

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Sur quelques méthodes de régularisation des problèmes
mal posés**

Option : Analyse fonctionnel appliquée

Par :

Harnane Boutheina

Encadré par : Settara Loubna

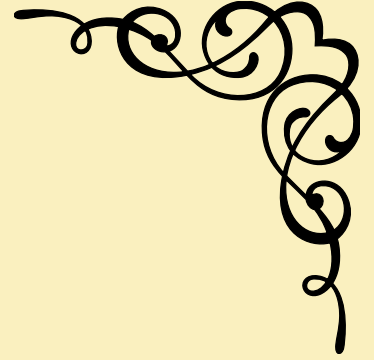
M.C.B U.SKIKDA

Devant le jury :


Président(e) : Mouy Mounia
Examineur: Toumi Habiba

M.A.A U. SKIKDA
M.A.A U. SKIKDA

Année : 2022/2023



Dédicaces

 Je dédie ce travail:

A

L'homme que ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et bonheur, qui n'a jamais cessé de me soutenir. Mon père Laiche.

A

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, a vie maman que j'adore Fatiha.

A

Mon frère AbdRaouf, et mes sœurs, Ibtissem, Salma et Ines.

A

Mes amis qui étaient toujours à mes cotés et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études, mes collègues d'études Khaoula, Asma, Anis ...

Merci à tous le monde

★ ★ ★



Remerciement

Avant tout, je tiens à remercier le Dieu Allah tout puissant qui m'a donné la santé, le courage, la détermination, la volonté, et la patience à mener ce mode

Je voudrais également remercier infiniment mon encadrant **Settara Loubna** de m'avoir prodigué son temps, sa patience tout au long de ce pré

Je tiens aussi à remercier mon prof Hannache Amel pour sa présence et son apport po

Je remercie de
voudraient consacrer à l'analy

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs de mathématique et informatique qui ont contribué à mon formation.

Résumé

Dans le présent travail on étudie la stabilité des problèmes rétrogrades mal posés pour des différents équations différentielles. A cette effet nous proposons quelques méthodes de régularisation, les résultats de convergence et les estimations d'erreurs sont valable. Finalement, nous comparons deux méthodes de régularisation pour pouvoir estimer la meilleur entre eux numériquement.

Mots clés : problème de Cauchy mal posé, méthode de Thikhonov, valeur singulière, régularisation.

Abstract

In the present work we study the stability of ill-posed retrograde problems for various differential equations. For this purpose we propose some regularization methods, convergence results and error estimates are valid. Finally, we compare two regularisation method in order to estimate the best between them numerically.

Key words : ill-posed Cauchy problem, Tikhonov method, SVD method, regularization.

ملخص

في هذه المذكرة، ارتأينا لدراسة ثبات مسائل كوشي سيئة الطرح لمختلف المعادلات التفاضلية. لهذا الغرض اقترحنا بعض طرق التسوية، مع دراسة مختلف نتائج التقارب وتقديرات الخطأ. في الأخير، اخترنا المقارنة العددية بين طريقتين للتسوية حتى نتمكن من اختيار التقدير الأفضل بينهما.

الكلمات المفتاحية: مسألة كوشي سيئة الطرح - طريقة تيجونوف، القيمة المفردة، التسوية.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Notions fondamentales	6
1.1 Espace de Hilbert	7
1.1.1 Rappel sur les espaces de Hilbert	7
1.1.2 Les opérateurs linéaires continues dans un espace de Hilbert	12
1.1.3 Opérateurs intégraux et équations intégrales	16
1.2 Calcul matriciel	18
1.2.1 Notions et définitions	18
1.2.2 Rédaction des matrices	21
1.2.3 Rappel sur les normes matricielles	21
1.2.4 Le conditionnement	23
2 Problème mal posé et méthodes de régularisation	25
2.1 Modélisation des problèmes inverses	26
2.1.1 Notion du problème inverse	26
2.1.2 Problème inverse mal posé	28
2.1.3 Exemples des problèmes inverses mal posés	29
2.2 Les méthodes directes	38
2.2.1 La méthode de Tikhonov	38
2.2.2 La méthode des moindres carrées	44
2.3 Les méthodes itératives	46

2.3.1	La méthode de Landweber	46
2.4	La décomposition en valeurs singulières S.V.D	48
3	Simulation numérique ,comparaison des méthodes Tikhonov et S.V.D	60
3.1	Position du problème	61
3.2	Application de la méthode de Tikhonov	61
3.2.1	A et b exacts	62
3.2.2	A exacte et b perturbé	64
3.2.3	A perturbé et b exact	66
3.3	application de la méthode de régularisation de décomposition en valeurs singulières	68
3.3.1	A et b exacts	68
3.3.2	A exact et b perturbé	69
3.3.3	A perturbé et b exact	70
3.4	Interprétation des résultats	71
	Conclusion	73
	Bibliographie	78

INTRODUCTION

Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles auxquelles sont jointes des conditions aux limites s'exprimant sur la frontière du domaine où le phénomène évolue, ainsi que des conditions initiales, finales ou autres.

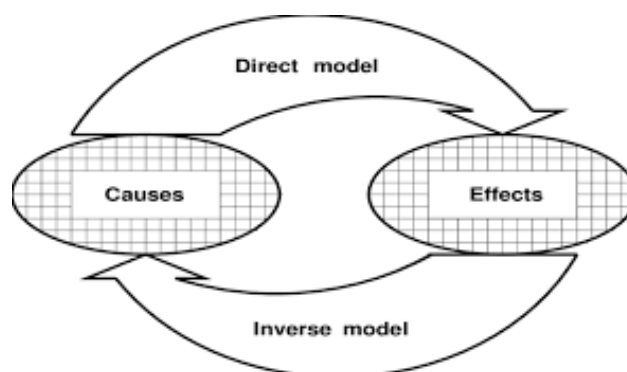
Généralement, la modélisation d'un problème est suivie d'une analyse théorique et d'une implémentation numérique.

Certains de ces problèmes, qui apparaissent dans beaucoup de domaines pratiques des sciences et des techniques; comme la médecine (échographie, scanners, rayons X, ...), l'énergie (calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits) et autres, ne peuvent être traités directement.

Pour les résoudre on est contraint de passer par une étape précédant l'analyse théorique et qui est régularisation (ces problèmes sont dits mal posés).

Un problème inverse est une situation, dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiés à partir d'observation (ou mesures) du phénomène.

C'est en quelque sorte, la contrainte d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle dont on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct.



Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de remonter les valeurs des paramètres.

La résolution du problème inverse passe donc en générale par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct, qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesure.

Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique. On retrouve des problèmes inverse dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de système complexe pour lesquels on a accès qu'à un petit nombre de mesures, par exemple : la terre en géophysique, les tissus organiques en imagerie médicale, l'univers en cosmologie pétrolière tomographie en médecine, déconvolution (en imagerie notamment), détermination des constantes d'une réaction chimique, détermination de la forme d'un obstacle par radar,...

Les problèmes inverse sont typiquement des problèmes mal posés. Cette notion de problèmes bien et mal posés a été introduite par le mathématicien

français Jacques Hadamard en 1902 à propos des équations aux dérivées partielles et leurs interprétations physique. Au sens de Hadamard, un problème est bien posé lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- ✎ La solution doit exister.
- ✎ La solution doit être unique
- ✎ La solution doit être stable, c'est à dire qu'elle doit dépendre continûment des données initiales.

Le problème est mal posé "ill-posed" en anglais si l'une de ces propriétés n'est pas satisfaite.

Nous allons à présent donner de façon plus formelle l'expression d'un problème inverse linéaire. Celui-ci s'exprime sous la forme d'une équation :

$$Ax = b.$$

Où A est un opérateur défini sur un espace métrique E à valeur d'un autre espace métrique F . On cherche à trouver x à partir de b .

En mathématiques, la **régularisation** est une procédure qui consiste à modifier un problème **mal posé** par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés (bien posé) rendant son étude théorique et numérique plus aisée.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de **régularisation** ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy **mal posé**. Parmi elles, on cite :

- ❖ La méthode de **régularisation** de Tikhonov [2] est la méthode de **régularisation** la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original **mal posé** en un problème de minimisation.
- ❖ La méthode de Quasi-réversibilité, introduite par Lattes et Lions (1969) [44], qui consiste à transformer le problème de Cauchy **mal posé** d'ordre 2 en un problème différentiel **bien posé** d'ordre plus élevé (d'ordre 4), en perturbant l'opérateur-coefficient de l'équation. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre le problème de Cauchy, notam-

ment : Kilbanov et Santosa [36] et plus récemment Bourgeois [31]

❖ La méthode de **régularisation** par les conditions non locales "**Quasi-Boundary Value Method**" introduite par Showalter [42], L'idée de cette méthode est de remplacer le problème **mal posé** par un problème **bien posé**, dans lequel on perturbe la condition finale en la remplaçant par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre α . Elle a été utilisée par plusieurs auteurs, comme D.N.Hào [6, 7].

❖ La méthode de décomposition en valeurs singulières (S.V.D), est considéré comme étant un outil puissant, grâce aux multiples propriétés qu'elle offre. Les différentes contributions de mathématiciens célèbres ont permis l'élaboration de cet outil. Camille Jordan(1838-1921), et James Joseph Sylvester (1814-1897), pour parvenir à cette décomposition ont travaillé à partir des formes bilinéaires. Tandis que Erland Schmidt (1876-1959) et Hermann Weyl (1885-1955) ont utilisé une approche dérivées équations intégrales.

L'étude intensive des problèmes inverses est dictée par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique.

Toute problématique directe génère une variété de problèmes inverses, qui donne naissance à des questions théoriques et des défis numériques.

Contenu du mémoire

Ce mémoire s'intéresse au quelques méthodes de résolution des problèmes inverses mal posés. il est subdivisé comme suit :

☞ Dans le premier chapitre, on rappelle certaines notions préliminaires fondamentales. Nous donnerons des définitions et les outils de base d'analyse fonctionnelle, en particulier nous présenterons la théorie des opérateurs linéaires nécessaire aux développement des méthodes proposées dans ce manuscrit.

☞ Au chapitre deux, nous présenterons différentes types de méthodes de régularisation des problèmes inverses mal posés illustrées par des exemples.

✎ Le troisième chapitre est consacré à une application numérique en Matlab sur un problème mal conditionné on compare la méthode de décomposition en valeur singulière et la méthode de Tikhonov au cas où l'opérateur A^{-1} n'est pas continu (manque de stabilité).

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les espaces de Hilbert et le calcul matriciel.

Sommaire

1.1	Espace de Hilbert	7
1.1.1	Rappel sur les espaces de Hilbert	7
1.1.2	Les opérateurs linéaires continus dans un espace de Hilbert	12
1.1.3	Opérateurs intégraux et équations intégrales	16
1.2	Calcul matriciel	18
1.2.1	Notions et définitions	18
1.2.2	Rédaction des matrices	21
1.2.3	Rappel sur les normes matricielles	21
1.2.4	Le conditionnement	23

Références

- Gregoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation une introduction à la modélisation mathématique et la simulation numérique*. Edition de l'école polytechnique, Mai 2006.
- H.Brezis ; *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson (1993).

