

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 20 août 1955 – Skikda-
Faculté des sciences
Département : de Physique
Réf :



جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة
كلية العلوم
قسم الفيزياء
المرجع:

Thèse présentée en vue d'obtention du diplôme de doctorat en sciences

Spécialité physique

Option : Matière condensé-surfaces et interfaces

Présenté Par :

AYECH HAMRAOUI Soumia

Thème:

Étude de la diffusion de particules relativistes par un potentiel

Soutenue le :

Devant le jury :

Président :	KABIR Abdenour	Professeur	Université de Skikda
Rapporteur :	K. KHOUNFAIS	Professeur	Université de Skikda
Examineur :	ATTALLAH Reda	Professeur	Université de Annaba
	BOUBAKRI Hani	M.CA	E.N.E.S.T azzaba - Skikda
Invité :	BOUDJAADAR Djamel	M.CA	E.N.E.S.T azzaba - Skikda

Remerciement

*Au-dessus de Louange à **Dieu** qui ma guidé pour compléter notre travail qui Il a été combinée de son premier et dernier dans ce succès.*

*Ce travail a été réalisé au laboratoire de physico-chimie (LRPCSI) de la faculté des sciences de l'Université 20 Août 1955 - Skikda sous la direction scientifique du :
M^r Kamel KHOUNFAIS*

Je voudrais le remercier pour m'avoir encadré, et pour le soutien constant et la patience qu'il a déployés pour mener à terme ce travail.

Je lui suis très reconnaissante.

Je tiens aussi à remercier:

*Monsieur **M^rKABIR Abdenour***

de m'avoir fait l'honneur de présider le jury

*Que Messieurs **M^r ATTALLAH Reda, M^r BOUBAKRI Hani** et **M^r BOUDJAADAR Djamel** trouvent ici les remerciements les plus chaleureux d'avoir accepté d'examiner ce travail*

*Je remercie **ma famille**, en particulier, **mon cher mari, mes parents, ma belle-mère** à qui je dois énormément pour leurs soutiens et leurs encouragements, à **mon frère et beau frère et leurs femmes, mes sœurs et belles sœurs** sans oublier mes oncles, mes cousins, mes amis et mes proches de m'avoir encourager durant toute longue période.*

Mes remerciements vont également à toutes les personnes qui de près ou de loin ont aidé à l'achèvement de ce modeste travail.

*Et bien sure, sans oublier mes petits enfants **Mehdi et Ibrahim** le petit poussin safouane et tous les petits enfants de ma famille .*

ملخص

في سياق ميكانيك الكم النسبوي يتلخص عملنا حول جزئين رئيسيين.

في الجزء الاول من الرسالة، اقترحنا اولا صياغة معادلة كلاين جوردن للجسيمات ذات السبين

$(s=0,1/2)$. ثم بناء على حالات التشتت (états de diffusion) لجسيم نسبي تحكمه معادلة

كلاين جوردن ذات سبين $(\text{spin}-s)$ في وجود مجال كهرومغناطيسي، قمنا بصياغة شكلية

لمصفوفة التشتت \hat{S}_{KG-s} أحادية البعد .

في الجزء الثاني، كتطبيق، درسنا انتشار الجسيمات النسبية ذات السبين $(s=0,1/2)$. تحت تأثير

حواجز كمونية سلمية (كمون كابس وكمون المستطيل) مع بعض خصائص التماثل والمدى.

بالنسبة لهذه الكمونات، باستعمال الطرق التحليلية تم إيجاد حلول معادلة كلاين جوردون.

من السلوك المقارب لهذه الحلول، تم إيجاد مصفوفة التشتت. بعد ذلك، باستخدام الصياغة الشكلية

لمصفوفة التشتت، قمنا بحساب تحولات الطور للموجات الزوجية والفردية، وسعات التشتت،

ومعاملي النفوذ والانعكاس، بالإضافة إلى المقطع العرضي الكلي.

وقد أثبت هذا النهج أنه صارم ومكّننا من الحصول على نتائج تتفق مع النتائج الموجودة في

المراجع.

Résumé :

Dans le contexte de la mécanique quantique relativiste, notre travail s'est articulé autour de deux grandes parties.

Dans la première partie, nous avons tout d'abord proposé le formalisme de l'équation de Klein Gordon spin- s ($s=0,1/2$). Ensuite, en se basant sur les états stationnaires de diffusion d'une particule relativiste gouvernée par l'équation de Klein Gordon de spin- s en présence d'un champ électromagnétique localisé, nous avons construit le formalisme de la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s} à une dimension.

Dans la deuxième partie, comme application, nous avons étudié la diffusion des particules relativistes de spin- s en interaction avec certains potentiels scalaires ayant quelques propriétés de symétrie et de portée (potentiel de Cusp et potentiel barrière).

Pour ces potentiels, l'équation de Klein Gordon spin- s a été d'abord résolue analytiquement. Du comportement asymptotique, nous avons tiré la matrice de diffusion. Par la suite, en utilisant le formalisme de la matrice de diffusion, nous avons calculé les déphasages des ondes paires et impaires, les amplitudes de diffusion, les coefficients de transmission et de réflexion, ainsi que la section efficace totale.

Cette approche s'est révélée rigoureuse et nous a permis d'avoir des résultats concordant avec ceux de la littérature.

Mots clés : *Formalisme, Matrice de diffusion, Équation de Klein Gordon de spin- s ($s=0,1/2$).*

Abstract

In the context of relativistic quantum mechanics, our work revolves around two main parts.

In the first part, we first proposed the formalism of spin- s ($s = 0, 1/2$) Klein Gordon equation. Then, based on the stationary diffusion states of a relativistic particle governed by spin- s Klein Gordon equation in the presence of a localized electromagnetic field, we have constructed the formalism of the scattering matrix \hat{S}_{KG-s} in one dimension.

In the second part, as an application, we study the scattering of spin- s relativistic particles interacting with some scalar potentials having some properties of symmetry and range (Cusp potential and barrier potential).

For these potentials, first, the spin- s Klein Gordon equation was solved analytically. From the Asymptotic Behavior, we have drawn the scattering matrix. Subsequently, using the formalism of the scattering matrix, we have calculated the phase shift of the even and odd waves, the scattering amplitudes, the transmission and reflection coefficients, as well as the total cross section.

This approach has proven to be rigorous and has enabled us to have results that are consistent with those of the literature.

Keywords : *formalism, scattering matrix, Spin- s ($s=0, 1/2$) Klein Gordon equation.*

Table des matières

I	Introduction générale	3
1	Équations de Klein-Gordon et de Dirac	9
1.1	Introduction	9
1.2	Équation de Schrödinger	10
1.2.1	Construction de l'équation de Schrödinger	12
1.3	Équation de Klein Gordon	14
1.3.1	Construction de l'équation de Klein-Gordon	15
1.3.2	Équation de Klein Gordon en présence d'un champ électromagnétique.	17
1.4	Équation de Dirac	23
1.4.1	Construction de l'équation de Dirac	23
1.4.2	Forme covariante de l'équation de Dirac	27
1.4.3	Forme covariante de l'équation de Dirac avec champ électromagnétique extérieur	28
2	Formalisme de la matrice de diffusion pour Klein Gordon spin-s ($s=0,1/2$)	32
2.1	Introduction	32
2.2	Une expérience de diffusion	33
2.2.1	Description classique de la diffusion	34
2.2.2	Description quantique de la diffusion	35
2.3	Formalisme de Klein-Gordon spin-s	37

Table des matières

I	Introduction générale	3
1	Équations de Klein-Gordon et de Dirac	8
1.1	Introduction	8
1.2	Équation de Schrödinger	9
1.2.1	Construction de l'équation de Schrödinger	11
1.3	Équation de Klein Gordon	13
1.3.1	Construction de l'équation de Klein-Gordon	14
1.3.2	Équation de Klein Gordon en présence d'un champ électromagnétique.	16
1.4	Équation de Dirac	22
1.4.1	Construction de l'équation de Dirac	22
1.4.2	Forme covariante de l'équation de Dirac	26
1.4.3	Forme covariante de l'équation de Dirac avec champ électromagnétique extérieur	27
2	Formalisme de la matrice de diffusion pour Klein Gordon spin-s ($s=0,1/2$)	32
2.1	Introduction	32
2.2	Une expérience de diffusion	33
2.2.1	Description classique de la diffusion	34
2.2.2	Description quantique de la diffusion	35
2.3	Formalisme de Klein-Gordon spin-s	37

2.3.1	Équation de Klein Gordon spin-s dans la représentation de Weyl .	40
2.4	Formalisme de la matrice de diffusion pour Klein-Gordon spin-s à une dimension	42
2.4.1	Calcul de la matrice de diffusion	45
3	Application du formalisme matrice de diffusion à une dimension	61
3.1	Étude dans le potentiel de Cusp	63
3.1.1	Conditions de raccordement	68
3.1.2	Matrice de diffusion de l'équation de Klein Gordon spin-s dans le potentiel de Cusp	71
3.1.3	Comportement asymptotique de la fonction d'onde	72
3.1.4	Représentation des ondes partielles	75
3.1.5	Coefficients de transmission et de réflexion	77
3.2	Étude dans le potentiel barrière	80
3.2.1	Matrice de diffusion de l'équation de Klein Gordon spin-s dans le potentiel barrière	86
3.2.2	Diffusion par effet tunnel	93
II	Conclusion générale	99

