

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research



جامعة 20 أوت 1955-سكيكدة-

كلية العلوم

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة الماستر

تخصص: تحليل عددي للمعادلات التفاضلية الجزئية (ANEDP)

الموضوع

## المجاء و المجاء الثنوي لفئة الفضاءات الطولوجيا الضبابية

من إعداد الطالبين

بشير مصباح

محمد أمين بكوش

تمت مناقشتها يوم: 2022/00/00، أمام اللجنة المكونة من:

عبد الله لعلوش	أستاذ محاضر ب	جامعة 20 أوت 1955	- رئيسا
عبد الكريم لطرش	أستاذ محاضر ب	جامعة 20 أوت 1955	- مشرفا
كمال سليمان	أستاذ محاضر ب	جامعة 20 أوت 1955	- مناقشا

السنة الجامعية

2022 - 2021

## تشكر

بسم الله الرحمن الرحيم

« رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ  
«

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله.

سعيتم ابتغاء الشكر فيما صنعت لي \*\*\* فقصرت مغلوباً وإني لشاكر

تتقدم بأسمى آيات الشكر و العرفان بالجميل للدكتور << عبد الكريم لطرش >> الذي تفضل  
بقبول الإشراف على مذكرتنا و الذي منحنا من وقته الثمين و من بحر معلوماته و خبراته الواسعة

ما شكل إضافة كبيرة في عملنا، فنسأل الله العزيز أن يجازيه خير الجزاء.

كما نتوجه بالشكر الجزيل على قبول مناقشة مذكرتنا هذه لكل أعضاء اللجنة الكريمة

كما لا يفوتنا أن نشكر أساتذة قسم الرياضيات دون استثناء

شكراً لكل من أهدانا حسن معاملة وكل من أحبنا وسعد لنا.

والحمد لله أولاً وآخراً.

---

## ملخص

قمنا في هذا العمل ببناء فئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية انطلاقا من تعريف شونغ للطوبولوجيا الضبابية و التطبيق الضبابي المستمر و ذلك سنة 1968، في هذه الفئة أوجدنا مورفيزمين شاملين مهمين هما : الجداء و الجداء الثنوي.

## الكلمات المفتاحية:

الفئة، التشاكل الفئوي، المجموعات الضبابية، الفضاء الطوبولوجي الضبابي، المورفيزم الشامل.

---

## Résumé

Dans ce travail, nous avons construit la catégorie des espaces de topologie floue à partir de la définition de Chang, lequel a donné naissance à cette topologie floue ainsi que à l'application floue continue. Et ceci dès 1968, dans cette catégorie nous avons trouvé deux morphismes universels importants : le produit et le co-produit.

### Les mots clés:

Catégorie, Foncteur, Les ensembles flous, L'espace topologie flou, Morphisme universel.

---

## Abstract

In this work, we built the category of fuzzy topology spaces from the definition of Chang, which gave rise to this fuzzy topology as well as to the continuous fuzzy application. And this from 1968, in this category we found two important universal morphisms : the product and the co product

## Keywords:

Category, Fonctor, Fuzzy sets, Fuzzy topological space, Universal Morphism.

# المحتويات

7	.....	1.0	مقدمة
9		1	تذكير حول نظرية المجموعات الضبابية (الغامضة)
9	.....	1.0.1	المجموعات الضبابية
12	.....	2.0.1	العمليات على المجموعات الضبابية
19		2	مفاهيم عامة في نظرية الفئات
19	.....	1.2	الفئات
19	.....	1.1.2	تعريف وأمثلة
22	.....	2.1.2	الفئة الصغيرة
23	.....	2.2	التشاكل الفئوي
25		3	التحويلات الطبيعية والمورفيزمات الشاملة
25	.....	1.3	التحويلات الطبيعية
31	.....	2.3	التشاكل الفئوي القطري
32	.....	3.3	المورفيزمات الشاملة
32	.....	1.3.3	الجداء الثنوي و الجداء لفئة كيفية
33	.....	2.3.3	الجداء الثنوي و الجداء لفئة المجموعات
34		4	الجداء و الجداء الثنوي لفئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية
34	.....	1.4	تعاريف وأمثلة
36	.....	2.4	الجداء و الجداء الثنوي لفئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية
36	.....	1.2.4	الجداء الثنوي (Co-product)
40	.....	2.2.4	الجداء (Product)
42		5	الحوصلة

## 1.0 مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يمتد علم الطوبولوجيا<sup>1</sup> إلى الحضارة الإغريقية إلا أنه لم يظهر بوضعه الحالي إلا مطلع القرن الماضي حين نشر فرشييه Frechet سنة 1906 أطروحته التي تناولت تطبيق المسافة والعلاقة بينه وبين مفهوم الإستمرارية، ثم تجلى أكثر من خلال العالمين ريس Riesz وهاوسدروف Hausdroff [2].

للطوبولوجيا فروع عدة لعل أبرزها الطوبولوجيا العامة، الطوبولوجيا الجبرية، الطوبولوجيا التفاضلية والجبر الطوبولوجي...

تعتبر نظرية الفئات علم حديث من علوم الرياضيات تولدت نتيجة تداخل بين الطوبولوجيا والجبر. إذ تنسب هذه النظرية لكل من العالمين ساندر ماكلين Line Mac Saunder (1909 - 2005) و صامويل إيلنبارغ Eilenberg Samuel (1913 - 1988)، حيث قاما بتعريف المفاهيم الثلاثة لهذه النظرية وهي: الفئة، التشاكل الفئوي والتحويلات الطبيعية. وذلك عبر بحثهما الذي نشر سنة 1945 تحت عنوان النظرية العامة للتطابق الطبيعي [14].

بعدها قام بتطوير هذه النظرية العالم ألكسندر غروثانديك Grothendieck Alexander في ستينيات القرن الماضي [17]. قامت نظرية الفئات بتعميم البنى الرياضية والتطبيقات التي تحافظ على هذه البنى مثل الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية، الفضاءات الطوبولوجية والتطبيقات المستمرة...

من السهل الحكم عن شخص ما أنه يدرس في المرحلة الجامعية أو لا ، إذا كان الشخص يعمل في وظيفة حكومية أو لا ، لكن من الصعب الحكم عن شخص ما أنه جميلاً (فكرة الجمال تخضع لعدة نقاشات)، في مثل هكذا حالات تقوم نظرية المجموعات الضبابية. إن نظرية المجموعات الضبابية هي نظرية رياضية في مجال الجبر التجريدي قام بإنشائها العالم لظفي زاده [26] في سنة 1965 من أجل تمثيل الحالات الغير دقيقة و الحالات النسبية رياضياً .

إن أهمية نظرية الفئات من جهة و نظرية المجموعات الضبابية من جهة أخرى، يقودنا للاهتمام بدراسة الفئات الضبابية و ذلك باستعمال المورفيزمات الشاملة.

فنا بتقسيم هذا العمل إلى أربع أبواب:

تناولنا في الباب الأول التعاريف الأساسية في نظرية المجموعات الضبابية : تعريف المجموعات الضبابية مع العديد من الأمثلة ، العمليات على المجموعات الضبابية.

<sup>1</sup>الطوبولوجيا هي كلمة يونانية تنقسم لغويا إلى: Top وتعني المكان و Logy وتعني دراسة، وهي بذلك تعني علم المكان [1].

ثم شرعنا في الباب الثاني ببيان بعض المفاهيم العامة لنظرية الفئات إذ تطرقنا لتعاريف وأمثلة أساسية في نظرية الفئة، حيث قمنا بتعريف الفئة وعززنا التعريف بالعديد من الأمثلة التوضيحية، وكذلك عرفنا التشاكلات الفئوية وقدمنا بعض الأمثلة عليها.

في الباب الثالث أخذنا مفهوم التحويلات الطبيعية إذ يعتبر من بين المفاهيم الأساسية في نظرية الفئات وعرّجنا على تعريف المورفيزمات الشاملة و أعطينا أمثلة عليها في فئة المجموعات ( $Set$ ). في الباب الرابع قمنا ببناء فئة الفضاءات الضبابية بعد أن عرفنا الفضاء الطوبولوجي الضبابي و التطبيق المستمر ضبابيا ، واستخرجنا الجداء و الجداء الثنوي لهذه الفئة.

في نهاية العمل قمنا بوضع حوصلة على العمل المنجز.

# 1

## تذكير حول نظرية المجموعات الضبابية (الغامضة)

إن نظرية المجموعات هي أصل العديد من الفروع الرياضية و تقوم على فكرة إنتماء العنصر إلى مجموعة ما من عدمه، لكن في الحالات التي تقوم على مفهوم العضوية الجزئية تكون هذه النظرية قاصرة عن التعبير الدقيق لها، لذلك أنشئت نظرية المجموعات الضبابية لتغطي هذا العجز فهي نظرية في مجال الجبر التجريدي قام بإنشائها العالم لطفي زاده [26] في سنة 1965 من أجل تمثيل الحالات الغير دقيقة و الحالات النسبية رياضيا .

### 1.0.1 المجموعات الضبابية

تعريف 1. [7] [12] [23] [26]

ليكن  $X$  مجموعة غير خالية، نعرف المجموعة الضبابية  $A$  من  $X$  على أنها مجموعة الثنائيات :

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

حيث :

$$\begin{aligned}\mu_A : X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mu_A(x)\end{aligned}$$

وبالتالي، تتميز المجموعة الضبابية  $A$  من  $X$  بدالة الإدخال  $\mu_A$ ، التي تربط بين كل عنصر  $x$  من  $X$  عدد حقيقي في المجال  $I = [0, 1]$ ،  $\mu_A(x)$  يمثل درجة إنتماء  $x$  إلى المجموعة الضبابية  $A$ ، نلاحظ الحالات الثلاث المحتملة :

1.  $\mu_A(x) = 0$ ، إذا كان  $x$  لا ينتمي إلى  $A$ .

2.  $0 < \mu_A(x) < 1$ ، إذا كان  $x$  ينتمي جزئياً إلى  $A$ .

3.  $\mu_A(x) = 1$ ، إذا كان  $x$  ينتمي تماماً إلى  $A$ .

يمكن ملاحظة أنه إذا كانت  $A$  مجموعة كلاسيكية، يمكن أن تأخذ دالة الإدخال المقترنة بها القيم 0 أو 1. في هذه الحالة :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A. \\ 0 & ; x \notin A. \end{cases}$$

ملاحظة 1.1. تعرف المجموعة الضبابية بدالة الإدخال التي تتطابق مع مفهوم الدالة المميزة في المنطق الكلاسيكي.

