

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Etude de la stabilité d'un système Timoshenko de type
mémoire**

Option : Commande Optimale et Systèmes Dynamiques

Par :

Bouacha Sara

Encadrée par : Messikh Chahrazed

M.C.B U. ANNABA

Devant le jury :

Présidente : Khenniche Ghania

M.C.B U. SKIKDA

Examinatrice: Nasri Nessima

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022



Remerciement

Avant tout, "je remercie Dieu source de toute connaissance " merci de m'avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

En premier lien je remercie profondément ma directrice de recherche, **Dr. Messikh Chahrazed** pour son sérieux, ses conseils judicieux, et sa patience incomparable.

Un grand merci sera également adressé aux **Dr. Khenniche Ghania et Dr. Nasri Nassima** pour avoir en l'amabilité de consulter et d'examiner ce travail.

En fin je remercie tout personne qui de près ou de loin, à contribué à la réalisation de ce mémoire.

Merci à vous tous.

Dédicace



Je dédie ce travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

Mon chère père.

À

Ma chère mère.

À

Mes chères sœurs.

À

Mes chers frères.

À

Tout ma famille le proche et le loin.

À

Mes chères amies.

Sara

Abstract

The objective of this work is to establish the existence and uniqueness of the solution of the following problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_{xx} + \psi_x) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - \delta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t-s) ds = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x, 0), & x \in (0, \infty), \end{array} \right. \quad (P)$$

where φ is the longitudinal displacement of the beam, ψ is the rotation angle of the filament of the beam, δ and k are two positive constants, while φ_0 and φ_1 are two given functions. We are also interested in studying the general energy decay associated with (P) using the multiplier method.

Keywords : Timoshenko system, Multipliers method, Memory term, Dissipative energy, General energy decay.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'établir l'existence et l'unicité devant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_{xx} + \psi_x) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - \delta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t-s) ds = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x, 0), & x \in (0, \infty), \end{array} \right. \quad (P)$$

où φ est le déplacement longitudinal de la poutre, ψ est l'angle de rotation du filament de la poutre, soient δ, k deux constantes positives, φ_0 et φ_1 sont deux fonctions données.

Nous nous intéressons aussi à l'étude de la décroissance générale de l'énergie associée au (P) en utilisant la méthode des multiplicateurs.

Mots-clés : Système de Timoshenko, Méthode des multiplicateurs, Terme de mémoire, Energie dissipative, Décroissance générale de l'énergie

الهدف من هذا العمل هو إثبات وجود ووحداية الحل للمشكلة التالية :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_{xx} + \psi_x) = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - \delta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t-s) ds = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x, 0), \quad x \in (0, \infty), \end{array} \right. \quad (P)$$

حيث φ هي الإزاحة الطولية للجزمة، ψ هي زاوية الدوران، وليكن δ ، k ثابت موجبة، φ_0 و φ_1 دوال معطات.

نحن مهتمون أيضا بدراسة الإضمحلال العام للطاقة المرافق لـ (P) بإستعمال طريقة المضاعفات.

الكلمات المفتاحية: نظام ثيمشكوف، طريقة المضاعفات، مصطلح الذاكرة، الطاقة المبددة، الإضمحلال العام للطاقة.

Table des matières

Résumé	1
Introduction	4
I Préliminaire	8
I.1 Espace de Lebesgue $L^p(I)$	8
I.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$	9
I.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(I)$	10
I.4 Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$	10
I.5 Espace de Hilbert	11
I.6 Base Hilbertienne	11
I.7 Quelques inégalité utiles	11
II Problème bien posé	13
III Décroissance générale	23
Conclusion et perspective	39
Bibliographie	40

Introduction

En mécanique, les mouvements vibratoires sont néfastes pour les structures. Pour réduire les effets de ces vibrations, nous pouvons utiliser plusieurs techniques, tel que la stabilisation qui atténue les vibrations par rétroaction (Feed-back).

Le problème de stabilisation auquel nous intéressons revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ en étudiant sa limite. Si la limite est nulle, on donne une estimation de la vitesse de la décroissance de l'énergie vers zéro. Il se trouve trois types de stabilisations qu'ils sont obligatoirement étudiés :

1. Stabilité forte : $E(t) \mapsto 0$, lorsque $t \mapsto \infty$.
2. Stabilité exponentielle : $E(t) \leq Ce^{-\beta t}$, $\forall t > 0$, et $C > 0$.
3. Stabilité polynomiale : $E(t) \leq Ct^{-\alpha}$, $\forall t > 0$, et $C, \alpha > 0$.

En 1921, Timoshenko introduit le système suivant :

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = k(\varphi_x - \psi)_x, & \text{dans } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ I_\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x + k(\varphi_x - \psi), & \text{dans } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1)$$

où φ est le déplacement transversal de la poutre, et ψ est l'angle de rotation du filament de la poutre. Les coefficients ρ , I_ρ , E , I et k sont respectivement la masse volumique, le moment d'inertie polaire d'une section transversale, le module d'élasticité de Young, le moment d'inertie d'une section transversale et le module de cisaillement.

Plusieurs auteurs ont introduit différents types de mécanismes dissipatifs agissant soit dans une partie du domaine ou soit à la frontière pour stabiliser le système (1), et plusieurs résultats concernant la décroissance uniforme et asymptotique de l'énergie ont été établis. Nous pouvons renvoyer le lecteur à [4, 5].

Kim et Renardy [15] ont considéré (1) avec deux contrôles au bord de la forme

$$\begin{cases} \alpha\rho\varphi_t(L, \cdot) - k(\varphi_x - \psi)_{L,\cdot} = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \beta I_\rho\psi_t(L, \cdot) + (EI\psi_x) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (2)$$

Ils ont utilisé la méthode des multiplicateurs pour obtenir un résultat de la décroissance exponentielle de l'énergie du problème (1)-(2).

Dans [9], A.Guesmia et S. Messaoudi ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x, t) - k(\varphi_x(x, t) + \psi(x, t))_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x, t) - \delta\psi_{xx}(x, t) + k(\varphi_x(x, t) + \psi(x, t)) + \int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x, t-s) ds = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où $(x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+$, L, ρ_1, ρ_2, k, b sont des constantes positives, et g est une fonction de classe C^2 satisfaisant pour certaines constantes $k_0, k_1, k_2 > 0$,

$$-k_0g(t) \leq g'(t) \leq -k_1g(t) \quad \text{et} \quad |g''(t)| \leq k_2g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad b - \int_0^{+\infty} g(s) ds > 0.$$

Les auteurs ont montré que la dissipation donnée par le terme mémoire $\int_0^t g(t-s)\psi(s) ds$ est suffisamment fort pour stabiliser le système exponentiellement si seulement si les vitesses des ondes sont égales $\left(\frac{k}{\rho_1} = \frac{\delta}{\rho_2}\right)$. Ils ont également prouvé que l'énergie des solutions décroît polynomialement, dans le cas où les vitesses des ondes sont différentes $\left(\frac{k}{\rho_1} \neq \frac{\delta}{\rho_2}\right)$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à étudier le système de Timoshenko (3) avec les conditions aux limites et initiales :

$$\begin{cases} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi_t(0, t) = \psi_t(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x, 0), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (4)$$

où g est la fonction de relaxation vérifiant les conditions suivantes :

— (H1) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 satisfaisant

$$l = \delta - \int_0^{+\infty} g(s) ds > 0, \quad g(0) > 0,$$

— (H2) Il existe une fonction différentiable non croissante $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$g'(t) \leq -\eta(t) g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Le but de notre travail est étudier principalement l'existence et l'unicité de la solution du problème (3)-(4), montrer également la décroissance générale de l'énergie en appliquant la méthode des multiplicateurs.

Pour arriver à réaliser ces objectifs qu'il est nécessaire de répartir notre travail en trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles.
- Quand au deuxième chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du système considéré, en utilisant la méthode standard de Faedo-Galerkin.
- Enfin, dans le dernier chapitre nous utilisons la méthode des multiplicateurs pour prouver notre résultat de la décroissance générale de l'énergie.

Chapitre I

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions essentielles concernant les espaces de Sobolev et aussi certains résultats sur les inégalités classiques qui nous seront utiles par la suite dans notre mémoire .

