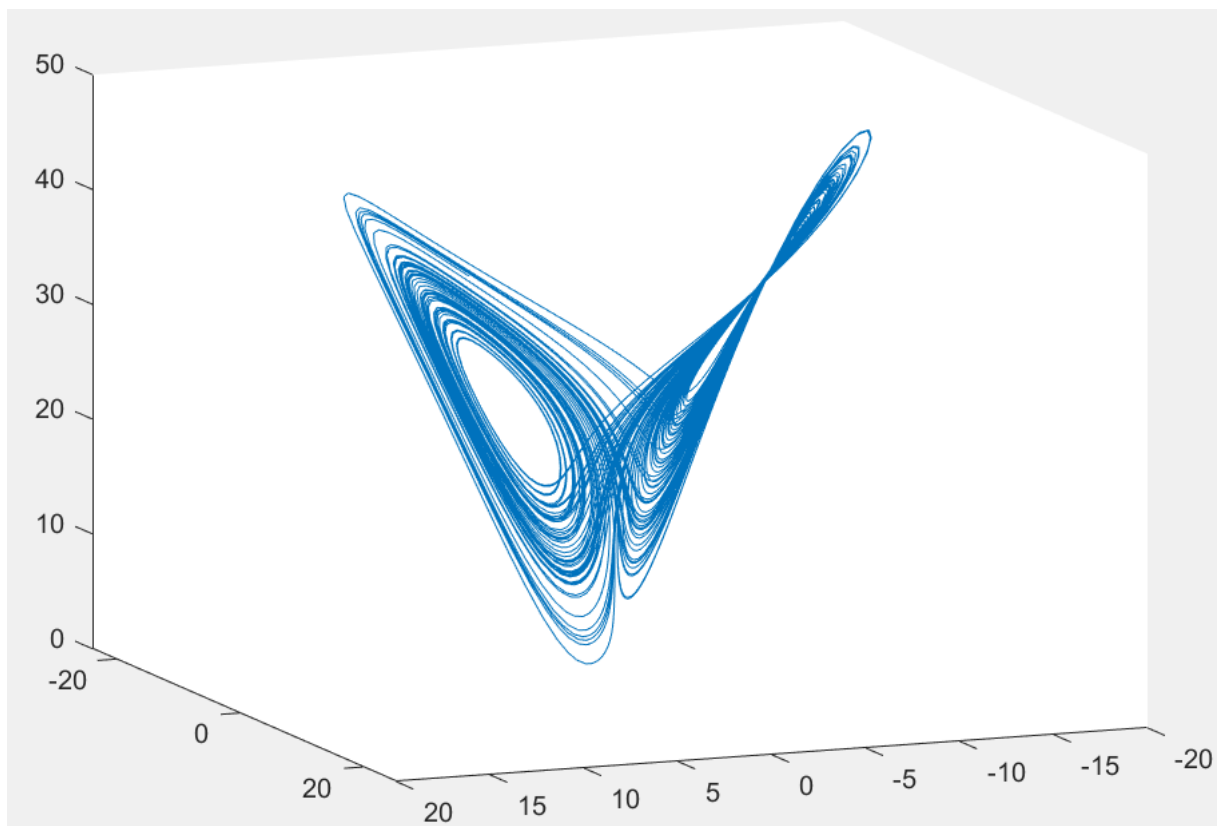


FIGURE 1.3 – l'attracteur de lorenz ( $R=28$ )

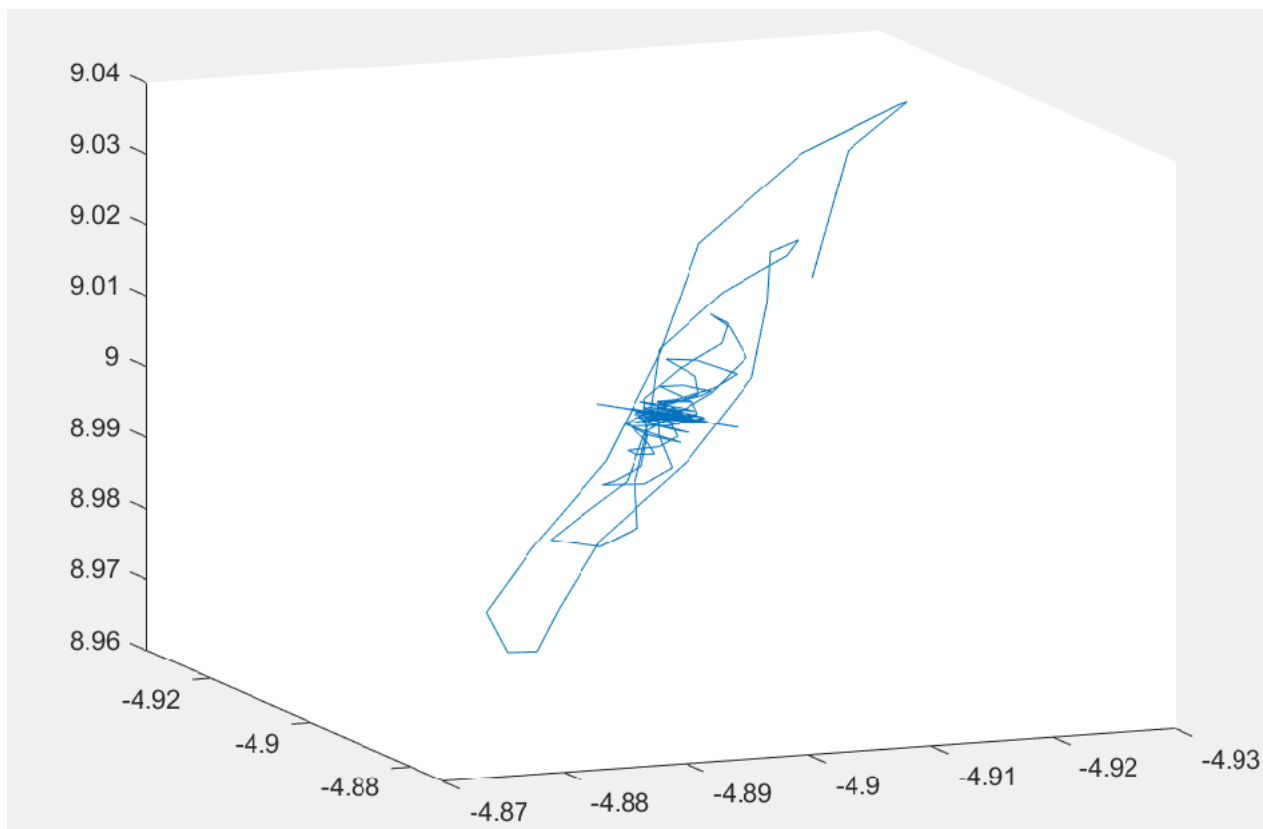


FIGURE 1.4 – l'attracteur de lorenz (R=10)

### 1.5.1 Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition tel que  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Un premier point fixe trivial est  $P_0 : x = y = z = 0, \forall r \geq 0$ .

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = y \dots (1) \\ rx - y - xz = 0 \dots (2) \\ xy - bz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{b}{xy} \dots (3). \end{cases}$$

(1) dans (3) donne  $x^2 = bz \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{bz}$

(1) dans (2) donne  $-xz + rz - z = 0 \Leftrightarrow z = r - 1$

les points fixes  $P_1$  et  $p_2$  sont donc

$$P_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (1.2)$$

Pour  $r = 1$ ,  $P_0 = P_1 = P_2$  donc pour  $r \in [0, 1]$ , il n'y a qu'un seul point fixe  $P_0$  et pour  $r > 1$ , il y a 3 points fixes  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .

### 1.5.2 Stabilité des points d'équilibres

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes pour le cas  $|r - 1| \ll 1$ .

La stabilité des points d'équilibres est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées  $\lambda_i$ , de la matrice jacobienne en ces points. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b. \end{pmatrix}$$

Pour  $P_0$  :

L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de paramètre  $b, \sigma$  et  $r$ . La matrice jacobienne est :

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b, \end{pmatrix}$$

et comme  $\det(J - \lambda I) = 0$ , nous avons l'équation caractéristique, suivante :

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0,$$

a pour racines :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \\ \lambda_3 = -b. \end{array} \right.$$

Tant que  $0 < r < 1$ , toutes les valeurs propres sont négatives : le point fixe, est stable. Quand  $r = 1$ , valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(\sigma + 1), \lambda_3 = -b \quad (1.3)$$

Nous verrons dans l'exemple que ce cas correspond à une bifurcations fourche.