2. العديد من الباحثين (انظر [15][20][24]) قاموا بتعريف المجموعات الضبابية من  $X$  على أنها :

$$A = \{(x, A(x)); x \in X\}$$

حيث  $A(x)$  يمثل درجة إنتماء العنصر  $x$  إلى  $A$ .

مثال 1. لتكن  $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  دالة، حيث :

$$\mu_A(x) = |\sin(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن  $A$  عبارة عن مجموعة ضبابية من  $\mathbb{R}$ .

مثال 2. لتكن  $\mu_B : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  دالة، حيث :

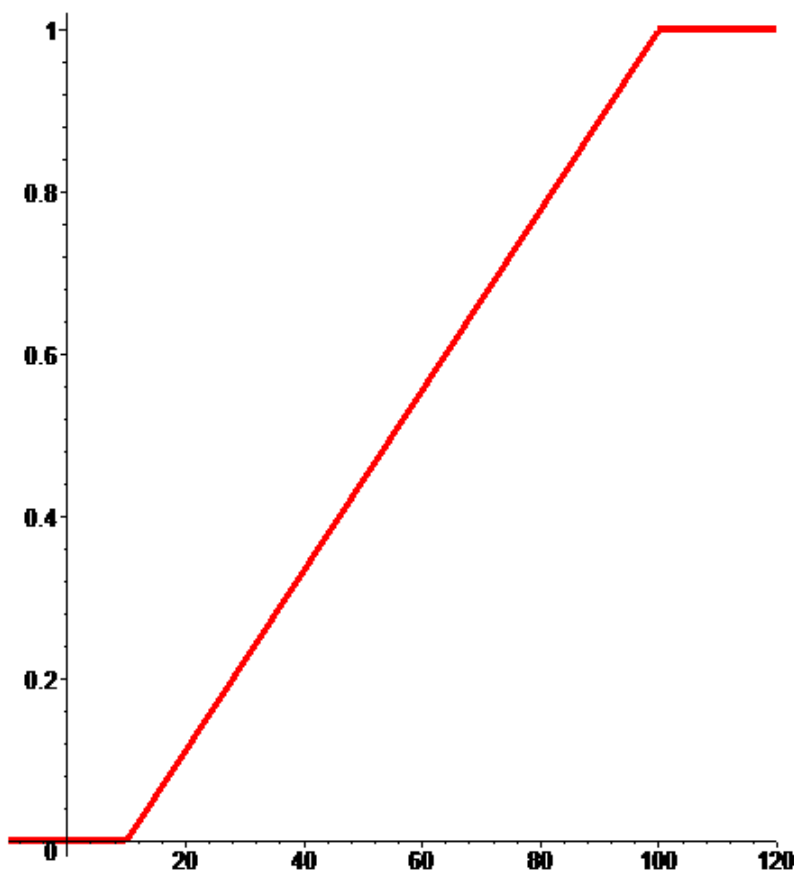
$$\mu_B(n) = \frac{1}{1+n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

إذن  $B$  عبارة عن مجموعة ضبابية من  $\mathbb{N}$ .

مثال 3. إن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر بكثير من 10 هي مجموعة ضبابية المعرفة بالدالة المستمرة التالية :

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 10. \\ \frac{x-10}{90} & ; 10 < x < 100. \\ 1 & ; x \geq 100. \end{cases}$$

يمكننا تمثيل  $D$  بالرسم البياني التالي :



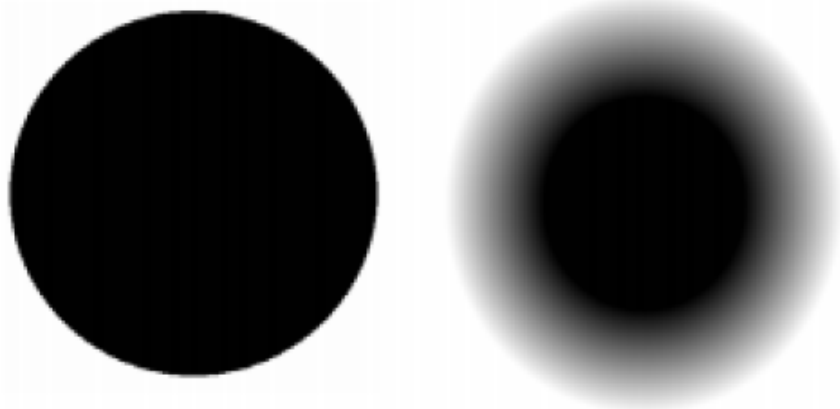
شكل 1.1: المجموعة الضبابية للأعداد الحقيقية الأكبر بكثير من 10

مثال 4. يمكن التعبير عن نسبة الصغر عند الأشخاص باستخدام المجموعات الضبابية ، و ذلك بتعريف المجموعة الضبابية  $C$  كالتالي:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 20. \\ \frac{40-x}{20} & ; 20 < x < 40. \\ 0 & ; \text{غيره.} \end{cases}$$

عمر الشخص 15 معناه بالتأكيد صغير و 100 ليس صغير.

مثال 5. يوضح الشكل التالي بياناً الفرق بين مجموعة كلاسيكية و مجموعة ضبابية (الغامضة).



شكل 2.1: الفرق بين المجموعة الكلاسيكية (يسار) و المجموعة الضبابية (يمين)

### 2.0.1 العمليات على المجموعات الضبابية

بما أن مفهوم المجموعة الضبابية يمكن اعتباره تعميماً لمفهوم المجموعة الكلاسيكية، فإن العمليات على المجموعات الضبابية هي تعميم لتلك الموجودة على العمليات الكلاسيكية نقدم هنا العمليات شائعة الإستعمال في نظرية المجموعات الضبابية .

تعريف 2. (الإحتواء)

ليكن  $A, B$  مجموعتين ضبابيتين من  $X$ ،  $A$  محتواة في  $B$  ( $A \subseteq B$ ) إذا و فقط إذا كانت :

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$$

تعريف 3. (المساواة)

تساوى المجموعتين الضبابيتين  $A$  و  $B$  إذا تساوتا دالتا إدخالهما معناه:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$$

ملاحظة 2. إذا كانت  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  لا تتحقق من أجل عنصر  $x$  من  $X$  نقول أن  $A$  لا تتساوى مع  $B$ .

تعريف 4. (الإتحاد)

إتحاد مجموعتين ضبابيتين  $A$  و  $B$  ( $A \vee B$ ) يعرف بـ :

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$$

مثال 6.1. اتحاد  $A$  و  $B$  حيث :

$$A = \{(1, 1); (2, 0); (3, 0.9); (4, 0.1); (5, 0.7); (6, 0.5)\}$$

$$B = \{(1, 0.2); (2, 1); (3, 0.4); (4, 0); (5, 0.8); (6, 0.2)\}$$

يعطينا :

$$A \vee B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0.9), (4, 0, 1), (5, 0.8), (6, 0.5)\}$$

2. اتحاد  $A$  و  $B$  حيث :  $\mu_A(x) = 0.6$  و  $\mu_B(x) = 0.4$  من أجل  $x$  من  $X$  هو :

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{0.4, 0.6\} = 0.6$$

تعريف 5. (التقاطع)

تقاطع مجموعتين ضبابيتين  $A$  و  $B$  ( $A \wedge B$ ) يعرف بـ :

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 7.1. تقاطع  $A$  و  $B$  حيث :

$$A = \{(1, 1), (2, 0), (3, 0.9), (4, 0.1), (5, 0.7), (6, 0.5)\}$$

$$B = \{(1, 0.2), (2, 1), (3, 0.4), (4, 0), (5, 0.8), (6, 0.2)\}$$

هو :

$$A \wedge B = \{(1, 0.2), (2, 0), (3, 0.4), (4, 0), (5, 0.7), (6, 0.2)\}$$

2. تقاطع  $A$  و  $B$  حيث :  $\mu_A(x) = 0.6$  و  $\mu_B(x) = 0.4$  من أجل  $x$  من  $X$  هو :

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{0.4, 0.6\} = 0.4$$

تعريف 6. (المتمة)

متمة مجموعة ضبابية  $A$  ( $A^c$ ) تعرف بـ :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 8. لتكن  $A$  مجموعة ضبابية من  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، حيث :

$$A = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0.9), (4, 0.6), (5, 0.4), (6, 0.3), (7, 0.2), (8, 0.1), (9, 0), (10, 0)\}$$

تعطي المجموعة الضبابية  $A^c$  بـ :

$$A^c = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0.1), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.7), (7, 0.8), (8, 0.9), (9, 1), (10, 1)\}$$

تعريف 7. [12][23]

1. يستعمل الرمز  $\phi$  للإشارة إلى المجموعة الضبابية الخالية و المعرفة بـ :  $\mu_\phi(x) = 0$  لكل  $x \in X$

2. بالنسبة لـ  $X$ ، تعطى دالة الإدخال بـ  $\mu_X(x) = 1$  لكل  $x \in X$

من التعريفات السابقة للعمليات على المجموعات الضبابية، يمكن إثبات أن :

1. التقاطع و الإتحاد عمليتين تبديليتين و تجميعيتين على المجموعات الضبابية.

2. عملية التقاطع توزيعية على عملية الإتحاد و العكس ...