I.1 Espace de Lebesgue $L^p(I)$

Soit $a < b$, $I =]a, b[$ et un intervalle dans \mathbb{R} (pas forcément borné) et $1 \leq p \leq +\infty$. Appelons espace de Lebesgue $L^p(I)$, l'espace

$$L^p(I) = \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \text{ mesurable et } \int_I |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni d'une norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, l'espace de Lebesgue $L^\infty(I)$ est définie par

$$L^\infty(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |u| < C \text{ p.p. sur } I\},$$

on le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C \geq 0 \quad / \quad |f| \leq C \text{ p.p. dans } I \right\}.$$

Définition I.1 Soit $p \in [1, \infty]$ une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(I)$ si $I_K u \in L^p(I)$ pour tout compact $K \subset I$

$$I_K u = \begin{cases} 1 & u \in K/I, \\ 0 & u \notin K/I. \end{cases}$$

L'espace $L^2(I)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_I uv \, dx, \quad u, v \in L^2(I)$$

est un espace de Hilbert. Si $p \in \mathbb{R}$, alors $L^p(I)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

I.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition I.2 L'espace de Sobolev noté $W^{1,p}(I)$ est constitué des fonctions de $L^p(I)$ dont la dérivées au sens des distributions s'identifie à une fonction de $L^p(I)$.

La définition précédente peut s'écrire donc comme suit :

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u \varphi' \, dx = - \int_I g \varphi \, dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\},$$

pour $p=2$, alors $W^{1,2}(I) \equiv H^1(I)$.

Proposition I.1 Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors nous avons

1. L'espace $W^{1,p}(I)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

2. L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

Proposition I.2 (Intégration par parties) Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors, la formule d'intégration par parties est donnée par

$$\int_x^y u'v \, dz = u(y)v(y) - u(x)v(x) - \int_x^y uv' \, dz, \quad \forall x, y \in I,$$

où $u' = \frac{du}{dz}$ et $v' = \frac{dv}{dz}$.

I.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition I.3 Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p < +\infty$, définissons par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), \frac{\partial u}{\partial x} \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

Posant

$$H^m(I) \equiv W^{m,2}(I),$$

et l'espace H^m muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^m (u^{(i)}, v^{(i)})_{L^2},$$

où $u(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$. L'espace H^m est un espace de Hilbert.

I.4 Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$

Définition I.4 Étant donnée $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$, désignons par $W_0^{m,p}(I)$ la fermeture de $C_0^m(I)$ dans $W^{m,p}(I)$. Nous notons $H_0^m(I) = W_0^{m,2}(I)$.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle des fonctions de $W_0^{1,p}(I)$.

Théorème I.1 Soit $u \in W_0^{1,p}(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I .

I.5 Espace de Hilbert

Définition I.5 (*Espace de Hilbert*)

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien (espace vectoriel muni d'un produit scalaire) complet pour la norme associée à un produit scalaire .

I.6 Base Hilbertienne

Une base Hilbertienne dans un espace de Hilbert H est une $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que :

$$i) \quad \|e_n\| = 1, \forall n, (e_m, e_n) = 0 \text{ si } m \neq n$$

et

$$ii) \quad \overline{\text{vect}(e_n, n \in \mathbb{N})} = H$$

Théorème I.2 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Théorème I.3 (*Aubin-Lion*) : Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach avec $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. Supposons que l'injection $X_0 \hookrightarrow X$ est compacte et l'injection $X \hookrightarrow X_1$ est continue, pour $1 \leq p, q \leq \infty$.

Soit $W = \left\{ u \in L^p([0, T], X_0) / u_t \in L^q([0, T], X_1) \right\}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors nous avons

Si $p < \infty$, l'injection de W dans $L^p([0, T]; X)$ est compacte. Si $p = \infty$ et $q > 1$, l'injection de W dans $C([0, T]; X)$ est compacte.

I.7 Quelques inégalité utiles

– Inégalité de Young

Lemme I.1 Soient p et q deux réels conjuguée : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, nous avons

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particulier si $u, v \in L^2(I)$, alors nous avons

$$\int_I |uv| \leq \varepsilon \int_I |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_I |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

– Inégalité de Poincaré

Proposition I.3 *Nous supposons que I est borné, alors il existe une constante c_p telle que*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} \leq c_p \|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I),$$

où $u' = \frac{du}{dx}$.

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(I)$.

– Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert munit par le produit scalaire (\cdot, \cdot) . Alors, nous avons

$$|(u, v)| \leq (u, v)^{\frac{1}{2}} (u, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

Chapitre II

Problème bien posé

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_{xx} + \psi_x) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - \delta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t-s) ds = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

avec les conditions aux limites :

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (\text{II.2})$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad \psi(x, -s) = \phi_0(x, s), \quad s > 0 \quad x \in (0, L). \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où $\rho_1, \rho_2, \delta, k$ sont des constantes positives, φ et ψ deux fonctions données et g est la fonction de relaxation vérifiant :

— (H1) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante dans C^1 satisfaisant

$$l = \delta - \int_0^\infty g(s) ds > 0, \quad g(0) > 0,$$

— (H2) Il existe une fonction différentiable non croissante $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$g'(t) \leq -\eta(t)g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Maintenant, nous rappelons quelques outils dont nous aurons besoin dans la suite de mémoire. Nous commençons d'introduire l'espace énergétique.

$$\mathbb{H} = H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L),$$

$$H_*^1 = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L) \quad \text{avec} \quad L_*^2(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L) : \int_0^L u(x)dx = 0 \right\}.$$

Ensuite, pour tout $(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t) \in \mathbb{H}$ nous démontrons la décroissance générale de l'énergie $E(t)$:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \rho_2 \|\psi_t\|^2 + k \|\varphi_x + \psi\|^2 + \left(\delta - \int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + \frac{1}{2} g \circ \psi_x \right], \quad (\text{II.4})$$

où

$$g \circ \psi_x = \int_0^L \int_0^t g(t-s) [\psi_x(t) - \psi_x(s)]^2 ds dx. \quad (\text{II.5})$$

Pour cela, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme II.1 *Nous avons*

$$- \int_0^L \psi_{xt} g * \psi_x dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[g \circ \psi_x - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_t\|^2 \right] - \frac{1}{2} g' \circ \psi_x + \frac{1}{2} g(t) \|\psi_x\|^2. \quad (\text{II.6})$$

Preuve. Posons $I = \frac{d}{dt} (g \circ \psi_x)$, et $g * \psi_x = \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds = 0$, alors nous avons pour $t > 0$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^L \int_0^t (g(t-s) \psi_x(t) \psi_{xt}(t)) ds dx - 2 \int_0^L \int_0^t (g(t-s) \psi_x(s) \psi_{xt}(t)) ds dx \\ &\quad + \int_0^L \int_0^t (g'(t-s) [\psi_x(t) - \psi_x(s)]^2) ds dx \\ &= \int_0^L \left(\int_0^t g(s) ds \right) \frac{d}{dt} [\psi_x^2] dx - 2 \int_0^L \psi_{xt} g * \psi_x dx + \int_0^L \int_0^t (g'(t-s) [\psi_x(t) - \psi_x(s)]^2) ds dx \\ &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) ds \|\psi_x\|^2 \right] - g(t) \|\psi_x\|^2 - 2 \int_0^L (\psi_{xt} g * \psi_x) dx + g' \circ \psi_x, \end{aligned}$$

ceci implique

$$-2 \int_0^L \psi_{xt} g * \psi_x dx = I - \frac{d}{dt} \left[\left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 \right] + g(t) \|\psi_x\|^2 - g' \circ \psi_x,$$

alors, nous obtenons

$$- \int_0^L \psi_{xt} g * \psi_x dx = \frac{1}{2} \left[I - \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + g(t) \|\psi_x\|^2 - g' \circ \psi_x \right].$$

Ainsi, la relation (II.6) est vérifiée. ■

Lemme II.2 *L'énergie $E(t)$ définie dans (II.4) satisfait*

$$E'(t) = \frac{1}{2} g' \circ \psi_x - \frac{1}{2} g(t) \|\psi_x\|^2 \leq 0, \quad \forall t > 0.$$

Preuve. multiplions l'équation (II.1)₁ par φ_t et (II.1)₂ par ψ_t , puis nous intégrons sur l'intervalles $(0, L)$, nous avons

$$\int_0^L [\rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t - k (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t] dx = 0, \quad (\text{II.7})$$

$$\int_0^L [\rho_2 \psi_{tt} \psi_t - \delta \psi_{xx} \psi_t + k (\varphi_x + \psi) \psi_t + g * \psi_{xx} \psi_t] dx = 0. \quad (\text{II.8})$$

