

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**Erreur à posteriori relative aux inéquations variationnelles**

Option : ANEDP

Par :

Somrani Khawla  
&  
Ghelila Imane

Encadré par : Lagraf Samira

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Présidente : Hanneche Amel  
Examinatrice: Mourah Nawel

M.C.B U. SKIKDA  
M.A.A U. SKIKDA

Année : 2021/2022



# *Remerciement*

Tout d'abord, on remercie dieu de nous avoir aidés d'atteindre ce stade.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr. Lagraf Samira** on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa disponibilité ainsi que son soutien moral et son encouragement durant notre préparation de ce mémoire.

Un grand merci aux membres du jury **Dr. Hannache Amel, Mourah Nawel**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail, merci à vous tous.

Notre remerciement vont aussi, à toute personne qui de près ou de loin, à contribué à la réalisation de ce mémoire.

# Dédicace



Je dédie ce travail :

***A l'âme de mon chère grand-mère « Fatima »***

Qui m'a été ma deuxième mère, tu représentes pour moi

Le symbole de la bonté par excellence

Qu'Allah t'accueille dans son vaste Paradis.

***A mon chère grand-père « Rabeh »***

Que dieu le protège et lui accorde santé et bien-être.

***A ma très chère mère « Farida »***

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier

Comme il se doit .ton affection me couvre, ta bienveillance me

Guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de

force pour affronter les différents obstacles.

***A mon chère père « Madjid »***

Tu toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.

***A mon cher frère « Hachem »***

***A mon cher fiancé « Kamel »***

Et aussi à tout ma famille et mes chères amis « Sarah ;

Nessrine ; Imane



*Khawla*

# Dédicace



Du profond de mon cœur je dédie  
Ce travail à tous ceux qui me sont  
Chères

## ***A mon cher papa : Cherif***

Rien au monde peut décrire tes efforts fournis jours  
et nuits pour mon éducation et mon bien être et tes  
Sacrifices que tu as consentis pour mes études et ma  
Formation, pour que je devienne ce que je suis  
Aujourd'hui.

## ***A mon très chère mère : Karima***

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente  
Pour exprimer ce que tu mérites pour tous les  
Sacrifices que tu n'as cessé des me donner depuis  
ma naissance, puisse dieu le tout puissant, te préserver  
et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

## ***A mon cher frère : Mohamed ; et mes chères sœurs : Abir et***

**Douaa.**

A ma famille, mes amis et aux personnes qui m'ont toujours soutenu et encouragé  
Tout au long de mon parcours universitaire

***Imane***



# Résumé

Dans ce travail, on s'est intéressé aux inéquations variationnelles. On s'est surtout fixé comme but la dérivation de l'estimation à postériori par la dualité. Cette dernière repose sur les fonctionnelles convexes. Les majorants obtenus garantissent des bornes supérieures de l'erreur.

# Abstract

In our work, we were interested by variational inequalities, we focused on derivating a posteriori error by duality. This leads to convex functionals. The obtained majorants provide upper bounds of the error.

# ملخص

تطرقنا في هذا العمل إلى المتراجحات التغيرائية و بالأخص، درسنا الأخطاء اللاحقة. المتعلقة بمفهوم الثنوية هذه الأخيرة تعتمد على الداليات الحدية. الحواد الناتجة تجعل الأخطاء محدودة من الأعلى.

Pour résoudre un problème physique donné, on a généralement recouru à l'approximation numérique. Ce qui génère des erreurs entre la solution approchée et la solution exacte. Ces erreurs nous mènent à l'étude d'un certain type d'erreur dit : les erreurs à posteriori. Ces dernières sont multiples celles qui nous intéressent sont les erreurs basées sur la notion de dualité. Qu'on a appliqué aux inéquations variationnelles.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, le premier porte sur les inéquations variationnelles, et les théorèmes d'existence et unicité associés.

Le second chapitre porte sur les fonctionnelles convexes et les problèmes variationnelles duaux .

Enfin dans le troisième chapitre, on a développé une estimation à posteriori relative aux inéquations variationnelles via la dualité.