- Jean-pierre aubin ; *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tome 2, Presses universitaires de France, puF (1987).
- Li.Daniel ; *Cours d'analyse fonctionnelle* ISBN 978-2-7298-83058 ©Ellipses Édition Marketing S.A.,rue Bague 75740 Paris cedex 15(2013).
- N.I.Akhiezer and I.M.Glazman. *Theory of linear operator in Hilbert space*, translated from the Russian by Merlynd Nestell p. Cm. Originally published : New York : F.Ungar Pub.Co., cl961- cl963.Dover Publications, Inc.New York, (1993).
- P.Lévy-Bruhl ; *Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés*, Dunod (2003).
- W.Hengartner, M.Lambert, C.Reischer. *Introduction à l'analyse fonctionnelle*. Les Presses de l'université du Québec, (1981).

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Rappel sur les espaces de Hilbert

Définitions

Définition 1.1 [30] [24] (Norme)

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\|\cdot\|$:

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1. a) $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$ et b) $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$. (homogénéité)
3. $\forall (x, y) \in E^2 : \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$. (inégalité triangulaire)

Si on supprime le 1.b), on dit que $\|\cdot\|$ est une semi norme.

Exemple 1.1

Dans le cas où E est de dimension finie, donc les normes suivantes sont les plus utilisées :

$$(i) \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$(ii) \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(iii) \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Définition 1.2 [24] [47](Produit scalaire)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire de $E \times E$ dans \mathbb{R} symétrique et définie positive, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, c'est à dire :

1. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:
 $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Définition 1.3 [24]

Un espace pré-hilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple 1.2

1. Le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n est définie par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace vectoriel des fonctions carrés intégrables sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \infty \right\}$$

est un espace pré-hilbertien si on le munit du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Définition 1.4 [24](Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 1.3

1. Tout espace pré-hilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
2. L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

est un espace de Hilbert.

Propriétés élémentaires

Soit H un espace de Hilbert.

Notation 1.1 [24]

puisque $\langle x, x \rangle \geq 0$, on peut poser :

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Proposition 1.1 [24]

pour tout $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle .$$

Théorème 1.1 [24](inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $x, y \in H$:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|.$$

Définition 1.5 [24][30]

Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert H sont dits orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0,$$

et on écrit alors $x \perp y$.

Théorème 1.2 [24](Théorème de Pythagore)

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des éléments de H , deux à deux orthogonaux, alors :

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2,$$

c'est-à-dire :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition 1.6 [24]

L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble :

$$A^\perp = \{y \in H; y \perp x, \forall x \in A\},$$

et on a $B^\perp \subseteq A^\perp$ si $A \subseteq B$.

Lemme 1.1 [24](Identité du parallélogramme)

Pour tout $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



Théorème 1.3 (Projection)[24]

Soit M sous ensemble de H convexe fermé et non vide. Alors, pour tout point $x \in H$, il existe $y \in M$, y unique tel que :

$$\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Corollaire 1.1 [24][30]

Pour tout sous-espace vectoriel fermé F de E , on a :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Bases hilbertiennes**Définition 1.7 [24]**

On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert H toute suite (e_n) d'éléments de H tel que :

$$\begin{cases} \|e_n\|_H = 1, \forall n, \\ \langle e_n, e_m \rangle = 0, \forall n \neq m. \end{cases}$$

L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H si (e_n) est une base hilbertienne alors tout $u \in H$ s'écrit :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n;$$

et vérifie l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2;$$

un tel développement est unique, c'est-à-dire si :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n;$$

avec : $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, alors : $u_n = \langle u, e_n \rangle$.

Exemple 1.4

Les deux suites de fonctions suivantes :

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n\pi) \right)_{n \geq 1}, \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\pi) \right)_{n \geq 1},$$

sont des bases Hilbertiennes de $L^2(0, 2\pi)$.

1.1.2 Les opérateurs linéaires continus dans un espace de Hilbert

Soient H et G deux espaces de Hilbert.

Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire

Définition 1.8 [24] [47]

Un opérateur linéaire et continue A est une application linéaire continue définie de H dans G , c'est-à-dire qui vérifie :

1. $\forall x \in H, Ax \in G$;
2. $\forall (x, y) \in H \times H, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$;
3. $\exists M > 0, \forall x \in H, \|Ax\|_G \leq M \|x\|_H$.

Le plus petit nombre M qui vérifie le 3^{ème} point ci-dessus s'appelle la norme de l'opérateur A :

$$\|A\| = \sup_{x \in H} \frac{\|Ax\|_G}{\|x\|_H}.$$

Rappelons les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire :

1. Le noyau de A est le sous-espace de E : $\ker A = \{u \in E, Au = 0\}$.

2. L'image de A est le sous-espace de F : $\text{Im } A = \{v \in F, \exists u \in E, Au = v\}$.

Définition 1.9 [24] [47]

On dit que l'opérateur $A : H \longrightarrow G$, est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$, un ensemble borné dans l'espace G .

Théorème 1.4 [24] [47]

Un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow G$, tel que $\mathcal{D}(A) = H$ est borné si et seulement si pour tout $x \in H$, on a :

$$\|Ax\| \leq c\|x\|.$$

Définition 1.10 [24] [47]

Un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow G$, défini sur $\mathcal{D}(A) = H$ est continu, s'il est continu en $0 \in H$.

Théorème 1.5 [24] [47]

Soit un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow G$, tel que $\mathcal{D}(A) = H$. A est continu si et seulement s'il est borné.

Théorème 1.6 [24](de Riesz)

Soit L une forme linéaire continue sur H . Il existe un unique vecteur $x_0 \in H$ tel que :

$$L(x) = \langle x_0, x \rangle, \forall x \in H.$$

Opérateur auto-adjoints

Théorème 1.7 [24]

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire continu. Il existe un unique opérateur continu de H dans H , noté A^* est appelé l'adjoint de A , tel que :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \forall x \in H, y \in H,$$

de plus, on a :

$$(A^*)^* = A,$$

et

$$\|A^*\| = \|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.2 [24]

Soient A et B deux opérateurs linéaires, on a :

1. La linéarité : $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.
2. La composition : $(AB)^* = B^*A^*$.
3. si A est inversible, A^* l'est aussi et on a $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Il existe des relations remarquables entre le noyau et l'image d'un opérateur et ceux de son adjoint.

Proposition 1.3 [24]

pour un opérateur A sur les espaces de Hilbert, on a :

1. $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$.
2. $\overline{\text{Im } A^*} = (\ker A)^\perp$.

(Où \overline{X} indique l'adhérence de l'ensemble X).

Définition 1.11 [24]

un opérateur A linéaire continue est dit auto-adjoint s'il est égal à son adjoint, c'est à dire si quelque soit x, y dans H :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

Remarque 1.1

En dimension finie, Les opérateurs auto-adjoints sont ceux qui ont matrice symétrique.

Spectre d'un opérateur linéaire

Soit A un opérateur linéaire défini de H dans G tel que $\mathcal{D}(A) = H$.

Définition 1.12 [24]

On dit que le point λ est un point régulier de A si l'opérateur $(A - \lambda I)$ est inversible, i.e : $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Définition 1.13 [24]

L'ensemble des points réguliers de l'opérateur A est appelé ensemble résolvant de A et noté par $\rho(A)$ tel que :

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R} / (A - \lambda I)^{-1}, \text{ existe et borné} \} .$$

1. Si $\lambda \in \rho(A)$; l'opérateur linéaire et borné $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est appelé résolvant de A .
2. L'ensemble complémentaire de $\rho(A)$ dans le plan complexe est appelé le spectre de l'opérateur A est noté par $\sigma(A)$ i.e $\sigma(A) = \mathbb{R} / \rho(A)$.
3. Le nombre λ est dit valeur propre de l'opérateur A s'il existe $x \in D(A)$, tel que :

$$Ax = \lambda x \quad , \quad x \neq 0,$$

L'élément x est le vecteur propre de A associé à λ . Toute valeur propre de A est un point de son spectre, l'opérateur $(A - \lambda I)$ est donc non inversible.

4. On dit que λ est valeur propre, et on note $\lambda \in VP(A)$ si $\ker(A - \lambda I) \neq 0$.

Remarque 1.2

Si $\dim E < \infty$ alors $\sigma(A) = VP(A)$.

Proposition 1.4 [24]

Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et :

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|].$$

Proposition 1.5 [24]

Soit A un opérateur linéaire et borné, alors :

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}.$$

1.1.3 Opérateurs intégraux et équations intégrales

Définition et première propriétés

Soit $H = L^2([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Théorème 1.8 [24]

Soit K une fonction de l'espace $L^2([c, d] \times [a, b])$. L'opérateur :

$$Au(t) = \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad t \in [a, b]; \quad (1.1)$$

est bien défini en tant qu'opérateur de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$.



Preuve

La linéarité est évidente, seule la continuité .

Bien entendu, nous voulons majorer :

$$\int_c^d |Au(t)|^2 dt = \int_c^d \left(\int_a^b K(t, s)u(s) \right)^2 dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_c^d |Au(t)|^2 dt \leq \int_c^d \left(\int_a^b |K(t, s)|^2 ds \right) \left(\int_a^b |u(s)|^2 ds \right) dt \leq M^2 \int_a^b |u(s)|^2 ds.$$

Définition 1.14 [24]

L'opérateur A défini au théorème (1.8) s'appelle l'opérateur intégral de noyau K .

Exemple 1.5 (Opérateur de Volterra)

Il s'agit d'opérateurs de la forme :

$$Au(t) = \int_0^t K(t, s)u(s)ds, \text{ pour } t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

avec $K \in ([0, 1] \times [0, 1])$.

Remarque 1.3

Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est-à-dire de la forme :

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^p a_j(t)b_j(s). \quad (1.3)$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

Il est habituel de classer les équations intégrales que l'on peut associer à l'opérateur intégral A en deux catégories :

Équations de première espèce Il s'agit de l'équation :

$$Au = f, \text{ où } f \in L^2(c, d) \text{ est donnée.} \quad (1.4)$$



Équations du second espèce Il s'agit de l'équation :

$$u - Au = f, \text{ où } f \in L^2(c, d) \text{ est donnée.} \quad (1.5)$$

1.2 Calcul matriciel

1.2.1 Notions et définitions

Définition 1.15 [40][14]

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps, muni de bases $(e_j)_{j=1}^n$ et $(f_i)_{i=1}^m$ respectivement relativement à ces bases, une application linéaire $A : E \rightarrow F$ est représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Une matrice A est savent notée $[a_{ij}]$ où a_{ij} représente l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne.
- Les éléments a_{ij} de la matrice A étant définis d'une façon unique par les relations :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i, \quad (1 \leq j \leq n)$$

- L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et à coefficient réels est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.
- Étant donné une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on note $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice transposé transposée de la matrice A définie d'une façon unique par $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.
- Étant donné une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice adjoint de la matrice A définie d'une façon unique par $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Définition 1.16 [40][14](Inverse d'une matrice)

Soit A une matrice d'ordre n . On dit que A est inversible et régulière s'il existe une unique matrice notée A^{-1} , telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

(A^{-1} est appelée la matrice inverse de A).

Remarque 1.4

Une matrice non inversible est dite singulière.

Définition 1.17 [40][14]

Si $A = (a_{ik})$ est une matrice de type (m, l) et $B = (b_{kj})$ est une matrice de type (l, n) , leur produit (AB) est la matrice de type (m, n) définie par :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj}.$$

On rappelle que :

- $(AB)^t = B^tA^t$.
- $(AB)^* = B^*A^*$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (Si A est inversible)

Définition 1.18 [40][14]

Soit A une matrice de $M_m(\mathbb{K})$. La matrice A est dite :

- Symétrique : Si A est réelle et $A = A^t$.
- Hermitienne : Si $A = A^*$, avec A^* est la matrice adjoint de A .
- Orthogonale : Si A est réelle et $AA^t = A^tA = I_n$, (avec I est la matrice unité.)
- Unitaire : Si $AA^* = A^*A = I_n$.
- Normale : Si $AA^* = A^*A$.

