

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Génération et caractérisations de quelques distributions liées à la famille exponentielle

Option : Commande optimale des systèmes dynamiques

Par :

CHOUAF Aziza

Encadré par : LALLOUCHE. Abdallah

MCB U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : BOUCENNA Ahcen

MCB U.SKIKDA

Examineur : BEDRANI Yassine

MAB U.SKIKDA

Année : 2021/2022



## *Remerciements*

*Avant tous je remercie ALLAH le tout puissant qui ma donnée la force , le courage , la patience et la volanté pour accomplir ce mémoire .*

*Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrant Dr. LALLOUCHE. Abdallah pour sa supervision de mon mémoire et pour ses indications, ses commentaires et son temps.*

*Je adresse mon sincère remercie a Dr. BOUCENNA Ahcen pour l'honneur qu'il ma fais en acceptant la présidence du jury.*

*Je remercie également Dr. BEDRANI Yassine d'avoir accepté de jurer ce modest travail .*

*Je vifs remerciements vont aussi à tout les membres de la faculté des sciences, plus précisément de département de mathématique ainsi que tout ma camarads et amis, sans oublier ma parents pour leurs en couragements et leurs soutiens.*

*Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué d'une facon au d'une autre à la réalisation de ce travail.*



# Dédicace

Je tiens c'est avec grande plaisir que je dédie ce modeste

Travail :

A ma très chère mère **Louiza**

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes cotés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père **Mehmoud**

Tu as toujours été à mes cotes pour me soutenir et m'encourager, que ce travail traduit ma gratitude et mon affection .

A mes chères sœurs **Meriam** et **Menal** pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A mes chers frères, **Imad** et **Ibrahim** pour leur appui et leur encouragement.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Atout mes amies et toute personne qui occupe une place dans mon coeur.



*Aziza*

---

## Résumé

---

Il existe plusieurs distributions dans la probabilité. Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques modèles de distributions liées à la famille exponentielle à savoir: la distribution de Laplace, distribution exponentielle et de Lindley, distribution de Lindley transmutée. Nous traitons les propriétés statistiques, et l'application de ces distributions.

Mots clés : Modélisation, famille exponentielle, estimation, distribution.

---

## Abstract

---

There are several distributions in the probability. This memory is devoted to a study of some models of modified distribution of the exponential family namely: Laplace distribution, exponential and Lindley distribution, transmuted Lindley distribution. We deal with statistical properties, and the application of these distributions.

Key words : Modeling, exponential family, appreciation, distribution.

---

## ملخص

---

توجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، في هذه المذكرة مخصصة لدراسة بعض نماذج التوزيعات المتعلقة بالعائلة الأسية وهي: توزيع لابلاس، توزيع الأسي و ليندلي، توزيع ليندلي المحول تتعامل مع الخصائص الإحصائية، و التطبيقية لهذه التوزيعات.

الكلمات المفتاحية: النمذجة، الأسرة الأسية، التقدير و التوزيع.

# Introduction

Les statistiques renseignent sur les tendances et les forces qui influent sur notre vie. La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement du modèle de probabilité supposé ou la distribution de probabilité. Pour cela, des efforts considérables ont été déployés dans le développement de grandes classes de distribution de probabilité standard ainsi que des méthodologies statistiques pertinentes. Cependant, il reste beaucoup de problèmes importants où les données réelles ne suivent aucune des distributions de probabilité standards.

Une distribution de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Jeux de dés, des urnes et jeu de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir. Les distributions de probabilités sont utilisées dans plusieurs domaines de l'activité humaine comme l'économie, l'ingénierie, le management et l'informatique. Il existe beaucoup de distributions de probabilités différentes. Parmi ces distributions, la loi exponentielle qui modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire. La loi de Lindley, proposée par le statisticien britannique Dennis Victor Lindley en (1958).

**Plan du mémoire :** Ce mémoire comporte, en plus de l'introduction quatre chapitres :

**Chapitre 1 :** Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions et certains résultats que nous utiliserons par la suite. ce rappel comporte la notion de tribus, variables aléatoires, fonction quantile les lois probabilités.

**chapitre 2 :** Dans ce chapitre, concernant la distribution exponentielle de Laplace modifiée, la méthode d'exponentiation et distribution de Laplace modifiée, les propriétés statistiques, fonction quantile, et estimation du maximum de vraisemblance.

**Chapitre 3 :** Dans ce chapitre, nous abordons les propriétés de la distribution exponentielle et Lindley. Ces propriétés sont moments et mesures connexes, fonction

---

caractéristique et loi exponentielle. Enfin, nous donnons des exemples illustratifs réelles pour comparer entre la distribution de lindley et loi exponentielle.

**Chapitre 4 :** Dans ce chapitre, nous allons voir les propriétés de distribution de lindley transmutée. Ces propriétés sont : moments, Analyse de fiabilité et statistiques d'ordre.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1	Tribus et Mesures . . . . .	1
1.1.1	Définitions . . . . .	1
1.2	Applications mesurables . . . . .	2
1.3	Variables aléatoires . . . . .	3
1.4	Espérance mathématique et variance . . . . .	4
1.5	Fonction quantile . . . . .	4
1.6	Fonction génératrice des moments . . . . .	5
1.7	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	5
1.8	Lois de Probabilités utiles . . . . .	6
1.8.1	Loi Binomiale . . . . .	6
1.8.2	Loi de Poisson . . . . .	6
1.8.3	Loi exponentielle . . . . .	7
1.9	Loi de Gamma . . . . .	8
1.10	Loi Normale . . . . .	8
1.11	Loi uniforme . . . . .	9
1.12	Critères d'information . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Distribution exponentialisée de Laplace Modifiée</b>	<b>10</b>
2.1	La méthode d'exponentiation et distribution de Laplace . . . . .	10
2.1.1	La distribution de Laplace modifiée . . . . .	11
2.1.2	Propriétés statistiques de la distribution de Laplace modifiée .	12
2.1.3	Premier et deuxième moments de la distribution de Laplace modifiée ( <i>DLM</i> ) . . . . .	16
2.1.4	Maximum de vraisemblance de loi L.M . . . . .	16

2.1.5	La Fonction quantile et médiane . . . . .	17
2.1.6	Entropie . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Distribution exponentielle et de Lindley</b>	<b>19</b>
3.1	Distribution de Lindley . . . . .	19
3.1.1	Définitions . . . . .	19
3.1.2	Fonction de hasard et fonction de survie . . . . .	20
3.1.3	Moments . . . . .	20
3.1.4	Fonction caractéristique . . . . .	22
3.2	Distribution exponentielle . . . . .	23
3.2.1	Fonction génératrice des moments . . . . .	23
3.3	Application . . . . .	26
3.4	Conclusion . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Distribution de lindley transmutée</b>	<b>29</b>
4.1	Introduction . . . . .	29
4.2	Les moments statistiques . . . . .	31
4.3	Maximum de vraisemblance . . . . .	32
4.4	Analyse de fiabilité . . . . .	32
4.5	Application . . . . .	33
	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Chapitre 1

## Rappels Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts de base et les définitions liées aux tribus, aux variables aléatoires et lois de probabilités qui seront utilisées dans les prochains chapitres suivants, ainsi ainsi quelques preuves, exemples et interprétation en domaine de modélisation.

### 1.1 Tribus et Mesures

Commençons par quelques définitions sur les tribus et les mesures.

#### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.1.** Soit  $\Omega$  un ensemble non vide,  $\mathcal{F}$  une famille des parties de  $\Omega$ , (i.e)  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . La famille  $\mathcal{F}$  est une **tribu** (on dit aussi  **$\sigma$ -Algèbre**) sur  $\Omega$  si  $\mathcal{F}$  vérifiée :

- i.  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ .
- ii.  $\mathcal{F}$  est stable par réunion dénombrable, (i.e) pour toute suite dénombrable  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $\mathcal{F}$ , on a  $(\cup A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{F}$ .
- iii.  $\mathcal{F}$  est stable par passage au complémentaire, (i.e pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , on a  $A^c \in \mathcal{F}$ ).

Le couple  $(\Omega, \mathcal{F})$  s'appelle **espace mesurable ou espace probabilisable**.

**Remarque 1.1.** (*en modélisation*)

- $(\Omega)$  représente **l'espace fondamental** : l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- **Tribu** : le contenu d'information associée à une expérience aléatoire.

— *Une expérience aléatoire* : est une expérience dont les résultats ne peuvent être prévus avec certitude (exactitude) d'avance.

**Exemple 1.1.**

1.  $\mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu sur  $\Omega$  pour tout ensemble  $\Omega$ .
2.  $\{\emptyset, \Omega\}$  est une tribu sur  $\Omega$  pour tout ensemble  $\Omega$ .

**Définition 1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable, une sous tribu de  $\mathcal{F}$  est une sous famille  $G \subset \mathcal{F}$  qui est également une tribu sur  $\mathcal{F}$ .

**Exemple 1.2.**

1. La tribu engendrée par  $C = \{A\}$  est  $\{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ .

**Définition 1.3.** Soit  $\Omega$  un ensemble non vide et  $\mathcal{F}$  une tribu sur  $\Omega$ .

Les parties de  $\mathcal{F}$  qui sont des éléments de  $\mathcal{F}$  sont dites **mesurables** ou **probabilisables**.

**Définition 1.4. (Mesure Positive)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurables, on appelle mesure positive sur  $\mathcal{F}$  une application :  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

- i.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- ii.  $\mu$  est  $\alpha$ -additive, (i.e : pour tout famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{F}$  disjoints deux à deux, (i.e : tels que  $A_n \cap A_m = \emptyset$  si  $n \neq m$ ), on a

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

**Remarque 1.2.** Si  $\mu(\Omega) = 1$ , on dit que  $\mu$  est une mesure de probabilité.

**Définition 1.5.** Si  $\mu(\Omega) < +\infty$  on dit que  $\mu$  est une **mesure finie**.

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un **espace mesuré**.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un **espace probabilisé** ou  $\mathbb{P}$  est une **mesure de probabilité**.  
Passons maintenant à la mesurabilité, les variables aléatoires et leur caractéristiques.