En utilisant l'intégration par partie et les conditions aux limites (II.2) pour les deux équations (II.7) et (II.8), nous obtenons

$$\frac{\rho_1}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} \varphi_t^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx - k [(\varphi_x + \psi) \varphi_t]_0^L = 0, \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} \psi_t^2 dx + \delta \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx - \delta [\psi_x \psi_t]_0^L + k \int_0^L [\varphi_x + \psi] \psi_t dx - \int_0^L g * \psi_x \psi_{xt} dx \\ + [(g * \psi_x) \psi_t]_0^L = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

En sommant (II.9) et (II.10), nous trouvons

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\psi_t\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\psi_x\|^2 \right] + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\varphi_x + \psi)_t dx - \int_0^L (g * \psi_x) \psi_{xt} dx = 0. \quad (\text{II.11})$$

En vertu de lemme (II.1), donc (II.9) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\psi_t\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\psi_x\|^2 + \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{1}{2} g \circ \psi_x - \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \|\psi_x\|^2 \right] \\ - \frac{1}{2} g' \circ \psi_x + \frac{1}{2} g(t) \|\psi_x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

D'après la définition $E(t)$ dans (II.4), ceci implique que

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2} g' \circ \psi_x - \frac{1}{2} g(t) \|\psi_x\|^2 \leq 0,$$

comme la fonction g est une fonction positive est non croissante, alors nous obtenons le résultat cherché. ■

Définition II.1 *Nous disons qu'une fonction $(\varphi, \psi) \in H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ est une solution faible du problème (II.1)-(II.3) si seulement si pour tout $(v, w) \in H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ et pour tout $t \in [0, T]$, nous avons*

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} v dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) v_x dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} w dx + \delta \int_0^L \psi_x w_x dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) w dx - \int_0^L \int_0^t g(t-s) \psi_x w_x dt dx = 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0, \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \psi(x, 0) = \psi_0, \psi_t(x, 0) = \psi_1. \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Maintenant, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (II.1)-(II.3) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Théorème II.1 *(Existence et unicité) Supposons que les conditions H_1 et H_2 sont satisfaites. Soient $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in \mathbb{H}$, alors le problème (II.1)-(II.3) admet une solution faible telle que :*

$$(\varphi, \psi) \in C \left([0, T], H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \right) \cap C^1 \left([0, T], L^2(0, L) \times L_*^2(0, L) \right).$$

Preuve. Le preuve se fait en quatre étapes.

Etape 1

Approximation de Faedo-Galerkin :

Nous construisons l'approximation de la solution (φ, ψ) du problème (II.1)-(II.3) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin comme suit : Pour tout $m > 0$, soit $W_n = \text{Vect} \{w_1, \dots, w_n\}$ une base hilbertienne de l'espace $H_0^1(0, L)$.

Nous choisissons les suites (φ_0^n, ψ_0^n) et (φ_1^n, ψ_1^n) dans W_n tel que :

$$(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n) \longmapsto (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \text{ dans } \mathcal{X} \quad (\text{II.13})$$

avec $\mathcal{X} = H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$.

Maintenant, nous définissons le couple des fonctions (φ^n, ψ^n) comme suit :

$$(\varphi^n, \psi^n) = \sum_{j=1}^n (f_j^n(t), h_j^n(t)) w_j(x), \quad (\text{II.14})$$

où $(\varphi^n(t), \psi^n(t))$ satisfaisant le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^n w_j dx + k \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n) w_{xj} dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}^n w_j dx + \delta \int_0^L \psi_x^n w_{jx} dx + k \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n) w_j dx \\ - \int_0^t g(t-s) \int_0^L \psi_x^n(s) w_{jx} dx dt = 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

et

$$\begin{aligned} \left(\varphi^n(x, 0), \psi^n(x, 0) \right) &= \left(\varphi_0^n, \psi_0^n \right) & \forall x \in (0, L), \\ \left(\varphi_t^n(x, 0), \psi_t^n(x, 0) \right) &= \left(\varphi_1^n, \psi_1^n \right) & \forall x \in (0, L). \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Selon la théorie standard des équations différentielles ordinaires, le problème de dimension fini (II.15)-(II.16) admet une solution $(f_j^n, h_j^n)_{j=1, \dots, n}$ qui est définie sur $[0, t_n]$. Alors les estimations suivants nous permettent d'avoir $t_n = T_0$ où T_0 est une constante $T_0 \leq T$.

Etape 2

Estimation d'énergie :

En multipliant (II.15)₁ par $(f_j^n)'$ et (II.15)₂ par $(h_j^n)'$, puis intégrons sur $[0, L]$. En utilisant l'intégration par partie et le lemme (II.1), nous trouverons

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^n \varphi_t^n dx + k \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n) \varphi_{xt}^n dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}^n \psi_t^n dx + \delta \int_0^L \psi_x^n \psi_{xt}^n dx + k \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n) \psi_t^n dx \\ - \int_0^t g(t-s) \int_0^L \psi_x^n(s) \psi_{xt}^n(t) dx dt = 0. \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

D'où

$$\begin{cases} \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_t^n\|^2 + k \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n) \varphi_{xt}^n dx = 0, \\ \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_t^n\|^2 + \frac{\delta}{2} \|\psi_x^n\|^2 + k \int_0^L (\varphi_x^n + \psi^n) \psi_t^n dx + \frac{1}{2} g(t) \|\psi_x^n\|^2 - \frac{1}{2} g' \circ \psi_x^n \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[g \circ \psi_x^n - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_x^n\|^2 \right] = 0. \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

En additionnant les identités (II.18)₁ et (II.18)₂, alors nous arrivons à

$$\frac{dE^n(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \left[-g' \circ \psi_x + g(t) \|\psi_x\|^2 \right] \leq 0, \quad (\text{II.19})$$

où

$$E^n(t) = \frac{1}{2} \left[\|\varphi_t^n\|^2 + \|\psi_t^n\|^2 + \|\varphi_x^n + \psi^n\|^2 + l \|\psi_x^n\|^2 + g \circ \psi_x \right], \quad (\text{II.20})$$

et l est définie dans l'hypothèse H₁.

Intégrons (II.20) sur $[0, t]$, nous trouvons

$$E^n(t) \leq E^n(0). \quad (\text{II.21})$$

D'après (II.13), $(\varphi_0^n, \psi_0^n, \varphi_1^n, \psi_1^n)$ converge, donc il existe une constante positive C indépendante de n telle que

$$E^n(t) \leq C, \quad \forall t > 0, \quad (\text{II.22})$$

par conséquent, $t_n = T$, pour tout $T > 0$.

Ainsi, à partir de (II.22) et du théorème de Aubin-Lions, nous pouvons passer à la limite dans (II.15)-(II.16).

Etape 3

Passage à la limite

D'après (II.22), nous déduisons

$$\begin{cases} (\varphi^n, \psi^n) \text{ est borné dans } L^\infty(\mathbb{R}; H_*^1(0, L)) \times L^\infty(\mathbb{R}; H_0^1(0, L)), \\ (\varphi_t^n, \psi_t^n) \text{ est borné dans } (L^\infty(\mathbb{R}; L^2(0, L)))^2. \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Par conséquent, de (II.23) nous aurons

$$\begin{cases} (\varphi^n, \psi^n) \rightharpoonup (\varphi, \psi) \text{ faiblement étoilé dans } L^2(\mathbb{R}; H_*^1(\Omega)) \times L^2(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega)), \\ (\varphi_t^n, \psi_t^n) \rightharpoonup (\varphi_t, \psi_t) \text{ faiblement étoilé dans } (L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)))^2, \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

ici $\Omega = (0, L)$. Donc, il en suit que (φ_n, ψ_n) et (φ_n', ψ_n') sont respectivement bornées dans $L^2(\mathbb{R}; H_*^1(0, L)) \times L^2(\mathbb{R}; H_0^1(0, L))$

et

$$(L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L)))^2 = (L^2(Q))^2. \quad (\text{II.25})$$

D'après le théorème de Aubin-Lions, pour tout $T > 0$, il nous donne

$$(\varphi^n, \psi^n) \rightharpoonup (\varphi, \psi) \text{ fortement dans } L^\infty((0, T); H_*^1(0, L)) \times L^\infty((0, T); H_0^1(0, L)). \quad (\text{II.26})$$

Nous pouvons déduire de (II.25) et (II.26) que

$$\varphi_{tt}^n \rightharpoonup \varphi'' \text{ dans } D'(0, T),$$

et pour tout $n > j$

$$\begin{aligned}
(g * \varphi_x^n - \varphi_x, w_j) &\leq \|w_j\| \|g * (\varphi_x^n - \varphi_x)\| \\
&\leq \|w_j\| \left(\int_0^t g(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left[g \circ (\psi_x^n - \psi_x) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|w_j\| C g(0) \|\psi_x^n - \psi\|.
\end{aligned} \tag{II.27}$$

C'est-à-dire que

$$g * \varphi_x^n \rightharpoonup g * \varphi_x \text{ faiblement dans } L^\infty(0, T, L^2(0, L)).$$

En passant à limite lorsque $n \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} (\varphi_{tt}, w_j) + k(\varphi_x + \psi, w_{jx}) = 0, \\ (\psi_{tt}, w_j) + \delta(\psi_x, w_{jx}) + k(\varphi_x + \psi, w_j) - (g * \psi_x, w_j) = 0. \end{cases} \tag{II.28}$$

Donc, les relations (II.12)₁ et (II.12)₂ sont vérifiées. Il nous reste à démontrer que la relations (II.12)₃ pour déduire que (II.1)-(II.3) est une solution faible. Pour cela, nous prenons une fonction $X(t)$ de classe C^2 telle que $X(T) = 0$.