Introduction générale

Introduction générale

La distance qui sépare la physique classique de son homologue quantique est si grande qu'on s'étonne encore qu'elle ait pu être franchie. Ce sont deux conceptions du monde que tout semble opposer. La première repose concrètement sur ce qu'on peut voir et toucher, sur quoi aussi on peut agir. Elle est foncièrement causale, en poussant la causalité à l'extrême du déterminisme. La seconde physique pénètre dans un monde inaccessible à nos sens et que, seules, des mathématiques abstraites décrivent. Ce qu'on voit y est remplacé par des fonctions d'onde ; des quantités telles qu'une position ou une vitesse qu'on exprimait par des nombres deviennent des matrices, des opérateurs, des notions de mathématique pure. Au lieu de la certitude excessive du déterminisme, on a affaire à un hasard absolu. L'antagonisme semble total. Ces deux visions du monde concordent cependant et l'on sait, à présent, que la physique classique se déduit de la physique quantique. Dans les circonstances familières de notre environnement ordinaire, très loin de l'échelle des atomes, le quantique devient classique.

La mécanique classique rend bien compte de la réalité telle que nous l'observons au quotidien. Elle distingue deux types d'objets : la matière et le rayonnement. La matière suit les lois de la mécanique rationnelle de Newton, le rayonnement les lois de l'électromagnétisme de Maxwell.

Après l'émergence de théories tels que la mécanique classique de Newton, la thermodynamique, l'électromagnétisme et la mécanique statistique, on pense avoir trouvé toutes les lois de la physique, qu'il ne reste plus qu'à affiner la précision des mesures. Hélas, il existe alors encore de nombreuses questions sans réponse. La première mise en échec de la théorie classique est venue avec la théorie de la relativité d'Einstein. Ensuite, une série d'expériences sur les atomes et le noyau atomique ont mis en lumière l'incapacité des théories classiques à rendre compte des phénomènes se produisant à cette échelle microscopique. Il s'est avéré que les particules les plus infimes ou élémentaires (atomes, électrons, noyaux...) n'obéissent pas aux lois de la mécanique classique.

Pour parvenir à donner une interprétation cohérente de ces expériences, il a été néces-

saire d'introduire des concepts radicalement différents de ceux de la physique classique. L'ensemble de ces nouveaux concepts a donné naissance à une nouvelle physique, la "physique quantique". Dans cette physique, la trajectoire n'a plus aucun sens et l'on parle de la probabilité de présence. En fait, une particule élémentaire se manifeste dans l'espace comme une onde. Soit $\Psi(\vec{r}, t)$ la fonction d'onde associée, où \vec{r} est la position de la particule dans l'espace et t le temps. Comme pour toute onde, $\Psi(\vec{r}, t)$ doit satisfaire une équation d'onde. C'est l'équation de Schrödinger [1, 2], conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en (1926), est une équation fondamentale en physique quantique non-relativiste. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non-relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique.

Cependant, la mécanique quantique ne satisfaisait pas aux principes de la relativité restreinte d'Einstein, principe énoncé au début du siècle. Il fallait donc faire un autre pas vers une physique plus générale et plus complète qui obéirait à toutes les évidences expérimentales. Par conséquent, pour satisfaire à la covariance, principe découlant de la relativité restreinte d'Einstein, les physiciens ont développé de nouvelles théories. La mécanique quantique relativiste a ainsi débuté avec l'arrivée de l'équation de Klein-Gordon (1926), permet entre autre de décrire la dynamique de particules relativistes de masse m ayant un spin-0, avec ou sans charge [3, 4]. Malheureusement, cette équation présente de sérieuses difficultés d'interprétation dans le cadre de la mécanique quantique originelle, théorie censée décrire une seule particule.

En 1928, en combinant les principes de la relativité restreinte et ceux de la théorie quantique, Dirac, introduit l'équation qui porte son nom [3, 5, 6]. Cette équation a connu un grand succès en expliquant le spin des particules et l'existence des antiparticules (particule ayant une masse, un spin et une vie moyenne identique à celle de la particule, se trouvant dans le même état d'impulsion, de position, mais de charges opposés : charge électrique, faible, et autres nombres quantiques), mais elle ne peut décrire que les phénomènes où le nombre des particules ne varie pas. Elle ne peut pas décrire les proces-

sus dans lesquels des particules apparaissent ou disparaissent, par exemple l'annihilation matière-antimatière [3, 5, 6].

Les recherches se poursuivirent, en 1948, des travaux importants menés par Julian Schwinger et Tomonaga, ainsi que par Richard P. Feynman, établirent un formalisme où la covariance relativiste était mise en évidence, et qui permit de séparer les contributions des fluctuations du vide en des parties divergentes et des termes finis. Les termes divergents furent incorporés à la masse et à la charge initiale de l'électron, pour donner ce que l'on prend comme valeurs expérimentales. Par conséquent, un arsenal mathématique gigantesque mais aussi formidable a été élaboré pour traiter le fantôme "infini" héritier de ces ambiguïtés. Des techniques sophistiquées de renormalisation, de géométrie non commutative, d'algèbres de Hopf...etc n'ont pas été capable d'apporter une solution définitive à ce problème.

Bien qu'on a gagné énormément sur le plan technique, la physique est restée à un état embryonnaire sur le plan fondamental. Sans exagération et avec toute la modestie, on peut dire que la théorie quantique des champs est à l'état initial; tentative inachevée.

Un retour vers les équations d'onde est alors justifiable. Premièrement, ces équations d'onde sont beaucoup plus proches de la structure formelle inévitable de la mécanique quantique et deuxièmement les corrections apportées par la théorie des champs ne sont vraiment décelables qu'en présence des champs forts. Dans le cas de ces équations d'onde, les résultats physiques ne représentent alors que la première approximation où la création et l'annihilation de paires particule-antiparticule sont négligés, mais laissent entrevoir leur effet via l'effet tunnel [7, 8].

L'objet de ce travail est double : d'une part, de construire la matrice de diffusion pour les particules relativistes gouvernées par l'équation de Klein Gordon de spin- s ($s=0$ ou $s=1/2$) à une dimension en présence d'un champ électromagnétique localisé (tendant vers zéro à grande distance du centre diffuseur); d'autre part, d'analyser les solutions du problème des états de diffusion des particules relativistes en interaction avec certains potentiels scalaires ayant quelques propriétés de symétrie et de portée via le formalisme

de la matrice de diffusion.

Cette thèse comporte deux parties. Dans la première partie, en premier lieu, nous allons tenter de trouver un moyen permettant de rassembler dans une écriture unifiée les deux équations de la mécanique quantique relativiste, qui sont l'équation de Klein-Gordon de spin-0 et l'équation de Dirac du second ordre (ou équation de Dirac quadratique), en une seule équation qu'en la nome équation de Klein Gordon spin- s ($s = 0, 1/2$). En second lieu, nous allons construire le formalisme de la matrice de diffusion de Klein Gordon (\hat{S}_{KG-s}) pour les particules relativistes de spin- s gouvernées par l'équation de Klein Gordon spin- s à une dimension en présence d'un champ électromagnétique localisé.

Dans la deuxième partie de cette thèse, comme application nous étudierons la diffusion des particules de Klein Gordon spin- s en interaction avec certains potentiels scalaires ayant quelques propriétés de symétrie et de portée (potentiel de Cusp [9] et potentiel barrière), en utilisons le formalisme de la matrice de diffusion pour calculer les déphasages des ondes paires et impaires δ_s^l ($l = 0, 1$), les amplitudes de diffusion f_s^\mp , les coefficients de transmission et de réflexion \mathbb{T}_s et \mathbb{R}_s , ainsi que les sections efficaces différentielles discrètes σ_s^\mp et la section efficace totale σ_s^t . Cette partie se termine par un paragraphe sur l'effet tunnel dans le contexte d'une équation de la dynamique quantique relativiste.

Nous terminons cette thèse par une conclusion.

Chapitre 1

Équations de Klein-Gordon et de Dirac

1.1 Introduction

Comme il est bien connu en mécanique quantique relativiste, les équations de Klein-Gordon et de Dirac ont été introduites pour décrire d'une manière covariante la dynamique d'une seule particule douée respectivement de spin-0 et 1/2.