## 1.2 Applications mesurables

**Définition 1.6. (Application mesurable)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$  deux espaces mesurables.

### 1.3 Variables aléatoires

---

On dit qu'une application  $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$  est mesurable (par rapport aux tribus  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ ) si

$$\forall B \in \mathcal{F}' : f^{-1}(B) \in \mathcal{F},$$

où

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}.$$

### 1.3 Variables aléatoires

**Définition 1.7.** On appelle variable aléatoire  $X$  (en abrégé V.A.  $X$ ) toute application mesurable d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dans un espace mesurable  $(\Omega', \mathcal{F}')$ .

**Définition 1.8.** Soit  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$  une variable aléatoire.

On appelle **Loi de probabilité**  $X$  la mesure  $\mathbb{P}_X$  sur  $(\Omega', \mathcal{F}')$  définie par :

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)),$$

où

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

**Remarque 1.3.**  $\mathbb{P}_X$  est une mesure de probabilité.

**Définition 1.9.** On appelle **fonction de répartition** d'une V.A.  $X$  la fonction  $F_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), x \in \mathbb{R}.$$

**Définition 1.10.** Une variable aléatoire  $X$  est à **densité**, ou **continue**, s'il existe une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que la fonction de répartition de  $X$  s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (1.1)$$

où  $f$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $f(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ .

Une fonction qui vérifie les conditions (1) et (2) est appelée **densité de probabilité**.

**Proposition 1.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F_X$ . Si  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}$  (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors  $X$  est une variable à densité  $f$  donnée par  $f(x) = F_X'(x)$ .

**Définition 1.11.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. On dit que deux événements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$  sont indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Plus généralement, soient  $n$  événements,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dit indépendants (ou plus précisément deux deux indépendants) lorsque pour tous  $i \neq j$  on a

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j).$$

**Définition 1.12. (Indépendance des variables aléatoires)**

Deux variables aléatoires réelles  $X_1$  et  $X_2$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  sont dites indépendantes si, pour tous  $W$  et  $W'$  dans  $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ , les événements  $X_1 \in W$  et  $X_2 \in W'$  sont indépendants. La définition s'étend immédiatement au cas de  $n$  variables aléatoires.

## 1.4 Espérance mathématique et variance

**Définition 1.13.** L'espérance mathématique d'une (V.A.X) définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (1.2)$$

$X(\Omega)$  : l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

**Définition 1.14.** La variance d'une (V.A.X) existe et finie si  $\mathbb{E}(X^2)$  existe, alors on a

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2, \quad (1.3)$$

où

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X^2(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (1.4)$$

$\mathbb{E}(X^2)$  est le moment d'ordre 2 de la (V.A.X).

## 1.5 Fonction quantile

**Définition 1.15.** Soit  $X$  une (V.A) de fonction de répartition  $F_X$ . Le quantile d'ordre  $u \in ]0, 1[$  de  $X$  est le nombre  $x_u = Q_X(u)$  tel que  $F_X(x_u) = u$ . La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition.

### Remarque 1.4.

1.  $Q_X(1/2) = x_{1/2}$  est appelé médiane de  $X$ .
2. Si  $F_X$  n'est pas strictement croissante mais simplement croissante, on définit le quantile d'ordre  $u$  par :

$$Q_X(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1.$$

## 1.6 Fonction génératrice des moments

**Définition 1.16.** La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire  $X$  est définie par

$$M_X(t) = E(e^{Xt}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

### Proposition 1.2.

1. Lorsque les moments de tout ordre existent et que leur série génératrice exponentielle a un rayon de convergence non nul  $R$  alors pour tout  $t \in ]-R, R[$  on a

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{E(X^K)}{K!} t^K.$$

2. Pour tout  $K \geq 0$ ,  $M_X$  est  $K$  fois dérivable en 0 et  $E(X^K) = M_X^K(0)$ . Donc, on a  $E(X) = M_X'(0)$  et  $\text{Var}(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2$ .

## 1.7 Méthode du maximum de vraisemblance

En (1912), Ronald Aylmer Fisher rédige son premier article consacré au maximum de vraisemblance. Dans son article de (1912), il propose l'estimateur du maximum de vraisemblance qu'il appelle à l'époque le critère absolu. c'est aussi en (1922), qu'il donne le nom de maximum de vraisemblance à sa méthode. On considère un n-échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de loi  $P_\theta$  (discrète ou continue). Étant en possession d'une réalisation  $x_1, x_2, \dots, x_n$  d'un n-échantillon, une approche naturelle au problème de l'estimation est la suivante : on cherche, parmi toutes les valeurs possibles de  $\theta$ , celle sous laquelle il était le plus probable d'avoir observé les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , en d'autres termes, on cherche la valeur de  $\theta$  qui explique le mieux les valeurs obtenues. Nous allons à présent construire un estimateur basé sur cette idée.

**Définition 1.17.** (*Fonction de vraisemblance*) Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes et de même loi. La fonction de vraisemblance est

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n p(X = x_i; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont discrètes,} \\ \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont continues.} \end{cases}$$

**Définition 1.18.** On appelle estimateur du maximum de vraisemblance de la variable aléatoire correspondant à la valeur  $\hat{\theta}_n$  en laquelle la fonction de vraisemblance atteint son maximum.

## 1.8 Lois de Probabilités utiles

Donnons quelques lois de probabilités utiles en théorie de la famille exponentielle.

### 1.8.1 Loi Binomiale

**Définition 1.19.** Une (V.A.R)  $X$  suit une loi Binomiale de paramètres  $p$ , ( $0 < p < 1$ ) et  $n$ , et on note :  $X \rightarrow B(n, p)$  si sa loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & \text{pour } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 1.3.** La moyenne et la variance de  $X \rightarrow B(n, p)$  sont

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p).$$

**Remarque 1.5.** (*en modélisation*)

–La loi Binomiale modélise la situation suivante :

On compte le nombre de succès parmi  $n$  expériences réalisées de façon indépendantes.

### 1.8.2 Loi de Poisson

**Définition 1.20.** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), et on note  $X \rightarrow \mathbb{P}(\lambda)$  si sa loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots$$

**Proposition 1.4.** Si  $X \rightarrow \mathbb{P}(\lambda)$  on a

$$\mathbb{E}(X) = \lambda. \quad (1.5)$$

$$\text{Var}(X) = \lambda. \quad (1.6)$$

**Proposition 1.5.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , alors  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  est une variable de Poisson de paramètre  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$ .

**Remarque 1.6. (en modélisation)**

La loi de Poisson est la loi des événements rares, (i.e) : des événements ayant une faible probabilité de réalisation : (maladies rares, accidents mortels rares, lettrage d'une solution virale, mutation ou recombinaison dans une séquence génétique, pannes, radioactivité...).

### 1.8.3 Loi exponentielle

**Définition 1.21.** Une variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre (ou de taux)  $\lambda > 0$  est une variable continue à valeurs positives de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

et on note  $X \rightarrow \varepsilon(\lambda)$ .

**Exemple 1.3.** Le temps d'attente exprimé en minutes au guichet d'une banque est une variable aléatoire  $T$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

On sait que la probabilité qu'un client attende moins de 8 est égale à 0.7

1. La valeur approchée à 0.0001 de  $\lambda$ . On a

$$\mathbb{P}(T \leq 8) = 0.7, \text{ donc : } 1 - e^{(-8\lambda)} = 0.7.$$

$$e^{-8\lambda} = 0.3, \text{ donc : } \lambda = \frac{\ln(0.3)}{-8} \simeq 0.1505.$$

2. La probabilité qu'un client attende entre 15 et 20 minutes.

$$\mathbb{P}(15 \leq X \leq 20) = F(20) - F(15) = e^{-0.1505 \cdot 20} - e^{-0.1505 \cdot 15} \simeq 0.055.$$

**Remarque 1.7.** (*en modélisation*)

–La loi exponentielle modélise la durée de vie d’un phénomène sans mémoire : ou sans vieillissement : la probabilité que le phénomène dure au moins  $(s + t)$  heures sachant qu’il a déjà duré  $t$  heures sera la même que la probabilité de durer  $s$  heures à partir de sa mise en fonction initiale.

En d’autres termes, la fait que le phénomène ait duré pendant  $t$  heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps  $t$ .

## 1.9 Loi de Gamma

**Définition 1.22.** La loi exponentielle est un cas particulier de la famille des loi Gamma. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi Gamma, de paramètres  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ , ( $\alpha$  est appel paramtre d’chelle et  $\beta$  est le paramtre de forme), notée par  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ . La densité de  $X$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma est donnée par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0. \tag{1.9}$$

## 1.10 Loi Normale

**Définition 1.23.** Soient deux réels  $m$  et  $\sigma$ . On suppose  $\sigma > 0$  on dit que la variable aléatoire réelle continue  $X$  suit la loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma$  lorsqu’elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - m)^2}{\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

La loi normale de paramètre  $m$  et  $\sigma$  est notée  $N(m, \sigma)$  telle que  $m$  est la moyenne et décart-type  $\sigma$ .