إلا أنه العمليتين التاليتين لا تتحققان :

1. في المنطق الضبابي  $(A \vee A^c \neq X)$ ، بعبارة أخرى :  $\mu_{A \vee A^c} \neq 1$

2. في المنطق الضبابي  $(A \wedge A^c \neq \phi)$ ، بعبارة أخرى :  $\mu_{A \wedge A^c} \neq 0$

مثال 9. المجموعتين الضبابيتين  $A_1$ ،  $A_2$  المعرفتين بـ :

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & ; 40 \leq x < 50. \\ 1 - \frac{x-50}{10} & ; 50 \leq x < 60. \\ 0 & ; 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

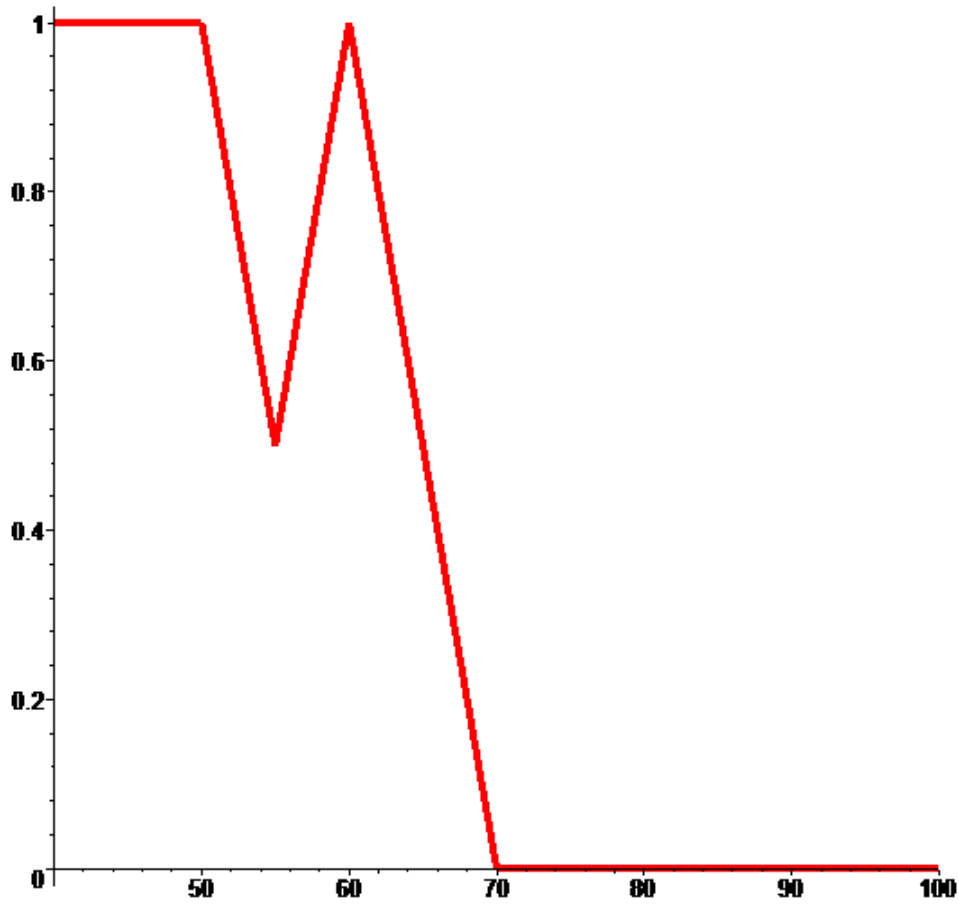
و

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & ; 40 \leq x < 50. \\ \frac{x-50}{10} & ; 50 \leq x < 60. \\ 1 - \frac{x-60}{10} & ; 60 \leq x < 70. \\ 0 & ; 70 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

لدينا :

$$\mu_{A_1 \vee A_2}(x) = \begin{cases} 1 & ; 40 \leq x < 50. \\ 1 - \frac{x-50}{10} & ; 50 \leq x < 55. \\ \frac{x-50}{10} & ; 55 \leq x < 60. \\ 1 - \frac{x-60}{10} & ; 60 \leq x < 70. \\ 0 & ; 70 < x \leq 100. \end{cases}$$

$A_1 \vee A_2$  تمثل بالرسم البياني التالي :

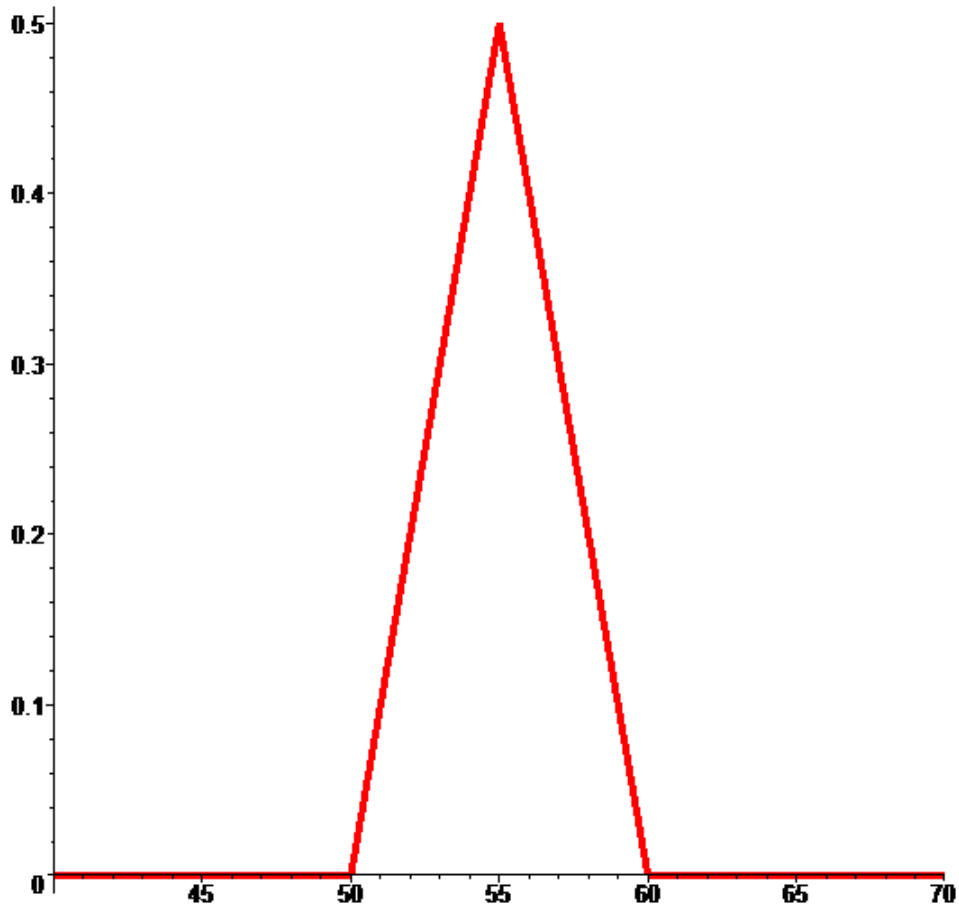


شكل 3.1: إتحاد  $A_1$  و  $A_2$

و تقاطع المجموعتين الضبابيتين  $A_1$  و  $A_2$  يعطى بـ:

$$\mu_{A_1 \wedge A_2}(x) = \begin{cases} 0 & ; 40 \leq x < 50. \\ \frac{x-50}{10} & ; 50 \leq x < 55. \\ 1 - \frac{x-50}{10} & ; 55 \leq x \leq 60. \\ 0 & ; 60 < x \leq 100. \end{cases}$$

التمثل البياني لـ  $A_1 \wedge A_2$  يعطى بـ:

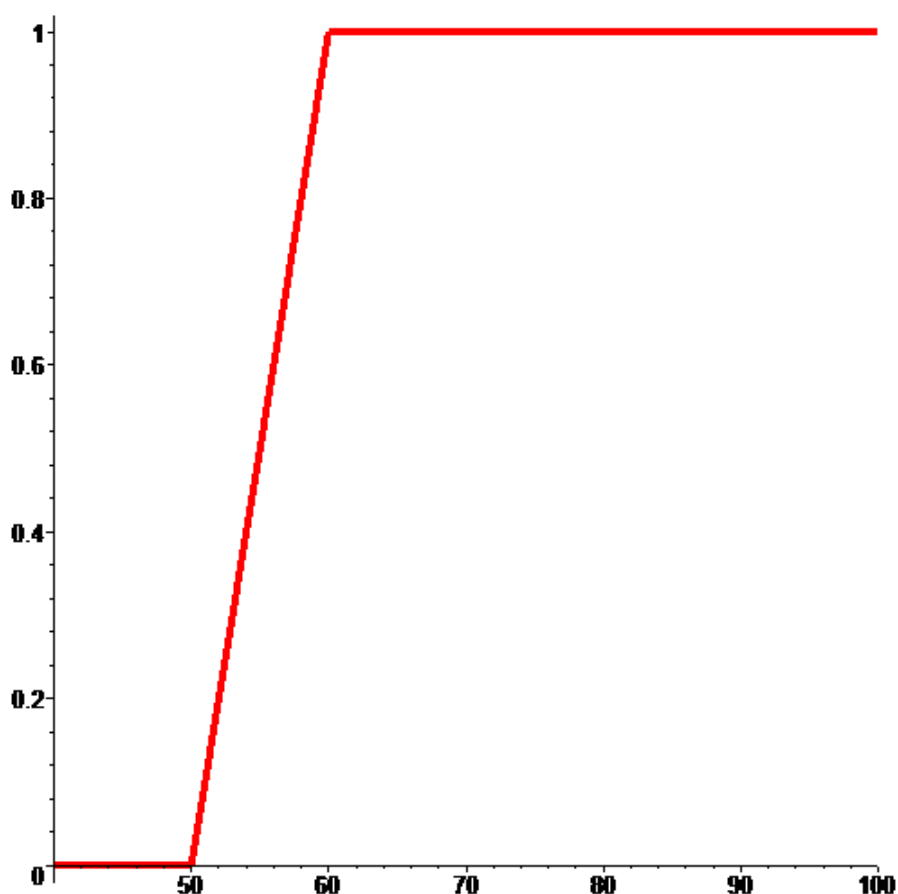


شكل 4.1: تقاطع  $A_1$  و  $A_2$

و متممة  $A_1$  تعطى بـ :

$$\mu_{A_1^c}(x) = \begin{cases} 0 & ; 40 \leq x < 50. \\ \frac{x-50}{10} & ; 50 \leq x < 60. \\ 1 & ; 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

الرسم البياني لـ  $A_1^c$  يعطى بـ :



شكل 5.1: متممة  $A_1$

بشكل عام، بالنسبة للمجموعات الضبابية  $A = \{A_i, i \in I\}$ ، الإتحاد  $C = \vee_I A_i$ ، و التقاطع  $D = \wedge_I A_i$ ، معرفين بـ:

$$\mu_C(x) = \sup_I \{\mu_{A_i}(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

$$\mu_D(x) = \inf_I \{\mu_{A_i}(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

تعريف 8. [27] لتكن  $A$  و  $B$  مجموعتين ضبابيتين من  $X$  و  $Y$  على التوالي،  
جاء المجموعتين الضبابيتين  $A$  و  $B$  هو مجموعة ضبابية من  $X \times Y$  و المعروف بـ:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$$

تعريف 9. [12][16][23]

لتكن  $X$  و  $Y$  مجموعتين و  $f: X \rightarrow Y$  تطبيق، و لتكن  $B$  مجموعة ضبابية من  $Y$ ، إذن الصورة العكسية للمجموعة الضبابية  $B$  بواسطة التطبيق  $f$  هو مجموعة ضبابية من  $X$ ، حيث:

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)), \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 10. لتكن  $X = \{a, b, c\}$  و  $Y = \{d, e, g\}$  مجموعتين، و لتكن  $B$  مجموعة ضبابية من  $Y$ ،  
حيث :  $B = \{(d, 0.2), (e, 0.7), (g, 0.11)\}$   
تعطى الدالة  $f : X \rightarrow Y$  بـ :  $f(a) = d, f(b) = d, f(c) = e$  نجد :

$$f^{-1}(B) = \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.7)\}$$

نظرية 1. [12] ليكن  $f : X \rightarrow Y$  و  $g : Y \rightarrow Z$  تطبيقين و  $C$  مجموعة ضبابية من  $Z$  لدينا :

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

البرهان :  
يكفي أن نبين ما يلي :

$$\mu_{(g \circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x), \forall x \in X$$

ليكن  $x \in X$  :

$$\mu_{(g \circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_C((g \circ f)(x)) = \mu_C(g(f(x))) = \mu_{g^{-1}(C)}(f(x)) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x)$$

ومنه

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

نظرية 2. [12] لتكن  $f$  دالة من  $X$  نحو  $Y$ ، لدينا :

$$1. \text{ لكل مجموعة ضبابية } B \text{ من } Y, f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

2. إذا كانت  $B_1 \subseteq B_2$ ، لدينا :  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ ، من أجل كل  $B_1$  و  $B_2$  مجموعين ضبابيين من  $Y$ .