Pour  $r > 1$ , on a  $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ . L'origine est devenue instable. Mais lorsque  $r > 1$ , deux nouveaux points fixes apparaissent que nous désignons par  $C, C''$  et dont les coordonnées sont :

$$x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, z^* = r-1, \quad (1.4)$$

La matrice jacobienne correspondant à ces points fixes s'écrit :

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0. \quad (1.5)$$

Les relations entre les racines et les coefficients de  $p(\lambda)$  s'écrivent :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + b + 1), \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = b(\sigma + r), \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2\sigma b(r-1). \quad (1.6)$$

Pour  $r > 1$  les coefficients de (1.5) sont tous positifs. On en déduit qu'une racine de (1.5) est réelle négative : notons  $\lambda_3$  cette racine. On n'applique la formule de Cardon, les deux autres racines sont réelles si :

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} \leq 0$$

Où  $p$  et  $q$  sont les coefficients de l'équation réduite :

$$u^3 + pu + q = 0$$

avec

$$u = \lambda + \frac{1}{3}(\sigma + b + 1),$$

$$p = b(r + \sigma) - \frac{1}{3}(\sigma + b + 1)^2,$$

$$q = \frac{2}{27} = (\sigma + b + 1)^3 - \frac{1}{3}b(r + \sigma)(\sigma + b + 1) + 2\sigma b(r - 1).$$

Pour les valeurs des paramètres  $\sigma = 10$  et  $b = \frac{8}{3}$ , la relation  $q_2 + \frac{4p^3}{27} = 0$  est obtenue pour  $r = r_1 = 1.34561\dots$  Les trois racines (1.5) de sont donc réelles si  $r < r_1$  et elles sont toutes négatives. Si  $r$  est légèrement plus grand que  $r_1$ , il y a une racine réelle négative  $\lambda_3$  et deux racines complexes conjuguées. Écrivons le polynôme caractéristique (1.5) sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_r + i\lambda_i), \lambda_{1,2} = \lambda_r \pm i\lambda_i$$

(1.6) s'écrit alors :

$$\lambda_3 + 2\lambda_r = -(\sigma + b + 1)$$

$$\lambda_r^2 + \lambda_i^2 + 2\lambda_3\lambda_r = b(\sigma + r)$$

$$\lambda_3(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) = -2\sigma b(r - 1)$$

Pour  $r > r_1$  et proche de  $r_1$ ,  $\lambda_r$  reste négatif et les points fixes  $C, C'$  sont restés stables. Si  $r$  continue à croître, on obtient  $\lambda_r = 0$  :

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

(c'est-à-dire  $r_c \approx 24.7368$  pour  $\sigma = 10$  et  $b = \frac{8}{3}$ )

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la théorie de chaos, où on a introduit une série de définitions sur le phénomène du chaos, ce dernier est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange, Enfin nous avons clôturé le chapitre par l'exposant de Lyapunov et sa dimension fractale.

## CHAPITRE 2

# DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES

### 2.1 Introduction

La dérivée et l'intégration fractionnaires sont des généralisations de notions de dérivée et d'intégration d'ordre entier. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaires sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que ces notions sont plus anciennes.

En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre  $n$ ,  $D^n = \frac{d^n y}{dx^n}$ , où  $n$  est entier positif.

### 2.2 Fonctions spécifiques pour la fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions très importantes dans la théorie du calcul fractionnaire.

#### 2.2.1 Fonction Gamma

**Définition 2.2.1.** Pour  $z \in \mathbb{C}$  telle que  $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

*Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe.*

**Exemples 2.2.1.** 1)  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ .

2)  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$  (**Posant le changement de variable  $t = s^2$** ).

**Remarque 2.2.1.** *Cette intégrale est convergente pour tous les réels positifs.*

**Proposition 2.2.1.** *pour tout  $x \in R_*^+$ ,  $t > 0$ ,  $n \in N$ , on :*

1.  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .
2.  $\Gamma(0) = \infty$ .
3.  $\Gamma(n + 1) = (n)!$  (**la généralisation de la factorielle**).
4.  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$ .
5.  $\Gamma(x + n + 1) = \prod_{i=0}^n (x + i) \Gamma(x)$ .

## 2.2.2 Fonction Bêta :

Classiquement, on introduit lors du calcul de l'intégrale fractionnaire d'une fonction puissance la fonction Bêta. Cette fonction est définie par l'intégrale.

**Définition 2.2.2.** *La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de premier espèce :*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}, \forall p, q > 0$$

**Théorème 2.2.1.** *La fonction Bêta est raccordée avec la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{p+q}, \forall p, q > 0$$

**Remarque 2.2.2.** *La fonction Bêta est symétrique*

$$B(p, q) = B(q, p), \forall p, q > 0.$$

### 2.2.3 La fonction Mittag-Leffler :

la fonction Mittag-Leffler est une fonction importante qu'on trouve largement utilisée dans le calcul fractionnaire et joue un rôle analogue dans la solution des équations aux dérivées fractionnaires.

**Définition 2.2.3.** *Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(z) > 0$ , définit la fonction Mittag-Leffler comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

En particulier, si  $\alpha = 1$  on trouve la fonction exponentielle :

$$E_1(z) = e^z,$$

cette fonction peut être généralisée pour deux paramétrés :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

## 2.3 Diverses approches de la dérivation fractionnaire

Nombreuses sont les définitions des dérivées fractionnaires. Nous présentons dans cette partie celles qui sont les plus populaires et les plus utilisées.

### 2.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

La dérivée d'ordre 1 d'une fonction  $f$  au point  $x$  est définie par :

$$D^1 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

On introduit l'opérateur de translation à gauche :  $(\tau f(x)) = f(x - h)$  et l'opérateur de taux d'accroissement d'Euler rétrograde  $E_h$  selon :

$$E_h = \frac{1}{h}(\tau_h - I),$$

et on déduit la dérivée seconde :

$$D^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (E_h)^2 f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)}{h^2},$$

et plus généralement en élevant à la puissance  $nE_h$  l'opérateur et en utilisant la formule de Newton :

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (E_h)^n f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k-1)}{k!} f(x)(x - kh)$$

Or la fonction Gamma, définit pour  $t > 0$  par l'intégrale généraliser  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$  peut être prolongée de façon unique sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_-$  tout en vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}_-, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

plus généralement on démontre aisément (par récurrence) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}_*, \forall m \in \mathbb{N} : \Gamma(x+m) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{m-1} (x+K).$$

Il est évident que la somme dans l'expression  $D^n f(t)$  de peut être étendue à tous les  $j$  entiers non négatif, puisque les termes sont nulles pour  $k \geq n$ . Ainsi, une généralisation naturelle permet de définir la dérivée d'ordre  $\alpha$ , pour  $\alpha > 0$  au sens de Grunwald notée  $D_{GL}^\alpha$  par :

$$D_{GL}^{(n)} f(x) = \lim (E_h)^\alpha f = \lim \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} f(x - kh).$$

**Remarque 2.3.1.** *L'opérateur  $D_{GL}^\alpha$  est linéaire.*

*La dérivée fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$  dépend de tout la passé, contrairement à la dérivée (d'ordre  $\alpha = 1$ ) qui ne dépend que de ce qui passe au voisinage immédiat*

du point en question. L'approche de Grünwald-Letnikov est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire connaissant  $f$  au voisinage de  $x$ .

**Remarque 2.3.2.** On observe que la dérivée, au sens de Grünwald-Letnikov, d'ordre entier  $n$  d'une fonction, est exactement la dérivée usuelle, d'ordre  $n$  de cette fonction. En effet

$$\begin{aligned} D_{GL}^{(n)}f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} f(t-jh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} f(t-jh) \right) = f^{(n)}(t), \end{aligned}$$

car  $\forall j \geq n+1, n-j+1 \in \mathbb{Z}_-$  et puisque  $\Gamma(x) \rightarrow \infty$  pour  $x \in \mathbb{Z}_-$ , alors les termes de cette somme s'annulent à partir de  $j \geq n+1$ .

Par suit  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$D_{GL}^{(n)}f(t) = D^{(n)}f(t).$$

### 2.3.2 Approche de Riemann Liouville

**Définition 2.3.1.** une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dit causale si elle vérifie :

$$\forall x \in ]-\infty, 0[, f(x) = 0.$$

**Définition 2.3.2.** On définit l'opérateur d'intégration :

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(x),$$

ou  $f$  est une fonction continue

**Proposition 2.3.1.** Pour les fonctions causales nulles à l'origine, l'inverse de l'opérateur de dérivation  $D^1 = \frac{d}{dt}$  est l'opérateur d'intégration  $I^1$

$$\forall t \geq 0, (D^1 I^1)f(t) = (I^1 D^1)f(t) = f(t) \iff f(0) = 0.$$

**preuve.** On a  $\forall t > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(x) dx = \frac{d}{dt} (F(t) - F(0)) = f(t)$$

Mais

$$\int_0^t f'(x) dx = f(t) - f(0)$$

Ce signifie que les deux opérateurs commutent si  $f$  est nulle à l'origine ■

**Remarque 2.3.3.** De même toujours pour des fonctions causales avec des conditions initiales nulles, l'inverse de la dérivation  $n^{ieme}$  est définie par le  $n^{ieme}$  itéré de l'opérateur  $I$  précédent.