**Cas Particulier :** Si  $m = 0$  et  $\sigma = 1$ , la loi normale est dite centrée réduite  $X \rightarrow N(0, 1)$ .

## 1.11 Loi uniforme

---

**Définition 1.24.** On dit que la variable aléatoire réelle continue  $X$  suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité de probabilité de fonction

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

## 1.11 Loi uniforme

**Définition 1.25.** Soit un espace fondamental  $\Omega$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

On appelle loi uniforme sur  $[a, b]$  la loi de probabilité dont la densité  $f$  est la fonction constante définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

La fonction de répartition  $F$  est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

## 1.12 Critères d'information

**Définition 1.26.** Les critères les plus cités sont ceux d'**Akaike** ( $CIA, AICC$ ), et **Baysien** ( $CIB$ )

$$AIC = -2 \ln L + 2K.$$

$$AICC = AIC + \frac{2K(K+1)}{(n-K-1)}.$$

$$BIC = -2 \ln l + K \ln L.$$

Où  $L$  est la vraisemblance,  $k$  le nombre de paramètres dans le modèle et  $n$  le nombre d'observations.

# Chapitre 2

## Distribution exponentialisée de Laplace Modifiée

Dans ce chapitre, on traite la distribution exponentielle de Laplace modifiée, les propriétés statistiques.

### 2.1 La méthode d'exponentiation et distribution de Laplace

La fonction d'une variable aléatoire exponentialisée  $X$  est donné par :

$$G(x) = [F(x)]^a, \quad a > 0. \quad (2.1)$$

Où  $F(x)$  est la fonction de répartition de la distribution de base. En différenciant (1), nous obtenons la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire exponentialisée  $X$  comme suit :

$$z(x) = a[F(x)]^{a-1}f(x). \quad (2.2)$$

Où  $f(x)$  est la fonction de densité de probabilité de la distribution de base. La distribution de base ici est la distribution de Laplace à deux paramètres.

**Proposition 2.1.** *La fonction de densité de probabilité  $f(x)$  et la fonction*

## 2.1 La méthode d'exponentiation et distribution de Laplace

---

de répartition  $F(x)$  de la distribution de Laplace sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2b} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}, & \text{si } x \leq \mu, \\ \frac{1}{2b} e^{-\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}, & \text{si } x > \mu. \end{cases} \\
 F(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}, & \text{si } x \leq \mu, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}, & \text{si } x > \mu. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Où,  $b > 0$ ,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,

$b$  est le paramètre d'échelle,  $\mu$  le paramètre de localisation.

### Preuve

si  $x \leq \mu$

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dx, \text{ et } f(x) = \frac{1}{2b} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)} \\
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2b} e^{\left(\frac{t-\mu}{b}\right)} dx \\
 &= \frac{1}{2b} b \left[ e^{\frac{t-\mu}{b}} \right]_{-\infty}^x \\
 &= \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}.
 \end{aligned}$$

Si  $x > \mu$ , on a

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dt + \int_x^{+\infty} f(x) dt \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{2b} e^{\left(\frac{t-\mu}{b}\right)} dt + \int_x^{+\infty} \frac{1}{2b} e^{-\left(\frac{t-\mu}{b}\right)} dt \\
 &= \frac{1}{2b} b \left[ e^{\frac{t-\mu}{b}} \right]_{-\infty}^x + \frac{1}{2b} b \left[ e^{-\left(\frac{t-\mu}{b}\right)} \right]_x^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)} + \frac{1}{2} \left[ e^{-\left(\frac{t-\mu}{b}\right)} \right]_x^{+\infty} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left[ e^{-\left(\frac{t-\mu}{b}\right)} \right].
 \end{aligned}$$

Il est facile de démontrer que  $f(x)$  est une densité.

### 2.1.1 La distribution de Laplace modifiée

En Utilisant la fonction exponentielle proposée par donnée dans l'équation (2.1), nous obtenons la fonction de répartition  $Z(x)$  de la distribution de Laplace modifiée comme étant

$$Z(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}\right)^a, & \text{si } x \leq \mu, \\ \left(1 - \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}\right)^a, & \text{si } x > \mu. \end{cases} \tag{2.4}$$

Où,  $a, b > 0, -\infty \leq x \leq +\infty$ .

De même, en utilisant l'équation (2.2), nous obtenons la fonction de densité de probabilité  $z(x)$ , distribution de Laplace modifiée comme

$$z(x) = \begin{cases} a\left(\frac{1}{2}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x \leq \mu, \\ a\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.5)$$

Où,  $a, b > 0, -\infty \leq x \leq +\infty$ .

$a$  est la paramètre de forme,  $b$  est le paramètre d'échelle,  $\mu$  est le paramètre d'emplacement.

### 2.1.2 Propriétés statistiques de la distribution de Laplace modifiée

**Proposition 2.2.** *Une variable aléatoire  $X$  suit une distribution de Laplace modifiée  $X \rightarrow DLM(a, \mu, b)$  si sa fonction de densité de probabilité est donnée par :*

$$z(x) = \begin{cases} a\left(\frac{1}{2}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{\frac{x-\mu}{b}}, & \text{si } x \leq \mu, \\ a\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x-\mu}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

Où,  $a, b > 0, -\infty \leq x \leq +\infty$ .

#### Preuve

Il est, clair que  $z(x) \geq 0$ .

Montons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z(x)dx = 1.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z(x)dx = \int_{-\infty}^{\mu} g_1 dx + \int_{\mu}^{+\infty} g_2 dx. \quad (2.6)$$

Où

$$g_1(x) = a\left(\frac{1}{2}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}, \text{ si } x \leq \mu,$$

$$g_2(x) = a\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}, \text{ si } x > \mu.$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z(x)dx = \int_{-\infty}^{\mu} a\left(\frac{1}{2}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{\frac{(x-\mu)}{b}} dx + \int_{\mu}^{+\infty} a\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} dx.$$

Intégrer  $g_1(x)$  d'abord nous avons

$$\int_{-\infty}^{\mu} g_1(x)dx = \frac{1}{2a}. \quad (2.7)$$

## 2.1 La méthode d'exponentiation et distribution de Laplace

---

Maintenant, intégrer  $g_2(x)$ , nous avons

$$\int_{\mu}^{+\infty} g_2(x) dx = 1 - \frac{1}{2^a}. \quad (2.8)$$

En effet

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\mu} g_1(x) &= \int_{-\infty}^{\mu} a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \\ \text{Si, } x \leq \mu &= \int_{-\infty}^{\mu} \frac{a}{2^{a-1}} \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \\ &= \frac{1}{2^{(a+1)}} \frac{1}{2} \left[ e^{\frac{a(x-\mu)}{b}} \right]_{-\infty}^{\mu} \\ &= \frac{1}{2^a}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La sommation de l'équation (2.8) et l'équation (2.9). Montre que la distribution de Laplace modifiée  $z(x)$  est une fonction de densité puisque l'intégrale de la  $Z(x)$  est égale à 1.

### Proposition 2.3.

$$\text{Si } X \rightarrow DLM(a, \mu, b), \lim_{x \rightarrow -\infty} Z(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x) = 1.$$

#### Preuve

Comme

$$Z(x) = \begin{cases} \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^a, & \text{si } x \leq \mu, \\ \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^a, & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

$$\text{Pour } \lim_{x \rightarrow -\infty} Z(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Z(x) = \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(-\infty-\mu)}{b}} \right)^a = 0. \quad (2.10)$$

$$\text{Pour } \lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x) = \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(+\infty-\mu)}{b}} \right)^a = 1 - 0 = 1.$$

### Proposition 2.4.

$$\text{Si } x \rightarrow DLM(a, \mu, b), \lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = 0.$$

#### Preuve

Comme

$$z(x) = \begin{cases} a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x \leq \mu, \\ a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

Pour  $\lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(-\infty - \mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(-\infty - \mu)}{b}}. \quad (2.11)$$

Pour  $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} = 0. \quad (2.12)$$

Où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = 0$ .

Cela implique que la distribution de Laplace modifiée (*MLD*) a un mode unique.

**Proposition 2.5.** *Si  $X \rightarrow DLM(a, \mu, b)$ , la fonction génératrice des moments de la distribution de Laplace modifiée peut être dérivée comme par définition de la fonction génératrice de moment*

$$M_x(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(x) e^{tx} dx. \quad (2.13)$$

Où  $z(x)$  est du *DLM* défini comme

$$z(x) = \begin{cases} a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x \leq \mu, \\ a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

### **Preuve**

On a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x \leq \mu, \\ g_2(x) &= a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}}, & \text{si } x > \mu. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\mu} g_1(x) e^{tx} dx &= \int_{-\infty}^{\mu} a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} e^{tx} dx = \frac{ae^{\mu t}}{2^a(a+bt)}, \\ \int_{\mu}^{+\infty} g_2(x) e^{tx} dx &= \int_{\mu}^{+\infty} a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} e^{tx} dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant le développement en série

$$\left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} = 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^r \frac{(a-1)(-1)^r e^{-r \frac{(x-\mu)}{b}}}{r! 2^r}.$$

Comme

$$\phi_r = \prod_{i=1}^r \frac{(a-i)(-1)^r}{r! 2^r}.$$

## 2.1 La méthode d'exponentiation et distribution de Laplace

---

Ensuite

$$\int_{\mu}^{+\infty} g_2(x)e^{tx} dx = \frac{ae^{\mu t}}{2(1-bt)} + \frac{ae^{\mu t}}{2} \sum_{r=1}^{+\infty} \phi_r \frac{1}{(r+1-bt)}. \quad (2.15)$$

La sommation de l'équation (2.14) et l'équation (2.15) donne le (fgm) de la distribution de Laplace modifiée comme étant

$$M_x(t) = \frac{ae^{\mu t}}{2^a(a+bt)} + \frac{ae^{\mu t}}{2} + \frac{ae^{\mu t}}{2} \sum_{r=1}^{+\infty} \phi_r \frac{1}{(r+1-bt)}.$$

**Définition 2.1.** La fonction de fiabilité d'une variable aléatoire  $X$  est définie comme

$$F_h = \frac{z(x)}{1-Z(x)}. \quad (2.16)$$

Par conséquent, en utilisant l'équation (2.16), la fonction de risque de la distribution de Laplace modifiée est donnée par

$$F_h = \begin{cases} \frac{a\left(\frac{1}{2}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}}{1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{(x-\mu)}{b}}\right)^a}, & \text{si } x \leq \mu, \\ \frac{a\left(1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-(x-\mu)}{b}}\right)^{a-1} \frac{1}{2b}e^{\frac{-(x-\mu)}{b}}}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-(x-\mu)}{b}}\right)^a}, & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.17)$$

Où,  $a, b > 0$ ,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ .

**Définition 2.2.** La fonction de survie d'une variable aléatoire est définie comme

$$S_f = 1 - Z(x). \quad (2.18)$$

Par conséquent, en utilisant l'équation (2.18), nous obtenons la fonction de survie de la distribution de Laplace modifiée comme

$$S_r = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{-(x-\mu)}{b}}\right)^a, & \text{si } x \leq \mu, \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-(x-\mu)}{b}}\right)^a, & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.19)$$

Où,  $a, b > 0$ ,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ .

**Proposition 2.6.** Si  $X \rightarrow DLM(a, \mu, b)$ , alors le cumulatif  $[k_x(t)]$  est défini comme

$$k_x(t) = \log(M_x(t)).$$

Où  $M_x(t)$  est la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire. Par conséquent, le cumulatif d'une variable aléatoire  $X$  ayant une distribution de Laplace modifiée est donné par :

$$k_x(t) = \log\left(\frac{ae^{\mu t}}{2^a(a+bt)} + \frac{ae^{\mu t}}{2(1-bt)} + \frac{ae^{\mu t}}{2} \sum_{r=1}^{+\infty} \phi_r \frac{1}{(r+1-bt)}\right). \quad (2.20)$$

Si  $X \rightarrow DLM(a, \mu, b)$ , que le premier moment est

$$M_x(t=0) = \frac{\mu}{2^a} - \frac{b}{2^a a} + \frac{a}{2}(\mu + b) + a \sum_{r=1}^{+\infty} \phi_r \left( \frac{\mu}{2(r+1)} \frac{b}{2(r+1)^2} \right).$$

### 2.1.3 Premier et deuxième moments de la distribution de Laplace modifiée ( $DLM$ )

Rappelons que la fonction génération du moment ( $fgm$ ) de ( $DLM$ ) est donné par

$$E(X) = M_x(t) = \frac{ae^{\mu t}}{2^a(a+bt)} + \frac{ae^{\mu t}}{2(1-bt)} + \frac{ae^{\mu t}}{2} \sum_{r=1}^{+\infty} \phi_r \frac{1}{(r+1-bt)}.$$

En différenciant l'équation ci-dessus par rapport à  $t$ , nous obtenons le premier moment de la ( $DLM$ ) comme

$$E(X^2) = M'_x(t=0) = \frac{\mu}{2^a} - \frac{b}{2^a a} + \frac{a}{2}(\mu + b) + a \sum_{r=1}^{+\infty} \phi_r \left( \frac{\mu}{2(r+1)} \frac{b}{2(r+1)^2} \right). \quad (2.21)$$

Le deuxième moment est obtenu en différenciant l'équation (2.21) et le résultat est

$$M''_x(t=0) = \frac{\mu^2}{2^a a} - \frac{3\mu b}{2^a a^2} + \frac{2b}{2^a a^2} - \frac{ab(\mu^2 - 3\mu - 1)}{2} + \phi \left[ \frac{[-\mu^2 b(r+1) + \mu b](r+1)^2 + 2b(r+1)[\mu(r+1) + b]}{(r+1)^4} \right].$$

La variance de la variable aléatoire  $X$  ayant une distribution de Laplace modifiée est obtenue comme

$$\begin{aligned} Var(X) &= M''_x(t=0) - [M'_x(t=0)]^2, \\ Var(X) &= \frac{\mu^2}{2^a a} - \frac{3\mu b}{2^a a^2} + \frac{2b}{2^a a^2} - \frac{ab(\mu^2 - 3\mu - 1)}{2} \\ &+ \phi \left[ \frac{[-\mu^2 b(r+1) + \mu b](r+1)^2 + 2b(r+1)[\mu(r+1) + b]}{(r+1)^4} \right] - \left[ \frac{\mu}{2^a} - \frac{b}{2^a a} + a2\mu + b + ar \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.1.4 Maximum de vraisemblance de loi L.M

Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un échantillon aléatoire de taille  $n$  de la loi de Laplace modifiée. Alors, la fonction de  $\log$  vraisemblance est donnée par :

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln z(x_i; a, b, \mu).$$

## 2.1 La méthode d'exponentiation et distribution de Laplace

---

Où

$$z(x_i; a, b, \mu) = \begin{cases} a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x_i - \mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{\frac{(x_i - \mu)}{b}}, & \text{si } x_i \leq \mu, \\ a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x_i - \mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x_i - \mu)}{b}}, & \text{si } x_i > \mu. \end{cases}$$

Et, la fonction de log vraisemblance de (DLM) est donné par

$$\ln L = \begin{cases} n \ln\left(\frac{a}{b}\right) + an \ln\left(\frac{1}{2}\right) + (a-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{b}\right), & \text{si } x \leq \mu, \\ n \ln\left(\frac{a}{b}\right) + n \ln n \left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{b}\right) + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x_i - \mu)}{b}}\right), & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.23)$$

Pour obtenir l'estimation des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\mu$  de l'équation (2.23), la solution ne peut pas être obtenue sous forme fermée donc les logiciels (Matlab) utilisée pour obtenir les estimations numériquement.

### 2.1.5 La Fonction quantile et médiane

La fonction quantile  $Q(p)$  est dérivée de la relation

$$Q(p) = Z^{-1}(p). \quad (2.24)$$

Par conséquent, la fonction quantile de la distribution de Laplace modifiée est dérivée comme

$$Q(p) = \begin{cases} \mu + a^{-1}b \ln p + b \ln 2, & \text{si } x \leq \mu, \\ \mu - b \log 2(1 - p^{\frac{1}{a}}), & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.25)$$

Où,  $a, b > 0$ ,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ .

Où  $p \rightarrow \text{Uniforme}(0, 1)$ . Cela signifie simplement que des échantillons aléatoires de la distribution de Laplace modifiée peuvent être générés en utilisant

$$x = \begin{cases} \mu + a^{-1}b \ln p + b \ln 2, & \text{si } x \leq \mu, \\ \mu - b \log 2(1 - p^{\frac{1}{a}}), & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

La médiane de la distribution de Laplace modifiée peut être obtenue en faisant la substitution de  $p = 0.5$  dans l'équation (2.26) pour avoir

$$\text{mdiane} = \begin{cases} \mu + a^{-1}b \ln(0.5) + b \ln 2, & \text{si } x \leq \mu, \\ \mu - b \log 2(1 - (0.5)^{\frac{1}{a}}), & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.26)$$

Pour,  $a, b > 0$ ,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ .

### 2.1.6 Entropie

L'entropie  $I_R$  d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$I_R = \frac{1}{1 - \varepsilon} \log \left( \int_0^{+\infty} [z(x)]^\varepsilon dx \right). \quad (2.27)$$

Où  $z(x)$  est la distribution de Laplace modifiée. En remplaçant l'équation (2.6) en (2.32) nous obtenons l'expression d'entropie pour la variable aléatoire  $X$  ayant une distribution de Laplace modifiée comme

$$I_R = \begin{cases} \frac{1}{1 - \varepsilon} \log \left( \int_0^{+\infty} \left[ a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right]^\varepsilon dx \right), & \text{si } Nx \leq \mu, \\ \frac{1}{1 - \varepsilon} \log \left( \int_0^{+\infty} \left[ a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right]^\varepsilon dx \right), & \text{si } x > \mu. \end{cases} \quad (2.28)$$

**Définition 2.3.** L'entropie de Shannon d'une variable aléatoire  $X$  est définie par :

$$n_y = -\mathbb{E} \log(z(x)). \quad (2.29)$$

En remplaçant l'équation (2.6) dans l'équation (2.34) nous obtenons l'expression de l'entropie de Shannon de la variable aléatoire  $X$  ayant une distribution de Laplace modifiée comme

$$n_y = \begin{cases} -\mathbb{E} \left\{ \log \left[ a \left( \frac{1}{2} e^{\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right] \right\}, & \text{si } x \leq \mu, \\ -\mathbb{E} \left\{ \log \left[ a \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right)^{a-1} \frac{1}{2b} e^{-\frac{(x-\mu)}{b}} \right] \right\}, & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

# Chapitre 3

## Distribution exponentielle et de Lindley

Dans ce chapitre, on traite la distribution exponentielle et de Lindley, on termine par une application.

### 3.1 Distribution de Lindley

La loi de Lindley est une distribution de probabilité continue. Son nom est issu du nom du statisticien britannique Dennis Victor Lindley (né le 25 juillet (1923), et décédé le 14 décembre (2013)). En (1958), Lindley a introduit, la distribution de Lindley dans le cadre bayésien.

#### 3.1.1 Définitions

**Définition 3.1.** La densité de probabilité de la distribution de Lindley de paramètre  $\theta > 0$  prend la forme

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+x)e^{-\theta x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

**Remarque 3.1.** On peut vérifier que  $f$  est densité. On a  $f(x)$  est une fonction positive et continue pour  $\theta \geq 0$ , et on a

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\theta^2}{1+\theta} \int_0^{+\infty} (1+x)e^{-\theta x} dx.$$

D'après un calcul par la méthode d'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} (1+x)e^{-\theta x} dx = \frac{1+\theta}{\theta^2}.$$

C'est -à-dire

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

**Définition 3.2.** La fonction de répartition de Lindley est

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1}(e^{-\theta x}), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

### 3.1.2 Fonction de hasard et fonction de survie

**Proposition 3.1.**

$$S(x) = 1 - F(x) = \frac{\theta + 1 + \theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x},$$

et la fonction de hasard de la distribution de Lindley est

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta^2(1 + x)}{\theta + 1 + \theta x}.$$

Il est facile de vérifier que la fonction de survie de la distribution de Lindley.