# 2

## مفاهيم عامة في نظرية الفئات

في هذا الفصل نتناول تعاريف أساسية في نظرية الفئات، حيث سنقوم بتعريف الفئة ونعزز التعريف بالعديد من الأمثلة التوضيحية، كما نعرف الفئات والتشاكلات الفئوية ونقدم بعض الأمثلة عليها.

### 1.2 الفئات

#### 1.1.2 تعريف وأمثلة

تعريف 10. [22] (الفئة)

الفئة  $\underline{C}$  هي كائن رياضي مكون من مجموعتين ويحقق المسلمات التالية:

- \* المجموعة الأولى مكوّنة من أشياء ونرمز لها بـ  $Ob(\underline{C})$  وعناصرها  $a, b, c, \dots$  ونكتب  $a \in \underline{C}$ .
- \* المجموعة الثانية مكوّنة من مورفيزمات<sup>1</sup> نرمز لها بـ  $Mor(\underline{C})$  عناصرها  $f, g, h, \dots$  ونكتب  $f$

---

<sup>1</sup> تسمى أيضا الأسهم.

• من  $\underline{C}$  بحيث:

- لكل مورفيزم  $f$  يوجد شيء  $a \in \underline{C}$  يسمى المصدر لـ  $f$  ونكتب:  $a = Dom(f)$

- لكل مورفيزم  $f$  يوجد شيء  $b \in \underline{C}$  يسمى الهدف لـ  $f$  ونكتب:  $b = Cod(f)$

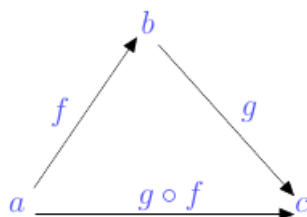
$$a \xrightarrow{f} b$$

\* يتحقق إضافة لذلك:

- لكل شيء  $a \in \underline{C}$  يوجد مورفيزم وحيد نرمز له بـ:  $Id_a$  ويسمى المورفيزم الحيادي<sup>2</sup> حيث:

$$a = Dom(Id_a) = Cod(Id_a) \quad a \xrightarrow{Id_a} a$$

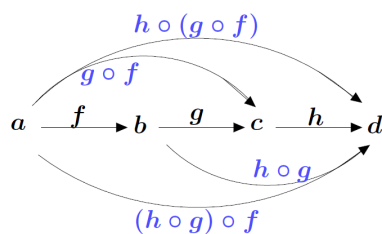
- لكل مورفيزمين  $f$  و  $g$  حيث:  $a \xrightarrow{f} b$  و  $b \xrightarrow{g} c$  يوجد مورفيزم وحيد نرمز له بـ  $g \circ f$  مصدره  $a$  وهدفه  $c$ .



بالإضافة إلى الشروط السابقة يجب أن يتحقق مايلي:

\* عملية التركيب على المورفيزمات تكون تجميعية أي أنه من أجل:

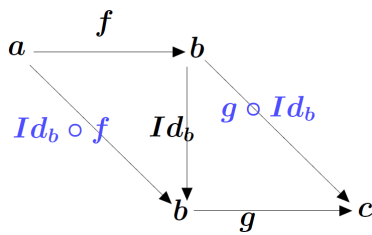
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ لدينا: } f: a \rightarrow b, \quad g: b \rightarrow c, \quad h: c \rightarrow d$$



\* المورفيزم  $Id$  هو مورفيزم حيادي بالنسبة لعملية التركيب أي من أجل:  $a \xrightarrow{f} b, b \xrightarrow{g} c$  لدينا:

$$Id_b \circ f = f \text{ و } g \circ Id_b = g$$

<sup>2</sup> ويسمى كذلك بالتطبيق المطابق.



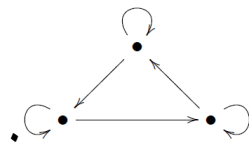
أمثلة 1. (الفئات المنتهية)

(أ)  $0$  هي الفئة الخالية (الفارغة) بدون أشياء وبدون مورفيزمات.

(ب)  $1$  هي الفئة المكونة من شيء واحد والمورفيزم الحيادي له  $\bullet \rightarrow \bullet$ .

(ج)  $2$  الفئة المكونة من شيئين ومورفيزم (دون حساب المورفيزمات الحياضية)  $\bullet \rightarrow \bullet$ .

(د)  $\bullet \rightrightarrows \bullet$  وهي الفئة المكونة من شيئين ومورفيزمين متوازيين دون حساب المورفيزمات الحياضية.



(ه)  $3$  هي فئة مكونة من ثلاثة أشياء وثلاثة مورفيزمات  $\bullet \rightarrow \bullet$  وهكذا فإن الفئات المنتهية تتميز بعدد منتهي من الأشياء والمورفيزمات.

أمثلة 2. (الفئات غير المنتهية)

(أ) الفئة  $Set$  هي الفئة التي:

- أشياءها هي عبارة عن مجموعات كيفية.
- مورفيزماتها هي عبارة عن التطبيقات التي تربط بين المجموعات.
- إذ يمكن أن نلاحظ أن:
- لكل تطبيق له مجموعة انطلاق و مجموعة وصول (هدف).
- لكل مجموعة  $A$  يمكن تعريف التطبيق الحيادي المعرف بـ:

$$Id_A : A \rightarrow A$$

$$x \mapsto Id_A(x) = x$$

- تركيب التطبيقات معرف دوما وهو تجميعي.
- التطبيق الحيادي بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

(ب)

اسم الفئة	أشياء الفئة	مورفيزمات الفئة
$\underline{Top}$	الفضاءات الطوبولوجية	التطبيقات المستمرة
$\underline{Vect}$	الفضاءات الشعاعية	التطبيقات الخطية
$\underline{Grp}$	الزمر	هومومورفيزم الزمر
$\underline{Met}$	الفضاءات المترية	الدوال المقلصة

تعريف 11. [19] (الفئة الجزئية)

لتكن  $\underline{C}$  فئة كيفية غير خالية نقول عن  $\underline{D}$  انها فئة جزئية من الفئة  $\underline{C}$  إذا حققت ما يلي :

$$1. Ob(\underline{D}) \subseteq Ob(\underline{C})$$

$$2. Mor(\underline{D}) \subseteq Mor(\underline{C})$$

وأن المورفيزمات المطابقة الموجودة في  $\underline{D}$  هي ذاتها المورفيزمات المطابقة في  $\underline{C}$ ، إضافة لذلك فإن تركيب المورفيزمات في  $\underline{D}$  هو ذاته تركيب المورفيزمات في  $\underline{C}$ .

تعريف 12. [19] (الفئة الثنوية)

لتكن  $\underline{C}$  فئة كيفية غير خالية نعرف الفئة الثنوية للفئة  $\underline{C}$  والتي يرمز لها بـ  $\underline{C}^{op}$  وتتألف هذه الفئة من :

$$1/ Ob(\underline{C}) = Ob(\underline{C}^{op})$$

$$2/ \forall f : a \rightarrow b \in \underline{C}, \exists f' : b \rightarrow a \in \underline{C}^{op}$$

إضافة لذلك فإن جميع شروط الفئة (المذكورة في التعريف 10) محققة.

### 2.1.2 الفئة الصغيرة

تعريف 13. [19] (الفئة الصغيرة)

نقول عن الفئة أنها صغيرة إذا كانت أشياءها عبارة عن مجموعات منتهية وكان عدد مورفيزماتها كذلك.

أمثلة 3.

(ب)  $\underline{1}$  هي الفئة المكونة من شيء واحد والمورفيزم الحيادي له  $\circlearrowright$ .

(ج)  $\underline{2}$  الفئة المكونة من شيئين ومورفيزم (دون حساب المورفيزمات الحيادية)  $\circlearrowright \rightarrow \circlearrowright$ .

## 2.2 التشاكل الفئوي

تعريف 14. [22] (التشاكل لفئوي)

لتكن  $\underline{C}$  ،  $\underline{B}$  فئتين غير خاليتين، نعرف التشاكل الفئوي على أنه علاقة تربط بين الفئة  $\underline{C}$  والفئة  $\underline{B}$ ، و نكتب:  $T: \underline{C} \rightarrow \underline{B}$  حيث:

- من أجل كل شيء  $a \in \underline{C}$  فإن  $T(a) \in \underline{B}$ .

- من أجل كل مورفيزم  $f: a \rightarrow b$  من  $\underline{C}$  يوجد مورفيزم من  $\underline{B}$   $T(f): T(a) \rightarrow T(b)$  بحيث:

(أ)  $T(Id_a) = Id_{T(a)}$  أي أن صورة المورفيزم الحيادي للشيء  $a$  بواسطة التشاكل  $T$  هو المورفيزم الحيادي لصورته.

(ب)  $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$  أي أن صورة التركيب بواسطة التشاكل  $T$  هي تركيب الصور وذلك من أجل كل مورفيزمين  $f$  ،  $g$  قابلين للتركيب.

أمثلة 4.