L'équation pour les particules de spin entier (bosons), fut découverte par de Broglie, par Schrödinger avant son équation de Schrödinger non-relativiste, et, indépendamment, par Oskar Klein et Walter Gordon en 1926. On la connaît depuis lors comme l'équation de Klein-Gordon. Cette équation est manifestement covariante par rapport aux transformations de Lorentz, mais, on peut très vite se rendre compte qu'on rencontre des problèmes avec une telle interprétation directe. En effet, si l'on considère une onde plane, l'équation de Klein-Gordon implique immédiatement qu'il existe des niveaux d'énergie négatives ($E < 0$) non bornée inférieurement. De plus, le calcul du courant sur cette onde plane donne une densité de probabilité négative ($\rho = E/m < 0$) [3, 4, 10]. On verra par la suite que l'introduction des antiparticules lève ce problème.

La deuxième candidate qui est l'équation de Dirac, a été au contraire appliquée avec

succès et les solutions à énergies négatives ont été interprétées comme étant des antiparticules associées aux particules. Cependant, comme il est connu, cette interprétation n'est valable qu'en présence des champs faibles et lentement variables. Sinon, l'équation de Dirac est considérée comme une équation de base de la théorie des champs des fermions de spin-1/2.

De cette manière, on conclut que les deux équations sont ainsi confrontées aux mêmes problèmes de la physique à plusieurs corps. Néanmoins, le rôle que joue l'équation de Dirac comme étant une théorie à une particule a été omis pour l'équation de Klein-Gordon.

Nous allons maintenant devenir plus précis, et définir les équations d'onde relativistes pour les particules de spin entier (bosons) et demi-entier (fermions), mettant l'accent sur ces dernières.

Avant de procéder au développement des équations de Klein Gordon et de Dirac, il est nécessaire de revenir d'abord à la théorie de la mécanique quantique non relativiste à travers l'équation de Schrödinger.

1.2 Équation de Schrödinger

Jusqu'à la fin du XIXème siècle, le monde physique était expliqué par l'électromagnétisme de Maxwell et la mécanique newtonienne. Tout objet pouvait être localisé dans l'espace à tout moment, et répondait soit à l'analyse de la trajectoire d'un corpuscule, selon sa masse m et sa vitesse \vec{v} , suivant le principe fondamental de la dynamique (lois de Newton),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.1)$$

où \vec{F} est la force totale agissant sur la particule et $\vec{p} = m\vec{v}$ est l'impulsion de la particule. Soit à l'analyse du déplacement d'une onde suivant les lois de Maxwell, qui s'écrivent en l'absence de charges et de courant [11, 12] :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

ε et μ étant la permittivité et la perméabilité.

Par application de la relation d'analyse vectorielle $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$, nous pouvons déduire de (1.2), l'équation générale qui décrit la propagation de l'onde électromagnétique dans l'espace libre, dans un milieu homogène, linéaire et isotrope [11] :

$$\left\{ \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{avec} \quad \Psi = \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{B}. \quad (1.3)$$

Le symbole $\vec{\nabla}^2$ représente l'opérateur laplacien. $v_{\Phi} = c/n$ désigne la vitesse de phase dans le milieu d'indice optique $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ et c la vitesse de la lumière.

Si l'indice de réfraction n est constant dans le milieu étudié, on peut chercher une solution de la forme $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$. En reportant dans l'équation (1.3), on trouve que $\Psi(\vec{r})$ est solution de l'équation

$$\left\{ \vec{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{v_{\Phi}^2} \right\} \Psi(\vec{r}) = 0. \quad (1.4)$$

Une solution élémentaire de (1.4) est $\Psi(\vec{r}) = \Psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$. Avec ce résultat, la solution de (1.3) prend la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.5)$$

où Ψ_0 , \vec{k} et ω sont l'amplitude, le vecteur d'onde et la pulsation respectivement. Le vecteur d'onde \vec{k} et la pulsation ω définissent la phase Φ par $\Phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$, soit :

$$\vec{k} = \vec{\nabla} \Phi, \quad \omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.6)$$

On reconnaît la vitesse v_{Φ} par la vitesse du déplacement de la surface équiphasse $\Phi = \Phi_0$ ($\Phi_0 = cste$) au cours du temps, donnée par $v_{\Phi} = \omega/k$.

1.2.1 Construction de l'équation de Schrödinger

Au début du 20^{ème} siècle, certains phénomènes à l'échelle atomique ou subatomique, remirent en question les lois de la physique classique. Par exemple, l'hypothèse de Planck concernant le rayonnement du corps noir et l'explication par Einstein de l'effet photoélectrique suggèrent que le champ électromagnétique, a aussi un aspect corpusculaire. Tout cela mène Louis de Broglie a inventé la mécanique ondulatoire, faisant associer des ondes de fréquence ν aux corpuscules de matière d'énergie E et d'impulsion \vec{p} [1, 2].

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (1.7)$$

où $\hbar = h/2\pi$ et h est la constante de Planck.

Schrödinger exploite à fond l'analogie optico-mécanique de Hamilton, à la lumière des idées de de Broglie. Le point de départ est l'équation de Hamilton - Jacobi pour une particule de masse m et d'énergie potentielle V [13, 14]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{r}, \vec{\nabla} S, t) = 0 \quad (1.8)$$

où S et H sont l'action et l'hamiltonien du système. Pour un hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps (E est une constante), on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \left| \vec{\nabla} S \right|^2 = p^2 = 2m(E - V). \quad (1.9)$$

Soit une surface d'action constante Σ , définie par l'équation $S(\vec{r}, t) = S_0$. On introduit le vecteur \vec{n} normal à la surface Σ par $\vec{n} = \vec{\nabla} S / |\vec{\nabla} S|$ et l'élément de longueur $dl = \vec{n} \cdot d\vec{r}$, la variation de S est formellement :

$$dS = \left| \vec{\nabla} S \right| dl + \frac{\partial S}{\partial t} dt = \sqrt{2m(E - V)} dl - E dt = 0, \quad (1.10)$$

ce qui donne la vitesse de déplacement v_{Φ} d'un point marqué sur une telle surface :

$$v_{\Phi} = \frac{dl}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{E}{p}. \quad (1.11)$$

Ayant fait apparaître cette vitesse, Schrödinger lui fait jouer le rôle d'une vitesse de phase dans une certaine équation d'onde pour une certaine fonction, notée $\Psi(\vec{r})$. En reportant (1.7) et (1.11) dans (1.4), Schrödinger écrit la forme historique :

$$\left\{ \vec{\nabla}^2 + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2} \right\} \Psi(\vec{r}) = 0. \quad (1.12)$$

Cette équation, connue sous le nom d'équation de Schrödinger indépendante du temps (ou stationnaire), est la base de la théorie la plus utilisée pour décrire le mouvement des particules matérielles telles que l'électron dans un potentiel extérieur V .

L'équation (1.12) ne concerne que la partie spatiale de la fonction d'onde, c'est à dire d'énergie bien définie. Il faut encore établir l'équation des ondes proprement dite, celle qui régit l'évolution dans le temps d'un $\Psi(\vec{r}, t)$ quelconque.

Par utilisation du principe de correspondance du formalisme hamiltonien de la mécanique classique non relativiste, selon lequel, on peut passer de lois en physique classique aux lois traitant du même sujet en physique quantique en remplaçant les variables dynamiques du système par des opérateurs [1, 2, 15]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow E, \quad -i\hbar \vec{\nabla} \leftrightarrow \vec{p}, \quad (1.13)$$

on obtient une équation qui satisfait à ces exigences :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}, t) \right\} \Psi(\vec{r}, t). \quad (1.14)$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles qui doit remplacer les équations du mouvement de la dynamique pour l'étude des phénomènes à très petite échelle. Une équation fondamentale en physique quantique non relativiste. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non-relativiste de masse m soumise à un potentiel $V(\vec{r}, t)$, et

remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme.

L'interprétation physique correcte de la fonction d'onde de Schrödinger ne fut donnée qu'en 1926 par Max Born. On interprète le module au carré de la fonction d'onde comme la densité de probabilité de présence $P(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$.

Cette équation est invariante par rapport aux rotations et aux translations d'espace. On peut montrer qu'elle est également invariante par rapport aux transformations de Galilée, mais elle ne possède pas la propriété d'invariance par rapport aux transformations de Lorentz (dissymétrie entre les coordonnées d'espace et de temps) et ignore les spins des particules.

Il fallait donc faire un autre pas vers une physique plus générale et plus complète qui obéirait à toutes les évidences expérimentales. Par conséquent, pour satisfaire à la covariance, principe découlant de la relativité restreinte d'Einstein, les physiciens ont développé de nouvelles théories. La mécanique quantique relativiste a ainsi débuté avec l'arrivée de l'équation de Klein-Gordon (1926), permet entre autre de décrire la dynamique de particules relativistes ayant un spin-0. [3, 4].

1.3 Équation de Klein Gordon

Nous commencerons par exposer la théorie de Klein-Gordon qui généralise la théorie quantique non relativiste, lorsque les fonctions d'onde sont des quantités scalaires. Nous aborderons ensuite la théorie de Dirac, qui, envisageant des fonctions d'onde à plusieurs composantes, introduit la notion de spin [3, 5], et réussit entre autres choses, à prévoir l'existence du positron.