**Remarque 3.2.** Pour étudier le sens de variation de  $h$  sur  $I = [0, \infty[$ , on étudie le signe de sa fonction dérivée. La première dérivée de la fonction de hasard est

$$\frac{d}{dx}h(x) = h'(x) = \frac{\theta^2(1 + x)}{\theta + 1 + \theta x}.$$

Donc on a la  $h'(x) > 0$  pour  $x \in [0, +\infty[$ , alors la fonction  $h(x)$  est une fonction croissante en  $x$ . De plus on a

$$\frac{\theta^2}{\theta + 1} < h(x) < 0.$$

### 3.1.3 Moments

**Proposition 3.2.** Le moment d'ordre  $K \in N$  de la distribution de Lindley paramètre  $\theta$ , ou le moment d'ordre  $K$  de  $x \in \text{Lindley}(\theta)$ , est

$$\mu_K = E(X^K) = \frac{K!(\theta + K + 1)}{\theta^K(\theta + 1)}.$$

**Preuve** On a

$$\begin{aligned} E(X^K) &= \int_0^{+\infty} x^K f(x)dx \\ &= \frac{\theta^2}{1 + \theta} \int_0^{+\infty} (1 + x)x^K e^{-\theta x} dx \\ &= \frac{\theta^2}{1 + \theta} \left( \int_0^{+\infty} x^{(K)} e^{-\theta x} dx + \int_0^{+\infty} x^{(K+1)} e^{-\theta x} dx \right) dx. \end{aligned}$$

### 3.1 Distribution de Lindley

---

Par changement de variable  $\mu = \theta x$  puis en utilisant la fonction gamma ( $\Gamma$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^K e^{-\theta x} dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu}{\theta}\right)^K e^{-\mu} d\mu \\ &= \frac{1}{\theta^K} \int_0^{+\infty} \mu^K e^{-\mu} d\mu \\ &= \frac{1}{\theta^K} \Gamma(K+1) \\ &= \frac{1}{\theta^K} K!. \end{aligned}$$

Le même, on obtint

$$\int_0^{+\infty} x^{K+1} e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta^{(K+1)}} (k+1)!.$$

D'où

$$\begin{aligned} E(X^K) &= \frac{K!\theta^2}{\theta^K(1+\theta)} \left(1 + \frac{K+1}{\theta}\right) \\ &= \frac{K!\theta^2}{\theta^K(1+\theta)} \left(\frac{K+1+\theta}{\theta}\right) \\ &= \frac{K!(\theta+K+1)}{\theta^K(\theta+1)}. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer

**Proposition 3.3.** *Soit  $X \sim \text{Lindley}(\theta)$ . Alors on a*

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{(\theta+2)}{\theta(\theta+1)} & E(X^2) &= \frac{2(\theta+3)}{\theta^2(\theta+1)} \\ E(X^3) &= \frac{6(\theta+4)}{\theta^3(\theta+1)} & E(X^4) &= \frac{24(\theta+5)}{\theta^4(\theta+1)}. \end{aligned}$$

Le moment centré d'ordre  $K$  de la distribution de Lindley est défini par :

$$\begin{aligned} \mu'_K &= E[(X - E(X))^r] \\ &= \sum_{r=1}^K C_K^r \mu_K (-E(X))^{(K-r)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu'_2 &= \text{Var}(X) = \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2(\theta+1)} \\ \mu'_3 &= \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{\theta^3 - (\theta+1)^3} \\ \mu'_4 &= \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{\theta^4(\theta+1)^4}. \end{aligned}$$

Le coefficient de variation ( $\gamma$ ), le coefficient de dissymétrie  $\sqrt{\beta_1}$  et le coefficient d'aplatissement ( $\beta_2$ ) de la distribution de Lindley sont

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\sqrt{\theta^2 + 4\theta + 2}}{\theta + 2} \\ \sqrt{\beta_1} &= \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^{\frac{3}{2}}} \\ \beta_2 &= \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}.\end{aligned}$$

### 3.1.4 Fonction caractéristique

**Proposition 3.4.** *La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle  $X \sim \text{Lindley}(\theta)$  est donnée par :*

$$\varphi(t) = \frac{\theta^2(\theta - it + 1)}{(1 + \theta)(\theta - it)^2} i^2 = -1.$$

**Preuve** on a

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(e^{itx}) = \int_0^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \\ &= \frac{\theta^2}{1 + \theta} \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-\theta x} dx \\ &= \frac{\theta^2}{1 + \theta} \left( \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-\theta x} dx + \int_0^{+\infty} x e^{itx} e^{-\theta x} dx \right) dx \\ &= \frac{\theta^2}{1 + \theta} \left( \int_0^{+\infty} e^{(-\theta - it)x} dx + \int_0^{+\infty} x e^{(-\theta - it)x} dx \right) dx,\end{aligned}$$

et on a

$$\int_0^{+\infty} e^{(-\theta - it)x} dx = \frac{1}{\theta - it},$$

et pour calculer

$$\int_0^{+\infty} x e^{(-\theta - it)x} dx.$$

On fait le changement de variable  $u = (\theta - it)x$  puis en utilisant la fonction gamma ( $\Gamma$ ), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x e^{(-\theta - it)x} dx &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{u}{(\theta - it)} \right) e^{-u} du \\ &= \frac{1}{(\theta - it)^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du \\ &= \frac{1}{(\theta - it)^2} \Gamma(2) \\ &= \frac{1}{(\theta - it)^2}.\end{aligned}$$

## 3.2 Distribution exponentielle

**Définition 3.3.** On dit que la (V.A)  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , et on note  $X \sim \text{exp}(\lambda)$ , si elle satisfait

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{(-\lambda t)}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.2)$$

Sa fonction de répartition est donc

$$F(t) \begin{cases} = 1 - e^{(-\lambda t)}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et sa densité

$$f_X(t) \begin{cases} = \lambda e^{(-\lambda t)}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3.2.1 Fonction génératrice des moments

**Proposition 3.5.** 1-La fonction génératrice des moments d'une (V.A) exponentielle est donnée par :

$$G_X(t) = E[e^{(tX)}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda. \quad (3.3)$$

2-Si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{et } \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.4)$$

#### Preuve

1-On peut calculer facilement la fonction génératrice des moments de la (V.A)  $X \sim \text{exp}(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} G_x(t) &= E[e^{(tX)}] = \int_0^{\infty} e^{(tx)} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(tx)} \lambda e^{(-\lambda x)} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} dx. \end{aligned}$$

Pour  $t \geq \lambda$ , la fonction n'est par intégrale en l'infini, tandis que pour  $t < \lambda$ , on a

$$G_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

2—Nous notons par la dérivation que, pour la distribution exponentielle,  $G_X(t)$  n'est défini que pour des valeurs de  $t$  inférieures à  $\lambda$

$$G'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad \text{et} \quad G''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}.$$

On obtient,

$$E(X) = G'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{et} \quad E[X^2] = G''_0 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Alors

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Proposition 3.6.** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables indépendantes de loi exponentielle  $\exp(\lambda)$ , alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda).$$

Où  $\Gamma(n, \lambda)$  est la loi Gamma de paramètre  $n$  et  $\lambda$ .

**Lemme 3.1.** Soit  $X$  une v.a à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , de fonction de répartition  $F_X$  continue. Alors  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  si et seulement si pour  $t$  et  $s$  deux réels positifs quelconques

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

### Preuve

Commençons par supposer que  $X$  est une V.A. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Alors pour tout  $u \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(X > u) = e^{-\lambda u}$ . On en déduit

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

Réciproquement, on suppose maintenant que  $X$  est une (v.a.) à valeurs  $\mathbb{R}_+$ , de fonction de répartition  $F_X$  continue, et qui vérifie pour  $t, s \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

**Remarque 3.3.** On introduit la fonction de survie de  $X$ ,  $G$ , qui est définie par  $G(u) = \mathbb{P}(X > u) = 1 - F_X(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse, puisque  $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > t + s) / \mathbb{P}(X > t)$ ,  $G$  vérifie

$$G(t + s) = G(t)g(s).$$

Pour tout  $t, s \geq 0$ . Une récurrence immédiate basée sur cette relation permet d'établir que

$$G(n) = g(1)^n.$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ .

### 3.2 Distribution exponentielle

**Définition 3.4.** Une loi  $F_X$  est dite à échelle, si pour tout  $c > 0$ ,  $\mathbb{P}(cX \leq x)$  appartient à la même famille que  $F_X$ .