<b>Résumé</b>		<b>5</b>
<b>Introduction</b>		<b>6</b>
<b>1 Notions de base et définitions</b>		<b>9</b>
1.1 Définitions et préliminaires . . . . .		9
1.1.1 Sous différentielle . . . . .		11
1.2 Les inéquations variationnelles . . . . .		12
1.2.1 Formulation forte . . . . .		12
1.2.2 Formulation variationnelle . . . . .		12
1.2.3 Étude de l'existence de l'unicité d'une I.V de 1ère espèce . . . . .		12
1.2.4 Etude de l'existence de l'unicité d'une I.V de 2ème espèce . . . . .		13
1.3 Problèmes minimisés associés aux inéquations variationnelles . . . . .		13
1.3.1 Problème minimisé associé à une I.V de 1ère espèce . . . . .		13
1.3.2 Problème minimisé associé à une I.V de 2ème espèce . . . . .		13
1.4 Les inéquations variationnelles approchées . . . . .		13
1.4.1 I.V approchée de 1ère espèce . . . . .		14
1.4.2 I.V approchée de 2ème espèce . . . . .		14
1.5 Erreur à posteriori . . . . .		14
<b>2 Le principe de dualité</b>		<b>16</b>
2.1 Notation . . . . .		16
2.2 Problèmes variationnelles duaux . . . . .		17

---

<b>3 Estimation des écarts</b>	<b>20</b>
3.1 Formulation fonctionnelle du problème . . . . .	20
3.2 Les fonctions conjuguées définies sur l'espace des traces . . . . .	21
3.3 L'inéquation variationnelle . . . . .	22
3.3.1 Formulation forte . . . . .	22
3.3.2 Formulation variationnelle . . . . .	22
3.4 Estimation des écarts . . . . .	23
3.4.1 Estimation générale . . . . .	23
<b>Bibliographie</b>	<b>27</b>

# CHAPITRE 1

## NOTIONS DE BASE ET DÉFINITIONS

### Introduction

Ce chapitre est consacré des notions et définitions nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

### 1.1 Définitions et préliminaires

Soit  $V$  est un espace de Hilbert.

**Définition 1.1.** :

*On dit que  $a(.,.)$  est une forme bilinéaire sur  $V$ , si  $u \rightarrow a(u, v)$  est une forme linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $v \in V$ , et  $v \rightarrow a(u, v)$  est une forme linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $u \in V$ .*

**Définition 1.2.** :

*Soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire continue, alors il existe  $M > 0$  tel que :*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \text{pour tout } (u, v) \in V^2.$$

**Définition 1.3.** :

*Soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire sur  $V, V$  coercive (ou elliptique) alors il existe  $\alpha > 0$  tel que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

---

**Définition 1.4. :**

On dit que  $L(\cdot)$  est une forme linéaire sur  $V$ , si  $v \rightarrow L(v)$  est linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.5. :**

Soit  $L(\cdot)$  une forme linéaire continue sur  $V$  ; c'est-à-dire que  $v \rightarrow L(v)$  est linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  et il existe  $c > 0$  tel que :

$$|L(v)| \leq c\|v\|, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

**Définition 1.6. :**

Les normes que nous utiliserons dans ce travail sont les suivantes :

$$\text{Norme : } L^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int (v)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Norme : } H^1(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int (v)^2 + (v')^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Norme énergie : } \|v\| = \left( a(v, v) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 1.7. :(Espace duale)**

Soit  $V$  un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note  $V^*$  l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur  $V$ , les éléments de cet espace sont notés par  $(*)$ , la valeur d'une fonctionnelle  $v^* \in V^*$  par un élément  $v \in V$ , noté  $\langle v^*, v \rangle$ , cette dernière quantité est appelée dualité de  $V^*$ .

**Définition 1.8. :(Ensemble convexe)**

Un ensemble  $K \subset V$  est dit convexe si :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in K.$$

Pour tout  $v_1, v_2 \in K$  et tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$  tel que,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

**Définition 1.9. :(Fonctionnelle convexe)**

Soit  $K$  un ensemble convexe, une fonctionnelle  $J : K \rightarrow \mathbb{R}$  est dite convexe si l'inégalité :

$$J(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \leq \lambda_1 J(v_1) + \lambda_2 J(v_2)$$

est vérifiée pour tout  $v_1, v_2 \in K$  et tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$  tel que,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

Une fonctionnelle  $J$  est dite concave si la fonctionnelle  $-J$  est convexe.

---

**Définition 1.10. : (Semi-continue inférieurement)**

Une fonctionnelle  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semi-continue inférieurement en  $v_0 \in V$  si :

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(v_0),$$

pour tout  $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  convergente vers  $v_0$ .

**Définition 1.11. : (Semi-continue supérieurement)**

Une fonctionnelle  $G$  est appelée semi-continue supérieurement si  $G = -J$  où  $J$  est une fonctionnelle semi-continue inférieurement.

**Définition 1.12. : (Propre)**

On dit qu'une fonction  $J(\cdot) : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est propre si  $J(v) > -\infty$ ,  $\forall v \in V$  et  $J \not\equiv +\infty$ .

**Définition 1.13. : (Ensemble de minorants affine  $\mathbb{AM}(J)$ )**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pour tout  $J : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  on définit l'ensemble

$$\mathbb{AM}(J) = \left\{ l(v) = \langle v^*, v \rangle - \alpha \mid l(v) \leq J(v) \quad \forall v \in V \right\},$$

nous l'appelons l'ensemble de minorants affine de  $J$ .