(1) التشاكل الحيادي: لتكن فئة كيفية  $\underline{C}$  نعرف التشاكل الحيادي على هذه الفئة كما يلي:

$$\begin{array}{ccc}
 ID: \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C} \\
 X & \longrightarrow & ID(X) = X \\
 \downarrow f & \dashrightarrow & \downarrow ID(f) = f \\
 Y & \longrightarrow & ID(Y) = Y
 \end{array}$$

يمكن وببساطة ملاحظة أن  $ID$  يمثل تشاكل فئوي على الفئة  $\underline{C}$ .  
 (2) لتكن الفئة  $\underline{Set}$  نعرف التشاكل  $\mathcal{P}$  على الفئة السابقة كما يلي:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}: \underline{Set} & \longrightarrow & \underline{Set} \\
 X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\
 \downarrow f & \dashrightarrow & \downarrow \mathcal{P}(f) \\
 Y & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y)
 \end{array}$$

حيث:

$$\mathcal{P}(f)(a) = f(a), a \in \mathcal{P}(A)$$

ويمكن الملاحظة بأن  $\mathcal{P}$  يحقق الشرطين:

(ش 1)

$$(1) \quad \begin{aligned} Id_{\mathcal{P}(X)} : \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ a &\mapsto Id_{\mathcal{P}(X)}(a) = a. \end{aligned}$$

(2) من جهة أخرى لدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Id_A) : \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ a &\mapsto \mathcal{P}(Id_A)(a) = Id_A(a) = a \end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد أن  $\mathcal{P}(Id_A) = Id_{\mathcal{P}(X)}$ .

(ش 2) من أجل كل من  $A, B, C \in \underline{Set}$  ومن أجل  $f$  و  $g$  من  $\underline{Set}$  حيث:  $f : A \rightarrow B$  و  $g : B \rightarrow C$  لدينا:

$$(3) \quad \forall a \in A : \mathcal{P}(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$(4) \quad \forall a \in A : \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)(a) = g(f(a))$$

من (3) و (4) نجد أن  $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$  وهو الشرط الثاني لتعريف التشاكل الفئوي.

# 3

## التحويلات الطبيعية و المورفيزمات الشاملة

إن من بين المفاهيم الأساسية التي صاغها كل من أيلامبارج و ماكلين في نظرية الفئات هي التحويلات الطبيعية التي تربط بين التشاكلات الفئوية والمهمة في الطوبولوجيا الجبرية. سنتعرف في هذا الفصل على هذا المفهوم ونعرج كذلك على تعريف المورفيزمات الشاملة انطلاقاً من التشاكل الفئوي القطري.

### 1.3 التحويلات الطبيعية

تعريف 15. [22] (التحويل الطبيعي)  
لتكن  $C$  و  $D$  فئتين غير خاليتين وليكن  $F$  و  $G$  تشاكلين فئويين معرفين من  $C$  نحو  $D$ . نعرف التحويل الطبيعي  $T$  من  $F$  نحو  $G$  (نقول عن  $T$  أيضاً أنه المورفيزم الذي يربط بين التشاكلين  $F$  و  $G$ ) كما يلي:

- من أجل كل شيء  $A \in \underline{C}$  يوجد مورفيزم وحيد من الفئة  $\underline{D}$  حيث:  $T_A : F(A) \rightarrow G(A)$
- من أجل كل مورفيزم  $f : A \rightarrow B$  من  $\underline{C}$  لدينا:

$$G(f) \circ T_A = T_B \circ F(f)$$

معناه المخطط <sup>1</sup> التالي تبادلي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{T_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{T_B} & G(B) \end{array}$$

### مثال 11.

ليكن التشاكل الفئوي التالي  $** : \underline{Vect}_K \rightarrow \underline{Vect}_K$  الذي ينقل كل فضاء شعاعي  $E$  إلى الثنوي المضاعف  $E^{**}$  انخاص به وكل تطبيق خطي  $f$  إلى أثر الأثر انخاص به  $f^{**}$  ( نذكر أنّ  $f^*$  معرف بـ  $f^*(l) = l \circ f$ ، يوجد تحويل طبيعي (يرمز له بـ  $i$  في الأسفل) معرف من التشاكل الحيادي  $1 : \underline{Vect}_K \rightarrow \underline{Vect}_K$  نحو التشاكل الفئوي  $**$  . والمعرف بالعلاقة:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \\ x & \longmapsto & (l \rightarrow l(x)) \end{array}$$

حيث أنه من أجل كل تطبيق خطي  $f : E \rightarrow F$  المربع التالي تبادلي:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ F & \xrightarrow{i_F} & F^{**} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (l \rightarrow l(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & \longmapsto & (l \rightarrow l(f(x))) \end{array}$$

<sup>1</sup> المخطط التبادلي هو مخطط يشمل مجموعة الأشياء (نقاط) والمورفيزمات (مسارات) وتكون فيه جميع المسارات المتجهة في المخطط من نفس نقاط البداية والنهاية تؤدي إلى نفس النتيجة من حيث البنية. المخطط قد لا يكون تبادلياً، أي أن تركيب المسارات المختلفة في المخطط لا يعطي نفس النتيجة.

### شرح المثال

$$V \in \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \rightsquigarrow V^* = \{h : V \rightarrow \mathbb{K}, \text{ خطي } h\}$$

نظرية 3. [4]

إذا كان  $f$  تطبيق خطي من  $V$  نحو  $W$ .

$$f : V \rightarrow W$$

فإنه يوجد تطبيق ثنائي لـ  $f$  نرمز له بـ  $f^*$  معرف كما يلي:

$$f^* : W^* \rightarrow V^* \text{ خطي}$$

حيث:

$$f^*(h) = h \circ f$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} \mathbb{K}$$

أولاً: نعرف التشاكل الفئوي  $F \equiv *$

$$\begin{array}{ccc}
 F \equiv * : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 V & \longrightarrow & V^* \\
 \downarrow f & \dashrightarrow & \downarrow f^* = - \circ f \\
 W & \longrightarrow & W^*
 \end{array}
 \end{array}$$

-التحقق من شرطي التشاكل:

$$F(1_V) \stackrel{?}{=} 1_{F(V)} / 1 \text{ ش}$$

$$F(1_V) : V^* \rightarrow V^*$$

$$h \mapsto F(1_V)(h) = h \circ 1_V = h$$

ومنه

$$F(1_V)(h) = h$$

$$F(1_V) = 1_{F(V)} : \text{ إذن}$$

$$F(f \circ g) \stackrel{?}{=} F(f) \circ F(g) \quad / 2 \text{ ش}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \downarrow g & & \downarrow g^*(m)=m \circ g \\ W & \longrightarrow & W^* \\ \downarrow f & & \downarrow f^*(l)=l \circ f \\ F & \longrightarrow & F^* \end{array}$$

$$F^* \xrightarrow{f^*} W^* \xrightarrow{g^*} V^*$$

(أ)

$$g^* \circ f^* : F^* \rightarrow V^*$$

$$l \mapsto (g^* \circ f^*)(l) = g^*(f^*(l)) \stackrel{3}{=} g^*(l \circ f) \stackrel{3}{=} l \circ f \circ g$$

من جهة أخرى

(ب)

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \downarrow f \circ g & & \downarrow (f \circ g)^*(l) \stackrel{3}{=} l \circ (f \circ g) = l \circ f \circ g \\ F & \longrightarrow & F^* \end{array}$$

من (أ) و (ب) نجد:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), ((f \circ g)^* = f^* \circ g^*)$$

ومنه  $F \equiv *$  يمثل تشاكل فتوي.

برهنا على أن  $F \equiv *$  بأنه تشاكل فتوي لكي يساعدنا في البرهان على أن  $**$  هو كذلك تشاكل فتوي.  
ثانياً:

نظرية 4. [9]

إذا كان  $V$  فضاء شعاعي فإنه يوجد تطبيق خطي قانوني (طبيعي)  $\eta_V$  معرف بالشكل التالي:

$$\eta : V \rightarrow V^{**}$$

$$v \mapsto \eta_V(v)(h) = h(v) \in \mathbb{K}$$

- برهان أن  $** : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \underline{Vect}_{\mathbb{K}}$  المعروف كما يلي :

$$\begin{array}{ccc}
 ** : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \\
 V & \longrightarrow & V^{**} \\
 f \downarrow & \cdots \longrightarrow & \downarrow f^{**} = h \circ f^* \\
 W & \longrightarrow & W^{**}
 \end{array}$$

هو تشاكل فتوي، حيث:

$$\begin{aligned}
 f^{**} &= h \circ f^* \\
 W^* &\xrightarrow{f^*} V^* \xrightarrow{h^*} \mathbb{K}
 \end{aligned}$$

التحقق الشروط:

ش1 /

$$\begin{array}{ccc}
 V & \longrightarrow & V^{**} \\
 \downarrow 1_V & & \downarrow (1_V)^{**}(h) \stackrel{3}{=} h \circ (1_V)^* = h \\
 V & \longrightarrow & V^{**}
 \end{array}$$

ش2 /

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)^{**} &\stackrel{?}{=} g^{**} \circ f^{**} \\
 V &\xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} F
 \end{aligned}$$

(أ)

$$\begin{array}{ccc}
 V & \longrightarrow & V^{**} \\
 \downarrow g \circ f & & \downarrow (f \circ g)^{**}(h) \stackrel{3}{=} h \circ (f \circ g)^* = h \circ f^* \circ g^* \\
 F & \longrightarrow & F^{**}
 \end{array}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 (g^{**} \circ f^{**})(h) &= g^{**}(f^{**}(h)) \\
 &\stackrel{3}{=} g^{**}(h \circ f^*) \\
 &\stackrel{3}{=} (h \circ f^*) \circ g^* \\
 &= h \circ f^* \circ g^*
 \end{aligned}$$

من (أ) و (ب) نجد

$$(g \circ f)^{**} = g^{**} \circ f^{**}$$

ثالثاً: إثبات أن  $\eta$  تحويل طبيعي من  $1_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}$  إلى  $**$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\eta_V} & V^{**} \\ \downarrow f & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{\eta_W} & W^{**} \end{array}$$

هل

$$f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$$

$$f^{**} \circ \eta_V : V \rightarrow W^{**}$$

$$v \mapsto (f^{**} \circ \eta_V)(v)$$

من أجل  $v \in V$  و  $h : w \rightarrow K$  لدينا:

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \eta_V)(v)(h) &= (f^{**}(\eta_V(v)))(h) \\ &\stackrel{3}{=} (\eta_V(v) \circ f^*)(h) \\ &\stackrel{3}{=} (\eta_V(v))(h \circ f) \\ &\stackrel{4}{=} (h \circ f)(v) = h(f(v)) \\ &\stackrel{4}{=} \eta_W(f(v))(h) \\ &= (\eta_W \circ f)(v)(h) \end{aligned}$$

$$f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$$

وعليه  $\eta$  تحويل طبيعي من  $1_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}$  نحو  $**$ .