- *Diagonale* : Si $a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j.$
- *Anti-symétrique* : Si $A = -A^t.$
- *Semi-définie positive* : Si $x^t A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- *Définie positive* : Si $x^t A x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Définition 1.19 [40][14](Trace d'une matrice)

La trace d'une matrice A d'ordre n est la somme de ces coefficients diagonaux :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

On a pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ les relations suivantes sont évidentes :

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B); \quad tr(AB) = tr(BA); \quad tr(\alpha A) = \alpha tr(A).$$

Définition 1.20 [40][14](Valeurs et vecteurs propres d'une matrice)

□ Les valeurs propres d'une matrice A d'ordre n sont les n racines, réelles ou complexe, distinctes ou confondues, du polynôme caractéristique :

$$P_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \longrightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

□ A toute valeur propre λ d'une matrice A est associé au moins un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda x$ est appelé vecteur propre de la matrice A correspondante à la valeur propre λ .

□ Le spectre de la matrice A est les sous ensemble

$$sp(A) = \bigcup \lambda_i(A).$$

On rappelle les propriétés suivantes :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad ; \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

□ Le rayon spectral d'une matrice A est le nombre positif défini par :

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, 1 \leq i \leq n.$$

1.2.2 Rédaction des matrices

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $A : E \rightarrow E$ une application linéaire représentée par une matrice carrée $A = (a_{ij})$ relativement à une base (f_i) la même application est représentée par la matrice $B = P^{-1}AP$ ou P est la matrice inversible dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne est formé des composantes du vecteur (f_j) dans la base e_i la matrice P est appelée la matrice de passage de la base (e_i) dans la base (f_j) .

Théorème 1.9 [40][14]

- Étant donnée une matrice carrée A il existe une matrice unitaire U telle que la matrice $U^{-1}AU$ soit triangulaire.
- Étant donnée une matrice normale A il existe une matrice unitaire U telle que la matrice $U^{-1}AU$ soit diagonale.
- Étant donnée une matrice symétrique il existe une matrice orthogonale O telle que la matrice $O^{-1}AO$ soit diagonale.

1.2.3 Rappel sur les normes matricielles

Définition 1.21 [40][14]

Soit M_n l'ensemble des matrices d'ordre n à élément dans le corps \mathbb{K} une norme matricielle est une application $\|\cdot\| : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ pour toute $A \in M_n$.
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, A \in M_n$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pour tout $A, B \in M_n$.
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tout $A, B \in M_n$.

Définition 1.22 [40][14]

On dit qu'une norme matricielle $\|\cdot\|$ est compatible ou consistante avec une norme vectorielle $\|\cdot\|$ si :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Afin de pouvoir définir la notion du norme naturelle, nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 1.10 [40][14]

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle. La fonction :

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

est une norme matricielle. On l'appelle norme matricielle subordonnée ou associée à la norme vectorielle. Remarquons que ceci équivaut à :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Les normes matricielles subordonnées sont données par les p -normes :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

La norme 1 et la norme infinie se calculent facilement :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \quad \text{norme somme des colonnes.}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \quad \text{norme somme des lignes.}$$

1.2.4 Le conditionnement

Le système $Ax = b$ est sensible aux erreurs d'arrondis, c'est à dire, une erreur infime sur le second membre donne comme conséquence une erreur notable sur la solution calculée. On dira que la matrice est mal conditionnée.

Définition 1.23 [40][14]

Soit A une matrice supposé inversible, soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle consistante subordonnée a une norme vectorielle sur \mathbb{R}^n , Le conditionnement de A est définie par le produit :

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Proposition 1.6 [40][14]

Pour tout matrice carré $A \in M_{m \times n}$, on a :

$$\text{cond}(A) \geq 1.$$

En effet pour tout norme subordonnée on a :

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

L'intérêt du conditionnement repose sur le théorème d'estimation d'erreur suivant :

Théorème 1.11 [40][14]

Soit A une matrice inversible, et soit $b \neq 0$ et δb des vecteurs de \mathbb{R}^n .

① Soit x et $x + \delta x$ les solutions respectives des systèmes $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = (b + \delta b)$, alors on a :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \leq \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

② Soit x et $x + \delta x$ les solutions respectives des systèmes $Ax = b$ et $(A +$

$\delta A)(x + \delta x) = b$, alors on a :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \text{cond}(A) \leq \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

De plus ces inégalités sont optimales.

Propriété 1.1 [40][14]

- $\text{cond}(\alpha A) = \alpha \cdot \text{cond}(A)$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$.
- $\text{cond}(I) = 1$.
- L'erreur sur la solution est inférieure à l'erreur relative sur les données multiplié par le conditionnement $\text{cond}(A)$.
- Cette borne est optimale.
- La valeur du conditionnement dépend de la norme vectorielle utilisée.

Remarque 1.5

On dira qu'une matrice est bien conditionnée si son conditionnement est proche de 1 (sa valeur minimale) et qu'elle est mal conditionnée si son conditionnement est grand.

Proposition 1.7 [40][14]

Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Réciproquement pour toute matrice A et pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ (qui dépend de A et ε) tels que :

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

CHAPITRE 2

PROBLÈME MAL POSÉ ET MÉTHODES DE RÉGULARISATION

Pour résoudre les problèmes inverses et contourner leur instabilités, on a recours à l'utilisation des méthodes dites de régularisation dont le principe est de substituer au problème mal posé une suite de problèmes bien posés dépendant d'un paramètre dit de régularisation. Les solutions approchées de ces derniers deviennent stables vis à vis des données perturbées.

Sommaire

2.1	Modélisation des problèmes inverses	26
2.1.1	Notion du problème inverse	26
2.1.2	Problème inverse mal posé	28
2.1.3	Exemples des problèmes inverses mal posés	29
2.2	Les méthodes directes	38
2.2.1	La méthode de Tikhonov	38
2.2.2	La méthode des moindres carrées	44
2.3	Les méthodes itératives	46
2.3.1	La méthode de Landweber	46
2.4	La décomposition en valeurs singulières S.V.D	48

Références

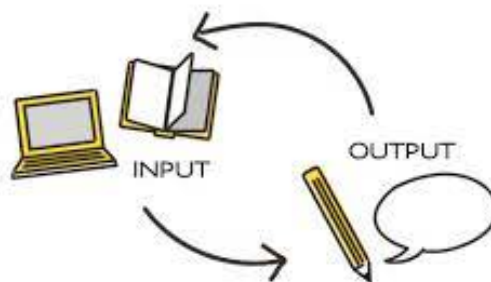
- M.Kern. *Problèmes inverses aspects numériques*. Lecture, école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002-2003).
- M.T.Nair. *Linear operator equations : approximation and regularization*. World Scientific, (2009).
- Kirsch, A. (2011), *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, (Vol. 120). New York : Springer.
- H.W.Engl, M.Hanke and A.Neubauer : *Regularisation of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- R. Ahmed Yahia, *Sur une classe de problème non standards décrits par des équations différentielle*, Mémoire de Magister en Mathématiques, université Mentouri Constantine, (2007) .

2.1 Modélisation des problèmes inverses

2.1.1 Notion du problème inverse

Deux problèmes sont dits inverse l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause.

Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct. Consistant à déduire les effets, les causes étant connues.



Exemple 2.1

La dérivation et l'intégration sont deux problèmes inverse l'un de l'autre.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = v(t), \\ u(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow u(x) = \int_0^x v(t)dt.$$

Problème directs et problème inverse

Problème directs : si on note par P l'espace des paramètres, E l'espace des excitations et R l'espace des états (réponses), alors le problème direct $L : P \times E \rightarrow R$, consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations x et des paramètres p .

les opérateurs de la physique donnent en général la réponse d comme fonction de x et $p : L(x, p) = d$, la notation L symbolise les équations de la physique du problème considéré, on parle parfois du modèles physique.

Problème inverse : d'un point de vue "physique" ou "expérimental", on parle du problème inverse lorsqu'on se trouve dans une situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique p inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur d directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement d à partir de p (ce que l'on note symboliquement $d = G(p)$).

Problème direct et problème inverse en E.D.P

Dans le cas de problèmes directs, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse aux solutions $u : \Omega \times [0, \infty] \ni (x, t) \rightarrow u(x, t) \in E$ de

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1}, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p}) = f \text{ dans } \Omega, \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g. \text{ sur } \partial\Omega \times [0, \infty] \\ , u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

♦ Dans le cas de problèmes inverses, à partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'E.D.P (mesure internes, mesure frontière). On doit

retrouver par exemple :

- $f, g_1, \dots, g_p \longrightarrow$ problème d'identification de source .
- $u_0 \longrightarrow$ problème d'identification des données initiales .
 - $F \longrightarrow$ problème d'identification de coefficients .
 - $\Omega \longrightarrow$ problème d'identification géométrique .

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé.

2.1.2 Problème inverse mal posé

Problème bien posé et problème mal posé

Définition 2.1 [34]

Soit E et F deux espaces métrique est $A : E \longrightarrow F$ tel que :

1. A est injective.¹
2. A est surjective.²
3. A^{-1} n'est pas continue.

On dit alors que le problème inverse, à savoir connaissant $g \in F$, trouver $f \in E$ tel que $f = A^{-1}g$, est mal posé.

Définition 2.2 [34]

Soit X et Y deux espace de Banach, et $A : X \supset D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non linéaire). Le problème inverse est bien posé au sens de HADAMARD s'il vérifie les conditions :

Existence de la solution : pour tout $y \in Y$, il a au moins un $x \in X$ tel que $Ax = y$.

Unicité de la solution : pour tout $y \in Y$, il ya au plus un solution $x \in X$ avec $Ax = y$.

1. f est injective si pour tous a, b dans E , $f(a) = f(b)$ entraîne $a = b$.
2. Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite surjective si, pour tout élément $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet toujours au moins une solution $x \in E$.

Stabilité : La solution x dépend continument de la donné y .

Si au moins une de ces trois condition n'est pas vérifiée, alors Le problème est dit mal posé. En pratique, cela souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que si elle existe une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Remarque 2.1

Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sur très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il ya un problème de stabilité, Le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesure ou d'arrondis.

2.1.3 Exemples des problèmes inverses mal posés

Exemple 2.2

Il est à noter que la définition de problème mal posé ne se rapporte qu'au couple donné d'espace métrique (F, U) car, transposé dans d'autre espace métrique, le même problème peut s'avérer bien posé, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant :

Le calcule de la série de Fourier à coefficients approchés dans la métrique de l_2 .

considérons une série de Fourier que nous écrivons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Et supposons que chaque coefficients a_n soit entaché d'une erreur $\frac{\varepsilon}{n}$. (à l'exception de a_0 évidemment), nous écrivons donc :

$$c_n = a_n + \frac{\varepsilon}{n} \quad ; \quad c_0 = a_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0.$$

La fonction $f(x)$ est remplacée par la fonction $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx).$$

En supposant que f et g sont continues et bornées pour appliquer la norme (1) dans l_2 .

Dans la métrique l_2 , les coefficients différent de la quantité :

$$\epsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon\pi}{\sqrt{6}}.$$

Par conséquent, ϵ_1 est aussi petite que l'on veut par un choix approprié de la quantité ϵ .