Multiplions (II.15) par $X(t)$ et intégrons sur $(0, T)$ pour arriver à

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [(\varphi_{tt}^n, X(t) w_j) + k(\varphi_x^n + \psi_x^n, X(t) w_{jx})] dt = 0, \\
&\int_0^T [(\psi_{tt}^n, X(t) w_j) + \delta(\psi_x^n, X(t) w_{jx})] dt + k \int_0^T (\varphi_x^n + \psi, X(t) w_j) dt \\
&\quad - \int_0^T (g * \psi_x^n, X(t) w_{jx}) dt = 0.
\end{aligned} \tag{II.29}$$

En utilisant l'intégration par partie deux fois par rapport à t , nous obtenons

$$\begin{cases} \int_0^T (\varphi_x^n, X''(t) w_j) dt + \int_0^T k(\varphi_x^n + \psi_x^n, X(t) w_{jx}) dt = (\varphi_x^n(0), X(0) w_j) - (\varphi_x^n(0), X'(0) w_j), \\ \int_0^T (\psi_x^n, X''(t) w_j) dt + \delta \int_0^T (\psi_x^n, X(t) w_{jx}) dt + \int_0^T k(\varphi_x^n + \psi, X(t) w_j) dt \\ - \int_0^T (g * \psi_x^n, X(t) w_{jx}) dt = (\psi_x^n(0), X(0) w_j) - (\psi_x^n(0), X'(0) w_j). \end{cases} \tag{II.30}$$

En utilisant (II.16) et (II.13) et en passant à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\begin{cases} \int_0^T (\varphi, X''(t) w_j) dt + \int_0^T k(\varphi_x + \psi, X(t)w_{jx}) dt = (\varphi_1, w_j X(0)) - (\varphi_0, w_j X'(0)), \\ \int_0^T (\psi, X''(t) w_j) dt + \delta \int_0^T (\psi_x, X(t) w_{jx}) dt + \int_0^T k(\varphi_x + \psi, X(t) w_j) dt \\ - \int_0^T (g * \psi_x, X(t) w_{jx}(x)) dt = (\psi_1, w_j X(0)) - (\psi_0, w_j X'(0)). \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Multiplions (II.28) par $X(t)$ avec $X(T) = 0$, en intégrant sur $(0, T)$, et en utilisant l'intégration par partie deux fois, nous aboutissons

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\varphi, X''(t) w_j) dt + \int_0^T k(\varphi_x + \psi, X(t)w_{jx}) dt = (\varphi_t(0), w_j X(0)) - (\varphi_0, w_j X'(0)) \\ & \int_0^T (\psi, X''(t) w_j) dt + \delta \int_0^T (\psi_x, X(t) w_{jx}) dt + \int_0^T k(\varphi_x + \psi, X(t) w_j) dt \\ & - \int_0^T (g * \psi_x, X(t) w_{jx}(x)) dt = (\psi_t(0), w_j X(0)) - (\psi_0, w_j X'(0)). \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Par l'identification entre (II.31) et (II.32) et en utilisant le fait que $X(t)$ et w_{jx} (pour $j = 1, \dots, n$) sont fonctions arbitraires, donc cela nous conduisons à

$$\varphi_t(0) = \varphi_1, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \text{et} \quad \psi_t(0) = \psi_1.$$

Etape 4

Unicité de la solution :

Nous supposons qu'il existe deux solutions du problème (II.1)-(II.3) (φ^1, ψ^1) et (φ^2, ψ^2) . Notons $(\varphi, \psi) = (\varphi^1 - \varphi^2, \psi^1 - \psi^2)$, alors pour $i = 1, 2$, nous avons

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}^i - k(\varphi_{xx}^i + \psi_x^i) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt}^i - \delta \psi_{xx}^i + k(\varphi_x^i + \psi^i) + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}^i(t-s) ds = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} \varphi_x^i(0, t) &= \varphi_x^i(L, t), \quad \psi_t^i(0, t) = \psi_t^i(L, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \\ \varphi^i(x, 0) &= \varphi_0^i(x, 0), \quad \varphi_t^i(x, 0) = \varphi_1^i(x, 0), \quad x \in (0, L). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_{xx} + \psi_x) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - \delta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t-s) ds = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi_t(0, t) = \psi^1(L, t) = 0, & \quad t \in (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_t(x, 0) = 0, & \quad x \in (0, L). \end{aligned}$$

En utilisant (II.21), nous trouvons que

$$E(t) \leq E(0) = 0.$$

Comme $E(t)$ est fonction positive, alors $E(t) = 0$ donc d'où $(\varphi^1, \psi^1) \equiv (\varphi^2, \psi^2)$. ■

Chapitre III

Décroissance générale

Dans ce chapitre, nous énonçons et prouvons notre résultat de la décroissance générale de l'énergie (II.4) du problème (II.1-II.3). La méthode utilisée est la méthode des multiplicateurs. Pour atteindre notre objectif nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme III.1 *La fonctionnelle*

$$F_1(t) = \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi \, dx + \rho_1 \int_0^L \left(\psi \int_0^x \varphi_t(y) \, dy \right) dx, \quad \forall t > 0,$$

satisfait

$$F_1'(t) \leq -\frac{l}{2} \|\psi_x\|^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2 + C g \circ \psi_x, \quad \forall t > 0,$$

où l est définie dans l'hypothèse H_1 dans le chapitre 2.

Preuve. Dérivons F_1 par rapport à t , alors nous obtenons

$$\begin{aligned} F_1'(t) = \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi \, dx + \rho_1 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) \, dy \right) dx \\ + \rho_1 \int_0^L \psi \left(\int_0^x \varphi_{tt}(y) \, dy \right) dx. \end{aligned} \tag{III.1}$$

De (II.1)₁ et (II.1)₂, nous avons

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k (\varphi_x + \psi), \\ \rho_2 \psi_{tt} = \delta \varphi_{xx} - k [\varphi_x + \psi] - g * \psi_{xx}. \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Remplaçons (III.2) dans (II.1) pour aboutir

$$\begin{aligned} F'_1(t) = & \rho_2 \|\psi_t\|^2 + \rho_1 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx + \delta \int_0^L \psi_{xx} \psi dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \\ & - \int_0^L g * \psi_{xx} \psi dx + \int_0^L \psi \left(\int_0^x k(\varphi_x + \psi)_x dy \right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie et les conditions aux limites (II.2), pour obtenir

$$\begin{aligned} F'_1(t) = & \rho_2 \|\psi_t\|^2 + \rho_1 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx - \delta \|\psi_x\|^2 - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \\ & + \int_0^L g * \psi_x \psi_x dx - [g * \psi_x \psi]_0^L + k \int_0^L \psi \left[(\varphi_x + \psi)_L - (\varphi_x(0) + \psi(0)) \right] dx, \end{aligned}$$

d'où

$$F'_1(t) = \rho_2 \|\psi_t\|^2 + \rho_1 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx - \delta \|\psi_x\|^2 + \int_0^L g * \psi_x \psi_x dx. \quad (\text{III.3})$$

À l'aide des inégalités de Young et Cauchy-Schwarz, nous estimons les termes du membre droit de (III.3).