### 1.1.1 Sous différentielle

Soit la fonctionnelle  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  ayant une valeur finie  $v_0 \in V$ .

**Définition 1.14. :**

Une fonctionnelle  $J$  est appelée sous différentiable en  $v_0$  s'il existe un minorant affine  $l \in \mathbb{AM}(J)$  telle que  $J(v_0) = l(v_0)$ . Un minorant avec cette propriété est appelé le minorant exacte en  $v_0$ .

Évidemment, tout minorant affine exacte de  $J$  en  $v_0$  est de la forme :

$$l(v) = \langle v^*, v - v_0 \rangle + J(v_0), \quad l(v) \leq J(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.1)$$

L'élément  $v^*$  dans (1.1) est appelé un sous-gradient de  $J$  en  $v_0$ , on note l'ensemble de sous-gradient de  $J$  en  $v_0$  par  $\partial J(v_0)$ .

---

## 1.2 Les inéquations variationnelles

On trouve les inéquations variationnelles (I.V) dans de multiples domaines, il existe 2 types d'inéquations :

Les inéquations dites de première espèce et les inéquations dites de seconde espèce.

### 1.2.1 Formulation forte

On se donne des fonctions  $f$  et  $\psi$  dans  $\Omega$ . On cherche une fonction  $u$  à valeurs réelles, définie dans  $\Omega$  et telle que :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ Au - f \leq 0 \\ u - \psi \leq 0 \\ (Au - f)(u - \psi) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Formulation variationnelle

On associe (1.2) à une inéquation variationnelle (notée I.V) de première espèce définie comme suit :

\* **Exemple d'une inéquation de 1ère espèce :**

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \text{ pour tout } v \in K \end{cases} \quad (1.3)$$

\* **Exemple d'une inéquation de 2ème espèce :**

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \\ a(u, v) + j(v) - j(u) \geq (f, v) \text{ pour tout } v \in V \end{cases} \quad (1.4)$$

ou  $j(\cdot)$  une fonctionnelle avec certaines propriétés.

### 1.2.3 Étude de l'existence de l'unicité d'une I.V de 1ère espèce

**Théorème 1.1. (Lions Stampachia) :**

*L'inéquation (1.3) admet une solution unique. Si  $K$  est une convexe, la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  continue et coercive, et la forme linéaire  $f$  continue.*

---

## 1.2.4 Etude de l'existence de l'unicité d'une I.V de 2ème espèce

**Théorème 1.2.** :

*Le problème (1.4) admet une solution unique, ssi la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est coercive et continue et la forme linéaire  $f$  continue et la fonctionnelle  $j(.)$  propre, convexe et s.c.i.*

## 1.3 Problèmes minimisés associés aux inéquations variationnelles

Si la forme bilinéaire  $a(.,.)$  symétrique, les inéquation variationnelles définies ci-dessus peuvent s'écrire sous forme de problèmes de minimisation.

### 1.3.1 Problème minimisé associé à une I.V de 1ère espèce

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \quad \text{tel que} \\ J(u) = \inf J(v) \quad \forall v \in K. \\ \text{ou } J(u) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) \end{array} \right.$$

### 1.3.2 Problème minimisé associé à une I.V de 2ème espèce

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \quad \text{tel que} \\ J(u) = \inf J(v) \quad \forall v \in V. \\ \text{ou } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + j(v). \end{array} \right.$$

Pour avoir l'existence et l'unicité des problèmes minimisés ci-dessus,  $J(.)$  doit être continue, convexe et coercive.

## 1.4 Les inéquations variationnelles approchées

Pour définir une approximation d'une inéquation variationnelle, on commence par définir l'espace approché  $V_h$  :

\*  $V_h \subset V$  sous espace de dimension finie de  $V$ ,  $h$  étant un paramètre scalaire destiné à tendre vers 0.

---

Puis le convexe approché  $K_h$  :

\*  $K_h$  sous ensemble convexe fermé non vide de  $V_h$ , avec " $K_h \rightarrow K$ " au sens suivant :

$$\text{Si } u_h \in K_h, u_h \rightarrow u \text{ dans } V \text{ faiblement, alors } u \in K,$$

Et

$$\forall v \in K, \text{ il existe } v_h \in K_h \text{ avec } \|v_h - v\| \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0.$$

### 1.4.1 I.V approchée de 1ère espèce

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h & \text{tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) & \forall v_h \in K_h \end{cases}$$

Cette I.V admet une solution unique sous les hypothèses du théorème (1.1).

### 1.4.2 I.V approchée de 2ème espèce

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq (f, v_h - u_h) & \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Cette I.V admet une solution unique sous les hypothèses du théorème (1.2).