**Définition 3.5.** Soit  $X$  une variable de loi de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F$  Son risque est  $h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$ . Si  $h$  est décroissante, on dit alors que les queues (ailes) de la loi  $X$  sont épaisses et si  $h$  est croissante alors les queues de  $X$  sont légères. Les figures ci-dessous ;

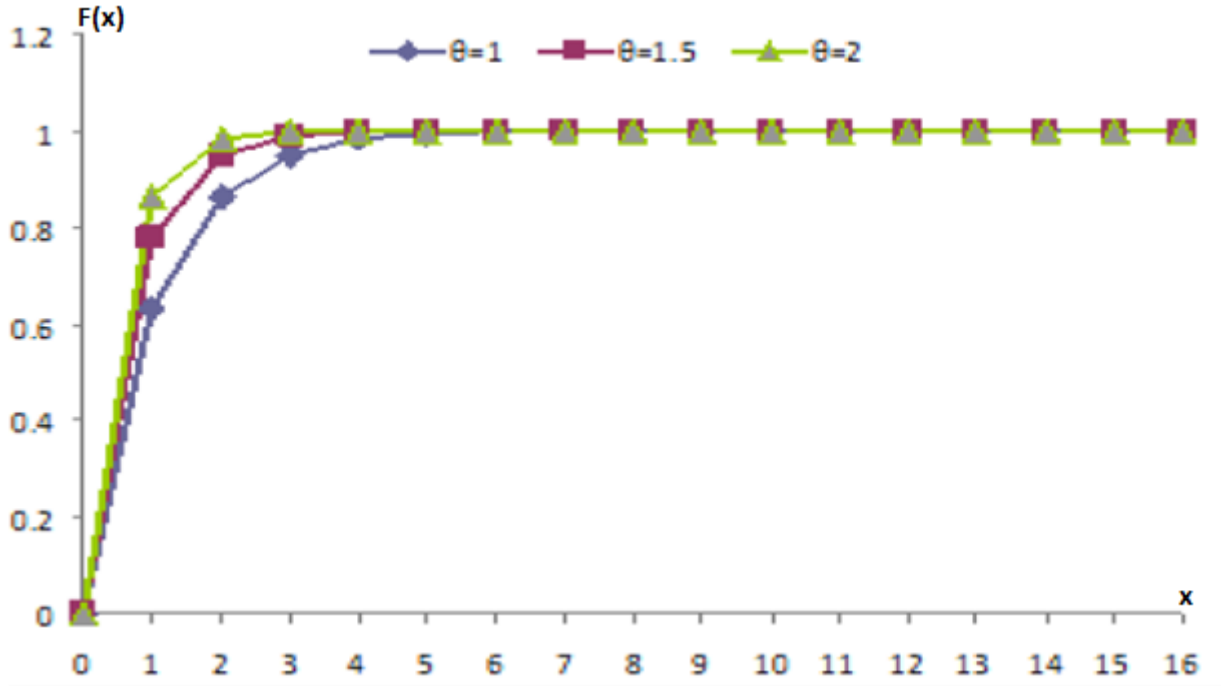


figure 1 : La fonction de répartition d'un loi exponentielle

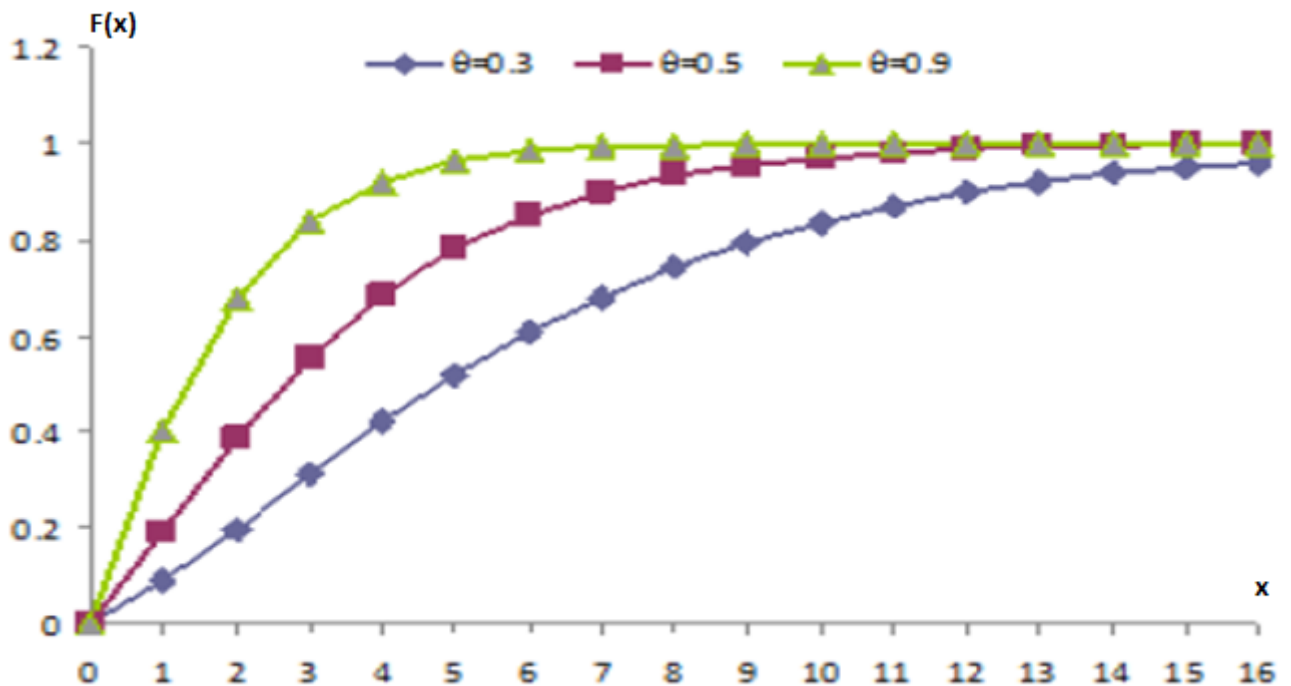


figure 2 : La fonction de répartition d'un loi Lindley

### 3.3 Application

La distribution exponentielle et de Lindley ont été ajustée un certain nombre d'ensembles de données de durée de vie réelle. Des tests d'ajustement pour six ensembles de données de durée de vie réelle ont été présentés ici.

Afin de comparer les distributions exponentielles et Lindley, il faut chercher  $-2 \ln L$ ,  $AIC$  (*Akaike information critre*)  $AICC$  (*Akaike information critre corrig*)  $BIC$  (*Baysien information critre*) pour les six ensembles de données de durée de vie réelle ont été calculés les formules pour calculer  $ALC$  les statistiques  $ALCC$ ,  $BIC$  sont les suivantes :

$$AIC = -2 \ln L + 2K.$$

$$AICC = AIC + \frac{2K(K + 1)}{(n - K - 1)}.$$

$$BIC = -2 \ln L + K \ln L.$$

Ou  $K$  le nombre de paramètres  $n$  est la taille de l'échantillon et  $F_n(x)$  est la fonction de distribution empirique.

Les ajustements des distribution exponentielles et de Lindley sont basés sur des estimations du maximum de vraisemblance .

Soi  $t_1, t_2, \dots, t_n$  un échantillon aléatoire de taille  $n$  à partir d'une distribution exponentielle.

la fonction logarithmique  $L$  de vraisemblance  $\ln L$  de distribution exponentielle étant donnée.

$L = \theta^n e^{-n\theta \bar{t}}$ , et donnée  $\ln L = n \ln \theta - n\theta \bar{t}$  le  $\hat{\theta}$  du paramètre  $\theta$  de distribution exponentielle est la résolution de l'équation  $\frac{d \ln L}{d \theta} = 0$ .

Soit  $t_1, t_1, \dots, t_n$  un échantillon aléatoire de taille  $n$  de la distribution de Lindley la fonction vraisemblance  $L$  et la fonction de  $\ln L$  de vraisemblance dans la  $L$  de la distribution de Lindley sont donnée par

$$L = \left(\frac{\theta^2}{\theta + 1}\right)^n \prod (1 + t_i) e^{-n\theta t},$$

et

$$\ln L = n \ln\left(\frac{\theta^2}{\theta + 1}\right) + \sum \ln(1 + t_i - n\theta t).$$

### 3.3 Application

Le  $\theta$  du paramétré  $\hat{\theta}$  de la distribution de Lindley est la solution de l'équation  $\frac{d \ln L}{d\theta} = 0$ .

Ensemble de données 1

17,88	28,92	33,00	41,52	42,12	45,60	48,80	51,84	5,196	54,12	55,56	67,80
68,44	68,44	68,88	84,12	93,12	98,64	105,12	127,92	128,04	173,40		

Ensemble de données 2

12	15	22	24	24	32	32	33	34	38	38	43	44
48	52	53	54	54	55	56	57	58	58	59	60	60
60	60	61	62	63	65	65	67	68	70	70	72	73
75	76	76	81	83	84	85	87	91	95	96	98	99
109	110	121	127	129	131	143	146	146	175	175	211	233
258	258	263	297	341	341	376						

Ensemble de données 3

23	261	87	7	120	14	62	47	225	71	246	21	42
20	5	12	120	11	3	14	71	11	14	11	16	90
1	16	52	95									

Ensemble de données 4

74	57	48	29	502	12	70	21	29	386	59	27	153
26	326											

Ensemble de données

donnée	Model	parameter estimat	$-2 \ln L$	AIC	AICC	BIC
donnée1	Lindley	0,027321	231,47	233,47	233,66	234,61
	exponentielles	0,013845	242,87	242,87	245,06	246,01
donnée2	Lindley	0,019841	789,04	791,04	791,1	793,32
	exponentielles	0,010018	806,88	808,88	808,94	811,16
donnée3	Lindley	0,033021	323,27	325,27	325,42	326,67
	exponentielles	0,016779	305,26	307,26	307,4	308,66
donnée4	Lindley	0,01636	181,34	183,34	183,65	184,05
	exponentielles	0,008246	173,94	175,94	176,25	176,65

## 3.4 Conclusion

Dans certains cas exponentielle est meilleur, que Lindley tandis que d'autres cas Lindley est meilleur qu' exponentiel Lindley est plus flexible que l'exponentielle mais l'exponentielle a un certain avantage que lindley en raison de sa simplicité.

# Chapitre 4

## Distribution de lindley transmutée

Dans ce chapitre, on traite la distribution de Lindley transmutée, les propriétés statistiques et on termine par une application.