On note

$$I_1 = \rho_1 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx,$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \rho_1 \int_0^L |\psi_t| \left(\int_0^x |\varphi_t(y)| dy \right) dx \\
&\leq \rho_1 \int_0^L |\psi_t| \left(\int_0^L |\varphi_t(y)| dy \right) dx \\
&= \rho_1 \int_0^L |\psi_t| dx \int_0^L |\varphi_t(y)| dy \\
&\leq \frac{\rho_1^2}{4 \frac{\varepsilon_1}{L}} \left(\int_0^L |\psi_t| dx \right)^2 + \frac{\varepsilon_1}{L} \left(\int_0^L |\varphi_t(y)| dy \right)^2 \\
&\leq \frac{\rho_1^2 L}{4 \frac{\varepsilon_1}{L}} \|\psi_t\|^2 + \frac{\varepsilon_1}{L} L \|\varphi_t\|^2 \\
&\leq \frac{\rho_1^2 L^2}{4 \varepsilon_1} \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2 \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon_1} \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2.
\end{aligned} \tag{III.4}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^L (g * \psi_x) \psi_x dx \\
&= \int_0^L \left(\int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \psi_x dx \\
&= - \int_0^L \psi_x \int_0^t g(t-s) [-\psi_x(s) + \psi_x(t) - \psi_x(t)] ds dx \\
&= - \int_0^L \int_0^t g(t-s) [\psi_x(t) - \psi_x(s)] ds dx + \left(\int_0^t g(t-s) ds \right) \|\psi_x\|^2.
\end{aligned}$$

Dénotons $g \square \psi_x = \int_0^t g(t-s) [\psi_x(t) - \psi_x(s)] ds$ et nous utilisons le changement de variable $z = t - s$, alors nous avons

$$\int_0^t g(t-s) ds = \int_0^t g(z) dz,$$

d'où

$$I_2 = - \int_0^L \psi_x (g \square \psi_x) dx + \left(\int_0^t g(z) dz \right) \|\psi_x\|^2.$$

En vertu de l'inégalité de Young nous pouvons avoir

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \alpha_1 \|\psi_x\|^2 + \frac{1}{4 \alpha_1} \|g \square \psi_x\|^2 + \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 \\
&= \left(\alpha_1 + \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + \frac{1}{4 \alpha_1} \|g \square \psi_x\|^2.
\end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\|g \square \psi_x\|^2$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|g \square \psi_x\|^2 &= \int_0^L \left[\int_0^t \sqrt{g(t-s)} \sqrt{g(t-s)} |\psi_x(t) - \psi_x(s)| ds \right]^2 dx \\ &\leq \left(\int_0^t g(t-s) ds \right) g \circ \psi_x = \left(\int_0^t g(z) dz \right) g \circ \psi_x \\ &\leq \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) g \circ \psi_x \leq C g \circ \psi_x, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$I_2 \leq \left(\alpha_1 + \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + \frac{C}{\alpha_1} g \circ \psi_x. \quad (\text{III.5})$$

En remplaçant (III.4) et (III.5) dans (III.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} F'_1(t) &\leq \rho_2 \|\psi_t\|^2 + \frac{C}{\varepsilon_1} \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2 - \delta \|\psi_x\|^2 + \left(\alpha_1 + \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + \frac{C}{\alpha_1} g \circ \psi_x \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2 - \left(\delta - \alpha_1 - \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + \frac{C}{\alpha_1} g \circ \psi_x. \end{aligned}$$

Comme $l = \delta - \int_0^\infty g(s) ds$, alors nous aurons

$$F'_1(t) \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2 - (l - \alpha_1) \|\psi_x\|^2 + \frac{C}{\alpha_1} g \circ \psi_x,$$

posons $\alpha_1 = \frac{l}{2}$, alors nous déduisons que

$$F'_1(t) \leq -\frac{l}{2} \|\psi_x\|^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_1 \|\varphi_t\|^2 + C g \circ \psi_x.$$

■

Lemme III.2 *Supposons que H_1 est vérifiée. Alors, pour tout $t_0 > 0$, la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_2(t) &= -\rho_2 \int_0^L \left(\psi_t \int_0^t g(t-s) [\psi(t) - \psi(s)] ds \right) dx \\ &= -\rho_2 \int_0^t \psi_t g \square \psi, \quad t > 0 \end{aligned}$$

satisfait pour tout $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_2 > 0$ et pour tout $t \geq t_0 > 0$

$$F'_2(t) \leq -\rho_2 \frac{g_0}{2} \|\psi_t\|^2 + 2 \varepsilon_2 \|\psi_x\|^2 + \varepsilon_3 \|\varphi_x + \psi\|^2 - C g' \circ \psi_x + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) g \circ \psi_x,$$

où

$$g_0 = \int_0^{t_0} g(s) ds.$$

Preuve. Dérivons F_2 par rapport à t , alors nous donnons

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} g \square \psi dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t g' \square \psi dx - \rho_2 \left(\int_0^t g(t-s) ds \right) \|\psi_t\|^2 \\ &= -\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} g \square \psi dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t g' \square \psi dx - \rho_2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_t\|^2. \end{aligned}$$

D'après (II.1)₂, nous avons

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\delta \int_0^L \psi_{xx} g \square \psi dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) g \square \psi dx + \int_0^L g * \psi_{xx} g \square \psi dx \\ &\quad - \rho_2 \left(\int_0^L \psi_t g' \square \psi dx \right) - \rho_2 \left(\int_0^L g(s) ds \right) \|\psi_t\|^2. \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons l'intégration par parties avec les conditions aux limites (II.2), alors nous trouvons

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\rho_2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_t\|^2 + \delta \int_0^L \psi_x g \square \psi dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) g \square \psi dx \\ &\quad - \int_0^L (g * \psi_x) g \square \psi_x dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t g' \square \psi_x dx. \end{aligned} \tag{III.6}$$

Ensuite, nous estimons les termes du membre droit de (III.6) en appliquant l'inégalité de Young, Cauchy- Schwarz et Poincaré et en utilisant le fait que $\int_0^t g(s) ds < \delta$, donc nous aboutissons

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta \int_0^L \psi_x g \square \psi_x dx \\ &\leq \varepsilon_2 \|\psi_x\|^2 + \frac{\delta^2}{4 \varepsilon_2^2} \|g \square \psi\|^2 \\ &\leq \varepsilon_2 \|\psi_x\|^2 + \frac{\delta^2}{4 \varepsilon_2} \left(\int_0^L g(s) ds \right) g \circ \psi \\ &\leq \varepsilon_2 \|\psi_x\|^2 + \frac{C}{\varepsilon_2} g \circ \psi_x, \end{aligned}$$

par analogie avec I_1 , nous aurons

$$\begin{aligned} I_2 &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi) g \square \psi \, dx \\ &\leq \varepsilon_3 \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{C}{\varepsilon_3} g \circ \psi_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_0^L g * \psi_x (g \square \psi_x) \, dx \\ &= \int_0^L g * [\psi_x(t) - \psi_x(s)] g \square \psi_x \, dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_0^L \psi_x(t) g \square \psi_x \, dx \\ &= \int_0^L (g \square \psi_x)^2 \, dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_0^L \psi_x(t) g \square \psi_x \, dx \\ &\leq C g \circ \psi_x + \varepsilon_2 \|\psi_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(\int_0^t g(s) ds \right)^2 g \circ \psi \\ &\leq \varepsilon_2 \|\psi_x\|^2 + C \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + 1 \right) g \circ \psi_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -\rho_2 \int_0^L \psi_t g' \square \psi \, dx \\ &\leq \rho_2 \alpha_2 \|\psi_t\|^2 + \left(\frac{\rho_2 \int_0^t g'(s) ds}{4 \delta_2} \right) g' \circ \psi_x \\ &\leq \rho_2 \alpha_2 \|\psi_t\|^2 - \frac{C}{\alpha_2} g' \circ \psi_x. \end{aligned}$$

En insérant ($I_1 - I_4$) dans (III.6), nous aurons

$$F_2'(t) \leq -\rho_2 \left(\int_0^t g(s) ds - \alpha_2 \right) \|\psi_t\|^2 + 2 \varepsilon_2 \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_3 \|\varphi_x + \psi\|^2 - C g' \circ \psi_x + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) g \circ \psi_x.$$

Comme g est une fonction positive continue et $g(o) > 0$, pour tout $t \geq t_0 > 0$, alors nous

prenons $\alpha_2 = \frac{\int_0^{t_0} g(s) ds}{2} = \frac{g_0}{2}$, il s'ensuit

$$\int_0^t g(s) ds - \alpha_2 > \int_0^{t_0} g(s) ds - \alpha_2 = \frac{g_0}{2}$$

alors, nous déduisons que

$$F_2'(t) \leq -\rho_2 \frac{g_0}{2} \|\psi_t\|^2 + 2 \varepsilon_2 \|\psi_t\|^2 + \varepsilon_3 \|\varphi_x + \psi\|^2 - c g' \circ \psi_x + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) g \circ \psi_x.$$