On définit d'une façon analogue d'intégration d'ordre supérieure par :

$$I^\alpha f(t) = (Y_\alpha * f)(t), t \geq 0$$

ou

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t f(x) \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

Pour  $\alpha = 0$  on a :  $I^{(0)} = I$  (l'opérateur identité)

Pour  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ,  $I^\alpha$  coïncide avec l'intégrale répétée  $n$ -fois de la forme :

$$(I^\alpha f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

**exemple 2.1.** 1) Soit la fonction causale  $f(x) = cY(t)$  avec  $\alpha > 0$  On a

$$J^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t_s)^{\alpha-1} c ds$$

$$= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds$$

On pose le changement de variable  $u = t - s$

$$\begin{aligned} J^\alpha c &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} du \\ &= \frac{c}{\alpha\Gamma(\alpha)} u^\alpha \\ &= c \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= cY_{\alpha+1}(u) \end{aligned}$$

2) Soit la fonction causale  $f(x) = x^\beta Y(x)$  avec  $\alpha > 0$

$$J^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

on pose le changement de variable  $u = \frac{s}{x}$ , et on obtient

$$\begin{aligned}
 J^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - xu)^{\alpha-1} u^\beta x^\beta x du \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^\beta du \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta + 1) \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \Gamma(\beta + 1) \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \Gamma(\beta + 1) Y_{\alpha+\beta+1}
 \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.2.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions causales continues et  $\alpha, \beta > 0$

On a :

- 1)  $I^\alpha(I^\beta f) = I^{\alpha+\beta} f, \forall \alpha, \beta > 0$  (Loi de composition)
- 2)  $I^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 I^\alpha f(t) + c_2 I^\alpha g(t) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**preuve.** La preuve découle directement de la définition

$$\begin{aligned}
 I^\alpha(I^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - y)^{\alpha-1} I^\beta f(y) dy \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x - y)^{\alpha-1} \int_0^y (y - t)^{\beta-1} f(t) dt dy
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$I^\alpha(I^\beta f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(t) dt \int_t^x (x-y)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} dy$$

Par le changement de variable

$$y = t + (x-1)\tau, 0 \leq \tau \leq 1$$

Alors

$$dy = (x-t)d\tau$$

On obtient

$$I^\alpha(I^\beta f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt$$

$$= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt$$

$$I^\alpha(I^\beta f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x)$$

D'où le résultat

2) En effet

$$I^\alpha(c_1 f + c_2 g)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (c_1 f + c_2 g)(\tau) d\tau$$

$$= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau$$

$$= c_1 I^\alpha f(t) + c_2 I^\alpha g(t)$$

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer

les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications. ■

## 2.4 Dérivée au sens de Riemann-Liouville

**Définition 2.4.1.** *On définit la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction causale, avec  $n - 1 \leq \alpha < n$ , comme suit :*

$$D_{RL}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_{(t-x)^{n-1-\alpha}}^{\Gamma(n-\alpha)} f(x) dx$$

ou  $n = E(\alpha) + 1$ , avec  $E(\alpha)$  désigne la partie entière de  $\alpha$

**Remarque 2.4.1.** *En faisant appel au produit de convolution cette définition peut être énoncé ainsi*

$$D_{RL}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (Y_{n-\alpha} * f(t)), \forall t \geq 0$$

**Remarque 2.4.2.** *L'opérateur  $D_{RL}^\alpha$  est linéaire.*

## 2.5 Approche de Caputo

Nous signalons que, concernant la dérivée au sens de Riemann-Liouville la dérivée d'ordre  $\alpha$  pour  $0 < \alpha < 1$  d'une constante n'est pas nulle. Cependant, la dérivée au sens de Caputo est définie pour récupérer cette propriété. Il faut surtout remarquer la différence entre les deux approches et appliquer éventuellement le théorème de la dérivation sous le signe intégrale. La définition de la dérivée au sens de Caputo est la suivante :

**Définition 2.5.1.** *Soient  $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$  vérifiant  $n - 1 \leq \alpha < n$  ( $n = E(\alpha) + 1$ ),  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction causale  $n - 1$  fois continûment dérivable sur  $[0, +\infty]$ , alors on définit sa dérivée au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  comme suit :*

$$D_C^{(\alpha)} = D_{RL}^\alpha (f(t) - T_{n-1}[f, 0])$$

où  $T_{n-1}[f, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$  qui est développement de Taylor de  $f$  en  $t_0 = 0$  à l'ordre  $n - 1$

**Définition 2.5.2.** *En particulier si  $f$  est  $n$  fois continûment dérivable alors cette définition peut être énoncée comme suit :*

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f^{(n)}(x) dx$$

**Remarque 2.5.1.** *En terme de produit convolution on a :*

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = (Y_{n-\alpha} * f^{(n)})(t), \forall t \geq 0$$

*En particulier pour  $0 < \alpha < 1$  la dérivée au sens de Caputo se réduit à :*

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = (Y_{1-\alpha} * f')(t), \forall t \geq 0$$

**exemple 2.2.** *La dérivée au sens Riemann, d'ordre  $0 < \alpha < 1$ ; d'une fonction causale constante est identiquement nulle, en effet*

$$D_C^{(\alpha)} = \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx}(c) dx = 0$$

## 2.6 Propriétés et analyse comparative

On rappelle la formule suivante, établit précédemment, dans le cas où  $f \in C^1[0, +\infty[$

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = (Y_{1-\alpha} * f')(t) + Y_{1-\alpha}(t)f(0) \forall \alpha \in ]0, 1[$$

Celle-ci qui s'exprime aussi sous la forme  $f \in C^1[0, +\infty[$

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = D_C^\alpha f(t) + Y_{1-\alpha}(t)f(0) \forall \alpha \in ]0, 1[$$

cette relation conduit au résultat suivant :

**Proposition 2.6.1.** *Soit  $f : R \rightarrow R$  une fonction causale et continue sur  $]0, +\infty[$  ET SOIT  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors*

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = D_C^\alpha f(t) \iff f(0) = 0$$

**preuve.**Évidente, d'après (\*)

Par ailleurs, dans le but d'établir un résultat similaire pour  $\alpha > 0$  quelconque, on applique le résultat de la dérivation sous le signe intégral  $E(\alpha) + 1$  fois. Plus généralement nous avons le résultat suivant : ■

**Lemme 2.1.** *Soit  $f$  une fonction causale et  $n - 1$  fois continûment dérivable sur  $[0, +\infty[$  tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$  on a*

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t) = D_C^{(\alpha)} + \sum_{k=0}^{n-1} Y_{k+1-\alpha}(t)f^{(k)}(0).$$

**preuve.**En effet, on a

$$D_C^{(\alpha)}f(t) = D_{RL}^{(\alpha)}[f(t) - T_{n-1}[y, 0]].$$

$$D_C^{(\alpha)}f(t) = D_{RL}^{(\alpha)}f(t) - D_{RL}^{(\alpha)}T_{n-1}[y, 0].$$

On a

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t)T_{n-1}[y, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} D_{RL}^{(\alpha)}(t^k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

Donc

$$D_C^{(\alpha)}f(t) = D_{RL}^{(\alpha)}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)Y_{k-\alpha+1}(t).$$

■

**Proposition 2.6.2.** *Si  $f$  est une fonction causale  $n$  fois dérivable alors, sa dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $n$  ; coïncide avec sa dérivée classique, du même ordre.*

*i.e*

$$D_{RL}^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

**preuve.**Il suffit de remplacer dans l'expression de dérivée au sens de Riemann-Liouville, en effet

$$D_{RL}^{(n)}f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_0^t \frac{(t-x)^{n-n}}{\Gamma(n+1-n)} f(x)dx = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_0^t f(x)dx = f^{(n)}(t).$$

■

## 2.7 Exemple de fonction non-causales

Pour les fonctions dont le support n'est pas réduit à  $\mathbb{R}_+$ , il est intéressant de modifier la définition de R-L selon ce support, en modifiant la borne inférieure dans la définition de l'opérateur de convolution. Pour un nombre réel ou égal à  $-\infty$ .

Fonction  $f(t) = \exp(kt)$  la fonction exponentielle  $f(t) = \exp(kt)$  Pour  $k > 0$ , et  $\alpha > 0$ .

En utilisant la définition de l'intégrale de R-L avec  $a = -\infty$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \exp(k(t-s)) ds \\ &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \exp(-ks) ds. \end{aligned}$$

Par changement de variable  $x = ks$ , on déduit que, par suite :

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\alpha-1} \exp(-x) \frac{dx}{k} \\ &= k^{-\alpha} \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx \\ &= k^{-\alpha} \frac{\exp(kt)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\ a &= k^{-\alpha} \exp(kt). \end{aligned}$$

Donc

$$I_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) = k^{-\alpha} \exp(kt).$$

On applique dérivée au sens de R-L on obtient :

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) &= \frac{d^n}{dt^n} I_{-\infty}^{n-\alpha} \exp(kt) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (k^{\alpha-n} \exp(kt)) \\ &= k^{\alpha-n} k^n \exp(kt) \\ &= k^{\alpha} \exp(kt). \end{aligned}$$

Donc

$$D_{-\infty}^{\alpha} \exp(kt) = k^{\alpha} \exp(kt).$$

Fonctions  $\sin bx$  et  $\cos bx$  les dérivés fractionnaires de ces fonctions trigonométriques seront déduites à l'aide de la formule précédente et des autres concepts de l'analyse complexe. On peut généraliser le dernier résultat pour  $k = ib$

$$D_{-\infty}^{\alpha} e^{ibt} = (ib)^{\alpha} e^{ibt} = i^{\alpha} b^{\alpha} e^{ibt},$$

selon la formule de Moivre, on a

$$i^{\alpha} = \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\alpha} = \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Et avec la formule d'Euler, dans (1)

$$D_{-\infty}^{\alpha} e^{ibt} = b^{\alpha} \left( \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) (\cos bt + i \sin bt).$$

Comme  $D_{-\infty}^{\alpha}$  est linéaire, alors

$$D_{-\infty}^{\alpha} e^{ibt} = D_{-\infty}^{\alpha} \cos bt + i D_{-\infty}^{\alpha} \sin bt.$$

De (3) et (4), on trouve

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^{\alpha} \cos bt + i D_{-\infty}^{\alpha} \sin bt &= b^{\alpha} \left( \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) (\cos bt + i \sin bt) \\ &= b^{\alpha} \left( \cos \frac{\alpha\pi}{2} \cos bt - \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sin bt \right) \\ &\quad + i b^{\alpha} \left( \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos bt + \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin bt \right) \\ &= b^{\alpha} \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} + bt \right) + i b^{\alpha} \sin \left( \frac{\alpha\pi}{2} + bt \right). \end{aligned}$$