La recherche d'une équation d'onde relativiste pour l'électron est compliqué par l'existence du spin. Cherchons d'abord à former une équation d'onde relativiste pour une particule de spin-0, un méson π par exemple. Une telle particule n'ayant pas de degré de liberté interne, sa fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ dépend des seules variables r et t . Nous

désignons par m sa masse, par e sa charge et nous supposons que la particule est libre.

1.3.1 Construction de l'équation de Klein-Gordon

Pour trouver l'équation d'onde des particules relativistes de spin-0, nous procédons empiriquement, en nous aidant du principe de correspondance ; ceci nous assure qu'on retrouve les lois du mouvement classique, lorsque les conditions de validité de l'approximation classique sont remplies. Évidemment, on reconnaît l'équation de Schrödinger, on utilise alors exactement le même raisonnement pour obtenir l'équation d'évolution temporelle en mécanique quantique relativiste. La seule différence est qu'on utilise plutôt l'équation classique relativiste de l'énergie pour une particule libre comme point de départ, soit la relation de dispersion d'Einstein (on utilise le système d'unités naturelles tel que $\hbar = c = 1$) [3, 4],

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (1.15)$$

Ensuite, en adoptant les mêmes postulats de correspondance qu'en mécanique quantique non relativiste, en écrivant que l'opérateur d'évolution des fonctions d'onde $i\partial/\partial t$ est égal à l'opérateur hamiltonien H lequel s'obtient en remplaçant, dans l'expression de l'énergie, l'impulsion par l'opérateur $-i\vec{\nabla}$, nous obtenons :

$$i\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{-\vec{\nabla}^2 + m^2}. \quad (1.16)$$

En tenant compte de (1.16), l'équation de Schrödinger relativiste qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ d'une particule libre, fonctions propres de l'opérateur H associé à l'énergie totale E , s'écrit :

$$i\frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(\sqrt{-\vec{\nabla}^2 + m^2}\right)\Psi(\vec{r}, t). \quad (1.17)$$

Cette équation a deux graves défauts. D'une part, la dissymétrie entre les coordonnées d'espace et de temps et telle que l'invariance relativiste et les propriétés qui en découlent

n'y apparaissent pas clairement. D'autre part, nous sommes immédiatement arrêtés par l'interprétation de la racine d'un opérateur, ce qui nous oblige à rejeter cette équation.

On évite ces deux difficultés en prenant comme point de départ de l'opération de correspondance la relation relativiste entre énergie et quantité de mouvement,

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (1.18)$$

En égard à la présence de E^2 au lieu de E dans la relation (1.18), nous utiliserons, non plus (1.16) et (1.17) mais les relations suivantes qui en découlent :

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} = E^2 \quad (1.19)$$

et

$$-\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = E^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.20)$$

En tenant compte de (1.18) et en remplaçant \vec{p} , par l'opérateur $-i\vec{\nabla}$, l'équation (1.20) conduit à l'équation de Klein Gordon

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) + m^2 \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.21)$$

Nous écrivons encore l'équation (1.21) sous une forme plus simple. Dans ce but, introduisons le quadrivecteur énergie impulsion p^μ , défini par :

$$p^\mu = i\partial^\mu = i \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad (1.22)$$

ensuite, considérons l'invariant relativiste (1.18), qui s'écrit sous forme

$$p^\mu p_\mu = m^2. \quad (1.23)$$

Par un calcul direct, et en utilisant la définition du produit scalaire de deux quadri-

vecteurs $a^\mu = (a^0, \vec{a})$ et $b^\mu = (b^0, \vec{b})$ [3, 4, 10], donné par :

$$a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (1.24)$$

on peut écrire l'équation (1.21) sous la forme :

$$\{\partial^\mu \partial_\mu + m^2\} \Psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.25)$$

habituellement appelée équation de Klein-Gordon covariante, étant donné que l'opérateur $\partial^\mu \partial_\mu$ est invariant et que le champ $\Psi(\vec{r}, t)$ est scalaire.

Cette équation est très semblable à l'équation d'onde ordinaire, sauf pour un terme supplémentaire impliquant la masse. Elle s'applique à une fonction d'onde scalaire $\Psi(\vec{r}, t)$ décrivant des particules massives de spin-0, sans ou avec charge électrique.

L'équation de Klein-Gordon se généralise à toutes les particules de spin entier, les bosons, qu'elle décrit correctement. Elle n'est pas applicable par contre aux particules de spin demi-entier (les fermions). Cette équation d'onde relativiste doit converger vers l'équation de Schrödinger à la limite non relativiste (la limite non relativiste consiste à dire que l'énergie $E \ll m$, est petite devant la masse, que les champs $|A_0| \ll m^2$ et $|\vec{A}| \ll m^2$ sont faibles par rapport à la masse et que la variation spatiale des quantités $|\vec{p}| \ll m$ est faible).

La forme de l'équation de Klein Gordon (1.25) n'est applicable qu'aux particules libres. Nous allons essayer d'incorporer l'interaction du champ électromagnétique.

1.3.2 Équation de Klein Gordon en présence d'un champ électromagnétique.

Les équations d'ondes des particules libres n'expriment en fait que celles des propriétés qui sont liées aux exigences générales de symétrie spacio-temporelle. Or, les processus physiques auxquelles participent les particules dépendent des propriétés de leurs interactions.

On aimerait maintenant pouvoir généraliser l'équation de Klein-Gordon libre (1.25) que nous avons initialement présentée plus haut, en introduisant l'interaction du champ de Klein Gordon avec un champ électromagnétique externe donné, composé d'un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et d'un potentiel scalaire $A_0(\vec{r}, t)$ qui forment un quadrivecteur que l'on désignerons par $A_\mu = (A_0, \vec{A})$.

Pour avancer dans cette démarche, nous commencerons, dans une première partie, par analyser la structure de l'hamiltonien d'interaction entre particule classique de charge q et le champ électromagnétique. Puis, nous adopterons les mêmes postulats (1.18), (1.19) et (1.20), qu'en mécanique quantique relativiste d'une particule libre pour calculer l'hamiltonien de la particule de Klein Gordon spin-0 dans un champ électromagnétique A_μ . La seule différence est qu'on utilise plutôt l'équation classique relativiste de l'énergie pour une particule en présence d'un champ électromagnétique comme point de départ.

Comme on sait de l'électrodynamique classique, en présence de champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , une particule de charge électrique q qui se déplace avec une vitesse \vec{v} subit, une force donnée par la formule de Lorentz [11, 12],

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right). \quad (1.26)$$

Nous cherchons un lagrangien effectif tel que (1.26) correspondent aux équations d'Euler de l'action correspondante. Pour avancer dans cette démarche, on réécrit la force de Lorentz en fonction des potentiels scalaires et vecteurs définis dans l'équation (1.2). Ensuite, développons le double produit vectoriel,

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.27)$$

Après quelques processus calculatoires simples, cette dernière égalité nous permet d'écrire l'équation (1.26), sous la forme :

$$\vec{F} = q \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (A_0 - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right). \quad (1.28)$$

Le potentiel vecteur \vec{A} et scalaire A_0 sont des fonctions de \vec{r} et de t uniquement, et doivent donc être indépendants de \vec{v} . Par conséquent, on peut réécrire (1.28), sous la forme :

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \right), \quad (1.29)$$

en désignant par U le potentiel généralisé, c'est-à-dire :

$$U = q \left(A_0 - \vec{A} \cdot \vec{v} \right). \quad (1.30)$$

Nous avons donc démontré que la force électromagnétique dérive d'un potentiel généralisé U qui est une expression simple formée à l'aide de la charge et de la vitesse de la particule et des potentiels électromagnétiques A_0 et \vec{A} .