■

Lemme III.3 Supposons que H_1 et $\frac{k}{\rho_1} = \frac{\delta}{\rho_2}$ sont vérifiées, alors la fonctionnelle

$$F_3(t) = \int_0^L (\psi_x \varphi_t + \varphi_x \psi_t) dx + \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g * \psi_x dx, \quad t > 0$$

satisfait

$$F_3'(t) \leq -\frac{k}{2 \rho_2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + C \varepsilon_4 \|\varphi_t\|^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \|\psi_x\|^2 + C g \circ \psi_x - \frac{C}{\varepsilon_4} g' \circ \psi_x, \quad t > 0.$$

Preuve. La différentielle de F_3 par rapport à t est donnée par

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= \int_0^L (\psi_{xt} \varphi_t + \psi_x \varphi_{tt} + \varphi_{xt} \psi_t + \varphi_x \psi_{tt}) dx - \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L (\varphi_{tt} g * \psi_x) dx - \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * \psi_x dx \\ &\quad - \frac{\rho_1}{k \rho_2} g(0) \int_0^L \varphi_t \psi_x dx. \end{aligned}$$

En utilisant (II.1)₁ et (II.1)₂, alors nous donnons

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= \int_0^L (\psi_{xt} \varphi_t + \varphi_{xt} \psi(t)) dx - \frac{\rho_1}{k \rho_2} g(0) \int_0^L \varphi_t \psi_x dx - \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * \psi_x dx \\ &\quad + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx + \frac{\delta}{\rho_2} \int_0^L \psi_{xx} \varphi_x dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x (\varphi_x + \psi) dx \\ &\quad - \frac{1}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x g * \psi_{xx} dx - \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\int_0^L (\psi_{xt} \varphi_t + \varphi_{xt} \psi(t)) dx = \int_0^L (\psi_t \varphi_t)_x dx = [\psi_t \varphi_t]_0^L = 0.$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites (II.2) pour trouver

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\frac{\rho_1}{k \rho_2} g(0) \int_0^L \varphi_t \psi_x dx - \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * \psi_x dx + \frac{k}{\rho_1} \|\psi_x\|^2 + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \psi_x \varphi_{xx} dx \\ &\quad - \frac{\delta}{\rho_2} \int_0^L \psi_x \varphi_{xx} dx - \frac{k}{\rho_2} \|\varphi_x\|^2 - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x \psi dx + \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x \varphi_{xx} dx \\ &\quad - \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x \varphi_{xx} dx - \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x \psi_x dx, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
F'_3(t) &= -\frac{\rho_1}{k \rho_2} g(0) \int_0^L \varphi_t \psi_x dx - \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * \psi_x dx + \frac{k}{\rho_1} \|\psi_x\|^2 \\
&+ \left(\frac{k}{\rho_1} - \frac{\delta}{\rho_2} \right) \int_0^L \psi_x \varphi_{xx} dx - \frac{k}{\rho_2} \|\varphi_x\|^2 - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x \psi dx \\
&- \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x \psi_x dx.
\end{aligned} \tag{III.7}$$

Comme $\frac{k}{\rho_1} = \frac{\delta}{\rho_2}$, alors la relation (III.7) devient

$$\begin{aligned}
F'_3(t) &= -\frac{k}{\rho_2} \|\varphi_x\|^2 + \frac{k}{\rho_1} \|\psi_x\|^2 - \frac{\rho_1}{k \rho_2} g(0) \int_0^L \varphi_t \psi_x dx - \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x \psi_x dx \\
&- \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * \psi_x dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x \psi dx.
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Dans ce qui suit, nous allons estimer les trois derniers termes de membre droit de la relation (III.8) par l'utilisation des inégalités de Young, Cauchy-Schwarz, et Poincaré, alors pour $\epsilon_4 > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{k}{\rho_2} \int_0^L \varphi_x \psi dx \leq \frac{k}{2 \rho_2} \|\varphi_x\|^2 + \frac{k}{2 \rho_2} \|\psi\|^2 \leq \frac{k}{2 \rho_2} \|\varphi_x\|^2 + C \|\psi_x\|^2 \\
I_2 &= -\frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * \psi_x \psi_x dx \\
&= \frac{1}{\rho_2} \int_0^L g * [\psi(t) (\psi_x(t) - \psi_x(s))] - \frac{1}{\rho_2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 \\
&\leq \left(\frac{\alpha_3 - 1}{\rho_2} \right) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\psi_x\|^2 + \frac{C}{\alpha_3} g \circ \psi_x.
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Posons $\alpha_3 = 1$, alors (III.9) devient

$$I_2 \leq C g \circ \psi_x$$

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * \psi_x dx \\ &= \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' * [\psi(t) - \psi(s)] - \frac{\rho_1}{k \rho_2} \left(\int_0^t g'(t-s) ds \right) \int_0^L \varphi_t \psi_x dx \\ &= \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t g' \square \psi_x dx - g(t) \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx + g(0) \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx \\ &\leq \frac{\rho_1}{2 k \rho_2} \varepsilon_4 \|\varphi_t\|^2 + \frac{\rho_1}{2 k \rho_2 \varepsilon_4} \left(\int_0^t g'(s) ds \right) g' \circ \psi_x + \frac{\rho_1 \varepsilon_4}{2 k \rho_2} \|\varphi_t\|^2 + \frac{g^2(t) \rho_1}{2 k \rho_2 \varepsilon_4} \|\psi_x\|^2 \\ &\quad + g(0) \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx, \end{aligned}$$

donc, nous arrivons à

$$I_3 \leq \frac{\rho_1 \varepsilon_4}{k \rho_2} \|\varphi_t\|^2 - \frac{C}{\varepsilon_4} g' \circ \psi_x + \frac{C}{\varepsilon_4} \|\psi_x\|^2 + g(0) \frac{\rho_1}{k \rho_2} \int_0^L \varphi_t \psi_t dx,$$

car $g(t) < g(0)$ et $\int_0^t g'(s) ds = g(t) - g(0) < 0$.

Enfin, nous substituons ($I_1 - I_3$) dans (III.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} F'_3(t) &\leq -\frac{k}{2 \rho_2} \|\varphi_x\|^2 + C \varepsilon_4 \|\varphi_t\|^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \|\psi_x\|^2 + C g \circ \psi_x - \frac{C}{\varepsilon_4} g' \circ \psi_x \\ &\leq -\frac{k}{2 \rho_2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{k}{2 \rho_2} \|\psi\|^2 + C \varepsilon_4 \|\varphi_t\|^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \|\psi_x\|^2 + C g \circ \psi_x - \frac{C}{\varepsilon_4} g' \circ \psi_x \\ &\leq -\frac{k}{2 \rho_2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + C \varepsilon_4 \|\varphi_t\|^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \|\psi_x\|^2 + C g \circ \psi_x - \frac{C}{\varepsilon_4} g' \circ \psi_x. \end{aligned}$$

■

Lemme III.4 *La fonctionnelle suivante*

$$F_4(t) = -\rho_1 \int_0^L \varphi \varphi_t dx, \quad \forall t > 0,$$

satisfait

$$F'_4(t) \leq -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{3k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + C \|\psi_x\|^2, \quad t > 0.$$

Preuve. Prenons la dérivée de la fonctionnelle F_4 par rapport à t , nous aboutissons

$$F'_4(t) = -\rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^L \varphi \varphi_{tt} dx. \quad (\text{III.10})$$

De (II.1)₁, donc la relation (III.10) devient

$$F_4'(t) = -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 - k \int_0^L \varphi(\varphi_x + \psi)_x dx.$$

Explorer l'inégalité de Young, par l'intégration par partie et en prenant en considération les conditions aux limites (II.2), alors nous trouvons

$$F_4'(t) = -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + k \int_0^L \varphi_x(\varphi_x + \psi) dx.$$

Explorons les inégalités de Young et Poincaré pour obtenir

$$\begin{aligned} F_4'(t) &\leq -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{k}{2} \|\varphi_x\|^2 + \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 \\ &\leq -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{k}{2} \|\psi\|^2 \\ &\leq -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{3k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{k}{2} \|\psi\|^2 \\ &\leq -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{3k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{k}{2} C \|\psi_x\|^2 \\ &\leq -\rho_1 \|\varphi_t\|^2 + \frac{3k}{2} \|\varphi_x + \psi\|^2 + C \|\psi_x\|^2. \end{aligned}$$

■

Nous somme prêts à mentionner et prouver notre résultat principal.