## 1.5 Erreur à posteriori

Le principe de base de ce type d'estimation est d'utiliser la solution approchée pour estimer l'erreur de discrétisation. Les estimations a posteriori ne peuvent se faire qu'une fois la solution approchée calculée. Une fonction  $\eta(h, u_h, d)$  est une estimation d'erreur a posteriori si :

$$\|u - u_h\| \leq \eta(h, u_h, d)$$

Où  $h$  la taille des éléments,  $d$  un ensemble de données du problème et  $u_h$  la solution approchée. De plus, si  $\eta(h, d, u_h)$  peut être localisée sous la forme :

$$\eta(h, u_h, d) = \left[ \sum_k \eta_k(u_h, d)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

---

Alors les quantités  $\eta_k(u_h, d)$ , contributions élémentaires de l'estimation de l'erreur globale  $\eta_k(h, u_h, d)$ , sont appelées indicateurs locaux d'erreur. Ils fournissent une base pour l'adaptation de maillages. Il existe plusieurs types d'erreur à posteriori, celle qui nous intéresse est l'erreur basée sur la dualité.

## CHAPITRE 2

## LE PRINCIPE DE DUALITÉ

### 2.1 Notation

On définit l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\varepsilon)^2 d\varepsilon < \infty \right\}$ .

tel que :

$\hat{u}(\varepsilon)$  est un transformé de fourrier de  $u$ .

$H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$  : est le dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ .

Soit  $\xi^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\langle \xi^*, \xi \rangle - \alpha \in \text{AM}(\Upsilon)$  i.e.,

$$\Upsilon(\xi) \geq \langle \xi^*, \xi \rangle - \alpha, \forall \xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (2.1)$$

En générale, il existe plusieurs constantes  $\alpha$  qui satisfassent (2.1) avec  $\xi^*$  fixé. On prend la plus grand constante  $\alpha$ , et on définit un certain nombre(fini, infini) associe à  $\xi^*$ . Cette procédure définit une nouvelle fonctionnelle  $\Upsilon^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  dite *duale* (ou conjuguée) de  $\Upsilon$ .

D'après (2.1), il s'ensuit que :

$$\alpha \geq \langle \xi^*, \xi \rangle - \Upsilon(\xi).$$

par conséquent,  $\Upsilon^*$  est défini comme suit :

$$\Upsilon^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \{ \langle \xi^*, \xi \rangle - \Upsilon(\xi) \} \quad (2.2)$$

La fonctionnelle  $\Upsilon^*$  est dite *duale* de  $\Upsilon$ .

---

**Définition 2.1.** *:(Mutuellement dual)*

Soit  $J : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  et  $G^* : V^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  deux fonctionnelles définies, sur un espace de Banach  $V$  et son espace dual  $V^*$ , respectivement. Ces deux fonctionnelles sont dites mutuellement duales si :

$$(G^*)^* = J \quad \text{et} \quad J^* = G^*.$$

**Théorème 2.1.** *(Young-Fenchel)***Proposition 2.1.** :

Soit  $J \in \Gamma(V)$ . Les assertions suivantes sont équivalents :

$$J(v) + J^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle = 0, \quad (2.3)$$

$$v^* \in \partial J(v) \text{ et } v \in \partial J^*(v^*). \quad (2.4)$$

$\Gamma(V)$  représente l'ensemble des fonctionnelles qui peuvent être représentées comme limites supérieures de fonctionnelles affines.

## 2.2 Problèmes variationnelles duaux

On introduit une autre paire d'espace mutuellement duales réflexifs  $Y$  et  $Y^*$ , avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soient  $K$  et  $K^*$  des ensembles convexes non vides tels que  $K \subset V$  et  $K^* \subset Y^*$ , on définit une fonctionnelle

$$L : K \times K^* \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie :

1.  $\forall y^* \in K^*$ , la fonctionnelle  $v \mapsto L(v, y^*)$  est convexe et semi-continue inférieurement.
2.  $\forall v \in K$ , la fonctionnelle  $y^* \mapsto L(v, y^*)$  est concave et semi-continue supérieurement.

$L$  est dite *Lagrangienne*. Ceci donne deux problèmes variationnelles.

Pour cela, on introduit deux fonctionnelles :

$$J(v) = \sup_{y^* \in K^*} L(v, y^*) \quad (2.5)$$

et

$$I^*(y^*) = \inf_{v \in K} L(v, y^*) \quad (2.6)$$

La fonctionnelle  $J$  est définie comme borne supérieure des fonctionnelles convexes semi-continue inférieurement, et  $I^*$  est concave et semi-continue supérieurement.