### 4.1 Introduction

Dans de nombreuses sciences appliquées telles que la médecine, l'ingénierie et la finance, la modélisation et l'analyse des données de durée de vie sont cruciales. Plusieurs distributions de durée de vie ont été utilisées pour modéliser ces types de données. La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement de la modèle de probabilité ou distribution. En raison de cet effort considérable a été consacré au développement de grandes classes de distribution de probabilité standard ainsi que de méthodologies statistiques pertinentes.

Cependant, il reste encore de nombreux problèmes importants ou les données réelles ne suivent aucune des probabilités classiques ou standard des modèles.

Dans ce chapitre nous présentons une nouvelle généralisation de la distribution de Lindley appelée distribution de Lindley transmutée.

**Définition 4.1.** *On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une distribution transmutée si sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F(x) = (1 + \lambda)G(x) - \lambda G^2(x), \quad |\lambda| \leq 1. \quad (4.1)$$

Où  $G(x)$  est la fonction de répartition la distribution de base donnée.

Maintenant, nous fournirons une formulation mathématique de la distribution de lindley transmutée et de certaines de ses propriétés.

**Définition 4.2.** *en utilisant (4.1) et (4.2) (4.3) nous avons d'une distribution de Lindley transmutée*

$$F(x) = \left(1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x}\right) \left(1 + \lambda \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1 + \theta x} e^{-\theta x}\right). \quad (4.2)$$

Donc, la distribution de Lindley transmutée avec la paramètre  $\lambda$ , est

$$f_1(x) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x} \left( 1 - \lambda + 2\lambda \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right). \quad (4.3)$$

**Remarque 4.1.** Que la distribution de Lindley transmutée est un modèle étendu pour analyser des données plus complexes et qu'il généralise certaines des distributions largement utilisées

La distribution de Lindley est clairement un cas particulier pour  $\lambda = 0$ .

La figure 1 illustre certaines des formes possibles de la pdf, d'une distribution de Lindley transmutée pour des valeurs sélectionnées des paramètres  $\lambda$ , et  $\theta$ .

La figure 2 illustre certaines des formes possibles d'une Lindley transmutée distribution pour des valeurs sélectionnées du paramètre  $\lambda$  en gardant  $\theta = 1$ .

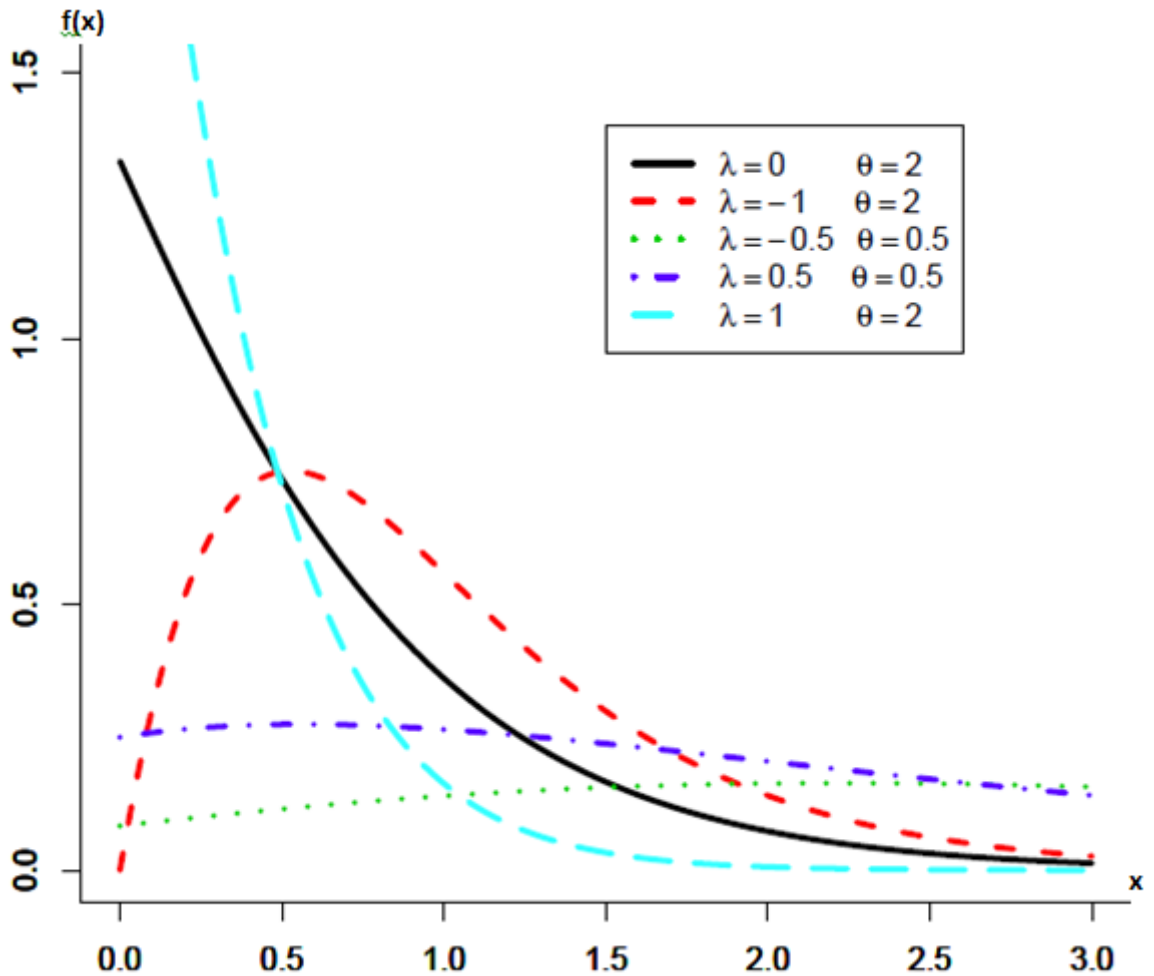


figure 1 :La densité loi Lindley transmutée

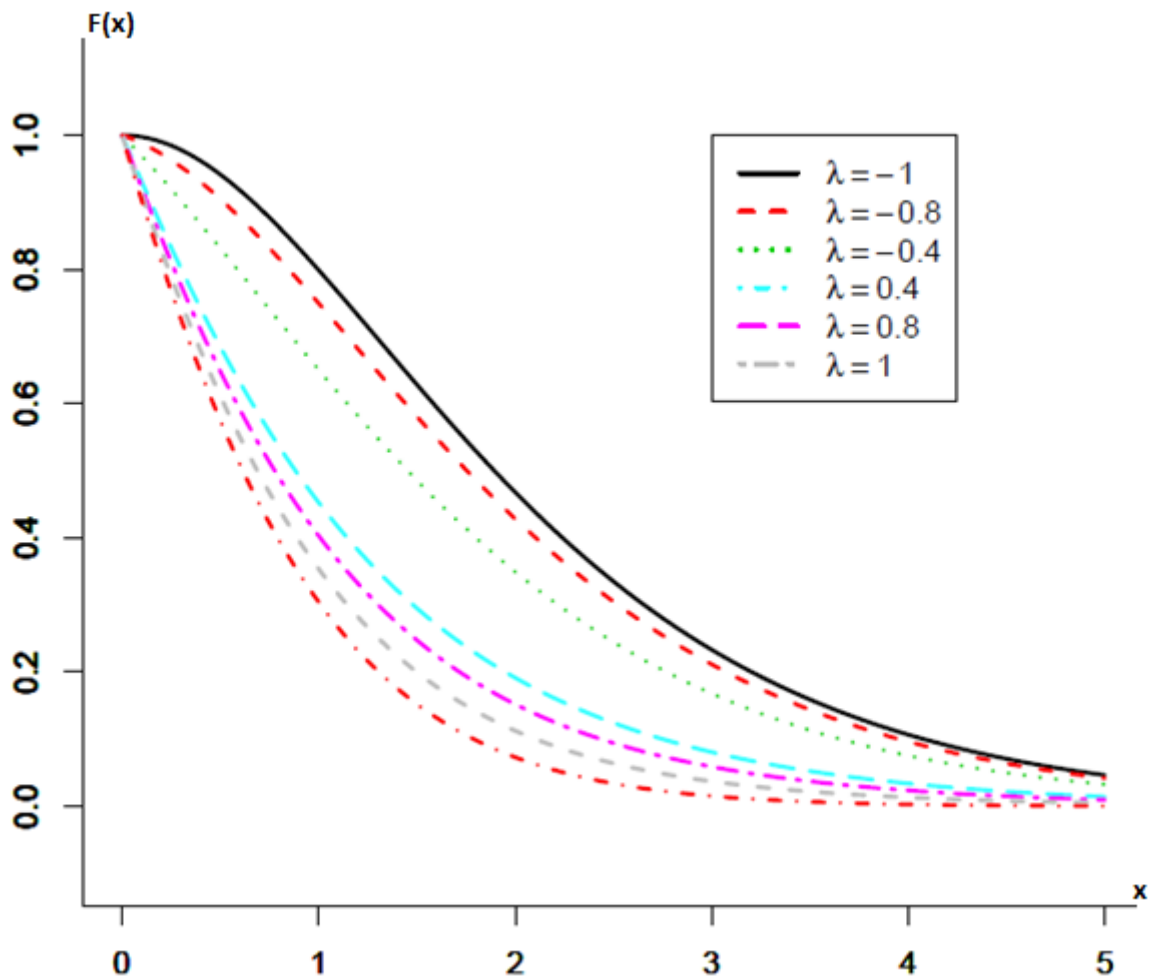


figure 2 : La fonction de répartition d'un loi Lindley transmutée

## 4.2 Les moments statistiques

Considérons maintenant les différents moments de la distribution de Lindley transmutée. Supposons que  $X$  désigne la variable aléatoire de distribution de Lindley transmutée avec le paramètre  $\theta$ , et  $\lambda$  alors le moment d'ordre  $K$  est :