Théorème III.1 *Supposons que H_1 et H_2 sont vérifiées. Alors, pour tout $t_0 > 0$, il existe deux constantes positives α et β telles que l'énergie donné par la relation (II.4), satisfait*

$$E(t) \leq \alpha e^{-\beta \int_{t_0}^t \eta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{III.11})$$

Preuve. Définissons la fonctionnelle de Lyapunov comme suit :

$$L(t) = NE(t) + N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + F_4(t), \quad (\text{III.12})$$

où N, N_1, N_2 et N_3 sont des constantes positives que nous allons choisir plus tard.

En dérivant (III.12) et en utilisant les lemmes (III.2)-(III.4), nous aurons

$$\begin{aligned}
L'(t) &= NE'(t) + N_1 F_1'(t) + N_2 F_2'(t) + N_3 F_3'(t) + F_4'(t) \\
&\leq - \left[\frac{l}{2} N_1 - 2 \varepsilon_2 N_2 - C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) N_3 - C \right] \|\psi_x\|^2 \\
&\quad - \left[\rho_1 - N_1 \varepsilon_1 - C N_3 \varepsilon_4 \right] \|\varphi_t\|^2 \\
&\quad - \left[\frac{\rho_2 g_0 N_2}{2} - C N_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \right] \|\psi_t\|^2 \\
&\quad - \left[\frac{k}{2 \rho_2} N_3 - \varepsilon_3 N_2 - \frac{3k}{2} \right] \|\varphi_x + \psi\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{N}{2} - C \frac{N_3}{\varepsilon_4} - C N_2 \right] g' \circ \psi_x \\
&\quad + C \left[N_1 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) N_2 + N_3 \right] g \circ \psi_x.
\end{aligned} \tag{III.13}$$

En posant $\varepsilon_1 = \frac{\rho_1}{4 N_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{l_2 N_1}{N_2}$, $\varepsilon_3 = \frac{k N_3}{4 \rho_2 N_2}$, $\varepsilon_4 = \frac{\rho_1}{4 C N_3}$, donc, nous avons

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq - \left[\frac{l_2 N_1}{4} - C (1 + N_3) N_3 - C \right] \|\psi_x\|^2 - \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t\|^2 \\
&\quad - \left[\frac{k}{4 \rho_2} N_3 - \frac{3k}{2} \right] \|\varphi_x + \psi\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{N}{2} - C N_3^2 - C N_2 \right] g' \circ \psi_x \\
&\quad - \left[\frac{\rho_2 g_0}{2} N_2 - C N_1 (1 + N_1) \right] \|\psi_t\|^2 \\
&\quad + C \left[N_1 + N_2 \left(1 + \frac{N_2}{N_1} + \frac{N_2}{N_3} \right) + N_3 \right] g \circ \psi_x.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous choisissons attentivement nos constantes afin que les termes entre les parenthèses soient positifs .

Premièrement, nous prenons N_3 suffisamment grand telle que

$$\alpha_1 = \frac{K}{4\rho_2} N_3 - \frac{3K}{2} > 0,$$

deuxièmement, nous fixons N_1 suffisamment grand telle que

$$\alpha_2 = \frac{l_2 N_1}{4} - C (1 + N_3) N_3 - C > 0,$$

ensuite, nous fixons N_2 suffisamment grand pour que

$$\alpha_3 = \frac{\rho_2 g_0 N_2}{2} - C N_1 (1 + N_1) > 0,$$

enfin, nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -\alpha_2 \|\psi_x\|^2 - \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t\|^2 - \alpha_1 \|\varphi_x + \psi\|^2 - \alpha_3 \|\psi_t\|^2 \\ &\quad + \left[\frac{N}{2} - C N_3^2 - C N_2 \right] g' \circ \psi_x \\ &\quad + C \left[N_1 + N_2 \left(1 + \frac{N_2}{N_1} + \frac{N_2}{N_3} \right) + N_3 \right] g \circ \psi_x \\ &\leq -\alpha_1 \|\varphi_x + \psi\|^2 - \alpha_2 \|\psi_x\|^2 - \alpha_3 \|\psi_t\|^2 + \left[\frac{N}{2} - C \right] g' \circ \psi_x + C g \circ \psi_x. \end{aligned} \tag{III.14}$$

D'autre part, nous définissons

$$\mathbb{L}(t) = N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + F_4(t).$$

Maintenant, nous estimons les fonctions $F_1(t) - F_4(t)$, en utilisant l'inégalité de Young, Cauchy-Schwarz et Poincaré, comme suit :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \rho_1 \int_0^L \psi \psi_t dx + \int_0^L \psi \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx \\ &\leq \rho_1 \int_0^L |\psi \psi_t| dx + \int_0^L |\psi| \left(\int_0^x |\varphi_t(y)| dy \right) dx \\ &\leq \rho_1 \left[\|\psi\|^2 + \|\psi_t\|^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\|\psi\|^2 + \left\| \int_0^x |\varphi_t(y)| dy \right\|^2 \right] \\ &\leq \rho_1 \left[2 C \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \int_0^L |\varphi_t(y)| dy \right\|^2 \right] \\ &\leq \rho_1 \left[2 C \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|^2 \right] + \frac{L^2}{2} \|\varphi_t\|^2 \\ &\leq C \left[\|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|^2 + \|\varphi_t\|^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= \rho_2 \int_0^L |\psi| g \square \psi \, dx \\
&\leq \rho_2 \left[\|\psi\|^2 + \|g \square \psi\|^2 \right] \\
&\leq C \left[\|\psi_x\|^2 + g \circ \psi \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(t) &= \int_0^L \left(\psi_x \varphi_t + \varphi_x \psi_t + \frac{\rho_1}{k\rho_2} \varphi_t g \square \psi_x \right) dx - \frac{\rho_1}{k\rho_2} \left(\int_0^t g(s) \, ds \right) \|\varphi_t\|^2 \\
&\leq C \left[\|\psi_x\|^2 + \|\varphi_t\|^2 + \|\psi_t\|^2 + \|\varphi_x\|^2 + g \circ \psi_x + \|\varphi_t\|^2 \right] \\
&\leq C \left[\|\psi_x\|^2 + \|\varphi_t\|^2 + \|\psi_t\|^2 + \|\varphi_x + \psi\|^2 + g \circ \psi_x \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4(t) &= \int_0^L \varphi \varphi_t \, dx \\
&\leq C \left[\|\varphi\|^2 + \|\varphi_t\|^2 \right] \\
&\leq C \left[\|\varphi_x\|^2 + \|\varphi_t\|^2 \right] \\
&\leq C \left[\|\varphi_x + \psi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\varphi_t\|^2 \right] \\
&\leq C \left[\|\varphi_x + \psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\varphi_t\|^2 \right].
\end{aligned}$$

Cela implique qu'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$|\mathbb{L}(t)| \leq C_0 E(t) \Leftrightarrow -C_0 E(t) \leq \mathbb{L}(t) \leq C_0 E(t),$$

d'où

$$(N - C_0) E(t) \leq \mathbb{L}(t) \leq (C_0 + N) E(t).$$

Maintenant, en choisissant suffisamment N grand pour que $N - C_0 > 0$ et $\frac{N}{2} - C > 0$, en déduisant que $\mathbb{L}(t) \sim E(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Nous revenons à l'expression de (III.14) et à l'expression l'énergie $E(t)$ dans (III.4), alors nous déduisons qu'il existe deux constantes positives k_1, k_2 , telles que

$$L'(t) \leq -k_1 E(t) + k_2 g \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0 > 0. \quad (\text{III.15})$$

En multipliant (III.15) par $\eta(t)$, nous obtenons

$$\eta(t) L'(t) \leq -k_1 \eta(t) E(t) + k_2 \eta(t) g \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{III.16})$$

Le dernier terme de (III.16) est estimé comme suit :