Par application des deux membres on conclut que :

$$D_{-\infty}^{\alpha} \cos bt = b^{\alpha} \cos \left( \frac{\alpha\pi}{2} + bt \right).$$

$$D_{-\infty}^{\alpha} \sin bt = b^{\alpha} \sin \left( \frac{\alpha\pi}{2} + bt \right).$$

## 2.8 Transformation de dérivées fractionnaire

### 2.8.1 Transformée de Laplace

**Définition 2.8.1.** La transformée de Laplace d'une fonction  $f$  de la variable réelle  $t \in R_+$  est définie par :

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, s \in R(*).$$

$f(t)$  est appelée l'originale  $\mathcal{L}f(s)$  la transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (\*) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel  $a$ , c'est-à-dire : il existe  $M > 0$  tel que :

$$|f(t)| \leq Me^{at} \text{ pour } t > T.$$

Dans ce cas la transformée de Laplace existe pour  $\text{Re}(s) > a$

**exemple 2.3.**

$$\mathcal{L}(t^k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

**Proposition 2.8.1.** La transformée de Laplace est linéaire i.e.

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \left( \sum_{i=0}^n c_i f_i(t) \right)(s) = \sum_{i=0}^n c_i \mathcal{L}f_i(s).$$

**Définition 2.8.2.** Lorsque le produit  $f(x-t)g(t)$  est intégrable sur tout  $[0, x]$  de  $R_+$ , le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

**Proposition 2.8.2.** Si les transformées de Laplace de  $f$  et  $g$  existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s).$$

**Proposition 2.8.3.** La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  de la

fonction  $f$  est donnée par :

$$(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+) = s^n f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{(n-k-1)}(0^+).$$

**Lemme 2.2.** Soit  $\alpha > 0$ , et  $f$  une fonction causale continue, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L est formulée comme suit :

$$(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} f(s).$$

**preuve.** On peut écrire  $I^\alpha f$  comme une convolution de deux fonctions  $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$  et  $f(t)$

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t).$$

Alors

$$\mathcal{L}[I^\alpha f](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) \cdot \mathcal{L}f(s).$$

Comme

$$\mathcal{L}[x^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}.$$

■

**Théorème 2.8.1.** Soient  $f$  une fonction causale continue, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de  $f$  est :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0},$$

avec

$$n-1 < \alpha < n$$

**preuve.** Par définition, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D^\alpha f)(s) &= \mathcal{L}(D^n I^{n-\alpha} f)(s) \\ &= s^n \mathcal{L}(I^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (I^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (I^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0}.\end{aligned}$$

■

**Théorème 2.8.2.** Soient  $f$  une fonction causale continue, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de  $f$  est :

$$\mathcal{L}(D_C^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+).$$

**preuve.** Pour  $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*, x > 0$  alors :

$$D_C^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(x).$$

Donc d'après

$$\begin{aligned}D_C^\alpha f(x) &= (I^{n-\alpha} f^{(n)})(s) \\ &= s^{-n+\alpha} (\mathcal{L}f^{(n)})(s),\end{aligned}$$

et d'après

$$\mathcal{L}(D_C^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+).$$

■

## 2.8.2 Transformée de Fourier

Soit  $f$  une fonction causale localement intégrable et absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.8.3.** On définit la transformée de Fourier de  $f$  la fonction notée  $\mathcal{F}[f]$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par :

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx.$$

### 2.8.3 Transformée de Fourier du convolution

**Proposition 2.8.4.** *Si les transformées de Fourier existent, alors la transformée de Fourier du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{F}[f * g(x)] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

**Proposition 2.8.5.** *La transformée de Fourier de la dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  de la fonction  $f$  est donnée par :*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (-i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$$

**Proposition 2.8.6.** *Soit  $\alpha < 0$  une fonction  $f$  causale, alors la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de R-L est formulée comme suit :*

$$(\mathcal{F}I^\alpha f)(x) = (-i\xi)^{-\alpha} (\mathcal{F})(\xi).$$

**preuve.** l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  est définie par la convolution :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x),$$

et la transformée de Fourier du fonction  $x^{\alpha-1}$  et donnée par :

$$\mathcal{F}[x^{\alpha-1}](\xi) = \Gamma(\alpha) (-i\xi)^{-\alpha}.$$

Alors

$$(\mathcal{F}I^\alpha f)(x) = (-i\xi)^{-\alpha} (\mathcal{F})(\xi).$$

■

**Proposition 2.8.7.** *Soit  $\alpha > 0$  une fonction  $f$  causale, alors la transformée de Fourier de dérivée fractionnaire de R-L est formulée comme suit :*

$$\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi).$$

**preuve.** En effet :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) &= \mathcal{F}[D^n I^{n-\alpha} f](\xi) \\ &= (-i\xi)^n \mathcal{F}[I^{n-\alpha} f](\xi) \\ &= (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f](\xi).\end{aligned}$$

■

**Remarque 2.8.1.** *Le même résultat avec la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.*

## CHAPITRE 3

# LES SYSTÈMES CHAOTIQUE À DÉRIVÉES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

### 3.1 introduction

Dans ce chapitre, une étude des systèmes chaotiques fractionnaires sera présentée. Les modèles mathématiques de ces systèmes dynamiques non linéaires contiennent des dérivées fractionnaires. Dans de tels systèmes chaotiques fractionnaires, on observe également les mêmes phénomènes liés aux attracteurs étranges que pour les systèmes chaotiques à dérivée entière.

### 3.2 Équations Fractionnaires

Avant de commencer laissez nous introduire la définition suivante d'une Équation différentielle fractionnaire.

- "L'équation différentielle fractionnaire" est une équation qui contient des dérivées fractionnaires.

On se restreint dans cette section aux Équations d'un seul terme de dérivation de la forme :

$$D_{a^+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)).$$

### 3.2.1 Problème de Cauchy

Soit l'équation différentielle fractionnaire :

$$D_{a^+}^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.1)$$

où :  $(n - 1) < \alpha \leq n$  et  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\alpha$ -dérivable et  $f(x(t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  et  $D_{a^+}^\alpha$  désigne la dérivée au sens de Riemann-Liouville.

**Définition 3.2.1.** *On appelle donnée de Cauchy pour l'équation (1.1) une condition*

$$D_{a^+}^{\alpha-k} x(a^+) = b_k, b_k \in \mathbb{R} (k = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}), \quad (3.2)$$

où  $b_k \in \mathbb{R}^n$  et  $a_+ \in \mathbb{R}$

Un problème de Cauchy fractionnaire sera la donnée d'une équation fractionnaire et d'une donnée de Cauchy.

## 3.3 Équation différentielle fractionnaire linéaire

Considérons le problème aux valeurs initiales suivantes :

$$D_a^\alpha x(t) = f(t), a < t < T < \infty) [D_a^{\alpha-1} x(t)]_{t=0} = b \quad (3.3)$$

où  $D_a^\alpha x(t)$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville tels que  $0 < \alpha \leq 1$  et  $f(t) \in L_1(a, T)$ , c'est-à-dire :  $\int_a^T |f(t)| dt < \infty$ .

**Théorème 3.3.1.** *Si  $f(t) \in L_1(a, T)$ , alors le problème (1.1) admet un unique solution  $x(t) \in L_1(a, T)$ .*

**preuve.** Voir [3] ■

### 3.3.1 Équation différentielle fractionnaire de forme plus générale

En plus des Équations différentielles fractionnaires linéaires, les équations non linéaires apparaissent aussi dans les applications surtout dans les systèmes qu'on va

étudier prochainement. On note que les résultats ci-dessous peuvent les utiliser pour toutes les mutations de différenciation fractionnaire.

Considérons donc le problème à valeur initiale suivante :

$$D_a^\alpha x(t) = f(t)[D_a^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b, \quad (3.4)$$

où  $0 < \alpha \leq 1$ .

Nous supposons que  $f(t, x(t))$  est définie dans un domaine  $G$  du plan  $(t, x)$ , et nous définissons une région  $R(h, K) \in G$  comme étant l'ensemble des points  $(t, x) \in G$ , qui vérifient les inégalités suivantes :

$$|t^{1-\alpha}x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}b| \leq K, 0 < t < h. \quad (3.5)$$

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $f(t, x)$  une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine  $G$ , la condition de Lipschitz par rapport à  $x$ , c'est à dire :*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq A|x_1 - x_2|,$$

et telle que :  $|f(t, x)| \leq M < \infty$  pour tout  $(t, x) \in G$ .

Soit aussi

$$K \geq \frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Alors il existe, dans la région  $R(h, K)$ , une unique solution continue  $x(t)$  du problème (1,2)

**Lemme 3.1.** *Soit l'équation*

$$D_a^\alpha x(t) = f(t)[D_a^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} = b, \quad (3.6)$$

où  $D^c$  désigne la dérivée fractionnaire de Caputo et  $-1 \leq \alpha < n$ . Si  $f$  est continue, alors l'équation (3,6) équivalente à l'équation intégrale de Voltera suivante :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (3.7)$$

Dans la cas où  $0 < \alpha < 1$  l'équation (3,7) devient

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (3.8)$$

### 3.4 Les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

Au de but on introduit la définition suivante :

- "Le système fractionnaire" est un système qui est décrit par des équations différentielles fractionnaires.