Les fonctionnelles  $J$  et  $I^*$  génèrent deux problèmes variationnelles :

**Problème  $\mathcal{P}$**  : Trouver  $u \in K$  tel que :

$$J(u) = \inf \mathcal{P} = \inf_{v \in K} J(v) \quad (2.7)$$

**Problème  $\mathcal{P}^*$**  : Trouver  $p^* \in K^*$  tel que :

$$I^*(p^*) = \sup \mathcal{P}^* = \sup_{y^* \in K^*} I^*(y^*) \quad (2.8)$$

Les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  sont dits problèmes *primale* et *duale*, respectivement.

$\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  sont liés au problème de minimisation qui est appelé problème du point selle pour

le Lagrangien  $L$  :

**Problème  $\mathcal{L}$**  :

Trouver  $(\bar{u}, \bar{p}^*) \in K \times K^*$  tel que :

$$L(\bar{u}, y^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(v, \bar{p}^*). \quad (2.9)$$

$(\bar{u}, \bar{p}^*)$  dit point selle du  $L$  dans  $K \times K^*$ .

Si  $L$  admet une solution  $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ , alors  $\bar{u}$  est solution de  $\mathcal{P}$  et  $\bar{p}^*$  est solution de  $\mathcal{P}^*$ .

**Proposition 2.2.** :

*S'il existe une constante  $\alpha$  tel que :*

$$L(u, y^*) \leq \alpha, \quad \forall y^* \in K^* \quad (2.10)$$

et

$$L(v, p^*) \geq \alpha, \quad \forall v \in K \quad (2.11)$$

alors  $(u, p^*)$  est un point selle. De plus, on a la relation :

$$\alpha = \inf_{v \in K} \sup_{y^* \in K^*} L(v, y^*) = \sup_{y^* \in K^*} \inf_{v \in K} L(v, y^*) \quad (2.12)$$

---

**Théorème 2.2. :**

*Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe  $u \in K$  et  $p^* \in K^*$  tel que :*

$$J(u) = \inf \mathcal{P},$$

$$I^*(p^*) = \sup \mathcal{P}^*,$$

$$\inf \mathcal{P} = \sup \mathcal{P}^*$$

2.  *$(u, p^*)$  est point selle du Lagrangien  $L$  dans  $K \times K^*$ .*

*De plus, les deux assertions précédentes impliquent la relation :*

$$I^*(p^*) = L(u, p^*) = J(u). \tag{2.13}$$

**Théorème 2.3. :**

*Si les hypothèses 1 et 2 sur  $L$  sont vérifiées et les ensembles  $K$  et  $K^*$  sont bornés, alors  $L$  possède au moins un point de selle et  $\inf \mathcal{P} = \sup \mathcal{P}^*$ .*

### 3.1 Formulation fonctionnelle du problème

Dans cette partie, on note les espaces des carrés sommables à valeurs scalaires et vectorielles définies sur l'ensemble  $S$  par  $L^2(S)$  et  $L^2(S, \mathbb{R})$ , respectivement. Leurs normes sont associées aux produits scalaire usuels

$$\int_S uv ds \quad \text{et} \quad \int_S p \cdot y ds$$

On va utiliser la notation  $Y$  et  $Y^*$  pour les espaces qui contiennent les gradients des solutions et leur flux, respectivement. Les fonctions de ces espaces sont notés par  $y$ ,  $q$ ,  $\eta$  et  $y^*$ ,  $q^*$ ,  $\eta^*$  respectivement. On va considérer que les gradients et les flux appartiennent à  $L_2(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$Q^*(\Omega) = \{y^* \in Y^*, \quad \text{div} y^* \in L_2(\Omega)\}.$$

La norme associée  $Q^*$  :

$$\|y^*\|_{Q^*}^2 = \int_{\Omega} (|y^*|^2 + |\text{div} y^*|^2) dx$$

Soit  $V = H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$  et  $\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ ,  $\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma)$  l'opérateur de trace et  $\ker \gamma = H_0^1(\Omega)$ .

$\Gamma$  : La frontière lipschitzienne continue de  $\Omega$ .

En utilisant l'opérateur  $\gamma$ , on définit l'espace :

$$V_0 = \{v \in V \mid \gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

$\Gamma_0, \Gamma_1$  deux parties disjointes mesurables de  $\Gamma$ , sous espace de  $V$ . L'ensemble  $\gamma(V_0)$  est un sous espace de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Le dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est noté  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

### 3.2 Les fonctions conjuguées définies sur l'espace des traces

Pour tout  $\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , on définit la fonction

$$\Upsilon(\xi) = \int_{\Gamma_1} j(\xi) d\Gamma. \quad (3.1)$$

On admet que l'intégrant  $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est non négative, convexe et semi continue inférieurement en plus, on a  $j(0) = 0$  et

$$\text{dom}j = \{p \in \mathbb{R} | j(p) < +\infty\} \neq \emptyset.$$

alors  $j$  est propre.