D'après la condition H_2 , nous avons η est une fonction non croissante, donc cela implique que pour tout s et $t \in \mathbb{R}_+$ avec $s \leq t$, nous avons $\eta(t) < \eta(s)$, et en vertu du lemme (III.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \eta(t) g \circ \psi_x &\leq \int_0^L \int_0^t \eta(t-s) g(t-s) (\psi_x(t) - \psi_x(s))^2 ds dx \\ &\leq - \int_0^L \int_0^t g'(t-s) (\psi_x(t) - \psi_x(s))^2 ds dx \\ &\leq -g' \square \psi_x \leq -2 E'(t). \end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit que (III.16) devient, nous aurons

$$\eta(t) L'(t) \leq -k_1 \eta(t) E(t) - 2k_2 E'(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

par conséquent, nous pouvons réécrire l'inégalité ci-dessus comme suit :

$$[\eta(t) L(t) + 2 k_2 E(t)]' - \eta'(t) L(t) \leq -k_1 \eta(t) E(t).$$

Nous dénotons $F(t) = \eta(t) L(t) + 2 k_2 E(t)$. Comme η est une fonction non croissante, alors nous trouvons

$$F'(t) \leq -k_1 \eta(t) E(t). \quad (\text{III.17})$$

Il est clair que $F(t) \sim E(t)$, il s'ensuit qu'il existe une constante $k_3 > 0$, telle que

$$F'(t) \leq -k_3 \eta(t) F(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{III.18})$$

La solution de (III.18) est donnée par

$$F(t) \leq F(t_0) e^{-k_3 \int_{t_0}^t \eta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0,$$

enfin, nous pouvons conclure que

$$E(t) \leq \alpha(t_0) e^{-k_3 \int_{t_0}^t \eta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (\text{III.19})$$

car $E(t) \sim F(t)$. ■

Remarque III.1 *Les estimations (III.11) sont également valables pour $t \in [0, t_0]$ par la continuité et la bornéture des E et η .*

Application :

Nous présentons quelques exemples pour illustrer le résultat de la décroissance générale de l'énergie obtenue dans le théorème (III.1).

Exemple III.1 *Soient β_1 et β_2 sont deux constantes strictement positives. Si $g(t) = \beta_1 e^{-\beta_1 t}$, alors nous trouvons*

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\beta_2 \beta_1 e^{(-\beta_2 t)} \\ &= -\beta_1 g(t) < 0, \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

comme $g'(t) = -\eta(t)g(t)$, alors $\eta(t) = \beta_2$.

Nous remarquons que $g(0) = \beta_1 > 0$, et d'après la relation (III.20) que les deux fonctions $g(t)$ et η sont non croissantes. En plus, $\int_0^\infty g(s) ds$ est bornée car $\beta_2 > 0$, alors nous déduisons que les deux conditions (H_1) et (H_2) sont vérifiées. En appliquant l'estimation du théorème (III.1) pour trouver

$$E(t) \leq C_0 e^{-\beta_2 C_1 t}, \quad \forall t \geq t_0,$$

d'où la décroissance exponentielle de l'énergie $E(t)$.

Exemple III.2 *Soient β_1 et β_2 sont deux constantes strictement positives. Si $g(t) = \frac{\beta_1}{(1+t)^{\beta_2+1}}$, alors nous obtenons*

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\beta_1 (\beta_2 + 1)(1+t)^{\beta_2+2} \\ &= -\frac{(\beta_2 + 1)}{(1+t)} g(t) < 0, \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

comme $g'(t) = -\eta(t) g(t)$, alors $\eta(t) = \frac{(\beta_2 + 1)}{(1 + t)}$.

Nous remarquons que $g(0) = \beta_1 > 0$, et d'après la relation (III.21) nous avons les deux fonctions $g(t)$ et η sont non croissantes. En plus, $\int_0^\infty g(s)ds$ est bornée car $\beta_2 + 1 > 1$, alors nous déduisons que les deux conditions (H_1) et (H_2) sont vérifiées.

Donc, en appliquant l'estimation du théorème (III.1) pour trouver

$$E(t) \leq \frac{C}{(1 + t)^{\beta_2 + 1}}, \quad \forall t \geq t_0.$$

D'où la décroissance polynomiale de l'énergie $E(t)$.

Nous concluons d'après les deux exemples que l'énergie décroît généralement.

Conclusion et perspective

Les vibrations sont un phénomène récurrent dans le domaine de l'ingénierie notamment au niveau des structures mécaniques. Ce problème agit négativement sur leur fonctionnement et leur durée de vie. Pour le réduire plusieurs techniques sont utilisées comme celle de la stabilisation qui permet d'atténuer ces secousses par rétroaction (feed-back).

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un système de Timoshenko avec un seul mécanisme de dissipation de type mémoire. En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin l'existence et l'unicité de la solution a été obtenue. Et en utilisant la méthode des multiplicateurs un résultat de la décroissance générale de l'énergie a été également prouvé.

Dans le futur, nous essayerons d'établir les mêmes techniques utilisées dans ce travail à des autres problèmes tel les problèmes poreuses et les problèmes de thermoélasticités.

Bibliographie

- [1] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera, and R. Reinhard. Energy decay for timoshenko systems of memory-type. *Journal of Differential Equations*, 194(1) : 82-115, 2003.
- [2] T. Apalara. General stability of memory-type thermoelastic timoshenko beam acting on shear force. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 30(2) : 291-300, 2018.
- [3] T. Apalara. decay of solutions in one-dimensional porous-elastic system with memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 469(2) : 457-471, 2019.
- [4] T. Apalara. On the stabilization of a memory-type porous thermoelastic system. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(2) :1433- 1448, 2020
- [5] F. Djellali. General decay for memory-type porous elastic system with thermoelasticity of type III. *Ricerche di Matematica*, pages 1-19, 2021.
- [6] L. H. Fatori and J.E. Muñoz Rivera. Energy decay for hyperbolic thermoelastic systems of memory-type. *Quarterly of Applied Mathematics*, 59(3) : 441-458, 2001.
- [7] B. Feng. Uniform decay of energy for a porous thermoelasticity system with past history. *Applicable Analysis*, 97(2) : 210-229, 2018.
- [8] B. Feng and A. Soufyane. New general decay results for a von karman plate equation with memory-type boundary conditions. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 40(3) : 1757, 2020.
- [9] A. Guesmia and S. Messaoudi. A general stability result in a timo shenko system with infinite memory : a new approach. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(3) : 384-392, 2014.

-
- [10] A. Guesmia, M. Kafini, and N.E. Tatar. General stability results for the translational problem of memory-type in porous thermoelasticity of type III. *J. Nonlinear Funct. Anal*, 2020 :49, 2020.
- [11] J. Hao and P. Wang. Asymptotical stability for memory-type porous thermoelastic system of type III with constant time delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(13) :3855-3865, 2016.
- [12] M. Kafini, S. Messaoudi, and M. Mustafa. Energy decay result in a timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with distributive delay. *Journal of Mathematical Physics*, 54(10) :101503, 2013.
- [13] Z. Khalili, D. Ouchenane, and A. Choucha. Well-posedness and stability result of a nonlinear damping porous-elastic system in thermoelasticity of second sound with infinite memory and distributed delay terms.
- [14] H. E. Khochemane, A. Djebabla, S. Zitouni, and L. Bouzettouta. Well-posedness and general decay of a nonlinear damping porous-elastic system with infinite memory. *Journal of Mathematical Physics*, 61(2) : 021505, 2020.
- [15] J. Kim et Y. Renardy. Boundary control of Timoshenko beam. *Siam journal on control and optimization*. 25(6) : 1417- 1420, 1987.
- [16] Y. Liu and S. Kawashima. Decay property for a plate equation with memory-type dissipation. *Kinetic & Related Models*, 4(2) :531, 2011.
- [17] W. Liu, D. Wang, and D. Chen. General decay of solution for a transmission problem in infinite memory-type thermoelasticity with second sound. *Journal of Thermal Stresses*, 41(6) :758-775, 2018.
- [18] S. Messaoudi and A. Fareh. General decay for a porous thermoelastic system with memory : the case of equal speeds. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 74(18) :6895-6906, 2011.
- [19] S. Messaoudi and T. Apalara. General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 20(2) :213-232, 2014.
- [20] D. Ouchenane and K. Zennir. General decay of solutions in one-dimensional porous-elastic system with memory and distributed delay term with second sound. *Commun. Optim.*

Theory, 2020 :18, 2020.

- [21] M. J. Silva and S. Pinheiro. A new perspective of exponential stability for timo-shenko systems under history and thermal effects. arXiv preprint arXiv :2103.01180, 2021.
- [22] A. Soufyane. Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type. *Applicable Analysis*, 87(4) :451-464, 2008.
- [23] R. Zouak. Etude d'un problème en thermoélasticité Mémoire en master de l'université du Badji Mokhtar-Annaba,(Juin 2019).