Soit le système différentiel suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)). \quad (3.9)$$

Où  $0 < \alpha \leq 1$  et  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$  et  $f : R \times R^n \rightarrow R^n$  une fonction continue et  $D^\alpha x(t)$  désigne la dérivée de Caputo.

#### 3.4.1 Points d'équilibre et région de stabilité

Prenons le système (3.9) avec condition initiale  $x(0) = x_0$ .

Pour évaluer les points d'équilibre du système(3.9), il suffit à résoudre l'équation

$$D^\alpha x(t) = 0.$$

Si  $x^*$  est une solution de l'équation, alors :

$$f(x^*) = 0.$$

Pour

$$x(t) = x^* + \varepsilon(t),$$

alors

$$D^\alpha(x^* + \varepsilon) = f(x^* + \varepsilon).$$

Avec la linéarité de dérivation fractionnaire, le résultat précédent peut réécrire

$$D^\alpha(\varepsilon(t)) = f(x^* + \varepsilon).$$

En utilisant le développement (généralisé aux dérivées fractionnaires) de Taylor de la fonction  $f$  :

$$f(x^* + \varepsilon) \simeq f'(x^*)\varepsilon.$$

La où  $f(x^*) = 0$ , et puis

$$D^\alpha \varepsilon(t) \simeq f'(x^*)\varepsilon(t), t > 0,$$

et

$$\varepsilon(0) = x_0 - x^*.$$

### 3.4.2 Stabilité des systèmes linéaires autonomes

un système linéaires à temps invariant et a dérivées d'ordre entier est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

**Théorème 3.4.1.** *soit le système autonome suivant :*

$$D^\alpha x(t) = Ax(t)x(t_0) = x_0, \quad (3.10)$$

*telles que  $0 < \alpha < 1$  et  $x \in R^n$  et  $A \in R^n \times R^n$ .*

*1/ Le système (3.10) est asymptotiquement stable, si seulement si,  $|\arg(\lambda)| > \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$ , pour tout  $\lambda$  : valeurs propres de la matrice  $A$ . Aussi, le vecteur d'état  $x(t)$  tends vers 0 et vérifie la condition suivante :  $\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}, t > 0, \alpha > 0$ .*

*2/ Le système (3.10) est stable, si seulement si, la condition  $|\arg(\lambda)| \geq \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$  est*

vérifie pour toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$ , et les valeurs propres critiques satisfont à  $|\arg(\lambda)| = \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$ .

**Remarque 3.4.1.** Dans le cas du système non linéaire :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)).$$

Où  $0 < \alpha < 1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

On linéarise le système (autour du point d'équilibre) qui peut s'écrire sous la forme :

$$D^\alpha x = Ax,$$

avec  $A$  est la matrice Jacobienne de  $f$  et puis on applique le théorème précédent.

- Dans le cas des systèmes dynamique non linéaires de dimension 3, un point d'équilibre "selle" est un point sur lequel le modèle linéaire l'équivalent a au moins une valeur propre dans la région stable et une valeur propre dans la région instable. Dans le même système, un point "Selle" est appelé point "selle" d'index 1 si l'une des valeurs propres est instable et les autres sont stables. Aussi, un point "selle" d'index 2 est un point "selle" avec une valeur propre stable et deux valeurs propres instables.

Considérons le système fractionnaire en trois dimensions :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)).$$

Où  $0 < \alpha < 1$  et  $x \in \mathbb{R}^3$ . Donc il ne dispose que de trois points d'équilibre. Par conséquent, si ce système a un double attracteur de défilement, l'un des points d'équilibre est un point "selle" d'index 1 et les autres points sont d'index 2. Supposons que  $\lambda$  est une valeur propre instable de l'un des points "selle" d'index 2, une condition nécessaire pour que le système fractionnaire de demeurer chaotique est de maintien de la valeur propre  $\lambda$  dans la région instable. Cela signifie :

$$\tan(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}) > \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \iff \alpha > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)}). \quad (3.11)$$

### 3.5 Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz

Rappelons que le critère de Routh-Hurwitz est un critère algébrique qui permet d'étudier la stabilité d'un système sans avoir les pôles, en [4] une généralisation est faite pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire, nous donnons ici un résumé pour un système en trois dimensions comme le suivant :

Soit  $(x_e, y_e, z_e)$  un point d'équilibre du système d'ordre  $f$  en trois dimensions suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt} = f(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha y}{dt} = g(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha z}{dt} = h(x, y, z). \end{cases}$$

Où  $\alpha \in (0, 1]$ .

L'équation de valeurs propres du point d'équilibre  $(x_e, y_e, z_e)$  est donnée par le polynôme suivant :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0,$$

et son déterminant  $D(p)$  est donné par :

$$D(p) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2.$$

Sachant que le point d'équilibre  $(x_e, y_e, z_e)$  est localement asymptotiquement stable si toutes les racines satisfont à la condition  $|\arg(\lambda)| > \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$ .

Il est facile de montrer que la zone de stabilité dans le cas d'ordre fractionnaire est plus grande que celle de la région de stabilité du cas d'ordre entier. En utilisant les résultats de[5] nous avons les conditions de Routh-Hurwitz suivantes :

- Si  $D(p) > 0$ , alors la condition nécessaire et suffisante pour que le point  $(x_e, y_e, z_e)$  soit localement asymptotiquement stable :  $a_1 > 0, a_2 > 0$  et  $a_1 \times a_2 - a_3 > 0$ .
- Si  $D(p) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$  et  $a_3 > 0$  et  $a_1 \times a_2 - a_3 = 0$ , alors  $(x_e, y_e, z_e)$  est localement asymptotiquement stable pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ .
- La condition nécessaire pour que le point  $(x_e, y_e, z_e)$ , soit localement asymp-

totiquement stable est :  $a_3 > 0$ .

### 3.6 Stabilité des systèmes non autonomes (version fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov)

La stabilité de Lyapunov constitue un outil important pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires. En fait, les problèmes de stabilité ont été largement couverts par Lyapunov et il ya plusieurs tests associés à ce nom. Nous considérons d'abord ce que l'on appelle souvent, méthode directe de Lyapunov qui consiste à trouver une fonction candidate de Lyapunov pour un système non linéaire donné. Si une telle fonction existe, le système est stable. Dans cette thèse, nous étendons la méthode directe de Lyapunov au cas d'ordre fractionnaire. Autrement dit, les systèmes dynamiques non linéaires se pourraient symboliser l'ordre fractionnaire ainsi que l'évolution de la fonction de Lyapunov pourrait être l'ordre du temps fractionnaire.

Définissons d'abord la stabilité dans le sens de Mittag-Leffler, pour cela nous considérons le système fractionnaire, au sens de Caputo, non autonome suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad x(0) = x_0, \quad (3.12)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$  et  $f : [t_0, +\infty] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue par morceaux en  $t$  et localement Lipschitz en  $x$ ,  $x = 0$  est le point d'équilibre du système (3,12)

**Théorème 3.6.1** (5).  *$x = 0$  est un point d'équilibre du système (3,12),  $f$  et Lipschitzienne par rapport à  $x$ , avec la constante de Lipschitz ( $L$ ) et continue par morceaux par rapport à  $t$ , alors la solution de (3,12) satisfait*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| E_\alpha(L(t - t_0)^\alpha).$$

Où  $\alpha \in (0, 1)$   $E_\alpha$  est la fonction Mittag-Leffler.

**Remarque 3.6.1.** *Si  $\alpha = 1$ , il s'ensuit que*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{L(t-t_0)}.$$

### 3.6.1 La stabilité généralisée au sens de Mittag-Leffler

Soit le système fractionnaire

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)). \quad (3.13)$$

Où  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $D^\alpha$  peut désigner à la fois les opérateurs fractionnaires au sens de Caputo ou de Riemann Liouville.

**Définition 3.6.1 (5).** *(stabilité de Mittag-Leffler au sens généralisée)*

*La solution dite stable au sens généralisée de Mittag-Leffler si :*

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)](t - t_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(t - t_0)^\alpha)^b\}, \quad (3.14)$$

où  $t_0$  le temps initial,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $-\alpha < \gamma \leq 1$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $m(0) = 0$ ,  $m(x) \geq 0$  et  $m(x)$  est localement Lipschitzienne par rapport à  $x \in B \in \mathbb{R}^n$  avec la constante de Lipschitz  $m_0$ .

**Remarque 3.6.2.** *La stabilité Mittag-Leffler et la stabilité Mittag-Leffler généralisée impliquent la stabilité asymptotique.*

*Pour  $\lambda = 0$ , il résulte que :*

$$\|x(t)\| \leq \left[ \frac{m[x(t_0)]}{\gamma(1-\gamma)} \right]^b (t - t_0)^{-\gamma b}.$$

*Ce qui implique que la stabilité asymptotique est un cas particulier de la stabilité au sens de Mittag-Leffler.*

## 3.7 Application sur la régularisation insuline-glucose

De nombreux chercheurs ont étudié les interactions entre le glucose et l'insuline, à l'aide de modèles mathématiques, qui sont de puissants outils pour comprendre

ce type d'interaction. Leurs découvertes ont contribué au développement de perspectives scientifiques et ont permis d'économiser du temps et de l'argent.