D'autre part, si la distance entre $f(x)$ et $g(x)$ est donnée par la norme de la convergence uniforme, nous avons :

$$\epsilon_2 = \sup |g(x) - f(x)| = \sup \left| \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \right| = \epsilon \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right|.$$

Cette quantité peut être aussi grande que l'on veut.

Ainsi, si l'écart de la somme de la série est pris dans la métrique de c , la sommation de la série de Fourier n'est pas stable.

Exemple 2.3 (L'équation de Laplace)

Considérons le problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel (l'exemple cité par Hadamard) trouver la solution de l'équation :

$$\Delta u(x, y) = 0,$$

à partir des données initiales, c'est à dire la solution vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & ; \quad -\infty < x < +\infty \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des données.

Si l'on pose :

$$f_1(x) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin(ax).$$

Alors la solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$u_1(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin(ax) \sinh(ay) \quad ; \quad a > 0.$$

Si l'on prend :

$$f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0;$$

donc la solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$u_2(x, y) \equiv 0.$$

Si nous estimons la différence dans les données initiales et la solution dans l'espace métrique C , nous avons :

$$\|f_1 - f_2\|_C = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

et

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C(\Omega)} = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \sup_x \left| \frac{1}{a} \sin(ax) \right| = \frac{1}{a}.$$

La dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on peut lorsque a est assez grand c'est-à-dire :

$$\|f_1 - f_2\|_C \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad a \longrightarrow \infty,$$

et

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad a \longrightarrow \infty.$$

Pour tout $y > 0$ fixé, la différence entre la solution :

$$\|u_1 - u_2\|_C = \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin(ax) \sinh(ay) \right| = \frac{1}{a^2} \sinh(ay).$$

Pour tout $y > 0$ fixé, peut être arbitrairement grand quand a plus grand.

$$\frac{1}{a^2} \sinh(ay) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad a \longrightarrow \infty \quad \forall y,$$

et donc :

$$\|u_1 - u_2\|_C \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad a \longrightarrow \infty.$$

Alors le problème est instable donc mal posé.

Exemple 2.4

On souhaite résoudre le système linéaire $AX = Y$, où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Si Y est le vecteur :

$$Y = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix},$$

alors on trouve :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais, si Y est le vecteur :

$$Y = \begin{pmatrix} 36,1 \\ 26,9 \\ 37,1 \\ 34,9 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$X = \begin{pmatrix} 60/7 \\ -70/7 \\ 32/7 \\ -8/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.57 \\ -11.28 \\ 4.57 \\ -1.14 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, de très petites variations sur Y ont conduit à de grandes variations sur X .

De façon précise, si A est une matrice, son conditionnement est $K(A)$. Dans l'exemple précédent, on trouve $K(A) = 546.06$, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^4 i.e :

Ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement Y . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de X .

Exemple 2.5 (Les équations intégrales de première espèce de Fredholm et Voltera)

Si $Au = \int_a^b A(x, y)u(y)dy$ Où $Vu = \int_a^x A(x, y)u(y)dy$, et $A(x, y)$ est un noyau continu sur $D = [a, b] \times [a, b]$, alors les opérateurs A et V sont compacts sur $H = L^2[a, b]$. Ces opérateurs n'admettent pas d'inverser bornés sur H , c'est pour ça les problèmes $Au = f$ et $Vu = f$, sont mal-posés.

Exemple 2.6 (Problème de minimisation)

On considère le problème de minimisation :

$$\phi(u) = \inf \|Au - f\|.$$

On suppose que u_i est l'infimum de $\phi(u_i) \leq \phi(u)$.

Si f est perturbée, donc : $\phi_\delta(u) = \inf \|Au - f_\delta\|$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, l'infimum de $\phi_\delta(u)$ peut ne pas être atteint à un élément u_δ qui est loin de u_i , d'où le graphe $f \rightarrow u_i$, peut être non-continu.

Dans ce cas, ce problème est mal-posé.

Exemple 2.7 (Différentiation et intégration)

La différentiation et intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. L'est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct et à l'intégration comme problème inverse.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ et l'opérateur intégrale A définie par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Il est facile de voir directement que A est un opérateur linéaire et continu de $L^2(\Omega)$, dans lui même.

Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel.

$$\mathfrak{S}(A) = \{f \in H^1(0, 1), g(0) = 0\}.$$

où $H^1(0, 1)$ est l'espace de Sobolev. En effet l'équation $Af = g$ équivalent à $f(x) = g'(x)$ et $g(0)=0$, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons une fonction $g \in C^1([0, 1])$ donne et $n \in \mathbb{N}$.

Soit :

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2x).$$

Alors :

$$f_n(x) = g'_n(x) = g'(x) + n \cos(n^2x).$$

De simple calculs montrent que :

$$\|g - g_n\| = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \theta\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors que :

$$\|f - f_n\| = \|g' - g'_n\| = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \theta(n).$$

Ainsi la différence entre f et f_n peut être arbitrairement grande, alors même que la différence entre g et g_n est arbitrairement petite.

L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continue.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal-posés.

Une petite perturbation sur les données (ici g) peut avoir une influence arbitrairement grand sur le résultat (ici f).

Une second classe de problèmes inverse est l'estimation de paramètre dans l'équation différentielle .

Exemple 2.8

Changeons le signe dans l'équation différentielle :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Delta u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+$$

$$u(x, 0) = v(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

L'équation différentielle est appelée, équation rétrograde de la chaleur.

Par exemple, si $d = 1$ et $v(x) = n^{-1} \sin(nx)$, où n est un entier naturel positif, alors la solution est :

$$u(x, t) = n^{-1} \exp(n^2 t) \sin(nx),$$

vérifier, en la substituant dans l'équation :

$$\|v\|_c = n^{-1} (\longrightarrow 0 \text{ qd } n \longrightarrow \infty); \quad \|u(t)\|_c = n^{-1} \exp(n^2 t) (\longrightarrow \infty \text{ qd } n \longrightarrow \infty).$$

Ce problème est mal posé.

En d'autres termes, trouver la propagation de température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème bien posé. Cependant, trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal-posé.

Exemple 2.9

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in [0, 1], y \in [0, 1]; \\ u(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\pi}{n} \sin(\pi n x) & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Les fonctions $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(\pi n x) \sinh(\pi n y)$ sont solutions du système précédent. Or, pour chaque valeur de n , on peut trouver un nombre $x_n \in [0, 1]$ tel que $\sin(\pi n x_n) = 1$, vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |u_n(x, y)| = \infty.$$

Ce qui prouve que les fonctions de ce problème ne dépendent pas continûment des données initiales.

Exemple 2.10

Soit le problème suivant :

$$Au = f$$

$A \in (H, F)$, H, F deux espaces de Hilbert.

Si A est compact et $\text{Im}(A)$ non fermé alors, le problème est mal posé.

$\text{Im}(A)$ est non fermé $\Rightarrow A^{-1}$ est non borné \Rightarrow la troisième condition n'est donc pas vérifiée.

Le problème reste mal posé.

Exemple 2.11

Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1; \\ 4u(0) = 0. \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution

$$u(x) = e^x - 1.$$

Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \epsilon$, la solution est alors :

$$v(x) = (1 + \epsilon)e^x - 1.$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$v(x) - u(x) = \epsilon e^x.$$

Si x varie dans l'intervalle $[0, 30]$, on a

$$v(30) - u(30) = \epsilon e^{30} \simeq 10^{13}\epsilon.$$

Si la précision des calculs est de 10^{-10} , le problème est numériquement mal

posé, bien que mathématiquement bien posé.

Exemple 2.12

Recherche du prolongement analytique d'une fonction, comme sur une partie d'un domaine, dans le domaine tout entier.

Soit D un domaine fini, E l'arc de courbe appartenant au domaine D . Dans ce cas le problème du prolongement analytique d'une fonction définie sur l'arc de courbe E dans le domaine D tout entier est instable.

En effet, soit z_0 un point à la frontière du domaine D , dont la distance à E est $d > 0$, et $f_1(z)$ une fonction analytique dans D .

La fonction

$$f_2(z) = f_1(z) + \frac{\epsilon}{z - z_0}.$$

où ϵ est un nombre positif connu, est analytique dans D elle aussi.

Ces fonctions diffèrent sur l'ensemble D de la quantité $\epsilon/z - z_0$ dont le module ne dépasse pas ϵ/d .

C'est-à-dire que :

$$|f_2(z) - f_1(z)| < \epsilon/d \text{ sur l'ensemble } E.$$

On peut faire ϵ/d aussi petit que l'on veut par un choix convenable de la valeur de ϵ , Or, dans le domaine D , la différence des fonctions

$$f_2(z) - f_1(z) < \epsilon/z - z_0$$

n'est pas bornée en module. Les problèmes mal posés sont issus de divers domaines de recherche, ils nécessitent souvent une analyse mathématique sophistiquée et des méthodes numériques de haut niveau.

Exemple 2.13

Par exemple, le nombre de racines réelles du polynôme $p(x) = -x^2 + 3x - m$ varie de façon discontinue quand m varie continûment sur la droite réelle. Il y a en effet, 2 racines réelles $m \leq 9/4$, et il n'y en a aucune si $m > \frac{9}{4}$.

 **Preuve**

$$\Delta = 9 - 4m$$

✓ Si $m > 9/4$: $\Delta < 0$ pas de racines.

✓ Si $m \leq 9/4$: $\Delta \geq 0$, deux racines distinctes.

✓ Si $m = 9/4$: une racine double.

2.2 Les méthodes directes

On étudiera les méthodes suivantes : la méthode de Tikhonov, et la méthode des moindres carrés.

2.2.1 La méthode de Tikhonov

Cette méthode de régularisation consiste à résoudre le système linéaire :

$$Ax = y, \tag{2.1}$$

que revient à minimiser :

$$\|Ax - y\|_Y,$$

tels que $x \in X, y \in Y$.

Si X est de dimension infinie et l'opérateur A est compact, ce problème de minimisation est aussi mal posé, voir le lemme suivant :

Lemme 2.1 [34]

Soit $A : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $y \in Y$. Il existe $\hat{x} \in X$ tel que :

$$\|A\hat{x} - y\|_Y \leq \|Ax - y\|_Y.$$

pour tout $x \in X$ si et seulement si $\hat{x} \in X$, est une solution de l'équation :

$$A^*A\hat{x} = A^*y. \tag{2.2}$$

Preuve

Une simple application du théorème du binôme donne :

$$\begin{aligned}\|Ax - y\|^2 - \|A\hat{x} - y\|^2 &= 2\operatorname{Re}(A\hat{x} - y, A(x - \hat{x})) + \|A(x - \hat{x})\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}(A^*(A\hat{x} - y), x - \hat{x}) + \|A(x - \hat{x})\|^2,\end{aligned}$$

pour tout $x, \hat{x} \in X$. Si \hat{x} vérifie $A^*A\hat{x} = A^*y$, alors :

$$\|Ax - y\|^2 - \|A\hat{x} - y\|^2 \geq 0;$$

autrement dit \hat{x} minimise $\|Ax - y\|$. Si, au contraire, \hat{x} minimise $\|Ax - y\|$, alors on substitue $x = \hat{x} + tz$ à tout $t > 0$ et $z \in X$ et on arrive à :

$$0 \leq 2t\operatorname{Re}(A^*(A\hat{x} - y), z) + t^2\|Az\|^2.$$

La division par $t > 0$ et $t \rightarrow 0$ donne $\Re(A^*(A\hat{x} - y), z) \geq 0$, pour tout $z \in X$; i.e $A^*(A\hat{x} - y) = 0$ et \hat{x} solution de l'équation.