D'autre part, puisque \vec{F} dérive du potentiel généralisé U , l'équation (1.29) est l'équation du mouvement obtenue à partir d'un lagrangien $L = T - U$ (T est l'énergie cinétique de la particule) où le potentiel \vec{A} interagit avec le courant $q\vec{v}$. En conséquence, en posant $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$, le lagrangien d'une particule classique de masse m et de charge $q = e$ évoluant dans un champ électromagnétique s'écrit :

$$L \left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t \right) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e \left[A_0(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right]. \quad (1.31)$$

L'hamiltonien classique associé à ce lagrangien se trouve de la manière habituelle, par une transformation de Legendre par rapport à la vitesse généralisée [13, 14],

$$H \left(\vec{r}, \vec{p}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{p}}, t \right) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L \left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t \right). \quad (1.32)$$

Nous partons du lagrangien (1.31) et de l'expression de l'impulsion \vec{p} qui est la variable canoniquement conjuguée de \vec{r} , est donnée par la relation :

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + e \vec{A}. \quad (1.33)$$

En vertu de la définition (1.33) de \vec{p} et de l'équation (1.31), on peut exprimer $\dot{\vec{r}}$ en fonction de \vec{p} : $\dot{\vec{r}} = (\vec{p} - e\vec{A})/m$. En y portant cette expression dans (1.32), on obtient de la même manière le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eA_0. \quad (1.34)$$

Remarquons que l'hamiltonien classique d'une particule de masse m et de charge e , située dans un champ électromagnétique $A_\mu = (A_0, \vec{A})$, s'obtient en faisant la substitution

$$H \rightarrow (H - eA_0), \quad \vec{p} \rightarrow (\vec{p} - e\vec{A}). \quad (1.35)$$

Dans un tel cas, la relation relativiste (la relation de dispersion d'Einstein) entre énergie et quantité de mouvement (1.18), en présence d'un champ électromagnétique s'écrit [3, 4]

$$(E - eA_0)^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2. \quad (1.36)$$

De façon analogue, la description des interactions électromagnétiques des particules en théorie quantique relativiste est rendue possible par la généralisation du principe de correspondance utilisé en théorie classique et en théorie quantique non relativiste. Ainsi, on part du hamiltonien classique (1.36), en remplaçant les quantités ci-dessus par leurs opérateurs, soit

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \rightarrow p^\mu - eA^\mu = (E - eA_0, \vec{p} - e\vec{A}), \quad (1.37)$$

c'est-à-dire, on admet le principe de couplage minimal de Fock, qui consiste à rem-

placer les dérivées ∂_μ par une dérivée covariante (covariante vis à vis des transformations de jauge) [3, 4]

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0, -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right). \quad (1.38)$$

Compte tenu de (1.37), l'équation (1.23) se transforme

$$(p^\mu - eA^\mu)(p_\mu - eA_\mu) = m^2, \quad (1.39)$$

et en remplace (1.39) dans (1.25), on obtient l'équation qui régit l'évolution d'une particule relativiste de spin-0 en présence d'un champ électromagnétique extérieur.

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2 \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.40)$$

Si nous récrivons cette relation en faisant usage des opérateurs correspondants de l'énergie et de la quantité de mouvement (quantification canonique). En introduisant la dérivée covariante $D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu$, nous pouvons écrire en analogie avec l'équation de Klein-Gordon libre en l'absence de champ l'équation de Klein Gordon généralisée, c'est-à-dire en présence d'un champ électromagnétique

$$(D^\mu D_\mu + m^2) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.41)$$

Cette équation sera appliquée en particulier au champ scalaire réel sans spin ($s = 0$), ce qui n'est pas le cas du photon, et aura une solution composée de la fonction de l'onde plane.

Maintenant, reste à savoir si cette équation à un sens physique. On sait que la mécanique quantique interprète les résultats d'une mesure d'un état comme une probabilité. En utilisant la même méthode que celle utilisée en mécanique quantique non relativiste (équation de Schrödinger), c'est-à-dire en multipliant Ψ^* par l'équation d'onde et en soustrayant Ψ multiplié par l'équation d'onde conjuguée, on obtient :

$$\partial_\mu [\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^* + 2ieA^\mu \Psi^* \Psi] = 0 \quad (1.42)$$

L'équation de continuité est satisfaite en prenant J^μ proportionnel au crochet de l'équation (1.42). Nous fixons la constante de proportionnalité de façon à trouver la définition usuelle à la limite non relativiste :

$$J^\mu = \frac{i}{2m} [\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^* + 2ieA^\mu \Psi^* \Psi] = \left(\rho, \vec{J} \right) \quad (1.43)$$

A l'examen de l'expression (1.43), une remarque s'impose : La densité $\rho = J^0$ peut devenir négative, ce qui est inexplicable. Une telle situation n'existe pas avec l'équation de Schrödinger. C'est là une des difficultés majeures de l'équation de Klein-Gordon. Cette difficulté a été en fait surmontée par Pauli et Weisskopf qui ont pu l'utiliser comme équation de base de la théorie des champs des bosons à spin-0. L'équation de continuité est alors interprétée comme loi de conservation de densité quadridimensionnelle charge-courant, en multipliant \vec{j} et ρ par une charge, ceux-ci représentent alors un courant et une densité de charge. [16].

Une autre difficulté, en effet, si l'on considère une onde plane, les niveaux d'énergie qui découlent de (1.21), sont solutions de $E^2 = p^2 + m^2$ avec les deux signes $E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$. L'existence de niveaux d'énergie négative non bornée inférieurement, donc arbitrairement basse, est un problème majeur, qui semble indiquer une instabilité de la théorie.

Toutes ces incohérences vont être levées par l'introduction de la théorie quantique des champs, une théorie décrivant un système à nombre arbitraire de particules, dans laquelle l'objet Ψ est promu du rôle de fonction d'onde à celui d'opérateur capable de créer et annihiler ces particules. C'est le changement de point de vue traditionnellement appelé seconde quantification [17, 18, 19].

Nous examinerons maintenant une autre équation d'onde relativiste, originellement proposée par Dirac pour pallier aux insuffisances de l'équation de Klein-Gordon.

1.4 Équation de Dirac

En 1928, Dirac est parvenu à écrire une équation d'onde des particules relativistes de spin-1/2. Cette équation, appliquée à l'électron, donnait une explication dans le cadre de la théorie quantique moderne (et non plus de l'ancienne théorie des quanta) de la structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène. D'autre part, elle a permis à Dirac de postuler l'existence des positrons, antiparticules associées aux électrons, découverts dans l'étude du rayonnement cosmique dès 1933 [20].

Fidèle à l'interprétation de la fonction $\Psi(\vec{r}, t)$ comme décrivant un état, Dirac admit alors comme postulat que l'équation quantique relativiste de l'électron devait être du premier ordre par rapport au temps, de sorte que la fonction d'onde à un instant arbitraire puisse être déterminée par la seule connaissance de cette fonction à l'instant initial. La connaissance de l'état de l'électron à un instant donné serait alors suffisante pour déterminer son état à un instant ultérieur, sans qu'il soit besoin de connaître la vitesse de changement de l'état à l'instant initial. L'invariance relativiste exigeant de l'équation qu'elle soit aussi du premier ordre par rapport aux coordonnées spatiales, Dirac souhaite ainsi linéariser l'équation de Klein-Gordon en utilisant l'équation de Schrödinger contenant la dérivée de la fonction d'onde au premier ordre.

1.4.1 Construction de l'équation de Dirac

Pour la construire, nous suivrons l'approche historique, qui est la plus simple. On cherche une équation analogue à l'équation de Schrödinger (1.14). L'application du principe de correspondance (1.16) conduit à l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.44)$$

où le symbole H désigne un opérateur linéaire, et auto adjoint.

L'équation (1.44) doit être formellement covariante relativiste. Or cette dernière équation ne peut être covariante relativiste que si l'opérateur H est constitué de dérivée par-

tielles du premier ordre. En particulier, si l'on maintient l'idée d'une équation d'ordre 1 en temps, les coordonnées doivent également figurer par des dérivées du premier ordre.

Ceci posé, considérons d'abord le cas d'une particule de Dirac (électron libre) en l'absence de champ. L'hamiltonien doit alors être invariant par translation, donc indépendant de \vec{r} .

Tenant compte de toutes les hypothèses précédentes, ainsi, la forme la plus générale admissible de l'opérateur H s'écrit :

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (1.45)$$

Dans cette expression $\vec{\alpha}$ et β sont des opérateurs, représentés par des matrices complexes $n \times n$, indépendants de \vec{r} et de \vec{p} , qui doivent décrire de nouveaux degrés de liberté de la particule.

Pour garantir le caractère auto-adjoint de l'opérateur H , il faut que ces matrices soient hermitiques,

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^\dagger, \quad \beta = \beta^\dagger. \quad (1.46)$$

La condition de masse traduite en mécanique classique par la relation bien connue $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, soit également satisfaite dans la théorie quantique. Plus précisément, le principe de correspondance exigeant que l'opérateur H de l'électron libre, doit satisfaire la condition

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (1.47)$$

Or

$$H^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 = \frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\} p^i p^j + m \{\alpha_i, \beta\} p^i + m^2 \beta^2 \quad (1.48)$$

où le symbole $\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i$ désigne l'anticommutateur.

Il est clair que la condition de masse (1.47) est satisfaite si, et seulement si, les matrices α_i ($i = 1, 2, 3$) et β satisfont les règles d'anticommutation suivantes :

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \mathbb{I}_n, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{I}_n. \quad (1.49)$$

Si l'on admet maintenant que le hamiltonien H est auto-adjoint (hermétique), les matrices α_i et β doivent l'être aussi. En tenant compte de toutes ces contraintes, on peut s'assurer que les valeurs propres de α_i et β doivent être ± 1 (dernière contrainte) et que la trace de celles-ci doit être nulle (deuxième contrainte).

$$\text{Tr}(\alpha_i \beta) = \text{Tr}(\beta \alpha_i) = -\text{Tr}(\beta \alpha_i) = 0. \quad (1.50)$$

Puisque la trace est simplement la somme des valeurs propres (± 1), le nombre de valeurs propres négatives doit correspondre avec celui des valeurs propres positives, par conséquent, la dimension des matrices doit être un nombre pair. La plus petite dimension qui permet de satisfaire simultanément toutes ces contraintes est $n = 4$. Les matrices qui satisfont toutes ces contraintes sont définies par [3, 5, 21, 22] :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

Dans ces matrices, écrites en termes de blocs 2×2 , le symbole σ_i ($i = 1, 2, 3$), désigne les trois matrices de Pauli et \mathbb{I}_2 représente la matrice unité 2×2 ,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire explicitement l'équation (1.44) qui résulte des conditions énoncées précédemment. Cette équation s'écrit :

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - m\beta \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.53)$$

Si l'on adopte les matrices (1.51), la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ est un spineur ayant donc 4 degrés de liberté (fonction d'onde à 4 composantes). On peut évidemment trouver d'autres jeux de matrices, mais tous conduisent au même résultat. Il est impossible néanmoins de trouver des matrices d'ordre inférieur à 4.