Dans ce cas, la fonctionnelle  $\Upsilon(\xi)$  est également non négative, convexe et semi-continue inférieurement sur  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Puisque  $\gamma$  est un opérateur linéaire borné, la fonctionnelle  $\Upsilon(\gamma v)$  possède également les propriétés ci-dessus en tant que fonction sur  $V_0$ .

Introduisons la conjuguée de la fonctionnelle  $\Upsilon$  :

$$\Upsilon^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \{ \langle \xi^*, \xi \rangle_{\Gamma_1} - \Upsilon(\xi) \}. \quad (3.2)$$

Sous les hypothèses précédentes,  $\Upsilon : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  coïncide avec le sup de tous les minorants affines. On a :

$$\Upsilon(\xi) \geq \langle \xi^*, \xi \rangle_{\Gamma} + \lambda \quad \forall \lambda \leq -\Upsilon^*(\xi^*).$$

Ce que donne :

$$\Upsilon(\xi) = \sup_{\xi^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \{ \langle \xi^*, \xi \rangle_{\Gamma_1} - \Upsilon^*(\xi^*) \}. \quad (3.3)$$

Et on a

$$\Upsilon(\gamma v) = \sup_{y^* \in Q^*} \left\{ \int_{\Omega} (y^* \cdot \nabla v + \text{div} y^* \cdot v) dx - \Upsilon^*(\delta_n y^*) \right\}. \quad (3.4)$$

$$\Upsilon^*(\delta_n y^*) = \sup_{v \in V_0} \left\{ \int_{\Omega} (y^* \cdot \nabla v + \text{div} y^* \cdot v) dx - \Upsilon(\gamma v) \right\}. \quad (3.5)$$

---

## 3.3 L'inéquation variationnelle

### 3.3.1 Formulation forte

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ .

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_0 + u_0 \text{ tel que} \\ \operatorname{div} A \nabla u + f = 0 \\ u_0 \in V. \end{cases}$$
$$u \in V_0 + u_0 = \{w | w_0 + u_0, w_0 \in V_0\}.$$

avec  $A$  est une matrice carrée des lignes et des colonnes est une matrice symétrique et définie positive.

### 3.3.2 Formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_0 + u_0 \text{ tel que} \\ a(u, w - u) + \Upsilon(w) - \Upsilon(u) \geq \ell(w - u), \end{cases} \quad \forall w \in V_0 + u_0. \quad (3.6)$$

Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla(u) \cdot \nabla v dx.$$

Et la forme linéaire

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

On a l'existence et l'unicité de (3.6) d'après le théorème (1.2).

Ce problème est équivalent à :

problème  $\mathcal{P}$  :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_0 + u_0 \text{ tel que} \\ J(u) = \inf_{v \in V_0 + u_0} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \Upsilon(v) - \ell(v). \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour voir l'existence et l'unicité de (3.7) le fonctionnelle  $J$  doit être strictement convexe, continue et coercive sur  $V$  et l'ensemble  $V_0 + u_0$  fermé convexe dans  $V$ .

## 3.4 Estimation des écarts

### 3.4.1 Estimation générale

Le minimisant  $u$  du problème  $\mathcal{P}$  est solution de l'inéquation variationnelle (3.6) cela conduit à l'inégalité :

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - \langle f, v - u \rangle + \Upsilon(v) - \Upsilon(u) \\ &\geq \frac{1}{2}a(v - u, v - u) \quad \forall v \in V_0 + u_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ce qui implique l'estimation de l'écart de base

$$\frac{1}{2}|||v - u|||^2 \leq J(v) - \inf \mathcal{P} \quad \forall v \in V_0 + u_0 \quad (3.9)$$

Où  $\inf \mathcal{P}$  note la borne exact inférieure de la fonctionnelle  $J$ .

En général, la quantité  $\inf \mathcal{P}$  est inconnue alors (3.9) n'est pas pratique pour la calcul de l'estimation de l'erreur.

Notre but est de montrer que le coté droit de (3.9) peut être estimé de manière à être calculée et qui possède une signification physique.

Dans ce but, on utilise les fonctionnelles perturbées de la forme

$$J_{\xi^*}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v) + \langle \xi^*, \gamma v \rangle_{\Gamma_1} - \Upsilon^*(\xi^*) \quad (3.10)$$

On a :

$$\sup_{\xi^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} J_{\xi^*}(v) = J(v),$$

et par conséquent, pour tout  $\xi^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\inf_{v \in V_0 + u_0} J_{\xi^*}(v) \leq \inf_{v \in V_0 + u_0} J(v) = \inf \mathcal{P}. \quad (3.11)$$

Le problème perturbé  $\mathcal{P}_{\xi^*}$  consiste à trouver  $u_{\xi^*} \in V_0 + u_0$  tel que :

$$J_{\xi^*}(u_{\xi^*}) = \inf_{v \in V_0 + u_0} J_{\xi^*}(v) = \inf \mathcal{P}_{\xi^*}.$$

Ce problème est un problème quadratique simple, qui a une solution unique pour tout  $\xi^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Le problème perturbé a un bidual.