On se donne $A : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $y \in Y$ et on veut déterminer $x^\alpha \in X$, qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov :

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2. \quad (2.3)$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.1 [34]

Soit $A : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $\alpha > 0$. La fonctionnelle de Tikhonov J_α admet un seul minimum $x^\alpha \in X$. Ce minimum est la solution unique de l'équation :

$$\alpha x^\alpha + A^*Ax^\alpha = A^*y. \quad (2.4)$$

Preuve

Soit $(x_n) \subset X$ une suite minimisante i.e : $J_\alpha(x_n) \rightarrow I = \inf_{x \in X} J_\alpha(x)$, lorsque n tend vers ∞ . Nous montrons que (x_n) est une suite de Cauchy. Application de la formule binomiale donne :

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) &= 2J_\alpha\left(\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right) + \frac{1}{2}\|A(x_n - x_m)\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2 \\ &\geq 2I + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2. \end{aligned}$$

Le membre gauche converge vers $2I$ lorsque n, m tendent vers l'infini. Ceci montre que (x_n) est une suite de Cauchy et donc convergente. Soit $x_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, en notant que $x_\alpha \in X$. De la continuité de J_α on conclut que $J_\alpha(x_n) \rightarrow J_\alpha(x_\alpha)$; i.e : $J_\alpha(x_\alpha) = I$. Ceci prouve l'existence d'un minimum de J_α . On utilise maintenant la formule suivante comme dans la preuve du lemme précédent :

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x^\alpha) &= 2\operatorname{Re}(Ax^\alpha - y, A(x - x^\alpha)) + 2\alpha\operatorname{Re}(x^\alpha, x - x^\alpha) \\ &\quad + \|A(x - x^\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x^\alpha\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}(A^*(Ax^\alpha - y) + \alpha x^\alpha, x - x^\alpha) \\ &\quad + \|A(x - x^\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x^\alpha\|^2, \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$. A partir de là, l'équivalence de l'équation normale avec le problème de minimisation pour J_α est montrée exactement comme dans la preuve de lemme (2.1). Enfin, nous montrons que $\alpha I + A^*A$ est égal à un pour chaque $\alpha > 0$. Soit $\alpha x + A^*Ax = 0$, la multiplication par x donne $\alpha(x, x) + (Kx, Kx) = 0$; c'est -à-dire $x = 0$.

La solution x^α de l'eq (2.4) peut s'écrire sous la forme $x^\alpha = R_\alpha y$ avec

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* : Y \rightarrow X \quad (2.5)$$

Le choix d'un système singulier (μ_j, x_j, y_j) pour l'opérateur compact A ,

on voit que $R_\alpha y$ a la représentation :

$$R_\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (y, y_j) x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (y, y_j) x_j, \quad y \in Y, \quad (2.6)$$

avec : $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$, Cette fonction q est appelée la fonction de filtre.

La solution de l'équation (2.4) peut être écrit sous la forme $x^\alpha = R_\alpha y$ tel que :

$$R_\alpha := (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* : Y \longrightarrow X. \quad (2.7)$$

On choisissant un système singulière (μ_j, x_j, y_j) pour l'opérateur compact A , on voit que $R_\alpha y$ admet la représentation suivant :

$$R_\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (y, y_j) x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (y, y_j) x_j, \quad y \in Y.$$

avec : $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$. Cette fonction q est appelée la fonction filtre.

Théorème 2.2 [34]

Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact et $\alpha > 0$.

➤ L'opérateur $\alpha I + A^* A$ admet un inverse borné. L'opérateur $R_\alpha : Y \longrightarrow X$ définie par (2.7) forme une stratégie de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. On appelle la méthode de régularisation de Tikhonov. $R_\alpha y$ est déterminé comme la solution unique $x^{\alpha, \delta} \in X$ de l'équation de second espèce :

$$\alpha x^{\alpha, \delta} + A^* A x^{\alpha, \delta} = A^* y^\delta. \quad (2.8)$$

Chaque choix $\alpha(\delta) \longrightarrow 0$ ($\delta \longrightarrow 0$) avec $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \longrightarrow 0$ ($\delta \longrightarrow 0$) est admissible.

➤ Soit $x = A^* z \in \mathfrak{S}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$. On choisi $\alpha(\delta) = \frac{c\delta}{E}$ pour $c > 0$, alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) \sqrt{\delta} E. \quad (2.9)$$



➤ Soit $x = A^*z \in \mathfrak{S}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$. Le choix $\alpha(\delta) = c\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{3}{2}}$, pour $c > 0$, donne l'estimation de l'erreur :

$$\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right)E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}} \quad (2.10)$$

Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour :

$$\|(A^*)^{-1}x\| \leq E \text{ ou } \|(A^*A)^{-1}x\| \leq E.$$

Les valeurs propres de A tendent vers zéro et les valeurs propres de $\alpha I + A^*A$ sont bornées loin de zéro par $\alpha > 0$.

Du théorème précédent, on observe que α a été choisit d'une façon à dépendre de δ et qu'il converge vers zéro quand δ tend vers zéro mais pas plus vite que δ^2 .

Théorème 2.3 [34]

Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact tel que l'image $\mathfrak{S}(A)$ est de dimension infinie. De plus, soit $x \in X$, et on assume qu'il existe une fonction continue $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ avec $\alpha(0) = 0$ telle que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \delta^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

Pour tout $y^\delta \in Y$ avec $\|y^\delta - Ax\| \leq \delta$, ou $x^{\alpha(\delta),\delta} \in X$ résoudre (2.8) Alors $x = 0$.

Ce résultat montre que la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas optimale pour des hypothèses plus fortes sur la solution x .

Le choix de α dans l'équation (2.3) est mis a priori, c'est-à-dire avant de commencer le calcul de x^α en résolvant le problème de moindres carrés.

Exemple 2.14 Soit l'opérateur

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi = (x, y) \rightarrow A\varphi = 2x + y$$

et soit le problème $A\varphi = f = 2 \Leftrightarrow 2x + y = 2$.

Première méthode : Par la régularisation de Tikhonov

$$\varphi_\alpha = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \|A\varphi - f\| + \alpha \|\varphi\| \text{ avec } \alpha > 0$$

$\Rightarrow (A^*A + \alpha I)^{-1}A^t f = \varphi_\alpha$, car la matrice de l'opérateur A^* et A^t .

$$\text{On a : } (A^t A + \alpha I)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha + 4 & 2 \\ 2 & 1 + \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \alpha}{\alpha^2 + 5\alpha} & \frac{-2}{\alpha^2 + 5\alpha} \\ \frac{-2}{\alpha^2 + 5\alpha} & \frac{4 + \alpha}{\alpha^2 + 5\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^*A + \alpha I)A^t f = \begin{pmatrix} \frac{4}{5 + \alpha} \\ \frac{2}{5 + \alpha} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \hat{\varphi} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Dixième méthode :

$$\hat{\varphi} = \min_{\varphi \in S} \{\|\varphi\| \text{ ou } \varphi \in S \text{ l'ensemble des solutions } A\varphi = f\}$$

$$A\varphi = f \Leftrightarrow 2x + y = 2 \neq y = 2 - 2x.$$

$$S = \{(x, 2 - 2x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$$

Posons la fonction :

$$g(x) = \|\varphi\| = \|(x, 2 - 2x)\| = \sqrt{5x^2 - 8x + 4}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{5x^2 - 8x + 4}} = 0.$$



$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Puisque : } \hat{\varphi} = \min_{\varphi \in S} \|\varphi\| \Rightarrow \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

2.2.2 La méthode des moindres carrées

Étant donné $y \in F$, on cherche $x \in E$ solution de

$$Ax = y. \quad (2.11)$$

Revenons dans ce cas particulier sur la discussion concernant les problèmes bien et mal posés :

- L'opérateur A peut ne pas être surjectif.
- Il peut ne pas être injectif.
- Si un inverse existe, peut ne pas être continu.

Pour régler la première difficulté (l'existence) il suffit de restreindre à $Im(A)$. La deuxième (l'unicité) il faut pouvoir choisir, parmi plusieurs solutions, celle qui est appropriée au problème. La dernière (stabilité) est liée à l'étude de la fermeture de $Im(A)$, qu'on présente dans le théorème suivant :

Théorème 2.4 [34]

Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F deux espace de Hilbert. Supposons que A soit injectif, et notons $A^{-1} : Im(A) \longrightarrow E$ l'inverse de A , On a :

$$Im(A) \text{ fermé} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ est continu.}$$

Remarque 2.2

Si A est compact alors A^{-1} n'est pas continu, dans ce cas $Im(A)$ ne sera pas fermé.

Le problème (2.11) n'a de solution que si $y \in Im(A)$, on cherche donc une autre formulation de ce problème.



Cette formulation représente un problème de moindres carrés, on remplace donc (2.11), par :

$$\min_{x \in E} \|Ax - y\|_F^2. \quad (2.12)$$

Nous allons voir que ce problème (2.12) est équivalent à une équation normale définie par :

$$A^*Ax = A^*y. \quad (2.13)$$

L'unicité est reliée à l'injectivité de A , comme le précise le lemme suivant :

Lemme 2.2 [34]

La solution du problème (2.12) est unique si et seulement si, l'opérateur A est injectif.

- En ce qui concerne l'existence, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1 [34]

L'équation (2.13) admet une solution si et seulement si :

$$y \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A^\perp).$$

Lemme 2.3 [34]

Le sous-espace $\text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A^\perp)$ est dense dans F .

On a donc bien réussi à étendre la notion de solution à un sous-espace dense dans F , ce qui est presque aussi bien que de l'étendre à F tout entier.

Corollaire 2.1 [34]

Si $y \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A^\perp)$, le problème (2.12) admet une unique solution de norme minimale.

2.3 Les méthodes itératives

Les méthodes itératives sont utilisées pour les problèmes de grande taille. Ces méthodes consistent à chercher des suites de solutions approchées qui convergent vers la solution désirée.

2.3.1 La méthode de Landweber

La méthode de Landweber, qui a pour principale avantage de ce prêtre a une analyse simple. Malheureusement, elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique.

Dans le contexte des problèmes mal posés, Landweber, Fridman et Bianly ont proposé de réécrire l'équation $Ax = y$ sous la forme :

$$x = (I - \alpha A^* A)x + \alpha A^* y,$$

pour $\alpha > 0$, le schéma itérative de cette équation est le suivant :

$$x^0 = 0 \quad \text{et} \quad x^m = (I - \alpha A^* A)x^{m-1} + \alpha A^* y, \quad (2.14)$$

pour $m = 1, 2, \dots$

Lemme 2.4 [34][47]

Soit la suite (x^m) définie par (2.14) et on définit la fonctionnelle $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2, x \in X.$$

Alors ψ est différentiable au sens de Fréchet pour $z \in X$ et

$$\psi'(z)x = \operatorname{Re}(Az - y, Ax) = \operatorname{Re}(A^*(Az - y), x), x \in X. \quad (2.15)$$

La fonctionnelle linéaire $\psi'(z)$ peut être identifié avec $A^*(Az - y) \in X$ sur l'espace de Hilbert X .

C'est facile de voir la forme explicite $x^m = R_m y$, ou l'opérateur $R_m : Y \rightarrow$

X est définie par :

$$R_m = \alpha \sum_{k=0}^{m-1} (I - \alpha A^* A)^k, m = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Théorème 2.5 [34][47]

Soit $A : X \rightarrow Y$, un opérateur compact et soit $0 < \alpha < \frac{1}{\|A\|^2}$, on définit les opérateurs linéaires et bornés $R_m : Y \rightarrow X$ par (2.16), ces opérateurs définissent une stratégie de régularisation de paramétré $\alpha = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ et $\|R_m\| \leq \sqrt{\alpha m}$.