L'équation (1.53) est l'équation de Dirac telle qu'elle fut originellement proposée par Dirac lui-même. C'est sous cette forme qu'elle se prête le plus facilement à l'interprétation physique et à l'étude du passage à la limite non relativiste.

Cette équation a connu un grand succès. Le spin de l'électron, en fut déduit, et sa description se ramène à celle donnée par Pauli dans la limite des faibles vitesses. La présence d'états d'énergie négative non bornée inférieurement fut résolue par Dirac qui associera les énergies négatives aux antiparticules. Il appuya le fait que les électrons d'énergie positive étaient stables d'après le principe d'exclusion de Pauli, les niveaux d'énergie négative étant occupés par les antiparticules. Par l'absorption d'un photon, un positron d'énergie négative peut alors avoir une énergie positive laissant un trou dans la bande d'énergie négative. Ce processus correspond à la création de paires d'électron-positron [19, 20, 23]. De cette façon, l'équation de Dirac ne peut décrire de façon cohérente une seule particule relativiste. Comme les masses en relativité ont une forme d'énergie, les particules peuvent être créées et détruites.

C'est ainsi que la relativité a trouvée sa place en mécanique quantique par la solution de Dirac à l'équation de Schrödinger pour des particules de hautes énergies. L'importance de cette équation aura plusieurs effets sur l'explication de résultats expérimentaux et constituera le cœur de l'électrodynamique quantique en décrivant les interactions de la lumière avec la matière.

1.4.2 Forme covariante de l'équation de Dirac

L'équation de Dirac libre établie précédemment résulte de conditions qui sont nécessaires à la covariance relativiste, mais qui ne la garantissent pas forcément. En fait, la covariance relativiste de l'équation de Dirac est subordonnée à un choix approprié de la matrice qui figure dans la loi de transformation lors d'un changement de référentiel déterminé par une transformation de Lorentz. Or l'équation de Dirac, écrite sous la forme (1.53) se prête mal à une discussion de la covariance relativiste car les variables d'espaces \vec{r} et de temps t y jouent des rôles formelles trop dissymétriques [6, 24].

C'est la raison pour laquelle nous commençons par effectuer une transformation de l'équation de Dirac dans la forme dite <<manifestation covariante>>. Dans ce but, multiplions les deux membres de l'équation (1.53) à gauche par β , et en tenant compte de l'équation (1.49), il vient

$$\left\{ i\beta \frac{\partial}{\partial t} + i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - m\mathbb{I}_4 \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.54)$$

A cet effet, nous passons maintenant à une notation plus compacte, la notation covariante. Pour ceci nous introduisons les matrices

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad \text{avec} \quad \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad (1.55)$$

et nous utilisons les notations quadrivectorielles

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ et } \partial^\mu = (\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2)$$

la relation (1.54), peut être écrite sous la forme

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{I}_4\} \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.56)$$

Les propriétés de γ^μ s'obtiennent aisément à partir de celles de $\vec{\alpha}$ et β (hermiticité, anticommutation, de carré \mathbb{I}_4). En substituant (1.55) dans (1.49), nous dérivons leurs relations d'anticommutation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (1.57)$$

où $g^{\mu\nu}$ désigne les composante contravariantes du tenseur métrique dans l'espace de Minkowski, défini par :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

1.4.3 Forme covariante de l'équation de Dirac avec champ électromagnétique extérieur

Nous avons développé jusque là une théorie libre, c'est à dire ne faisant intervenir aucune interaction. On aimerait maintenant généraliser l'équation de Dirac pour rendre compte d'une éventuelle interaction électromagnétique. Pour ce faire, procédons de la même manière que pour le cas de Klein Gordon. Autrement dit, pour dériver l'opérateur hamiltonien de Dirac relatif à une particule en présence d'un champ électromagnétique extérieur caractérisé par son potentiel $A_\mu = (A_0, \vec{A})$, remplaçons dans l'hamiltonien en absence de champ de l'équation (1.45), l'opérateur $H \rightarrow H - eA_0$ et l'impulsion $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$. En conséquence, l'hamiltonien correspondant à cette substitution se déduit de l'équation (1.45) par cette même substitution :

$$(H - eA_0) = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m. \quad (1.59)$$

Dans ces conditions, l'opération de correspondance (1.13) appliqué à (1.59) donne

$$i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0, \quad i\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{\nabla} - e\vec{A}. \quad (1.60)$$

Ensuite, compte tenu de cette règle de correspondance, l'équation de Dirac non cova-

riante couplée à un champ électromagnétique externe, s'écrit :

$$\left\{ \left(i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right) + \vec{\alpha} \cdot \left(i \vec{\nabla} - e \vec{A} \right) - m\beta \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.61)$$

L'équation (1.61) régit l'évolution d'une particule de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur dans la mesure où l'effet du rayonnement peut être négligé [3, 5, 6].

L'équation de Dirac écrite sous la forme (1.61) se prête mal à discussion de la covariance relativiste. C'est la raison pour laquelle nous commençons par effectuer une transcription de l'équation de Dirac dans la forme dite covariante. Dans ce but, multiplions les deux membre de l'équation (1.61) à gauche par β . Compte tenu de (1.49), il vient :

$$\left\{ \beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right) + \beta \left[\vec{\alpha} \cdot \left(i \vec{\nabla} - e \vec{A} \right) \right] - m\mathbb{I}_4 \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.62)$$

Utilisons maintenant les notations quadri-vectorielles et la relation (1.55), l'équation covariante en présence d'un champ électromagnétique A_μ qui remplace l'expression (1.56), s'exprime comme pour l'équation de Klein Gordon, par la substitution de la dérivation ordinaire ∂_μ par la dérivation covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Par conséquent, nous obtenons une équation de Dirac sous la forme

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.63)$$

Cette équation d'onde apparaît suffisante pour rendre compte du phénomène de doublement. Les matrices γ^μ contenant quatre lignes et quatre colonnes, elle aura quatre fois autant de solutions que l'équation d'onde non-relativiste, et deux fois autant que l'antérieure équation d'onde relativiste (1.41). Étant donné que la moitié des solutions doivent être rejetées puisqu'elles assignent une charge $+e$ à l'électron, on en aura encore un nombre correct pour rendre compte du phénomène de doublement.

Toutefois, il peut être plus commode dans les applications d'utiliser d'autres repré-

sentations de l'équation d'onde. Nous voulons également dériver une équation d'onde du deuxième ordre pour le champ de Dirac. Pour ceci, nous partons de la forme covariante (1.63) et nous écrivons que l'action de l'opérateur $(-i\gamma^\mu D_\nu - m)$ sur le premier membre donne zéro :

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + m^2) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.64)$$

Afin de discuter son interprétation physique, il nous faut encore simplifier le terme $\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu$. Pour cela, nous utilisons les propriétés des matrices de Dirac et remplaçons le produit $\gamma^\mu \gamma^\nu$ par

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}, \quad (1.65)$$

où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ est le quadritenseur matriciel antisymétrique, il représente le spin de la particule et le symbole $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu$ désigne le commutateur. Cependant, par un simple changement de la dénomination des indices muets, et en tenant compte de la définition de l'opérateur D_μ , on peut écrire

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\nu D_\mu = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu, D_\nu] = \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (1.66)$$

ici, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur électromagnétique. Enfin, insérons (1.65) et (1.66) dans (1.64), on obtient

$$\left\{ (D^\mu D_\mu + m^2) \mathbb{I}_4 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.67)$$

Cette équation est manifestement covariante. Comme souhaité, c'est une équation différentielle du deuxième ordre par rapport au temps, dite équation de Dirac quadratique. Elle diffère de celle obtenue à partir de l'équation de Klein-Gordon par le couplage minimal. Dans la représentation de Dirac où $\sigma^{0j} = i\alpha^j$ et $\sigma^{ij} = \varepsilon^{ijk} \sigma^k$, le terme supplémentaire $\frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = e \left(i\vec{\alpha} \cdot \vec{E} + \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right)$ décrit un couplage du champ à un moment

dipolaire électrique et à un moment magnétique portés par la particule [3, 5]. Ce terme n'a pas d'analogie classique et sa contribution est négligeable lorsqu'on se trouve dans les conditions de validité de l'approximation classique. Le mouvement d'un paquet d'onde de Dirac est alors le même que celui d'un paquet d'onde de Klein-Gordon.