Le problème  $\mathcal{P}_{\xi^*}^*$  :

$$\begin{cases} \text{Trouver } y_{\xi^*}^* \in Q_{\ell_{\xi^*}^*} \\ I_{\xi^*}^*(y_{\xi^*}^*) = \sup_{\eta^* \in Q_{\ell_{\xi^*}^*}} I_{\xi^*}^*(\eta^*). \end{cases}$$

Où

$$I_{\xi^*}^*(\eta^*) = \int_{\Omega} \nabla(u_0) \cdot \eta^* dx - \frac{1}{2} a^*(\eta^*, \eta^*) - \ell_{\xi^*}(u_0) - \Upsilon^*(\xi^*)$$

$a^*$  est une forme bilinéaire conjuguée à  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $\ell_{\xi^*}(\cdot) = \ell(\cdot) - \langle \xi^*, \cdot \rangle_{\Gamma_1}$  est une fonctionnelle linéaire et

$$Q_{\ell_{\xi^*}^*}^* = \left\{ \eta^* \in Y^*, \int_{\Omega} \eta^* \cdot \nabla v dx = \ell_{\xi^*}(v), \quad \forall v \in V_0 \right\}.$$

Ce problème a aussi une solution unique . De plus,

$$\inf \mathcal{P}_{\xi^*} = \sup \mathcal{P}_{\xi^*}^*$$

Compte tenu de la relation entre les bornes supérieures et inférieures  $\mathcal{P}_{\xi^*}$  et  $\mathcal{P}_{\xi^*}^*$ , on obtient :

$$\frac{1}{2} \|v - u\|^2 \leq J(v) - \sup \mathcal{P}_{\xi^*}^* \leq J(v) - I_{\xi^*}^*(\eta^*) \quad \forall \eta^* \in Q_{\ell_{\xi^*}^*}^*. \quad (3.12)$$

Le coté droit de (3.12) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} J(v) - I_{\xi^*}^*(\eta^*) &= \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{1}{2} a^*(y^*, y^*) - \int_{\Omega} \nabla v \cdot y^* dx + \Upsilon(\gamma v) + \Upsilon^*(\xi^*) - \ell(v) \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla(u_0) \cdot \eta^* dx - \ell_{\xi^*}(\gamma u_0) + \int_{\Omega} \nabla v \cdot y^* dx + \frac{1}{2} a^*(\eta^*, \eta^*) - \frac{1}{2} a(y^*, y^*). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Où  $y^*$  est un élément arbitraire de  $Y^*$  . Depuis

$$\ell(v - u_0) = \int_{\Omega} \eta^* \cdot \nabla(v - u_0) dx + \langle \xi^*, \gamma(v - u_0) \rangle_{\Gamma_1}. \quad (3.14)$$

On obtient

$$\begin{aligned} J(v) - I_{\xi^*}^*(\eta^*) &= \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{1}{2} a^*(y^*, y^*) - \int_{\Omega} \nabla v \cdot y^* dx + \Upsilon(\gamma v) + \Upsilon^*(\xi^*) \\ &\quad - \langle \xi^*, \gamma v \rangle_{\Gamma_1} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot (y^* - \eta^*) dx + \frac{1}{2} a^*(\eta^*, \eta^*) - \frac{1}{2} a(y^*, y^*). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cette identité a une forme équivalent

$$\begin{aligned}
J(v) - I_{\xi^*}^*(\eta^*) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A \nabla v \cdot \nabla v + A^{-1} y^* \cdot y^* - 2 \nabla v \cdot y^*) dx + \Upsilon(\gamma v) + \Upsilon^*(\xi^*) \\
- \langle \xi^*, \gamma v \rangle_{\Gamma_1} + \int_{\Omega} (\nabla v - A^{-1} y^*) \cdot (y^* - \eta^*) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^{-1} (\eta^* - y^*) (\eta^* - y^*) dx.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On utilise maintenant l'inégalité

$$\eta \cdot \eta^* \leq \frac{\beta}{2} A \eta \cdot \eta + \frac{1}{2\beta} A^{-1} \eta^* \cdot \eta^*,$$

Ce qui est valable pour tous les vecteurs  $\eta$  et  $\eta^*$  et tout  $\beta > 0$ . On obtient l'estimation :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla v - A^{-1} y^*) \cdot (y^* - \eta^*) dx &\leq \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} A (\nabla v - A^{-1} y^*) \cdot (\nabla v - A^{-1} y^*) dx \\
+ \frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} A^{-1} (y^* - \eta^*) (y^* - \eta^*) dx,
\end{aligned}$$