La suite $x^{m,\delta} = R_m y^\delta$ est calculée par les itérations suivantes :

$$x^{0,\delta} = 0 \text{ et } x^{m,\delta} = (I - \alpha A^* A)x^{m-1,\delta} + \alpha A^* y^\delta,$$

pour $m=1,2,\dots$

Toute stratégie $m(\delta) \rightarrow \infty (\delta \rightarrow 0)$ avec $\delta^2 m(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$ est admissible.

Soit $x = A^* z \in \text{Im}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \frac{E}{\delta} \leq m(\delta) \leq c_2 \frac{E}{\delta}$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^{m,\delta} - x\| \leq c_3 \sqrt{\delta E},$$

pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et α . Alors l'itération de Landweber est optimale pour $\|(A^*)^{-1}x\| \leq E$.

Maintenant, soit $x = A^* A z \in \text{Im}(A^* A)$, $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \leq m(\delta) \leq c_2 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$ on a :

$$\|x^{m,\delta} - x\| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}.$$

Pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et α . Pour cela, l'itération de Landweber est aussi optimale pour $\|(A^* A)^{-1}x\| \leq E$.

Pour cette méthode, on observe qu'une haute précision demande un nombre large m d'itérations mais la stabilité nous force à garder m le plus petit

possible.

2.4 La décomposition en valeurs singulières S.V.D

Cas dimension infinie

Définition 2.3 [34]

Soient X et Y des espaces de Hilbert, $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire compact et $A^* : Y \longrightarrow X$ son adjoint. Les racines carrés non négatives des valeurs propres de l'opérateur compact auto-adjoint non négatif $A^*A : X \longrightarrow X$ sont appelées valeurs singulières de A .

Théorème 2.6 [34]

Soit (μ_n) la suite des valeurs singulières non nulles d'opérateur linéaire compact A (avec $A \neq 0$) répétées selon leur multiplicité, i.e selon la dimension des espaces nuls $\ker(\mu_n^2 I - A^*A)$. Alors il existe des suites orthonormées (ϕ_n) en X et (g_n) en Y telles que :

$$A\phi_n = \mu_n g_n, \quad A^*g_n = \mu_n \phi_n, \quad (2.17)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $\phi \in X$ nous avons la décomposition en valeurs singulières :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n) \phi_n + \varrho \phi, \quad (2.18)$$

avec l'opérateur de projection orthogonale $\varrho : X \longrightarrow \ker(A)$ et

$$A\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\phi, \phi_n) g_n. \quad (2.19)$$

Chaque système (μ_n, ϕ_n, g_n) , $n \in \mathbb{N}$, possédant ces propriétés est appelé système singulier de A . L'orsqu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs singulières, les séries (2.18) et (2.19) dégénèrent en sommes finies.

Preuve

Soit (ϕ_n) une suite orthonormée des éléments propres de A^*A , i.e :

$$A^*A\phi_n = \mu_n^2\phi_n;$$

et définissons une deuxième suite orthonormée par :

$$g_n = \frac{1}{\mu_n}A\phi_n.$$

Des calculs directs montrent que le système (μ_n, ϕ_n, g_n) , $n \in \mathbb{N}$, satisfait (2.1). L'application du développement à l'opérateur compact auto-adjoint A^*A donne :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\phi_n + \varrho\phi, \phi \in X$$

où ϱ désigne l'opérateur de projection orthogonale de X sur $\ker(A^*A)$. Soit $\psi \in \ker(A^*A)$ alors :

$$(A\psi, A\psi) = (\psi, A^*A\psi) = 0,$$

et ceci implique que $\ker(A^*A) = \ker(A)$. Par conséquent, (2.18) est prouvé et (2.19) s'ensuit en appliquant A à (2.18).

Notez que la décomposition en valeurs singulières implique que pour tout $\phi \in X$ nous avons

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi, \phi_n)|^2 + \|\varrho\phi\|^2, \quad (2.20)$$

et

$$\|A\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |(\phi, \phi_n)|^2. \quad (2.21)$$

Théorème 2.7 [34](Picard)

Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire compact de système (μ_n, ϕ_n, g_n) .
L'équation du premier type

$$A\phi = f, \quad (2.22)$$

est résoluble si et seulement si f appartient au complément orthogonal $\ker(A^*)^\perp$ est vérifiée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 < \infty. \quad (2.23)$$

Dans ce cas une solution est donnée par :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) \phi_n. \quad (2.24)$$

 **Preuve**
 Voir [24].

Cas dimension finie**Définition 2.4 [34]**

Les valeurs singulières $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ d'une matrice $A (m \times n)$ sont les racines carrées positives, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, des valeurs propres non nulles de la matrice Gram associée $K = A^T A$. Les vecteurs propres correspondants de K sont appelés vecteurs singuliers de A .

Proposition 2.2 [34]

Si $A = A^T$ est une matrice symétrique, ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non nulles : $\sigma_i = |\lambda_i| > 0$; ses vecteurs singuliers coïncident avec ses vecteurs propres non nuls.

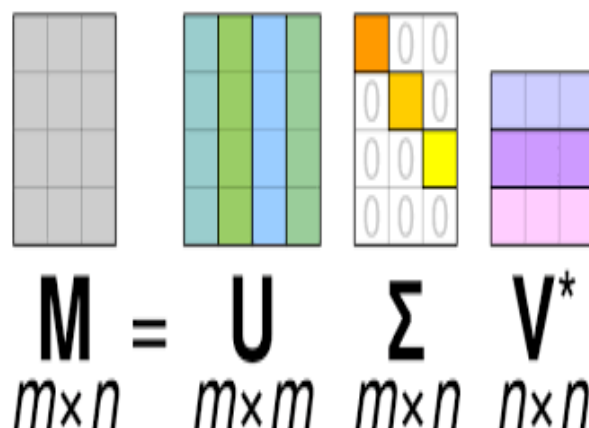


Figure 2.1 – svd method

Preuve

Lorsque A est symétrique, $K = A^T A = A^2$. Donc si

$$Av = \lambda v, \text{ alors } Kv = A^2 v = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

Ainsi, toute valeur propre v de A est aussi un vecteur propre de K de valeur propre λ^2 .

La généralisation de la factorisation spectrale aux matrices non symétriques est connue sous le nom de décomposition en valeurs singulières, communément abrégée SVD.

Théorème 2.8 [34]

Une matrice réelle $A (m \times n)$ non nulle de rang $r > 0$ peut être factorisée

$$A = P \Sigma Q^T, \quad (2.25)$$

dans le produit d'une matrice $P (m \times r)$ à colonnes orthonormées, donc $P^T P = I$, la matrice diagonale $\Sigma (r \times r)$ où $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ qui a les valeurs singulières de A comme entrées diagonales, et une matrice $Q^T (r \times n)$ avec des lignes orthonormées, donc $Q^T Q = I$.

Preuve

Commençons par réécrire la factorisation souhaitée (2.25) sous la forme $AQ = P\sigma$. Les colonnes individuelles de cette équation matricielle sont les équation vectorielles :

$$Aq_i = \sigma_i p_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.26)$$

Reliant les colonnes orthonormées de $Q = (q_1, \dots, q_r)$ aux colonnes orthonormées de $P = (p_1, \dots, p_r)$. Ainsi, notre but est de trouver les vecteurs p_1, \dots, p_r et q_1, \dots, q_r qui satisfont (2.26). Pour cela, on pose q_1, \dots, q_r des vecteurs propres orthonormés de la matrice de Gram $K = A^T A$ correspondant aux valeurs propres non nulles, qui forment une base pour $\text{Im } K = \text{coIm } g A$, de dimension $r = \text{rang } K = \text{rang } A$. Ainsi, par la définition des valeurs singulières :

$$A^T A q_i = K q_i = \sigma_i^2 q_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.27)$$

Nous affirmons que les vecteurs images $w_i = Aq_i$ sont automatiquement orthogonaux. En effet, compte tenu de l'orthonormalité du q_i combiné avec (2.27),

$$w_i w_j = w_i^T w_j = (Aq_i)^T Aq_j = q_i^T A^T A q_j = \sigma_j^2 q_i^T q_j = \sigma_j^2 q_i q_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_i^2, & i = j \end{cases}$$

par conséquent, w_1, \dots, w_r forment un système orthogonal de vecteurs de normes respectives

$$\|w_i\| = \sqrt{w_i, w_i} = \sigma_i.$$

Nous concluons que les vecteurs unitaires associés

$$p_i = \frac{w_i}{\sigma_i} = \frac{Aq_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, r;$$

forment un ensemble orthonormé de vecteurs satisfaisant les équations requises (2.26).

Définition 2.5 [34]

Le pseudo-inverse d'une matrice $A (m \times n)$ non nulle avec décomposition en valeurs singulières $A = P\Sigma Q^T$ est la matrice $A^+ (n \times m)$, $A^+ = Q\Sigma^{-1}P^T$.

Lemme 2.5 [41]

Soit A une matrice $(m \times n)$ de rang n . puis

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T. \quad (2.28)$$

Preuve

En remplaçant A par sa décomposition en valeurs singulières (2.26), on trouve

$$A^T A = (P\Sigma Q^T)^T (P\Sigma Q^T) = Q\Sigma P^T P\Sigma Q^T = Q\Sigma^2 Q^T$$

puisque $\Sigma = \Sigma^T$ est une matrice diagonale, tandis que $P^T P = I$, puisque les colonnes de P sont orthonormées. Il s'agit simplement de la factorisation spectrale de la matrice de Gramm $A^T A$ que nous connaissons en fait déjà par la définition originale des valeurs singulières et des vecteurs. Or si A est de rang n , alors Q est une matrice orthogonale $n \times n$, et donc $Q^{-1} = Q^T$ alors :

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} A^T &= (Q\Sigma^{-2} Q^T)^{-1} (P\Sigma Q^T)^T \\ &= (Q\Sigma^{-2} Q^T) (Q\Sigma P^T) \\ &= Q\Sigma^{-1} P^T = A^+. \end{aligned}$$

Exemple 2.15

Soit la matrice A suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On souhaite calculer la SVD de cette matrice :

On calcule d'abord la matrice AA^t et on cherche les valeurs propres de cette matrice :

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\det(AA^t - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Les valeurs propres de AA^t sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$, alors les valeurs singulières de la matrice A sont $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = 1$.

Alors la matrice Σ est définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on doit trouver les vecteurs propres correspondants à AA^t , définis par l'équation $AA^t X = \lambda_i X$, $i = 1, 2, \dots$

✎ Pour $\lambda_1 = 3$:

$$AA^t X = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \end{cases}$$

$$\text{On trouve } \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

✎ Pour $\lambda_2 = 1$:

$$AA^t X = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \end{cases}$$

On trouve $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs propres deviennent des vecteurs colonnes dans une matrice ordonnée par la taille de la valeur propre correspondante. En d'autres termes, le vecteur propre de la plus grande valeur propre est la première colonne, le vecteur propre de la prochaine plus grande valeur propre est la deuxième colonne, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons le vecteur propre de la plus petite valeur propre comme la dernière colonne de notre matrice.