Les recherches indiquent que le nombre de patients diabétiques augmente dans le monde. De 2012 à 2015, près de 1,5 à 5,0 millions de personnes meurent chaque année du diabète. En 2015, on estimait qu'environne 415 millions de personnes, soit environ 8,3 de la population adulte du monde, souffrent de diabète. Le diabète peut entraîner des complications à long terme, notamment des maladies cardiaques et une insuffisance rénale. Certains des éléments qui peuvent causer ce comportement irrégulier dans le corps sont les suivants : Facteurs génétiques qui peuvent fertiliser le corps de sorte que d'autres facteurs de la maladie pourraient perturber le système métabolique Sur-poids causé par la malnutrition comme conséquence du mode de vie moderne, Effets secondaires de certains médicaments comme les glucocorticoïdes et l'hormone thyroïdienne, progression d'autres maladies, et de nombreux autres éléments qui ne peuvent pas être pleinement discutés.

Les scientifiques peuvent développer des procédures méditatives en comprenant les causes d'une maladie. L'insuline est une hormone peptidique qui contrôle la glycémie. Dans le diabète, l'insuline n'est pas sécrétée ou les cellules du corps ignorent sa présence. Le diabète sucré est classé en trois types. Dans le premier type (DM de type 1), l'insuline n'est pas suffisamment produite par le pancréas, elle ne peut donc pas contrôler le taux de sucre dans le sang. Chez la plupart des patients atteints de ce type de diabète, les cellules libérant de l'insuline, appelées cellules bêta, sont interceptées et tuées par le système immunitaire de l'organisme. Cinq à dix pour cent des patients diabétiques souffrent de ce type. Le deuxième type de diabète (DM de type 2) survient lorsque le corps ne peut pas utiliser l'insuline de la bonne manière, en raison d'un sur-poids et d'un manque d'exercice. Ce type représente 90 à 95 des diabétiques. Le troisième type de diabète, à savoir le diabète gestationnel, est une situation temporaire qui survient pendant la grossesse, à mesure que le taux de sucre dans le sang augmente. Elle touche environ deux à quatre pour cent de toutes les femmes enceintes. D'autres éléments comme le stress, la colère et les habitudes alimentaires peuvent affecter les niveaux de glucose et d'insuline dans le sang.

De nombreux modèles mathématiques du métabolisme du glucose ont été pro-

posés[6], et ils varient en complexité à partir d'un ensemble de deux équations différentielles linéaires ordinaires couplés du premier ordre avec des coefficients constants à un simulation analogique élaborée. Néanmoins, un modèle simple de type Volterra[7] semble avoir été négligé et, compte tenu des intérêt pour le système glucose-insuline, il est peut-être intéressant d'analyser mathématiquement la structure de ce modèle particulier de Volterra.

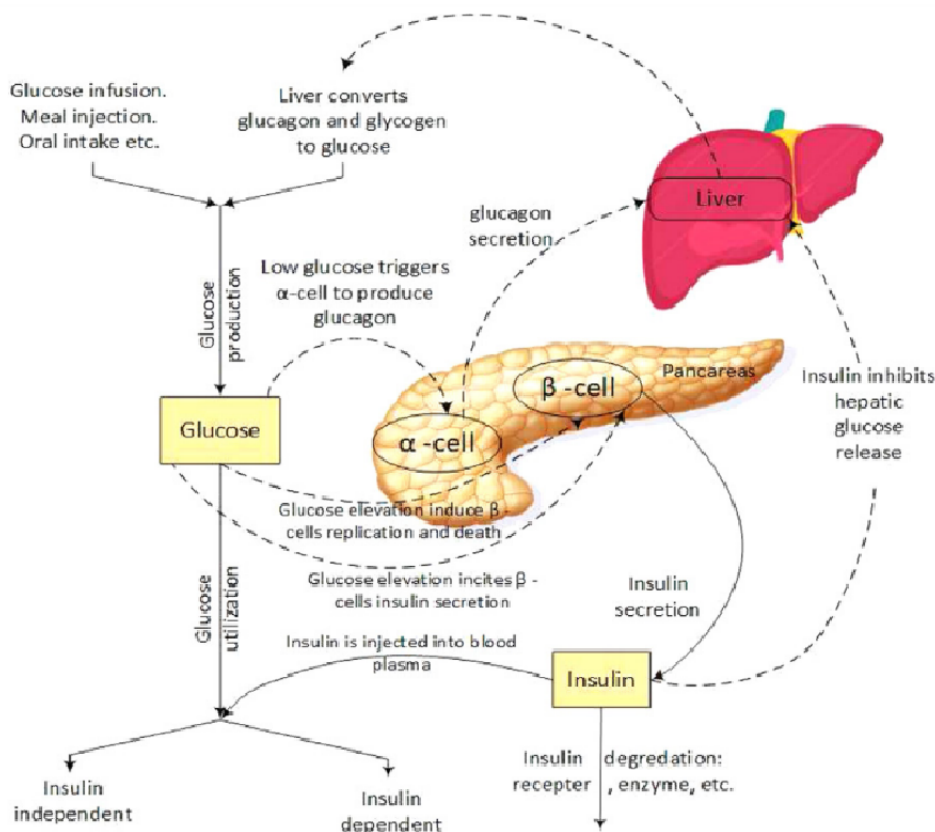


FIGURE 3.1 – Schéma des principales composantes du GIRM

### 3.7.1 Préliminaires

Il est connu que les FoDs ont de nombreuses définitions. L'une des plus la plus connue est la définition GL qui est donnée comme suit[8]

$${}_{\alpha}^{GL}D_t^q = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-1}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh), \quad (3.15)$$

où  $q \in (0, 1)$ ,  $t > 0$  est la taille du pas de temps d'une grille uniforme sur l'axe des  $x$  en regardant à  $a$ ,  $f$  est une fonction continue, et où :

$$\binom{q}{j} = \frac{q!}{j!(q-j)!} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)}.$$

### Tableau 1

Résumé des paramètres trouvés dans le système

Paramètre	Signification
$-a_1$	Indique la diminution normale de la concentration d'insuline en l'absence de glucose.
$a_2$	Indicates the rate of propagation of insulin with existence of glucose.
$a_3, a_4$	Indiquez l'augmentation du taux d'insuline une fois que la concentration de glucose est élevée.
$a_5, a_6, a_7$	Indiquez le taux d'augmentation du taux d'insuline qui est excrété indépendamment, à partir de différents composants, par les cellules $\beta$ .
$-a_8$	Indique l'effet de l'insuline sur le glucose.
$a_9, a_{10}$	Indiquez le taux de diminution du glucose en réponse à l'excrétion d'insuline.
$a_{11}$	Indicates the normal rising of glucose without insulin.
$a_{12}, a_{13}, a_{14}$	Indiquez la vitesse de diminution de la concentration de glucose à cause de l'insuline excrétée par les cellules $\beta$ .
$a_{15}, a_{16}, a_{17}$	Représentez le taux d'augmentation des cellules $\beta$ provoqué par l'augmentation de la concentration en glucose.
$a_{18}, a_{19}$	Indiquez le taux de diminution des cellules $\beta$ en raison de son niveau actuel.

### Tableau 2

Coefficients du système

2.04	0.1	1.09	-1.08	0.03	-0.06	2.01	-0.22	-3.48	-1.2	0.3
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$
1.37	-0.3	0.22	0.3	-1.35	0.5	0.5	-0.42	-0.15	-0.19	0.56
$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$	$a_{17}$	$a_{18}$	$a_{19}$	$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$

### Tableau 3

Équilibres et cigenvalues du système

Équilibres $(x_0, y_0, z_0)$	Valeurs propres
$E_1(0.654, 1.016, 0.986)$	$-3.000, 0.260 \pm 2.573i$
$E_2(0.624, 0.935, 0.877)$	$-2.837, 0.526 \pm 2.347i$

### 3.7.2 Méthode numérique

Plusieurs études ont montré que cette définition est extrêmement utile pour trouver numériquement des solutions approximatives de FoDEs[9] Sur la base de certains calculs numériques, on peut dériver l'approche explicite suivante de la  $q^{th}$ -dérivée[8,18,19] : Eqn(3.16)

$$k^{GL} - l_{m/h} D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}), \quad (3.16)$$

où  $t_k = kh$ ,  $l_m$  est la longueur de la mémoire, et où  $(-1)^j \binom{q}{j}$  sont les coefficients binomiaux qui seront indiqués par  $c_j^k$ ,  $k, j = 0, 1, 2, \dots$ . On peut utiliser l'expression donnée ci-dessous pour calculer leurs valeurs[10] : Eqn (3.17).

$$c_0^q = 1, c_j^q = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^q. \quad (3.17)$$

Cela permet cependant d'établir la solution numérique générale du FoDE suivante :

$$D_t^q y(t) = f(y(t), t),$$

qui serait de la forme : Eqn (3.18)

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=0}^R c_j^q y(t_{k-j}), \quad (3.18)$$

en notant que le principe de la mémoire courte peut être utilisé pour divers  $l_m$  pour le terme qui est noté par la somme.