شرح المخطط التوضيحي.

1. من الواضح أن  $x$  من  $E$

2. بتطبيق الصورة عمودياً نجد  $f(x) \in F$ .

3. بتطبيق الصورة أفقياً

$$i_E(x) \in E^{**} \rightsquigarrow i_E(x) : E^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$i_E(x) : E^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$l \mapsto i_E(x)l \stackrel{4}{=} l(x)$$

4. بتطبيق صورة  $f(x)$  أفقيا

$$\begin{aligned} i_E(f(x)) : F^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ l &\longmapsto i_E(f(x))(l) = l(f(x)) \end{aligned}$$

تعريف 16. [22] (فئة التشاكلات)

لتكن  $\underline{C}$  و  $\underline{D}$  فئتين غير خاليتين. نعرّف فئة التشاكلات من  $\underline{C}$  إلى  $\underline{D}$  والتي رمز لها بـ:  $\underline{D}^{\underline{C}} = \text{funct}(\underline{C}, \underline{D})$  كما يلي:

- أشياء الفئة  $\underline{D}^{\underline{C}}$  هي التشاكلات الفئوية بين الفئتين  $\underline{C}$  و  $\underline{D}$ .
- المورفيزمات هي التحويلات الطبيعية.

### 2.3 التشاكل الفئوي القطري

تعريف 17. لتكن  $\underline{C}$  فئة كيفية و  $\underline{J}$  فئة صغيرة، نعرّف التشاكل الفئوي القطري  $\Delta$  بالشكل الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \Delta : \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C}^{\underline{J}} \\ c & \longmapsto & \Delta(c) \\ f \downarrow & & \downarrow \Delta(f) \\ c' & \longmapsto & \Delta(c') \end{array}$$

هو التشاكل الفئوي الثابت  $\Delta(c) : \underline{J} \rightarrow \underline{C}$  و  $(\forall i \in \underline{J}, \Delta(c)(i) = c$  و  $\forall l \in \underline{J} \Delta(c)(l) = 1_c$ )  
 $\Delta(f) : \Delta(c) \rightarrow \Delta(c')$  هو التحويل الطبيعي المعرّف بـ  $f$  من أجل كل  $i \in \underline{J}$ .  
 نوضح ذلك بالمخطط التالي:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta(f)(i) = f & & \\ & \Delta(c)(i) = c & \longrightarrow & \Delta(c')(i) = c' & \\ i & & & & \\ \downarrow & \Delta(c)(l) = 1_c & & \Delta(c')(l) = 1_{c'} & \\ l & & & & \\ \downarrow & & & & \\ j & \Delta(c)(j) = c & \longrightarrow & \Delta(c')(j) = c' & \\ & \Delta(f)(j) = f & & & \end{array}$$

### 3.3 المورفيزمات الشاملة

تعريف 18. [22] (المورفيزم الشامل)

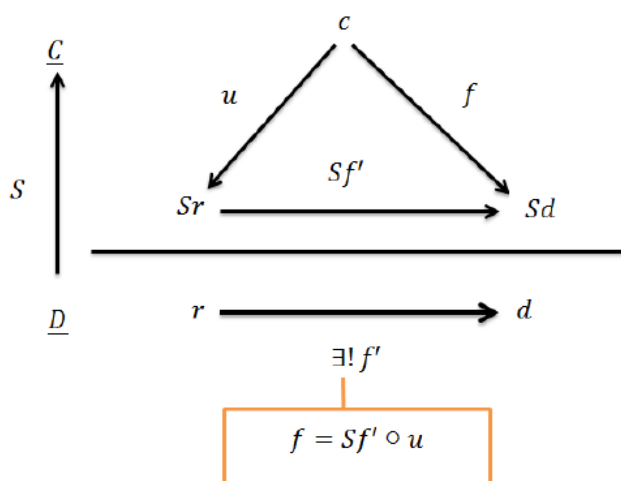
ليكن  $S: \underline{D} \rightarrow \underline{C}$  تشاكل فئوي و  $c \in \underline{C}$ ، نعرّف المورفيزم الشامل من  $c$  نحو التشاكل الفئوي  $S$  على أنه الزوج  $(r, u)$  حيث:

$$r \in \underline{D}, u: c \rightarrow Sr \text{ من } \underline{C}$$

ويحقق من أجل كل زوج آخر  $(d, f)$  حيث:  $(d \in \underline{D}, f: c \rightarrow Sd \text{ من } \underline{C})$  يوجد مورفيزم وحيد  $f': r \rightarrow d$  حيث:

$$Sf' \circ u = f$$

نوضح ذلك بالمخطط التالي:



تعريف 19. في التعريف السابق  $r$  هو عنصر المورفيزم الشامل.

### 1.3.3 الجداء الثنوي و الجداء لفئة كيفية

-الجداء الثنوي (Co-product) لشئين  $A$  و  $B$  من فئة  $\underline{C}$  هو مورفيزم شامل للشئ  $(A, B)$  في  $\underline{C} \times \underline{C}$  نحو التشاكل القطري  $\Delta$  المعرف كما يلي:

$$\begin{array}{ccc} \Delta: \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C} \times \underline{C} \\ c & \longmapsto & \langle c, c \rangle \\ f \downarrow & & \downarrow \Delta(f) = \langle f, f \rangle \\ c' & \longmapsto & \langle c', c' \rangle \end{array}$$

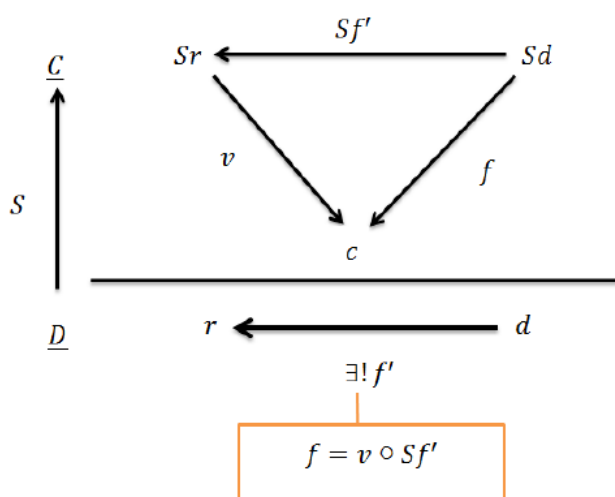
تعريف 20. [22] (المورفيزم الشامل الثنوي) ليكن  $S : \underline{D} \rightarrow \underline{C}$  تشاكل فئوي و  $c \in \underline{C}$ . نعرف المورفيزم الشامل من  $S$  نحو  $c$  (المورفيزم الشامل الثنوي) على أنه الزوج  $(r, v)$  حيث:

$$r \in \underline{D}, v : Sr \rightarrow c \text{ من } \underline{C}$$

الذي يحقق من أجل كل زوج  $(d, f)$  حيث:  $(d \in \underline{D}, f : Sd \rightarrow c \in \underline{C})$  يوجد مورفيزم وحيد  $f' : d \rightarrow r$  حيث:

$$v \circ S f' = f$$

نوضح ذلك بالمخطط التالي:



تعريف 21. في التعريف السابق نعرف  $r$  على أنه ثنوي عنصر المورفيزم الشامل.

مثال 12.

الجداء (Product) للثنيتين  $A$  و  $B$  لفئة  $\underline{C}$  هو ثنوي (Co-product).

### 2.3.3 الجداء الثنوي و الجداء لفئة المجموعات

في الفئة  $\underline{Set}$  لدينا:

- 1- عنصر الجداء الثنوي للمجموعتين  $A$  و  $B$  هو الجمع المنفصل لهما.
- 2- عنصر الجداء للثنيتين  $A$  و  $B$  هو الجداء الديكارتي لهما.

# 4

## الجداء و الجداء الثنوي لفئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية

العالم شونغ أول من أدخل مفهوم الطوبولوجيا الضبابية في بحثه سنة 1968 [12]، و استخدم عوضا عن أسرة من المجموعات الجزئية من  $X$  (في الحالة الكلاسيكية) أسرة من المجموعات الضبابية من  $X$ .  
نقوم في هذا الباب بإعطاء تعريف الطوبولوجيا الضبابية و التطبيق المستمر ضبابيا حسب شونغ، ثم نقوم ببناء فئة الفضاءات الطوبولوجية و التي نرمز لها بـ  $CF-TOP$ ، بعدها نشرع باستخراج الجداء و الجداء الثنوي لهذه الفئة .

### 1.4 تعاريف و أمثلة

تعريف 22. [12]  
لتكن  $X$  مجموعة غير خالية، نعرف الطوبولوجيا الضبابية  $T$  على  $X$  بأنها أسرة من المجموعات الضبابية من  $X$  حيث :

1.  $\emptyset, X \in T$ .

2. إذا كانت  $A_1, A_2 \in T$ ، فإن  $A_1 \wedge A_2 \in T$ .

3. إذا كانت  $A_i \in T$  لكل  $i \in I$ ، فإن  $\bigvee_I A_i \in T$ ، عبارة عن مجموعة كيفية.

نسمي الثنائية  $(X, T)$  الفضاء الطوبولوجي الضبابي و نمر له بـ: (CF-TOP)

\* عناصر  $T$  تسمى المجموعات الضبابية المفتوحة.

\* نقول عن مجموعة ضبابية أنها مغلقة إذا كان متممها مجموعة ضبابية مفتوحة.

مثال 13. 1.  $T = \{\emptyset, X\}$ ، هي طوبولوجيا ضبابية (ضعيفة).

2. الطوبولوجيا  $T = I^X$  هي طوبولوجيا ضبابية قوية ( $T$  تحوي جميع المجموعات الضبابية من  $X$ )

مثال 14. ليكن  $X = \{x, y\}$  و  $B = \{(x, 0.2), (y, 0.7)\}$  و  $A = \{(x, 0.6), (y, 0.3)\}$  نجد :

$$A \wedge B = \{(x, 0.2), (y, 0.3)\}$$

و

$$A \vee B = \{(x, 0.6), (y, 0.7)\}$$

الأسرة:

$$T = \{\emptyset, X, A, B, A \wedge B, A \vee B\}$$

عبارة عن طوبولوجيا ضبابية على  $X$ .