$$\begin{aligned}
 E(X^K) &= \frac{\theta^2}{\theta+1} \int x^K (1+x) e^{-\theta x} \left( 1 - \lambda + 2\lambda \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x} \right) dx \\
 &= \frac{K!}{\theta^2 (\theta+1)} \left[ (1-\lambda) (\theta+K+1) + \frac{\lambda\theta}{2^{K-1}(\theta+1)} (2\theta+3\theta+K) \right],
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ici on utilise  $\int x^K e^{-\theta x} dx$ , donc en posant  $K=1$ , on obtient la moyenne comme

$$E(X) = \frac{1}{\theta(\theta+1)} \left[ (1-\lambda) (\theta+2) + \frac{2\lambda\theta}{\theta+1} (\theta+2) \right], \tag{4.5}$$

et en mettant  $K = 2$  on obtient le second moment comme

$$E(X^2) = \frac{2}{\theta^2(\theta+1)} \left[ (1-\lambda) (\theta+3) + \frac{\lambda\theta}{2(\theta+1)} (2\theta+5) \right] \tag{4.6}$$

et la variance

$$\begin{aligned} Var X &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{2}{\theta^2(\theta+1)} \left[ (1-\lambda)(\theta+3) + \frac{\lambda\theta}{2(\theta+1)}(2\theta+5) \right] - \left( \frac{1}{\theta(\theta+1)} \left[ (1-\lambda)(\theta+2) + \frac{2\lambda\theta}{\theta+1}(\theta+2) \right] \right)^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 4.3 Maximum de vraisemblance

L'estimation des paramètres de la distribution de Lindley transmütée sont données par la fonction du maximum de vraisemblance  $L$  ou

$$L = \frac{\theta^{2n}}{(\theta+1)^n} e^{-\sum_{i=1}^n \theta x_i} \prod_{i=1}^n (1+x_i) \left( 1 - \lambda + 2 \frac{\theta+1+\theta X_i}{\theta+1} e^{-\theta x_i} \right),$$

et

$$\ln L = 2n \ln \theta - n \ln(\theta+1) - \theta \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) + \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \lambda + 2 \lambda \frac{\theta+1+\theta X_i}{\theta+1} e^{-\theta x_i} \right). \quad (4.8)$$

Anulant maintenant

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0,$$

on obtient

$$0 = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta+1} - \sum_{i=1}^K x_i + \sum_{i=1}^K \frac{2\lambda x_i e^{-\theta x_i} \left[ \frac{1}{(\theta+1)^2} - \frac{\theta+1+\theta x_i}{\theta+1} \right]}{1 - \lambda + 2\lambda \frac{\theta+1+\theta x_i}{\theta+1} e^{-\theta x_i}}, \quad (4.9)$$

et

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{2 \frac{\theta+1+\theta x_i}{\theta+1} e^{(-\theta x_i)} - 1}{1 - \lambda + 2\lambda \frac{\theta+1+\theta x_i}{\theta+1} e^{-\theta x_i}}. \quad (4.10)$$

### 4.4 Analyse de fiabilité

La fonction de fiabilité  $R(x)$ , qui est la probabilité qu'un élément ne tombe par en panne avant un certain temps  $t$ , est définie par :

$$R(x) = 1 - F(x). \quad (4.11)$$

La fonction de fiabilité d'une distribution de Lindley transmütée est donnée par :

$$R(x) = \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{(-\theta x)} \left( 1 - \lambda + \lambda \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{(-\theta x)} \right). \quad (4.12)$$

L'autre caractéristique d'intérêt d'une variable aléatoire est la fonction de taux de risque définie par

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)},$$

qui est une quantité importante caractérisent le phénomène de la vie.

Elle peut être interprétée comme la probabilité conditionnelle de défaillance, étant donné qu'elle a survécu jusqu'au temps  $t$ .

## 4.5 Application

**Définition 4.3.** Les fonction de taux de risque pour une variable aléatoire de Lindley transmutée est donnée par :

$$h(x) = \left( \frac{\theta^2(1+x)}{\theta+1+\theta x} \right) \left( \frac{1-\lambda+2\lambda\frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}}{\lambda-1-\lambda\frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}} \right), \quad (4.13)$$

La figure 2 : illustre le comportement de fiabilité d'une distribution de Lindley transmutée lorsque la valeur du paramètre  $\lambda$  varie de -1 au 1, en gardant  $\theta = 1$ .

La fonction de taux de risque  $h(x)$ , d'une distribution de Lindley transmutée a les propriétés suivantes distribution de Lindley transmutée .

$h(x)$  tend vers  $-\frac{\theta^2}{\theta+1}(1+\lambda)$  et  $-\theta$  ou  $X \rightarrow 0$ , et  $x \rightarrow \infty$ , respectivement pour  $\lambda = 1$ , nous avons prouvent.

$$h(x) = -2\frac{\theta^2(1+x)}{\theta+1+\theta x}.$$

Le dérivation de  $h(x)$  par rapport à  $x$  est donnée par

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = -2\left(\frac{\theta}{\theta+1+\theta x}\right)^2 < 0.$$

Donc  $h(x)$  est décroissant.

## 4.5 Application

Dans ce partie, nous utilisons un ensemble de données réelles pour montrer que la distribution de Lindley transmutée peut être un meilleur modèle que celui base sur la distribution de Lindley. Sont (128) données.

Tableau

0,08	2,09	3,48	4,87	6,94	8,66	13,11	23,63	0,20	2,23
3,52	4,98	6,97	9,02	13,29	0,40	2,26	3,57	5,06	7,09
9,22	13,80	25,74	0,50	2,46	3,64	5,09	7,26	9,47	14,24
25,82	0,51	2,54	3,70	5,17	7,28	9,74	14,76	26,31	0,81
2,62	3,82	5,32	7,32	10,06	14,77	32,15	2,64	3,88	5,32
7,39	10,34	14,83	34,26	0,90	2,69	4,18	5,34	7,59	10,66
15,96	36,66	1,05	2,69	4,23	5,41	7,62	10,75	16,62	43,01
1,19	2,75	4,26	5,41	7,63	17,12	46,12	1,26	2,83	4,33
7,66	11,25	17,14	79,05	1,35	2,87	5,62	7,87	11,64	17,36
1,40	3,02	4,34	5,71	7,93	11,79	18,10	1,46	4,40	5,85
8,26	11,98	19,13	1,72	3,25	4,50	6,25	8,37	12,02	2,02
3,31	4,51	6,54	8,53	12,03	20,28	2,02	3,36	6,76	12,07
21,73	2,07	3,36	6,93	8,65	12,63	22,69	5,49		

Les resultats de l'analyse sont comme suit :

Modèle	estimations des paramètres	Ln L
Exponentielle	$\hat{\alpha}=0,097$	-426,76
Lindley	$\hat{\theta}=0,196$	-419,52
Lindley transmüté	$\hat{\theta}=0,156$ , $\hat{\lambda}=0,167$	-415,15

Modèle	-2ln L	AIC	AICC	BIC
Exponentielle	853,52	855,53	885,5617	858,37
Lindley	839,04	841,06	841,0917	843,91
Lindley transmüté	830,3	834,31	834,406	840,01

# Conclusion

La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement de la modèle de probabilité ou distribution. En raison de cet effort considérable a été consacré au développement de grandes classes de distribution de probabilité standard ainsi que de méthodologies statistiques pertinentes.

Cependant, il reste encore de nombreux problèmes importants ou les données réelles ne suivent aucune des probabilités classiques ou standard des modèles.

# Bibliographie

- [1] Akaike, H. A New Look at the Statistical Model Identification, I.E.E.E.Transactions on Automatic control, AC 19 : 716-723, (1974).
- [2] Aryal G.R. and chris P. Tsokos. On the transmutedory, Methods and Applications, extreme value distribution with application. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 71 : 1401-1407, (2009).
- [3] Deniz EG, Ojda EC The discrete Lindley distribution -Properties and Applications. Journal of Stattistical Computation and Simulation 81(11) : 1405-1416, (2011).
- [4] Foata, D. Fuchs, A. Calcul des probabiliés : Cours, exercices et problèmes corriés. Seconde édition, Dunod, ARIS, (1998).
- [5] Fuller EJ, Friemen S, Quinn J, et al. Fracture mechanics approach to the design of glass aircraft windows : A case study. SPIE Proceedings, 419-430, (1994).
- [6] Gross AJ, Clark VA. Survival Distributions : Reliability Applications in the biometrical Sciences, John Wiley, Nork, USA, (1975).
- [7] Gupter RC, Gupta PL, Gupta RD. Modeling failure time data by Lehmann alternatives communications in Statistics Theory and Methods, 27 : 887-904, (1998).
- [8] Lawless, J.F. Statistical models and methods for lifetime data. Wiley, New York, (2003).
- [9] Lee E.T.And Wang J.W. Statistical Methods for Survival Data Analysis, 3 rd ed ; Wiley, New York, (2003).
- [10] Lindley D.V. Fiducial distribution and Bayes theorem, Journal of the Royal Statistical Society, Series B 20 : 102-107, (1958).
- [11] Linhart H, Zucchini W. Model Selection,John Wiley, New York, USA, (1986).
- [12] Pierre SL. Probability and politics : Laplace, Condorcet, and Turgot. Proceedings of the American Philosophical Society, 116(1) : 1-20, (1819).
- [13] Proschan F. Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. Technometrics, 5(3) : 375-383, (1963).
- [14] Prudnikov, A.P. ; Brychkov, Y.A ; Marichev, O.I. Integrals and series. Volumes 1, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, (1986).