Enfin, nous pouvons faire un raisonnement semblable à celui de l'équation de Klein Gordon, nous allons définir une densité de courant et démontrer que le courant défini avec les solutions de l'équation de Dirac obéit à une équation de continuité.

Pour calculer le courant J^μ , les mêmes manipulations peuvent être faites en partant de la forme covariante de l'équation de Dirac (1.63), l'hermétique conjuguée de cette équation est

$$(-i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\Psi^\dagger = 0 \quad \text{avec} \quad \Psi^\dagger = (\Psi^*)^T. \quad (1.68)$$

Ensuite, en multipliant à droite par γ^0 , et en utilisant $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ et $\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$, ainsi que la définition $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$, nous obtenons l'équation de Dirac adjointe

$$(-i\partial_\mu - eA_\mu)\bar{\Psi}\gamma^\mu - m\bar{\Psi} = 0 \quad (1.69)$$

Multiplions (1.63) à gauche par $\bar{\Psi}$ et (1.69) à droite par Ψ et soustrayant, nous obtenons

$$i(\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi) = 0, \quad (1.70)$$

permet de définir un courant J^μ ,

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \left(\rho, \vec{J}\right). \quad (1.71)$$

Physiquement, le vecteur J^μ joue un rôle important. D'abord, en vertu des équations de Dirac satisfaites par Ψ et $\bar{\Psi}$, il est conservé. En outre, sa composante temporelle $J^0 = \Psi^\dagger\Psi$ est définie positive, et il paraît donc qualifié pour le rôle de courant de

probabilité, dans l'interprétation de Ψ comme une fonction d'onde.

Dans la théorie de Dirac, au contraire, nous parviendrons à définir une densité ρ positive; ce qui n'était pas le cas pour l'équation de Klein-Gordon. Cependant, nous verrons que la difficulté des énergies négatives, l'interprétation proposée par Dirac est schématiquement la suivante et entérine l'idée suivant laquelle, dans toute théorie relativiste, le nombre de particule ne saurait être fixé à cause de la possibilité de création et d'annihilation de particules [17, 18].

Chapitre 2

Formalisme de la matrice de diffusion pour Klein Gordon spin- s ($s=0,1/2$)

2.1 Introduction

Les processus de diffusion jouent un rôle clé pour l'étude des propriétés de la matière. L'expérience de Rutherford, qui démontra l'existence du noyau, était basée sur la diffusion de particules α par des atomes d'or. La spectroscopie laser moderne, qui fournit des informations sur la structure des atomes et des molécules, peut être vue comme un processus de diffusion de photons. La conductivité électrique des métaux ne peut être comprise de manière quantitative que si on prend en compte la diffusion des électrons de conduction par les défauts du réseau cristallin. Enfin, et ce n'est pas le moindre de ces exemples, la physique des particules est entièrement fondée sur l'analyse de processus de collision. Les très hautes énergies atteintes dans les accélérateurs modernes (de 100GeV à quelques TeV dans le centre de masse) permettent de sonder la matière sur une échelle de distance extrêmement courte ($\leq 10^{-18}\text{m}$) [25, 26, 27].

Dans la théorie classique de la diffusion, l'état de la particule incidente (qui est libre)

est entièrement déterminé par son impulsion. Il en est de même pour la particule sortante. Au niveau quantique, il n'est alors pas possible en général de prévoir avec certitude quel état final va résulter d'une collision donnée; on cherche donc seulement à prédire les probabilités pour un certain état final. Le problème consiste donc à établir la relation entre l'état initial Ψ^{in} et l'état final Ψ^{out} . En mécanique quantique l'objet mathématique correspondant est l'opérateur \hat{S} (ou la matrice de diffusion \hat{S}). Si nous connaissons cet opérateur, nous pouvons déterminer l'état final Ψ^{out} à partir de tout états initial Ψ^{in} . Cela signifie que la matrice \hat{S} contient toute l'information quant au processus de diffusion. On peut écrire donc $\Psi^{out} = \hat{S}\Psi^{in}$ [28, 29].

Ce chapitre est consacré à l'analyse théorique des expériences de diffusion. Nous y introduisons le concept de section efficace, qui joue un rôle central dans la description d'une collision, aussi bien du point de vue classique que quantique. En mécanique quantique, la description mathématique de cet observable se fait au moyen d'une matrice appelée matrice de diffusion \hat{S} , qui correspond à l'opérateur d'évolution en représentation de Dirac.

2.2 Une expérience de diffusion

Si, dans une expérience physique, un faisceau de particules (projectiles) d'énergie E arrive de l'infini sur une cible fixe (le centre diffuseur). L'intensité de ce faisceau est caractérisé par le flux F , c'est-à-dire par le nombre de particules qui traversent, par unité de temps, une surface d'aire unité, perpendiculaire à la direction du faisceau. Après traversée de la cible, le nombre dn de particules déviées sont recueillies dans un détecteur dont la position est définie par sa direction $(\theta, \phi) = \Omega$.

L'un des enjeux de la théorie des collisions et l'obtention de la section efficace différentielle de diffusion $d\sigma/d\Omega$. C'est la principale grandeur mesurable dans une telle expérience et elle est homogène à une surface. Cette quantité est définie comme suit [13, 14],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dn}{d\Omega} \quad (2.1)$$

La section efficace totale de collision s'obtient par intégration sur les angles :

$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (2.2)$$

2.2.1 Description classique de la diffusion

En mécanique classique [13, 14], où vaut la notion de trajectoire, le principe de calcul de la section différentielle de choc apparaît plus directement qu'en mécanique quantique. Considérons en effet un pinceau de trajectoires incidentes asymptotiquement parallèles à grande distance du diffuseur, hors de la zone d'interaction, les trajectoires étaient quasi rectilignes, s'il n'y avait pas de force d'interaction, la distance de plus courte approche aurait été précisément b (b est ce qu'on appelle le paramètre d'impact). Après collision, celles-ci formeront asymptotiquement une gerbe d'ouverture $d\theta$, et sont déviées, par l'interaction, d'un angle θ , (angle de diffusion), dépendant du paramètre d'impact. Dès lors, en suivant les trajectoires, on voit que les particules enregistrées dans le compteur d'ouverture $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ ont été découpées dans le faisceau initial par le secteur d'ouverture angulaire $(\phi, \phi + d\phi)$ de la couronne circulaire d'épaisseur $(b, b + db)$. L'aire de ce secteur étant $ds = b db d\phi$, il voit passer un nombre de particules par unité de temps

$$dn = b db d\phi F. \quad (2.3)$$

Insérons (2.3) dans la définition (2.1), on obtient la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (2.4)$$

Les valeurs absolues ont été introduites dans (2.4) car le nombre de particules doit toujours être positif alors que b et θ varient souvent dans des directions opposées. De plus b , est une fonction de l'angle de diffusion et de l'énergie.

L'angle θ est lié à b par une relation que l'on peut obtenir en intégrant les équations de mouvement ou, plus simplement, en appliquant seulement les principes de conservation de l'énergie et du moment cinétique \vec{L} (théorème des aires) [13, 14].

Il suffit donc de connaître la relation $b(\theta)$, c'est-à-dire la géométrie des trajectoires, pour calculer, en mécanique classique, une section efficace de collision.

2.2.2 Description quantique de la diffusion

Dans une description quantique et selon le principe d'incertitude de Heisenberg, la notion de trajectoire, et celle de paramètre d'impact, perd son sens. C'est pourquoi même du point de vue expérimental on doit introduire la notion de section efficace qui représente une moyenne effectuée sur ce paramètre d'impact. Pour calculer cette moyenne, on a admis implicitement que les particules incidentes étaient réparties au hasard dans la section droite du faisceau incident ; cette hypothèse est en revanche explicitée dans le calcul quantique qui nous conduit à considérer les particules incidentes comme formant un paquet d'onde plane envoyé sur une cible. Ce paquet d'onde est supposé dans un temps antérieur très loin comme étant libre, c'est à dire qui n'interagit pas avec la cible. L'impulsion de ce faisceau est supposée être bien déterminée. Ce faisceau entre en interaction avec la cible décrite au moyen d'un potentiel diffuseur $V(\vec{r}, t)$ de portée finie est non nul. L'évolution de ce faisceau au cours du temps est décrite par une fonction $\Psi(\vec{r}, t)$, vérifiant l'équation de Schrödinger (en posant $\hbar = 1$) [15, 30, 31]

$$i \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H \Psi(\vec{r}, t), \quad H = H_0 + V(\vec{r}, t), \quad (2.5)$$

où $H_0 = k^2/2m = E$ dénote l'hamiltonien du système non-perturbé, tandis que $V(\vec{r}, t)$ représente une perturbation.