تعريف 23. [12] [16]

لتكن  $X$  مجموعة غير خالية و  $\tau_1$  و  $\tau_2$  طوبولوجيتين ضبابيتين على  $X$ ، الطوبولوجيا  $\tau_1$  أقوى من  $\tau_2$  إذا كانت  $\tau_2 \subseteq \tau_1$  نقول كذلك في هذه الحالة أن  $\tau_2$  أضعف من  $\tau_1$ .

تعريف 24. [12] [13] [18]

ليكن  $(X, T)$  و  $(Y, U)$  فضاءان طوبولوجيان ضبابيان و  $f: (X, T) \rightarrow (Y, U)$  تطبيق، نقول أن  $f$  تطبيق مستمر ضبابيا، إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة ضبابية مفتوحة من  $Y$  بواسطة التطبيق  $f$  هي مجموعة ضبابية مفتوحة من  $X$ .

مثال 15. لتكن  $(X, I^X)$  فضاء طوبولوجي ضبابي متقطع و  $(Y, \tau_Y)$  فضاء طوبولوجي ضبابي، و ليكن  $f: (X, I^X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  تطبيق كفي، إذن التطبيق  $f$  يكون مستمر ضبابيا.

مثال 16. ليكن  $(X, \tau)$  و  $(X, \gamma)$  فضاءان طوبولوجيان ضبابيان، نمر لـ  $\mu$  و  $\mu'$  لدوال الإدخال لعناصر  $\tau$  و  $\tau'$  على التوالي.

التطبيق المطابق  $(X, \tau) \rightarrow (X, \gamma) : id_X$  مستمر ضبابيا إذا و فقط إذا كان  $\tau$  أقوى من  $\gamma$  \* لنفرض أن  $\tau$  أقوى من  $\gamma$ ، و لتكن  $B$  مجموعة ضبابية مفتوحة في  $\gamma$ ، لدينا:  
 $\mu_{id_X^{-1}(B)}(x) = \mu'_B id_X(x) = \mu'_B(x)$  إذن  $id_X^{-1}(B) = B$  بما أن  $\gamma \subseteq \tau$ ،  
 فإن  $id_X^{-1}(B) = B \in \tau$  وبالتالي  $id_X$  مستمر ضبابيا.  
 في المقابل، إذا كان  $id_X$  مستمر ضبابيا و  $B \in \gamma$ ، لدينا:  
 $B = id_X^{-1}(B) \in \tau$  إذن  $\gamma \subseteq \tau$  و  $\tau$  أقوى من  $\gamma$ .

تعريف 25. الفضاءات الطوبولوجية الضبابية  $CF-TOP$  و التطبيقات المستمرة الضبابية تشكل فئة تسمى فئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية و نرمز لها بـ  $CF-TOP$ .

## 2.4 الجداء و الجداء الثنوي لفئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية

### 1.2.4 الجداء الثنوي (Co-product)

تعريف 26. ليكن  $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in CF-TOP$ ، نرمز لـ  $\mu$  و  $\mu'$  لدوال الإدخال لعناصر  $\tau_1$  و  $\tau_2$  على التوالي، الجمع المنفصل لـ  $(X_1, \tau_1)$  و  $(X_2, \tau_2)$  يعرف على النحو التالي:

$$(X_1, \tau_1) \vee (X_2, \tau_2) = (X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2})$$

حيث:

$$X_1 \vee X_2 = \{X_1 \times \{1\}\} \cup \{X_2 \times \{2\}\}$$

و

$$\tau_{X_1 \vee X_2} = \{\theta, X_1 \vee X_2 \text{ من مجموعة ضبابية من } \theta\}$$

دوال الإدخال لعناصر  $\tau_{X_1 \vee X_2}$  تعرف بـ:

$$(\mu \vee \mu')_{\theta} : X_1 \vee X_2 \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, k) \mapsto (\mu \vee \mu')_{\theta}(x, k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\theta)}(x) & ; k = 2 \end{cases}$$

حيث:

$$\varphi_1 : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2})$$

$$x \mapsto \varphi_1(x) = (x, 1)$$

و

$$\varphi_2 : (X_2, \tau_2) \rightarrow (X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2})$$

$$x \mapsto \varphi_2(x) = (x, 2)$$

خاصية 1. الجمع المنفصل  $(X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2})$  هو فضاء طوبولوجي ضبابي. برهان. (1) لدينا :

$$(\mu \vee \mu')_{\emptyset}(x, k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(\emptyset)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\emptyset)}(x) & ; k = 2 \end{cases} = \begin{cases} \mu_{\emptyset}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\emptyset}(x) & ; k = 2 \end{cases} = 0. \quad (a)$$

$$(\mu \vee \mu')_{X_1 \vee X_2}(x, k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(X_1 \vee X_2)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(X_1 \vee X_2)}(x) & ; k = 2 \end{cases} \quad (b) \\ = \begin{cases} \mu_{X_1}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{X_2}(x) & ; k = 2 \end{cases} = 1.$$

إذن  $\emptyset, X_1 \vee X_2 \in \tau_{X_1 \vee X_2}$

(2) لتكن  $\theta_1 \wedge \theta_2$  مجموعة ضبابية من  $X \vee X'$ ، نمرز لدوال إدخالها بـ  $\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}$ ، حسب تعريف تقاطع مجموعتين ضبابيتين لدينا :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2} : X \vee X' \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, k) \mapsto \lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x, k) = \min\{\lambda_{\theta_1}(x, k), \lambda_{\theta_2}(x, k)\}$$

نميز لدينا حالتين :

حالة (1): إذا كانت  $k = 1$ ، لدينا :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x, 1) = \min\{\lambda_{\theta_1}(x, 1), \lambda_{\theta_2}(x, 1)\} = \min\{(\mu \vee \mu')_{\theta_1}(x, 1), (\mu \vee \mu')_{\theta_2}(x, 1)\}$$

$$= \min\{\mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1)}(x), \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_2)}(x)\} = \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1) \wedge \varphi_1^{-1}(\theta_2)}(x) = \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x).$$

حالة (2): بنفس الطريقة نثبت أن :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x, 2) = \mu'_{\varphi_2^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x)$$

أي :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x, k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x) & ; k = 2 \end{cases}$$

إذن  $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_{X_1 \vee X_2}$

(3) لتكن  $\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h$ ،  $\theta_h \in \tau_{X_1 \vee X_2}$ ،  $\forall h \in \Delta$  مجموعة ضبابية من  $X \vee X'$ ، نمرز لدوال إدخالها بـ :  
 حسب تعريف اتحاد المجموعات الضبابية لدينا :

$$\lambda_{\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h} : X \vee X' \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, k) \mapsto \lambda_{\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h}(x, k) = \sup_{h \in \Delta} \{\lambda_{\theta_h}(x, k)\}$$

نميز حالتين :

الحالة (1): إذا كان :  $k = 1$ ، فإن :

$$\lambda_{\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h}(x, 1) = \sup_{h \in \Delta} \{\lambda_{\theta_h}(x, 1)\} = \sup_{h \in \Delta} \{(\mu \vee \mu')_{\theta_h}(x, 1)\}$$

$$= \mu_{\bigvee_{h \in \Delta} \varphi_1^{-1}(\theta_h)}(x) = \mu_{\varphi_1^{-1}(\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h)}(x)$$

حالة (2): بنفس الطريقة نثبت أن :

$$\lambda_{\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h}(x, 2) = \mu'_{\varphi_2^{-1}(\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h)}(x)$$

أي :

$$\lambda_{\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h}(x, k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h)}(x) & ; k = 2 \end{cases}$$

إذن :  $\bigvee_{h \in \Delta} \theta_h \in \tau_{X_1 \vee X_2}$

□

خاصية 2. التطبيقان  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  هما تطبيقين مستمرين ضبابيا.

برهان. لنبين أن  $\varphi_1$  تطبيق مستمر ضبابيا.

ليكن  $\theta \in \tau_{X_1 \vee X_2}$ ، الصورة العكسية لـ  $\theta$  بالتطبيق  $\varphi_1$  هو مجموعة ضبابية من  $X_1$ ، حيث نمرز بـ  $\lambda_{\varphi_1^{-1}(\theta)}$  لدالة إدخالها، لدينا :

$$\lambda_{\varphi_1^{-1}(\theta)}(x) = \lambda_{\theta} \varphi_1(x) = (\mu \vee \mu')_{\theta}(x, 1) = \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta)}(x)$$

إذن :  $\varphi_1^{-1}(\theta) \in \tau_1$  و بالتالي :  $\varphi_1$  هو مستمر ضبابيا.

□

بنفس الطريقة نبرهن أن  $\varphi_2$  هو تطبيق مستمر ضبابيا.

نظرية 5. ليكن  $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (C, \tau_C)$  و  $g : (X_2, \tau_2) \rightarrow (C, \tau_C)$  تطبيقين مستمرين ضبابيا (نمرز لـ  $\mu''$  لدوال إدخال عناصر  $(\tau_C)$ ، فإنه يوجد تطبيق  $h : (X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2}) \rightarrow (C, \tau_C)$  مستمر ضبابيا،

حيث  $f = h \circ \varphi_1$  و  $g = h \circ \varphi_2$

برهان. نعرف التطبيق  $h$  بـ :

$$h : (X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2}) \rightarrow (C, \tau_C) \quad (1)$$

$$(x, k) \mapsto h(x, k) = \begin{cases} f(x) & ; k = 1 \\ g(x) & ; k = 2 \end{cases}$$

\* من الواضح :  $f = h \circ \varphi_1$  و  $g = h \circ \varphi_2$  ،  
ليكن  $\theta_k \in \tau_C$  ، حسب التعريف (9) ، لدينا :

$$\lambda_{h^{-1}(\theta_k)}(x, k) = \lambda_{\theta_k} h(x, k) = \mu''_{\theta_k} h(x, k) = \begin{cases} \mu''_{\theta_k} f(x) & ; k = 1 \\ \mu''_{\theta_k} g(x) & ; k = 2 \end{cases}$$

بما أن  $f$  و  $g$  مستمران ضبابيا فإن :

$$\begin{aligned} \lambda_{h^{-1}(\theta_k)}(x, k) &= \begin{cases} \mu_{f^{-1}(\theta_k)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{g^{-1}(\theta_k)}(x) & ; k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_{(h \circ \varphi_1)^{-1}(\theta_k)}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{(h \circ \varphi_2)^{-1}(\theta_k)}(x) & ; k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(h^{-1}(\theta_k))}(x) & ; k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(h^{-1}(\theta_k))}(x) & ; k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

□

إذن  $h^{-1}(\theta_k) \in \tau_{X_1 \vee X_2}$  و منه  $h$  مستمر ضبابيا.