### 3.7.3 Application sur la régularisation insuline-glucose.

Considérons le système dynamique d'ordre fractionnaire incommensurable suivant[11] Eqn (3.19)

$$D^{\alpha_i} X_i = f(X_1, X_2, X_3), 1 \leq i \leq 3. \quad (3.19)$$

Où  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha_i = \nu_i/u_i$ ,  $(u_i, \nu_i) = 1$ , est  $u_i, \nu_i$  sont des nombres entiers positifs. Définie  $M$  comme le plus petit commun multiple de  $u_i$ 's. Soit  $p \equiv (X_1^*, X_2^*, X_3^*)$  soit un point d'équilibre du système (3.19) est  $\xi_i = X_i - X_i^*$  soit une petite perturbation à partir d'un point fixe, où  $1 \leq i \leq 3$ . puis nous avons : Eqn (3,20)

$$D^{\alpha_i} \xi_i = D^{\alpha_i} X_i = f_i(x_1, x_2, x_3) = f_i(\xi_1 + x_1^*) \quad (3.20)$$

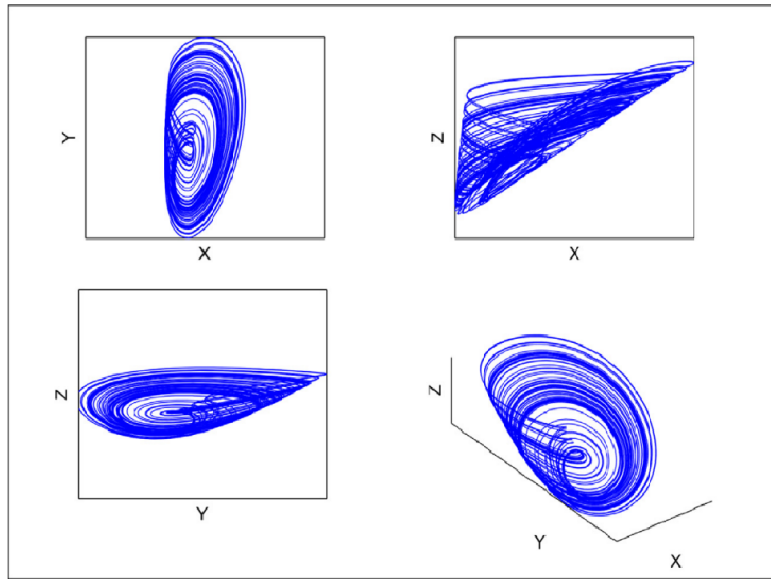


FIGURE 3.2 – Portraits de phase d'un système chaotique ou des projections différentes, sous réserve  $(x_0.y_0.z_0) = (0.53, 1.31, 1.03)$  et les paramètres indiqués dans le tableau 2.

### 3.7.4 FoGIRM avec des ordres incommensurables

Shabestari et al. [12] ont récemment proposé un nouveau modèle chaotique non linéaire pour étudier et analyser le GIRM. Ce modèle a la forme : Eqn (3.21)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a_1x + a_2xy + a_3y^2 + a_4y^3 + a_5z + a_6z^2 + a_7z^3 + a_{20} \\ \frac{dy}{dt} = -a_8xy - a_9x^2 - a_{10}x^3 + a_{11}y(1-y) - a_{12}z - a_{13}z^2 \\ \frac{dz}{dt} = a_{15}y + a_{16}y^2 + a_{17}y^3 - a_{18}z - a_{19}yz. \end{cases} \quad (3.21)$$

Où  $x(t), y(t)$  est  $z(t)$  indiquent la densité de population de l'insuline, du glucose et des  $\beta$  cellules, respectivement. Par ailleurs, le tableau 1 ci-dessous présente l'ensemble des paramètres utilisés dans ce modèle. La relation entre la concentration d'insuline et la glycémie a été étudiée et traitée en proposant des modèles mathématiques[13,14]. Mais, malheureusement, la plupart d'entre eux isolent le système de son environnement en éliminant plusieurs composantes qui pourraient avoir un impact sur la relation entre l'insuline et le glucose. Pour éviter cet angle mort de ces modèles, le GIRM donné dans (3.21) peut présenter les conditions les plus inhabituelles qui peuvent se produire au cours du processus métabolique. qui pourraient se produire au cours du processus métabolique. En fait, Vito Volterra a proposé ce modèle dans[15] en se basant sur le modèle dit prédateur-proie dans lequel la proie et le prédateur sont supposés être respectivement du glucose et de l'insuline. et l'insuline, respectivement. De ce point de vue, on pense à que le comportement du système sera soit périodique, soit chaotique selon les conditions d'un processus métabolique normal ou selon la présence d'un état défectueux dans le processus métabolique lui-même, respectivement. Cela signifie que le désordre du système sera présent s'il se comporte en mode chaotique[16,17]. Pour montrer la stabilité du système (3.21), la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} -a_1 + a_2y & a_2x + 2a_3y + 3a_4y^2 & a_5z + 2a_6z + 3a_7z^2 \\ -a_8y - a_9x - 3a_{10}x^2 & -a_8x + a_{11}(1-2y) & -a_{12} - 2a_{13}z - 3a_{14}z^2 \\ 0 & a_{15} + 2a_{16}y + 3a_{17}y^2 - a_{19}z & -a_{18} - a_{19}y \end{pmatrix}$$

Sur la base des valeurs données dans le tableau 2, on peut observer que le système (3.21) a deux points d'équilibre positifs indiqués dans le tableau 3.

De plus, la condition qui rend le système (3.21) chaotique est satisfaite par toutes les valeurs propres du système. satisfaite par toutes les valeurs propres du système. Pour s'en convaincre, les portraits de phase de phase pour différentes projections du système (3.21) sont présentés dans la figure 3.2. Dans ce travail, le FoGIRM est traité comme une généralisation du système (13). du système (3.21) en remplaçant simplement les FoDs par les IoDs, comme suit : Eqn (3.22)

$$\begin{cases} {}_0^GL D^{q_1} x(t) = a_1 x + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 y^3 + a_5 z + a_6 z^2 + a_7 z^3 + a_{20} \\ {}_0^GL D^{q_1} y(t) = -a_8 xy + a_9 x^2 + a_{10} x^3 + a_{11} y(1 - y) - a_{12} z - a_{13} z^2 - a_{14} z^3 + a_{21} \\ {}_0^GL D^{q_1} z(t) = a_{15} y + a_{16} y^2 + a_{17} y^3 - a_{18} z - a_{19} yz. \end{cases} \quad (3.22)$$

Où  $q_i$  are sont des nombres rationnels dans l'intervalle  $(0, 1)$ , pou  $i = 1, 2, 3$  figure (3.2).

En fait, l'une des principales motivations de ce travail est d'étudier le rôle des dérivés d'ordre fractionnaire incommensurables dans la cause de certains troubles de l'homéostasie glucose-insuline.homéostatique. Plus précisément, l'étude de la dynamique du modèle d'ordre fractionnaire proposé donné dans en explorant la relation entre les valeurs de ces dérivées d'ordre fractionnaire incommensurables et le comportement chaotique du modèle, permet aux spécialistes de déterminer la classification du glucose et de l'insuline. permet aux spécialistes de déterminer la classification de la connexion glucose-insuline s'il s'agit d'une connexion désordonnée ou non Connaisances.

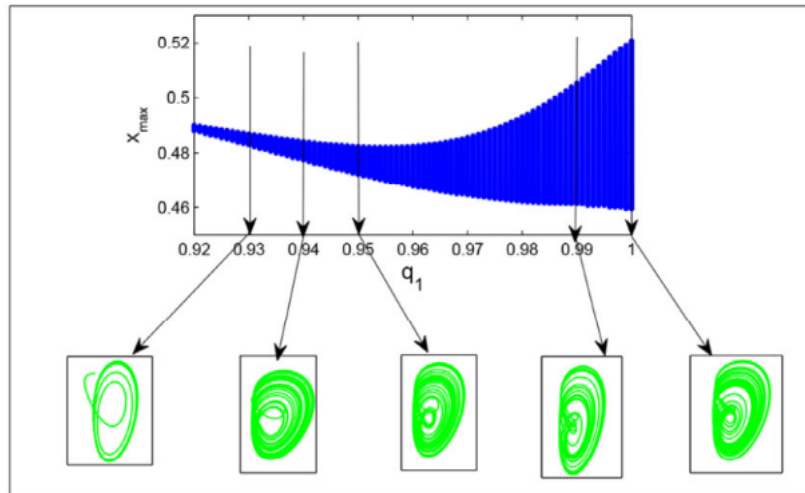


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation et trajectoires spatiales d'un système incommensurable

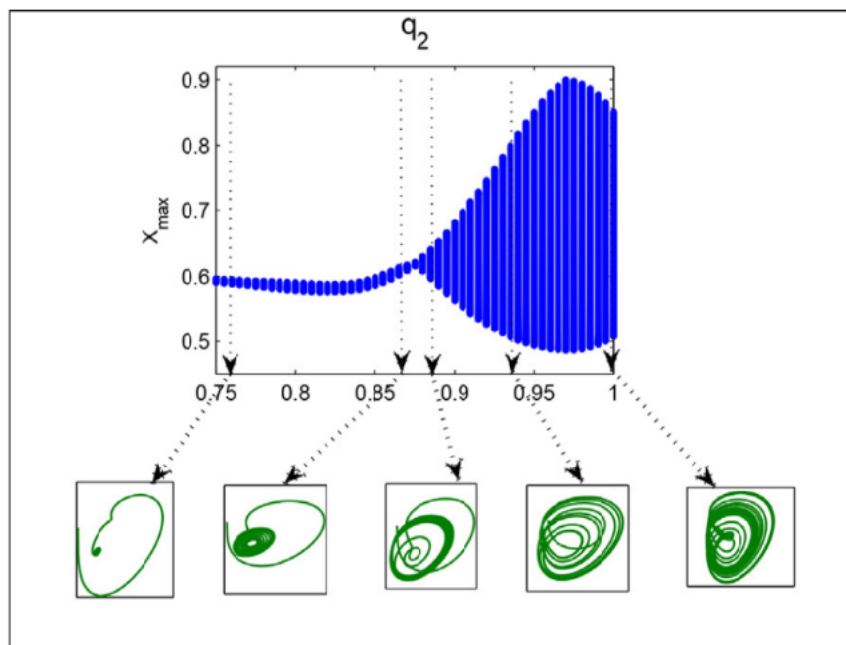


FIGURE 3.4 – Diagramme de bifurcation et trajectoires spatiales d'un système incommensurable