Dans la matrice ci-dessous, le vecteur propre pour $\lambda_1 = 3$ est la colonne une, et le vecteur propre pour $\lambda_2 = 1$ est la colonne deux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on doit convertir cette matrice en une matrice orthogonale, en appliquant le processus d'orthonormalisation aux vecteurs colonnes.

On commence par normaliser les vecteurs \bar{u}_1 et \bar{u}_2 :

$$u_1 = \frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$u_2 = \frac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Ce qui donne :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Le calcul de V est similaire, V basé sur $A^t A$ donc on a :

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$\det(A^t A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3)(1 - \lambda).$$

Les valeurs propres de $A^t A$ sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Pour trouver les vecteurs propres correspondants à $A^t A$, on procède comme ci-dessus. On obtient :

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On aura donc la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver une matrice orthogonale V , on applique le processus d'orthonormalisation aux vecteurs colonnes :

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement : } A = U \Sigma V^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.16

Calculons la décomposition en valeurs singulières de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On commence par

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

qui possède deux valeurs propres, $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$. Ainsi, A possède une seule valeur singulière non nulle : $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2$. On trouve un vecteur propre unitaire pour chaque valeur propre, par exemple :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

qui donne déjà :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Pour calculer U , on peut soit passer par l'étude de AA^t , ou alors commencer par obtenir une de ses colonnes en prenant :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On doit maintenant trouver deux colonnes u_2 et u_3 , de façon à ce que $U = [u_1, u_2, u_3]$ soit orthogonale. On peut par exemple prendre :

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à produire Σ . Puisque A n'a qu'une seule valeur singulière non nulle, et que Σ doit être 3×2 , on rajoute des blocs appropriés :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc une SVD pour A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t.$$

Exemple 2.17

on va calculer SVD de la matrice A tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

□ Calculons $A^t A$:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres sont :

$$\lambda_1 = 360; \lambda_2 = 90; \lambda_3 = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$V = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

D'autre part :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

□ Construisons U :

$$u_1 = \frac{Av_1}{s_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, u_2 = \frac{Av_2}{s_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^t.$$

L'inverse généralisé de A^+ s'écrit sous la forme :

$$A^+ = V\Sigma^+U^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt{10}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{180} & \frac{13}{180} \\ \frac{1}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 3

SIMULATION NUMÉRIQUE ,COMPARAISON DES MÉTHODES TIKHONOV ET S.V.D

Ce chapitre est consacré à la présentation des aspects numériques du problème inverse, pour lequel nous pratiquons deux méthodes (Tikhonov et la SVD). Sur la base des résultats numériques, nous en déduisons quelle méthode fournit la meilleur solution du système considéré.

Sommaire

3.1	Position du problème	61
3.2	Application de la méthode de Tikhonov	61
3.2.1	<i>A</i> et <i>b</i> exacts	62
3.2.2	<i>A</i> exacte et <i>b</i> perturbé	64
3.2.3	<i>A</i> perturbé et <i>b</i> exact	66
3.3	application de la méthode de régularisation de dé- composition en valeurs singulières	68
3.3.1	<i>A</i> et <i>b</i> exacts	68
3.3.2	<i>A</i> exact et <i>b</i> perturbé	69
3.3.3	<i>A</i> perturbé et <i>b</i> exact	70
3.4	Interprétation des résultats	71

Références

- Lounis.I *Sur la résolution des problèmes inverses* Mémoire de Master

(2019); Université de Béjaia.

- Settara.L *Problème mal posé et méthodes de résolution*; Mémoire de Magister (2007), Université de Skikda.

3.1 Position du problème

Dans l'analyse numérique matricielle, les données sont généralement entachées par des erreurs, des perturbations parfois mineurs des données peuvent conduire à une grande interférence avec la solution du problème posé à étudier.

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ vecteur colonne. Nous cherchons à étudier l'effet des erreurs d'arrondi sur la solution pour la matrice A et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ pour le système $AX = b$.

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Sachant que la solution exacte du système est $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Application de la méthode de Tikhonov

Dans un premier cas, nous intéressons à la résolution du système (3.1) par la méthode de Tikhonov dans trois cas (A et b exacts, A exact et b perturbé, A perturbé et b exact).

Ce problème est un problème mal posé car la troisième condition n'est pas vérifiée (A^{-1} l'inverse de A existe mais n'est pas continu.)

3.2.1 A et b exacts

On cherche à trouver la solution du système(3.1).

L'algorithme

$$A = [11 \ 8 \ 9 \ 8 ; 8 \ 6 \ 7 \ 6 ; 9 \ 7 \ 11 \ 10 ; 8 \ 6 \ 10 \ 11];$$

$$b = [36 \ 27 \ 37 \ 35]';$$

$$xe = [1 \ 1 \ 1 \ 1]';$$

$$I = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$k = \text{cond}(A);$$

$$x = \text{inv}(A' * A + \alpha * I) * A' * b;$$

$$\text{err} = \text{norm}(xe - x).$$

Résultat d'algorithme :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix}; \quad xe = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

✎ Pour $\alpha = 0.1$:

$$\text{cond}(A) = 546.0562$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.1055 \\ 0.8294 \\ 1.0452 \\ 0.9749 \end{pmatrix}$$

avec $\text{err} = 0.2071$

✎ Pour $\alpha = 0.01$:

$$\text{cond}(A) = 546.0562$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.0794 \\ 0.8728 \\ 1.0328 \\ 0.9817 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 0.1545$.

✎ Pour $\alpha = 0.001$:

$cond(A) = 546.0562$.

$$x = \begin{pmatrix} 1.0224 \\ 0.9641 \\ 1.0092 \\ 0.9948 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 0.0437$.

✎ Pour $\alpha = 0.0001$:

$cond(A) = 546.0562$

$$x = \begin{pmatrix} 1.0027 \\ 0.9956 \\ 1.0011 \\ 0.9994 \end{pmatrix}$$

Avec $err = 0.0053$.

✎ Pour $\alpha = 0.00001$.

$cond(A) = 546.0562$

$$x = \begin{pmatrix} 1.0003 \\ 0.9996 \\ 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 5.4649e - 04$.

✎ Pour $\alpha = 0.000001$:

$cond(A) = 546.0562$.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 5.4774e - 05$.

3.2.2 A exacte et b perturbé

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.1 \\ 26.9 \\ 37.1 \\ 34.9 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

On cherche à trouver la solution du système (3.2) lorsque le second membre est perturbé.

L'algorithme :

```
A = [11 8 9 8; 8 6 7 6; 9 7 11 10; 8 6 10 11];
b = [36.1; 26.9; 37.1; 34.9];
xe = [1; 1; 1; 1];
I = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
k = cond(A)
x = inv(A' * A + alpha * I) * A' * b;
err = norm(xe - x)
```

Résultat d'algorithme :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 36.1 \\ 26.9 \\ 37.1 \\ 34.9 \end{pmatrix} \quad xe = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✍ Pour $\alpha = 0.1$

$cond(A) = 546.0562.$

$$x = \begin{pmatrix} 1.1369 \\ 0.7615 \\ 1.1372 \\ 0.8987 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 0.3236.$

✍ Pour $\alpha = 0.01$:

$$\text{cond}(A) = 546.0562$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.4411 \\ 0.2718 \\ 1.2712 \\ 0.8220 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 0.9111$.

✎ Pour $\alpha = 0.001$:

$$\text{cond}(A) = 546.0562.$$

$$x = \begin{pmatrix} 2.0879 \\ -0.7635 \\ 1.5380 \\ 0.6728 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 2.1657$.

✎ Pour $\alpha = 0.0001$:

$$\text{cond}(A) = 546.0562.$$

$$x = \begin{pmatrix} 2.3117 \\ -1.1215 \\ 1.6300 \\ 0.6214 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 2.6003$.

✎ Pour $\alpha = 0.00001$:

$$\text{cond}(A) = 546.0562.$$

$$x = \begin{pmatrix} 2.3397 \\ -1.1663 \\ 1.6415 \\ 0.6150 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 2.6547$.

📌 On remarque d'après la solution du (3.2), qu'il ya une forte instabilité numérique.

3.2.3 A perturbé et b exact

$$\begin{pmatrix} 11.1 & 7.9 & 9.1 & 7.9 \\ 7.9 & 6.1 & 6.9 & 6.1 \\ 9.1 & 6.9 & 11.1 & 9.9 \\ 7.9 & 6.1 & 9.9 & 11.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

On cherche à trouver la solution (3.3) lorsque l'opérateur A est légèrement perturbé.

L'algorithme

```
A = [11.1 7.9 9.1 7.9; 7.9 6.1 6.9 6.1; 9.1 6.9 11.1 9.9; 7.9 6.1 9.9 11.1];
b = [36; 27; 37; 35];
xe = [1; 1; 1; 1];
I = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
alpha = 0.1;
k = cond(A)
x = inv(A' * A + alpha * I) * A' * b;
err = norm(xe - x)
```

Résultat d'algorithme

$$A = \begin{pmatrix} 11.1 & 7.9 & 9.1 & 7.9 \\ 7.9 & 6.1 & 6.9 & 6.1 \\ 9.1 & 6.9 & 11.1 & 9.9 \\ 7.9 & 6.1 & 9.9 & 11.1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix} \quad xe = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✎ Pour $\alpha = 0.1$:

$cond(A) = 114.2235$.

$$x = \begin{pmatrix} 1.6695 \\ 0.1936 \\ 1.5200 \\ 0.6273 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 1.5107$.

✎ Pour $\alpha = 0.01$:

$cond(A) = 114.2235$.

$$x = \begin{pmatrix} 2.2410 \\ -1.0642 \\ 1.5933 \\ 0.6320 \end{pmatrix}.$$

avec $err = 2.5077$.

✎ pour $\alpha = 0.001$:

$cond(A) = 114.2235$.

$$x = \begin{pmatrix} 2.3614 \\ -1.2456 \\ 1.6044 \\ 0.6361 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 2.7192$.

✎ Pour $\alpha = 0.0001$:

$cond(A) = 114.2235$.

$$x = \begin{pmatrix} 2.3748 \\ -1.2658 \\ 1.6055 \\ 0.6365 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 2.7427$.

✎ Pour $\alpha = 0.00001$:

$cond(A) = 114.2235$.

$$x = \begin{pmatrix} 2.3761 \\ -1.2678 \\ 1.6057 \\ 0.6366 \end{pmatrix}.$$

Avec $err = 2.7451$.

📌 La solution du nouveau système montre une forte instabilité numérique.

3.3 application de la méthode de régularisation de décomposition en valeurs singulières

Dans le deuxième cas, nous intéressons à la résolution du système (3.1) par la méthode de décomposition en valeurs singulières dans trois cas (A et b exacts, A exacts et b perturbé, A perturbé et b exacts.)

3.3.1 A et b exacts

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On cherche à trouver la solution du système (3.4).

L'algorithme

```
clc
closeall
clearall
A = [11 8 9 8; 8 6 7 6; 9 7 11 10; 8 6 10 11];
b = [36; 27; 37; 35];
xe = [1; 1; 1; 1];
k = cond(A);
[USV] = svd(A);
R = U * S * V'
x = (V * inv(S) * U') * b;
err = norm(xe - x);
```

Résultat d'algorithme

$$\text{cond}(A) = 546.0562.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 4.3945e - 14$.

3.3.2 A exact et b perturbé

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.1 \\ 26.9 \\ 37.1 \\ 34.9 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

On cherche à trouver la solution du système (3.5) lorsque le second membre est perturbé.