نتيجة 1. ليكن  $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in \underline{CF-TOP}$  ، عنصر الجداء الثنوي (Co-product)  $\downarrow$   
•  $(X_1, \tau_1)$  و  $(X_2, \tau_2)$  هو الفضاء الضبابي  $(X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2})$  (تعريف (26)).

برهان. حسب الخاصية (1) ،  $(X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2})$  هو فضاء طوبولوجي ضبابي.

\*  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  مستمرين ضبابيا من خلال الخاصية (2) .

\* ليكن  $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (C, \tau_C)$  و  $g : (X_2, \tau_2) \rightarrow (C, \tau_C)$  تطبيقين مستمرين ضبابيا ، فإنه يوجد تطبيق مستمر ضبابيا  $h$  معرف بالعلاقة (1) ، يحقق  $f = h \circ \varphi_1$  ،  $g = h \circ \varphi_2$  (نظرية (5)).  
برهان وحدانية  $h$  :

ليكن  $h' : (X_1 \vee X_2, \tau_{X_1 \vee X_2}) \rightarrow (C, \tau_C)$  تطبيق آخر مستمر ضبابيا حيث :  $f = h' \circ \varphi_1$  و  $g = h' \circ \varphi_2$  لدينا :

$$(h' \circ \varphi_1)(x) = h'(\varphi_1(x)) = h'(x, 1) = f(x)$$

و

$$(h' \circ \varphi_2)(x) = h'(\varphi_2(x)) = h'(x, 2) = g(x)$$

□

و بالتالي :  $h$  وحيد.

### 2.2.4 الجداء (Product)

تعريف 27. ليكن  $(X_1, \delta_1), (X_2, \delta_2) \in \underline{CF-TOP}$ ، نرمز لدوال الإدخال  $\mu$  و  $\mu'$  للعناصر  $\delta_1$  و  $\delta_2$  على التوالي، نعرف  $\tau_{X_1 \times X_2}$  بـ :

$$\tau_{X_1 \times X_2} = \{\theta, (\theta_1)_i \in \delta_1, (\theta_2)_i \in \delta_2, \theta = \bigvee_{i \in I} ((\theta_1)_i \times (\theta_2)_i) \text{ الشكل على الشكل } X_1 \times X_2 \text{ تكتب على الشكل } \theta\}$$

دوال إدخال عناصر  $\tau_{X_1 \times X_2}$  معرفة بـ :

$$(\mu \times \mu')_{\theta}(x, y) = \sup_{i \in I} \{ \min \{ \mu_{(\theta_1)_i}(x), \mu'_{(\theta_2)_i}(y) \} \}, \forall (x, y) \in X_1 \times X_2$$

خاصية 3. [10]

الفضاء  $(X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$  هو فضاء طوبولوجي ضبابي .

خاصية 4. [10]

التطبيقين  $P_1$  و  $P_2$  مستمران ضبابيا حيث :

$$P_1 : (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2}) \longrightarrow (X_1, \delta_1)$$

$$(x, y) \longmapsto P_1(x, y) = x$$

$$P_2 : (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2}) \longrightarrow (X_2, \delta_2)$$

$$(x, y) \longmapsto P_2(x, y) = y$$

نظرية 6. [10]

لتكن  $(Y, \tau_Y)$  فضاء طوبولوجي ضبابي و لتكن  $f$  دالة من  $Y$  نحو  $X_1 \times X_2$ .  
 $f$  مستمر ضبابيا إذا و فقط إذا كانت  $P_1 \circ f$  و  $P_2 \circ f$  مستمران ضبابيا .

نتيجة 2. ليكن  $(X_1, \delta_1), (X_2, \delta_2) \in \underline{CF-TOP}$ . عنصر الجداء (Product)  $\downarrow (X_1, \delta_1)$  و  $(X_2, \delta_2)$  هو الفضاء الطوبولوجي الضبابي  $(X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$  (تعريف 27).

برهان. ليكن  $f : (C, \delta_3) \longrightarrow (X_1, \delta_1)$  و  $g : (C, \delta_3) \longrightarrow (X_2, \delta_2)$  تطبيقين مستمران ضبابيا ، فإنه يوجد تطبيق وحيد  $h$  مستمر ضبابيا يعرف بـ :

$$h : (C, \delta_3) \longrightarrow (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$$

$$x \longmapsto h(x) = (f(x), g(x)),$$

من الواضح أن  $f = P_1 \circ h$  و  $g = P_2 \circ h$  :

\* من النظرية (6) ،  $h$  تطبيق مستمر ضبابيا.

برهان بالوحدانية  $h$ :

ليكن  $h' : (C, \delta) \rightarrow (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$  تطبيق آخر مستمر ضبابيا حيث  $f = P_1 \circ h'$ ،

$$g = P_2 \circ h'$$

نفرض أن  $h'(x) = (a, b)$  لدينا :

$$a = P_1(a, b) = (P_1 \circ h')(x) = f(x)$$

$$b = P_2(a, b) = (P_2 \circ h')(x) = g(x)$$

□

إذن :  $h'(x) = (f(x), g(x)) = h(x)$  و بالتالي فإن  $h$  وحيد.

# 5

## الحوصلة

إن الانتقال من المنطق الكلاسيكي إلى المنطق الضبابي يفتح لنا آفاق جديدة في دراسة بنى جبرية جديدة، وقد قمنا في بحثنا المتواضع ببناء فئة الفضاءات الطوبولوجية الضبابية و دراسة بعض من خواصها الطوبولوجية و الجبرية تمثلت في إيجاد الجداء و الجداء الثنوي لها. من خلال هذه المذكرة تمكنا من معرفة العديد من المفاهيم الرياضية الجديدة أهمها الفضاء الطوبولوجي الضبابي و كذا التطبيق المستمر ضبابيا ثم تعرفنا على شكل الجداء بين فضائين طوبولوجيين ضبابيين إذ أنه جداء ديكارتي بين مجموعتين كلاسيكيتين مزود بطوبولوجيا ضبابية تحقق الشروط التي قدمها شونغ سنة 1968، إضافة لذلك تعرفنا على الجمع المنفصل بين فضائين طوبولوجيين ضبابيين حيث أنه يمثل جمع منفصل بين مجموعتين كلاسيكيتين مزود بطوبولوجيا ضبابية. نسأل الله أن يوفقنا لما يحبه ويرضاه و الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على خاتم الأنبياء و المرسلين، وفقنا الله و إياكم لما فيه صلاحنا جميعا.

## المصادر

- [1] م. حازي ، "الوجيزة الوافية في دروس الطبولوجيا"، جامعة التكوين المتواصل، (2006).
- [2] غ. حسين موسى، "مقدمة في التبولوجيا"، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، (2008).
- [3] ع. قوبا ، " الجبر الجزء الأوّل، مبادئ الجبر المجرد "، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،الجمهورية العربية السورية،الإصدار الأوّل،الطبعة الثانية، (2017).
- [4] ع. قوبا ، " الجبر الجزء الثاني، الجبر الخطي "، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،الجمهورية العربية السورية، (2017).
- [5] أ. نوار، "مدخل إلى الفضاءات الطبولوجية"، ديوان المطبوعات الجامعية المطبعة الجهوية بقسنطينة، (2007).
- [6] *J. Adámek , H. Herrlich , G.E. Strecker, "Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats", Dedicated to Bernhard Banaschewski, 18th January 2005.*
- [7] *S. Ambapour, "Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo", DT 16/(2009).*
- [8] *S. Awodey , " Category Theory" , Second Edition, Carnegie Mellon University, (2010).*
- [9] *H. Brezis,Analyse Fonctionnelle Théorie et Application,Mosson, Paris,(1983).*
- [10] *S. Carlson, "Fuzzy Topological Spaces", Part I (May 10).*
- [11] *S. Carlson, "Fuzzy Topological Spaces", Part II (May 17).*
- [12] *C. Chang, " Fuzzy topological spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications. Anal. Appl. 24 , 182-190, (1968).*

- [13] **S. Demiralp, E. Guner,** "Normality and Its Variants on Fuzzy Isotone Spaces", **6**, 111-121, (2014).
- [14] **S. Eilenberg , S. Maclane.** "General Theory of Natural Equivalences ", *Transactions of the american Mathematical Society*, (1945).
- [15] **P. Eklund, M. A. Galan,** "Set Fkmctors, L-Fuzzy Set Categories, et Generalized Terms" , *J. Computers et Mathematics with Applications.* **43**, 693-705, (2002).
- [16] **S. N. El-Diafy,** "Comparative Study of Fuzzy Topology", a thesis submitted in partial fulfilment of the requirement for degree of master of mathematics, the islamic university of Gaza, (2014).
- [17] **A. Grothendieck,** "Categories fibrees et descente. Revetements etaes et group fonda- mental" , *In Seminaire de Gemetrie Algebrique du Bois-Marie (SGA 1)*, (1960-1961).
- [18] **F. Ismail, R. Uzbashy,** "Fuzzy sets category and applications of its universal arrows", *J. Math.* **29**, 349-372, (2013).
- [19] **B. Le Stum,** "Le langage des catégories", *Université de Rennes 1*, Version du 3 septembre (2004).
- [20] **R. Lowen,** "Fuzzy Topological Spaces et Fuzzy Compactness ", *J. Func. Anal* 621-633, (1976).
- [21] **F. Ronga ,** " Topologie et géométrie ", *Genève, MMVI ap.J.-C,*( 2006).
- [22] **P. Saunders Mac Lane,** "Categories for the Working Mathematician ", *Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg SPIN , 1066-1688 ,* (1969-1970).
- [23] **A. P. Shostak,** "On a fuzzy topological structure" , *J Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser II*, **11**, 89-103, (1985).
- [24] **A. P. Shostak,** "Two Decades of Fuzzy Topology : Basic ideas, Notions, et Results", *Russian Math.*, **44:6**, 125-186, (1989).
- [25] **C. K. Wong,** "Fuzzy Topology : Product et Quotient Theorems ", *J. Math.* **45**, 512-521, (1974).
- [26] **L. A. Zadeh,** "Fuzzy sets", *Information And Control*, **8**, 338-353, (1965).

- [27] *R. Srivastava, S. N. Lal, A. K. Srivastava, "Fuzzy Topological  $T_1$  Spaces", Journal of mathematical analysis et applications, **102**, 442-448, (1984).*