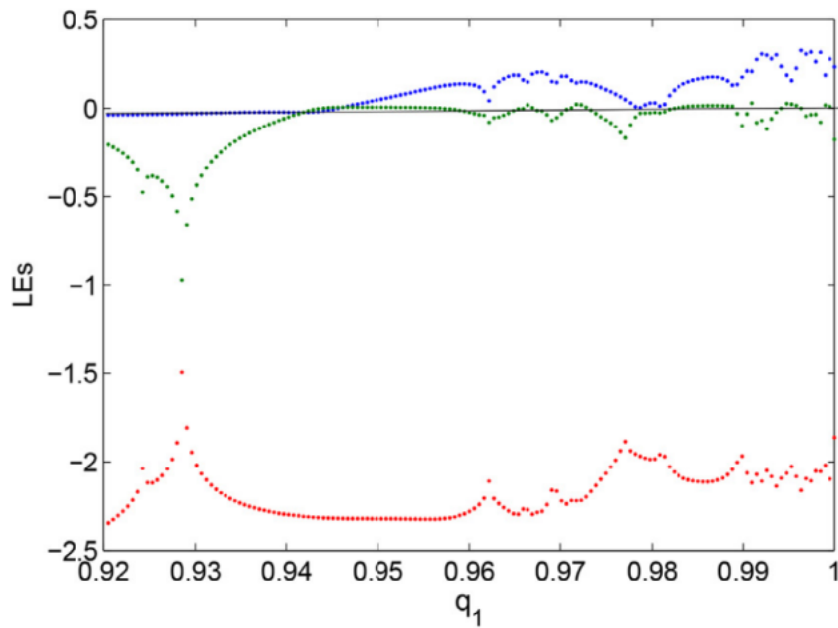


FIGURE 3.5 – LEs du système incommensurables

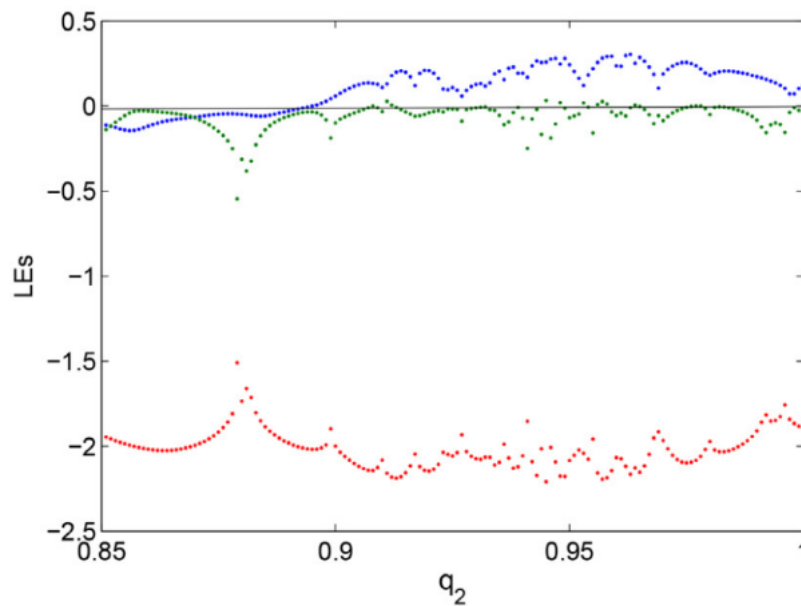


FIGURE 3.6 – LEs du système incommensurables

d'après le portrait de phase qui est pressenti dans la figure 3.3 le modèle a un attracteur étrange pour les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.53; 1.31; 1.03)$ , la preuve qu'il est dans un domaine borné dense, de volume nul et surtout les trajectoires sont aperiodiques, mais cela ne suffit pas à trancher et dire que c'est un attracteur étrange

mais cela nous peut-ve de suspecter le chaos dans ce système. Pour prouver que le système est chaotique nous devons calculer l'exposant de Lyapunov le digramme de bifurcation dans la figure3.3 et figure3.4 qui représente la variation de la variable  $x$  par rapport à  $q_1$  et puis  $q_2$  montre le chemin vers le chaos en fonction du l'ordre fractionnaire  $q_1$  et puis  $q_2$ . Ce diagramme de bifurcation nous a aidé à déterminer la valeur du paramètre  $q_1$  et  $q_2$  pour lequel le système est devenu chaotique et pour cela l'exposant de Lyapunov a été calculer pour des valeurs de l'ordre fractionnaire  $q_1 \in (0.92, 1)$  et  $q_2 \in (0.75, 1)$  la figure3.5 et 3.6 désigne trois exposants de Lyapunov a partir de 0.95 le système est devenu chaotique car il possède un exposant positif, un nul et le troisième négatif et la somme des trois exposants est négative. Donc cette question serait particulièrement utile pour améliorer certains protocoles de traitement médicales, en particulier compte tenu du fait qu'une présence du comportement chaotique du modelé généré un trouble de la connexion ou relation glucose-insuline. Au contraire savoir qu'une telle connexion est régulière offrirait un schéma de controle efficace du taux de glucose-plasmatique et c'est cela qui rend ce modèle et ce travail interessant et motivant.

La figure1.2

```
function loren3
clear ;clf
global A B R
A=10;
B=8/3;
R=50;(change le R)
u0=100*(rand(3,1)-0.5);
[t,u]=ode45(@lor2,[0,100],u0);
N=find(t>10);v=u(N, :);
X=v( :,1);
Y=v( :,2);
Z=v( :,3);
plot3(X,Y,Z);
view(158, 14)
end

function uprime=lor2(t,u)
global A B R
uprime=zeros(3,1);
uprime(1)=-A*u(1)+A*u(2);
uprime(2)=R*u(1)-u(2)-u(1)*u(3);
```

```
uprime(3)=-B*u(3)+u(1)*u(2);  
end
```

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] LI, T-Y.et YORK, J.A. *Period three implies chaos, Amer.Math.Mon. Vol.82, pp.985-992, 1975.*
- [2] LORENZ E.N, *ATMOS J.Sci.20, 130-141(1963).*
- [3] A.V.Letnikov. *Theory of differentiation of an arbitrary order, Maths Sb vol 3, pp1.*
- [4] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, Hala A.A. El Saka On some Routh. *Hurwitz conditions for fractional order differential equations an their applications in orenz,Rosler,.Chua and Chen systems. Phys Lett A. 358 ; pp. 1.*
- [5] Yan Li, Yang Quan Chen, Igor Podlubny. *Stability of fractional-order non linear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffer stability, Computers and Mathematics with Applications vol.59 pp. 1810-1821, (2010).*
- [6] Knox Millsaps and Karl Pohlhausen. *Mathematical Model for Glucose-Insulin Interaction, Department of Engineering Science, Mechanics and Aerospace Engineering. University of Florida, Gainesville, Florida 3261 I.*
- [7] V. Volterra, *Leçon sur la theorie mathematiques de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris, 193 1.*
- [8] Podlubny I. *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications. Amsterdam, Elsevier, 1998.*

- [9] Petráš I. *Comments on coexistence of hidden chaotic attractors in a novel non-equilibrium system (nonlinear dyn, doi :10.1007/s11071-016-3170-x)*. *Nonlinear Dyn* 2017, 90, 749–54.
- [10] Petráš I, *Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin, Springer-Verlag, 2011.
- [11] Abdelaziz M, Ismail A, Abdullah F, Mohd M, *Bifurcations and chaos in a discrete SI epidemic model with fractional order*. *Adv Differ Equ* 2018, 2018, 44.
- [12] Shabstari P, Panahi S, Hatef B, Jafari S, Sprott J. *A new chaotic model for glucose-insulin regulatory system*. *Chaos Solitons Fractals* 2018, 112, 44–51.
- [13] Ackerman E, Rosevear J, McGuckin W. *A mathematical model of the glucose tolerance test*. *Phys Med Biol* 1964, 9, 203.
- [14] Bajaj J, Rao GS, Rao JS, Khardori R. *A mathematical model for insulin kinetics and its application to protein-deficient (malnutrition-related) diabetes mellitus (PDDM)*. *J Theor Biol* 1987, 126, 491–503.
- [15] Elsadany A, EL-Metwally H, Elabbasy E, Agiza H. *Chaos and bifurcation of a nonlinear discrete prey-predator system*. *Comput Ecol Software* 2012, 2, 169–80.
- [16] Letellier C, Denis F, Aguirre L. *What can be learned from a chaotic cancer model ?* *J Franklin Inst* 2013, 322, 7–16.
- [17] Jafari S, Baghdadi G, Golpayegani S, Towhidkhah F, Gharibzadeh S. *Is attention deficit hyperactivity disorder a kind of intermittent chaos ?* *J Neuropsychiatry Clin Neurosci* 2013, 25, E02.
- [18] Tavazoei M, Haeri M. *Necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems*. *Phys Lett A* 2007;367 :102–13.
- [19] Vinagre B, Chen Y, Petráš I. *Two direct Tustin discretization methods for fractional - order differentiator/integrator*. *J Franklin Inst* 2003;340 :349–62.