L'algorithme

```

clc
closeall
clearall
A = [11 8 9 8; 8 6 7 6; 9 7 11 10; 8 6 10 11];
b = [36.1; 26.9; 37.1; 34.9];
xe = [1; 1; 1; 1];
k = cond(A)
[USV] = svd(A);
R = U * S * V'
x = (V * inv(S) * U') * b;
err = norm(xe - x');

```

Résultat d'algorithme

$$\text{cond}(A) = 546.0562.$$

$$x = \begin{pmatrix} 2.3429 \\ -1.1714 \\ 1.6429 \\ 0.6143 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 2.6609$.

 La solution du nouveau système montre l'instabilité numérique.

3.3.3 A perturbé et b exact

$$\begin{pmatrix} 11.1 & 7.9 & 9.1 & 7.9 \\ 7.9 & 6.1 & 6.9 & 6.1 \\ 9.1 & 6.9 & 11.1 & 9.9 \\ 7.8 & 6.1 & 9.9 & 11.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

On cherche à trouver la solution du système (3.6) lorsque l'opérateur A est légèrement perturbé.

L'algorithme

```

clc
closeall
clearall
A = [11.1 7.9 9.1 7.9; 7.9 6.1 6.9 6.1; 9.1 6.9 11.1 9.9; 7.8 6.1 9.9 11.1];
b = [36; 27; 37; 35];
xe = [1; 1; 1; 1];
k = cond(A);
[U, S, V] = svd(A);
R = U * S * V';
x = (V * inv(S) * U') * b;
err = norm(xe - x').
    
```

Résultat d'algorithme

$$\text{cond}(A) = 114.2235.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec $\text{err} = 1.6092e - 14$.

3.4 Interprétation des résultats

Méthode	A et b exacts		
	valeur de α	Tikhonov	S V D
erreur $\ xe - x\ $	$\alpha=0.1$	0.2071	4.3945e-14
	$\alpha = 0.01$	0.1545	4.3945e-14
	$\alpha = 0.001$	0.0437	4.3945e-14


Table 3.1 – estimation d'erreur pour A et b exacts

Méthode	A exact et b perturbé		
	valeur de α	Tikhonov	S V D
erreur $\ xe - x\ $	$\alpha=0.1$	0.3236	2.6609
	$\alpha = 0.01$	0.9111	2.6609
	$\alpha = 0.001$	2.1657	2.6609

Table 3.2 – estimation d'erreur pour A exact et b perturbé

Méthode	A perturbé b exact		
	valeur de α	Tikhonov	S V D
erreur $\ xe - x\ $	$\alpha=0.1$	1.5107	1.6092e-14
	$\alpha = 0.01$	2.5077	1.6092e-14
	$\alpha = 0.001$	2.7192	1.6092e-14

Table 3.3 – estimation d'erreur pour A perturbé b exact

 En conclusion, Pour le premier cas A et b exacts, nous trouvons numériquement que la méthode de décomposition en valeurs singulières surpasse la méthode de Tikhonov, ce qui donne des solutions stables aux systèmes mal posés d'une manière meilleure que la méthode de Tikhonov.

Pour les deux cas de A exact et b perturbation et A perturbation et b exact,

on note que la méthode de Tikhonov surpasse la méthode de décomposition en valeurs singulières car la régularisation stabilise la solution.

Le choix du paramètre de régularisation α est critique. En effet, plus α est éloigné de zéro dans le cas perturbé, la solution du système est assez proche de la solution exacte du système non perturbé et éloignée de la solution du système perturbé.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire nous avons abordé le thème des problèmes mal posés qui sont constamment étudiés du fait de leur utilité pratique. Nous avons donc rappelé les notions et définitions fondamentales directement liées à ces problèmes, et nous avons donné un aperçu des différentes méthodes de régularisation des problèmes mal posés .

Nous avons nous étudié la meilleure approximation de la solution du problème $Ax = b$ où A est une matrice carrée réversible. Nous utilisons la méthode de régularisation de Tikhonov ainsi que la méthode de décomposition en valeurs singulières pour le système exact et l'opérateur de perturbation A ou b dans différents cas. Nous avons La méthode de Tikhonov s'est avérée plus performante que la SVD dans le cas de perturbations.

En pratique, la méthode Tikhonov est recommandée, car les données sont obtenues à partir d'expériences et ne sont donc pas exactes. Si nous répétons l'expérience dans les mêmes conditions, nous n'obtiendrons pas les mêmes valeurs.

Notre recherche porte sur un opérateur, qui est une matrice carrée inversible, mais qui peut être étendue au cas des matrices rectangulaires ou tout autre opérateur (intégration, etc.).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abul Hasan Sidiqi; *Functional Analysis and Application*, Springer (2018).
- [2] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston and Sons,(1977).
- [3] B.Haridi ;*Méthode de régularisation avec des conditions auxiliaires modifiées pour un problème parabolique rétrograde à coefficients dépendants du temps*, mémoire de Master 2020, Université de Guelma.
- [4] Bousstila Nadjib *These de doctorat : Sue quelques méthodes de régularisation itératives pour une classe de problèmes inverses en EDP*, Université 08 Mai 1945 Gualma 2014-2015
- [5] D.N. Hào, N.V. Duc, D. Lesnic, *Regularization of parabolic equations backward in time by a non-local boundary value problem method*, IMA J. Appl. Math. 75 (2) (2010) 291–315.
- [6] D.N.Hào, T.D.Van and R.Gorenflo, *Toward the Cauchy Problems for the Laplace Equations*, vol 27(Warsaw : Polish Academyof Sciences) pp 111-28, 1992.
- [7] D.N. Hào, V.D.Nguyen and Sahli. *A non-local boundary value problem method for parabolic equation backward in time*, J.Math. Anal. Appl., 345(2008), 805-815.

- [8] D.N.Hào, V.D.Nguyen and D.Lesnic, *A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, *Inverse Problems* 25(2009)055002 (27pp).
- [9] Djemoui sebti. Thèse de Doctorat : *Sur classe de Problèmes Mal-posés*(2016),Université d'Annaba.
- [10] E.B.Davies; *Linear Operator and their Spectra*, Cambridge University Press (2007).
- [11] Fan Yong, Miao Zhang and Xiao-Xiao Li; *A quasi-boundary value regularization methode for identifying an unknown source in the Poisson equation*, *journal of Inequalities and Application* 2014, 2014 :117.
- [12] F.Ben Belgacem, *Why is the Cauchy problem severly ill-posed ?* *Inverse Problems* 23 823-36,2007.
- [13] G.Allessandrini, L.Rondi, E.Rosset,and S.Vessella,*The stability of the Cauchy problem for elliptic equations*, *Inverse Problems* 25(12),2009.
- [14] Gregoire Allaire. ,*Analyse numérique et optimisation une introduction à la modélisation mathématique et la simulation numérique*. Edition de l'école polytechnique, Mai 2006.
- [15] H.Brezis; *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson (1993).
- [16] H.W.Engl, M.Hanke and A.Neubauer : *Regularisation of inverse problems*. Kluwer, dordrecht, 1991.
- [17] H.W.Engl,M.Hanke, A.Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, vol.375,Springer,1996.
- [18] I.V.Melnikova, *Regularization of ill-posed differential problems*, *Siberian Math.J.*33 289-98,1992.
- [19] Jean-pierre aubin; *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tome 2, Presses universitaire de france, puF (1987)
- [20] J.Hadamard. *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale Uni Press, New Haven, 1923.

- [21] J.Hadamard. *Lecture on Cauchy problem in linear partial differential equation*, Dover, New York (1953).
- [22] J.B.Keller. *Inverse problems*, Amer.Math.Monthly,83 :107-118,(1976).
- [23] K.A. Ames, L.E. Payne, *Asymptotic behavior for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation*, Math. Models Methods Appl. Sci. 8 (1) (1998) 187.
- [24] Kirsch, A. (2011). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems* (Vol. 120). New York : Springer.
- [25] K.A.Ames, L.E.Payne and J.C.Song, *On two classes of nonstandard parabolic problems*, J.Math.Anal.Appl, 311 (2005),254-267.
- [26] K.A.Ames, R.J.Hughes, *Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space*, Semigroup Forum, Vol.70(2005),No 1,127-145.
- [27] khelili Bisma. Thèse de Doctorat : *Sur quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problème de Cauchy inverses*, (2018),Université d'Annaba.
- [28] Kress, R., Maz'ya, V., & Kozlov, V. (1989). *Linear integral equations* (Vol. 82, p. 1). Berlin : Springer.
- [29] Lakhdari abdelghani, *Sur quelques méthodes de régularisation itératives pour une classe de problèmes inverses en EDP* Thèsz doctorat, 2014-2015,Université de Guelma.
- [30] Li.Daniel ,*Cours d'analyse fonctionnelle* ,ISBN 978-2-7298-83058 ©Ellipses Édition Marketing S.A.,rue Bague 75740 Paris cedex 15(2013).
- [31] L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems 22 (2006), 413-430.
- [32] Lounis.I *Sur la résolution des problèmes inverses*, Mémoire de Master (2019) ; Université de Béjaia.
- [33] MASOOD, Khalid, MESSAOUDI, Salim, et ZAMAN, F. D. *Initial inverse problem in heat equation with Bessel operator*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, vol. 45, no 14, p. 2959-2965.
-

- [34] M.Kern. *Problèmes inverses aspects numériques.Lecture*, école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002-2003).
- [35] M.M.Lavrent'ev, *On the Cauchy problem for the Laplace equation*, (In Russian).Izvest.Akad.Nauk SSSR (Ser. Matem.)20,819-842,1956.
- [36] M.V. Klibanov, F. Santosa, *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation*, SIAM J. Appl.Math. 51, 1653-1675, 1991.
- [37] N.Driche, *Régularisation des problèmes mal-posés*,Mémoire de Master (2019),Université de Biskra.
- [38] N.I.Akhiezer and I.M.Glazman. *Theory of linear operator in Hilbert space*, translated from the Russian by Merlynd Nestell p. Cm. Originally published : New York : F.Ungar Pub.Co., cl961- cl963.Dover Publications, Inc.New York, (1993).
- [39] Patrick Lascaux, Raymond Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur(tom 1 et 2)*. Dunod- Paris 2000.
- [40] Philippe G.Ciarlet *introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. 1980.
- [41] P.Lévy-Bruhl ; *Introduction à la Théorie Spectrale :Cours et Exercices Corrigés*, Dunod (2003).
- [42] R.E. Showalter, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations*, in : *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 110, 1985, pp. 421-425.
- [43] R.E. Showalter, *The final value problem for evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. 47 (3) (1974) 563-572.
- [44] R. Lattès & J.-L. Lions, *The method of quasi-reversibility, Applications to partial differential equations*, Elsevier, New York (1969).
- [45] R.Touil, *Régularisation methods of ill posed problems*,Mémoire Master (2019),Université de M'sila.
- [46] Settata.L *Problèmes mal posés et méthodes de résolution* ; mémoire de Magistère (2007), Université Skikda.
-

- [47] Teniou Nihed *Thes de doctorat : L'étude d'unne classe de problème mal posé*, Universite Mentouri-constantine.
- [48] V.Isakov, *Inverse Problems for Partial Differeential equations*, 2nd edn(Berlin : Springer) 2006.
- [49] V.K.Ivanov, I.V.Mel'nikova and A.I.Flinkov 1995 *Operator-Differential equations and Ill-posed Problems*, (Moscow : Nauka)(in Russian)
- [50] Y.Ahmim, *Une méthode de résolution numèrique des problèmes inverses Linéaires*,Mémoire de Master (2014),Université de Béjaia.