Ce qui donne la relation

$$\begin{aligned}
J(v) - I_{\xi^*}^*(\eta^*) &= \frac{1}{2} (1 + \beta) \int_{\Omega} (A \nabla v \cdot \nabla v + A^{-1} y^* \cdot y^* - 2 \nabla v \cdot y^*) dx + \Upsilon(\gamma v) \\
+ \Upsilon^*(\xi^*) - \langle \xi^*, \gamma v \rangle_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \int_{\Omega} A^{-1} (\eta^* - y^*) (\eta^* - y^*) dx.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Introduisons les quantités suivantes :

$$M_1(v, y^*) = D_A(\nabla v, y^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A \nabla v \cdot \nabla v + A^{-1} y^* \cdot y^* - 2 \nabla v \cdot y^*) dx, \tag{3.18}$$

$$M_2(\gamma v, \xi^*) = D_{\Upsilon}(\gamma v, \xi^*) = \Upsilon(\gamma v) + \Upsilon^*(\xi^*) - \langle \xi^*, \gamma v \rangle_{\Gamma_1}, \tag{3.19}$$

$$M_3(y^*, \xi^*) = \frac{1}{2} \inf_{\eta^* \in Q_{\xi^*}^*} \int_{\Omega} A^{-1} (\eta^* - y^*) \cdot (\eta^* - y^*) dx \tag{3.20}$$

Puis (3.12),(3.17)...(3.20) donnent l'estimation :

$$\frac{1}{2} \|v - u\|^2 \leq (1 + \beta) M_1(v, y^*) + M_2(\gamma v, \xi^*) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) M_3(y^*, \xi^*), \tag{3.21}$$

Où  $y^*$ ,  $\xi^*$  et  $\beta$  sont des éléments arbitraires des ensembles  $Y^*$ ,  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbb{R}_+$ , respectivement.

Ici s'annonce la partie la plus importante de notre travail : l'étude des quantités  $M_1, M_2, M_3$ .  
L'inégalité de Young-Fenchel donne que  $M_1$  et  $M_2$  sont évidemment non négatives.

Puisque  $A^{-1}$  est définie positive,  $M_3$  est aussi non négative.

Si la condition  $-\frac{\partial v}{\partial n} \in \partial j(v(x))$   $x \in \Gamma_1$  pour  $v$  et  $y^*$  est vérifiée, alors la quantité  $M_1(v, y^*)$  s'annule.

Donc, ce terme  $p^* = A\nabla u$  si  $\xi^* = \partial\Upsilon(\gamma v)$  sur  $\Gamma_1$ , alors  $M_2 \equiv 0$

Alors  $M_2$  est une mesure d'erreur pour la condition  $u(x) = u_0(x)$ .  $x \in \Gamma_0$  calculée sur  $\Gamma_1$  pour la fonction  $-\xi^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (qui peut être considéré comme une image de la composante normale du flux), et de la trace de  $v$ .

La quantité  $M_3$  s'annule ssi  $y^* \in Q_{\xi^*}^*$  c-à-d si

$$\int_{\Omega} y^* \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \langle \xi^* \cdot \gamma v \rangle_{\Gamma_1} \quad \forall v \in V_0.$$

Cependant

$$\int_{\Omega} y^* \cdot \nabla v dx = \langle \delta_n y^*, \gamma v \rangle_{\Gamma_1} - \int_{\Omega} \operatorname{div} y^* \cdot v dx.$$

Alors, on retrouve la conclusion que ce terme disparaît ssi

1. L'équation d'équilibre  $-\sigma_n(x) \in \partial j(v(x))$   $x \in \Gamma_1$  est vérifiée .
2. La relation  $\delta_n y^* = -\xi^*$  est vérifiée sur  $\Gamma_1$  .

$\sigma_n$  : Le tenseur.

$\delta_n$  : La trace normale sur  $\Gamma_1$ .

## CONCLUSION

Pour conclure, on est arrivé à estimer  $\|v - u\|$  où  $v$  représente la solution approchée du problème  $(\mathcal{P})$  par la formule (3.21). L'étude explicite de cette formule nécessite, une connaissance physique, chose qui nous a dépassé par manque de connaissance et manque de temps.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.Repin & J.Valdman, *Functional A Posteriori Error Estimation for Problems with Non linear Boundary Conditions*, Mathematics Subject Classification. Primary 65N30(1991).
- [2] H.Chouite & S.Bouzerde, *Estimation D'erreur à Posteriori Pour Le problème de Dirichlet*, Mémoire en master de l'université du 20 Août 1955 Skikda, (juin 2015).
- [3] S.Lagraf, *Les inéquations Variationnelles Stationnaires*, Cours Master de l'université du 20 Août 1955 Skikda, (2022).