Nous traitons le problème de façon simple et intuitive, pour décrire quantitativement le processus de diffusion par un potentiel, nous allons focaliser notre attention sur les états stationnaires du problème. Dans ces conditions, l'équation (2.5) décrivant l'évolution de

la particule admet des solutions d'énergie E bien définie i. e., des états stationnaires $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_k(\vec{r}) e^{-iEt}$.

Loin de la zone d'action du potentiel ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$), la particule incidente est considérée libre, elle peut donc être représentée par une onde plane $e^{i\vec{k}\vec{r}}$. La présence du potentiel scinde l'onde incidente en une onde transmise et une onde diffusée (qui dépend du potentiel). Par conséquent, la fonction d'onde $\Psi_k(\vec{r})$ représentant l'état stationnaire de diffusion associée à une énergie E doit être une superposition d'une onde plane et d'une onde diffusée. La forme asymptotique après la collision (i.e., à grande distance du potentiel localisé) est simple [15, 30, 31],

$$\Psi_k(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} e^{i\vec{k}\vec{r}} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.6)$$

Dans cette expression, seule la fonction $f_k(\theta, \phi)$ que l'on appelle l'amplitude de diffusion, dépend du potentiel.

Pour obtenir la section efficace différentielle de diffusion, nous suivrons le même chemin que dans le paragraphe précédent. Pour calculer le nombre dn de particules, diffusées par unité de temps, considérons la densité de courant de probabilité associée à l'équation de Schrödinger (2.5)

$$\vec{j} = \frac{1}{2mi} \left\{ \Psi_k^* \left(\vec{\nabla} \Psi_k \right) - \left(\vec{\nabla} \Psi_k^* \right) \Psi_k \right\}. \quad (2.7)$$

Le terme d'onde plane $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ représente un faisceau monocinétique des particules incidentes de densité de probabilité égale à l'unité, d'impulsion \vec{k} et de densité de courant $\vec{j}_{in} = \vec{k}/m$.

Le terme $f_k(\theta, \phi) e^{ikr}/r$ représente le faisceau de particules diffusées. Pour calculer le courant de probabilité de l'onde diffusée, il est commode d'utiliser les coordonnées sphériques. A grande distance la contribution du gradient sur $f_k(\theta, \phi)/r$ est proportionnelle à $1/r^3$, qui est négligeable pour r grand. Donc, seulement l'exponentiel contribue au flux. Le courant diffusé est radial :

$$\left(\vec{j}_d\right)_r = \frac{k}{mr^2} |f_k(\theta, \phi)|^2 \vec{u}_r, \quad (2.8)$$

où \vec{u}_r est un vecteur d'unité. Le nombre dn de particules, diffusées par unité de temps, dans un élément de surface $d\vec{s}$, vu de l'origine sous un angle $d\Omega$, est

$$dn = N \vec{j}_d \cdot d\vec{s} = nr^2 \left(\vec{j}_d\right)_r d\Omega = nr^2 \frac{\vec{k}}{m} \frac{|f_k(\theta, \phi)|^2}{r^2} d\Omega. \quad (2.9)$$

Le flux du faisceau représenté par la fonction $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ étant : $n \vec{j}_{in} = (n/m) \vec{k}$. On en déduit la section efficace différentielle,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dn}{d\Omega} = |f_k(\theta, \phi)|^2. \quad (2.10)$$

La section efficace différentielle est donc simplement donnée par le carré du module de l'amplitude de diffusion.

On voit que cette expression est tout à analogue à la définition empirique de la section efficace de diffusion d'une onde classique (2.1).

2.3 Formalisme de Klein-Gordon spin-s

Rappelons que les équations d'ondes relativiste qui généralisent l'équation de Schrödinger sont l'équation de Klein-Gordon (1.40), qui permet entre autre de décrire la dynamique de particules relativistes ayant un spin-0 [28, 32], avec ou sans masse (en posant $\hbar = c = 1$),

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2 \right\} \Psi_0(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.11)$$

et l'équation de Dirac (1.63), qui sert à décrire les particules massives de spin-1/2 [32, 33, 34], et qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli, les fermions

$$(\not{p} - e\cancel{A} - m) \Psi_{1/2}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.12)$$

où $\vec{r} = (x, y, z)$, $A_0(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}(\vec{r}, t)$ sont les composantes du potentiel quadrivector A_μ . $\not{p} - e\cancel{A} = \gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)$ et, γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sont les matrices gamma de Dirac.

Toutefois, il peut être plus commode dans les applications d'utiliser d'autres représentations de l'équation d'onde. Nous voulons également dériver une équation d'onde du deuxième ordre, qui permet d'unifier l'équation de Klein-Gordon de spin-0 et l'équation de Dirac quadratique (ou Klein-Gordon spin-1/2). En effet, pour contourner la difficulté, nous adoptons pour toute matrice A la notation suivante :

$$(A)^{2s} = \begin{cases} 1 & \text{for } s = 0 \\ A & \text{for } s = 1/2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Et en introduisant ensuite le changement

$$\Psi_s(\vec{r}, t) = (\not{p} - e\cancel{A} + m)^{2s} \Phi_s(\vec{r}, t), \quad s = 0, \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Dans ce cas, les équations (2.11) et (2.12) peuvent être exprimées par une seule relation, appelée équation de Klein Gordon de spin-s ($s=0,1/2$) [28]

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} + se(\sigma F)^{2s} \right\} \Phi_s(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.15)$$

Ici, $\Phi_s(\vec{r}, t)$ est une fonction d'onde à $2^{2s}(2s+1)$ composantes, et \mathbb{I}_d est la matrice unité de dimension d . Nous avons en outre noté par $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, par $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ le tenseur électromagnétique et $\sigma F = \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ le terme de couplage entre le spin de la particule et le champ électromagnétique.

Pour $s = 0$, l'équation (2.15) se réduit à l'équation de Klein-Gordon (KG-0), et pour $s = 1/2$ nous obtenons la forme quadratique de l'équation de Dirac (ou KG-1/2).

Venons-en maintenant à l'expression de l'équation de continuité pour l'équation de

Klein Gordon spin-s. Pour cela, reprenons la forme générale de l'équation (2.15), qui peut s'écrire :

$$\left\{ \left[\left(\overrightarrow{\partial}^\mu + ieA^\mu \right) \left(\overrightarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu \right) + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} + se(\sigma F)^{2s} \right\} \Phi_s(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.16)$$

où $\overrightarrow{\partial}^\mu$ est la dérivée à droite. Ainsi, que celle qui s'en déduit en prenant la transposée conjuguée, et nous multiplions le résultat obtenu en arrière par $(\gamma^0)^{2s}$, et en utilisant le fait que

$$\left((\sigma^{\mu\nu})^{2s} \right)^\dagger = (\sigma^{\mu\nu})^{2s}, \quad (\gamma^0)^{2s} (\sigma^{\mu\nu})^{2s} = (\sigma^{\mu\nu})^{2s} (\gamma^0)^{2s}, \quad (2.17)$$

nous obtenons alors

$$\overline{\Phi}_s(\vec{r}, t) \left\{ \left[\left(\overleftarrow{\partial}^\mu - ieA^\mu \right) \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - ieA_\mu \right) + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} + se(\sigma F)^{2s} \right\} = 0 \quad (2.18)$$

où $\overline{\Phi}_s = \Phi_s^\dagger (\gamma^0)^{2s}$. Multiplions (2.15) à gauche par $\overline{\Phi}_s$ et (2.18) à droite par Φ_s , puis retranchant entre elles les équations ainsi obtenues, il vient :

$$\frac{\partial J_s^0}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{J}_s = 0, \quad (2.19)$$

la densité J_s^0 et le courant \overrightarrow{J}_s sont donnés par :

$$J_s^0 = \frac{1}{2im} \left[\overline{\Phi}_s \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_s}{\partial t} \right) \Phi_s \right] + \frac{e}{m} A^0 \overline{\Phi}_s \Phi_s, \quad (2.20)$$

$$\overrightarrow{J}_s = \frac{1}{2im} \left[\overline{\Phi}_s \left(\overrightarrow{\nabla} \Phi_s \right) - \left(\overrightarrow{\nabla} \overline{\Phi}_s \right) \Phi_s \right] + \frac{e}{m} \overrightarrow{A} \overline{\Phi}_s \Phi_s, \quad (2.21)$$

le terme $1/(2im)$ est introduit par commodité.

De même, il convient de noter que le produit scalaire invariant de Lorentz est défini

comme suit [19, 35, 36],

$$\langle \Phi_s | \Phi_s \rangle = \int \left\{ \bar{\Phi}_s \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + eA^0 \right) \Phi_s \right] - \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right) \bar{\Phi}_s \right] \Phi_s \right\} d^3r. \quad (2.22)$$

2.3.1 Équation de Klein Gordon spin- s dans la représentation de Weyl

Il y a, toutefois, des cas où une représentation des matrices γ^μ de Dirac est plus commode qu'une autre. Choisissons pour les matrices γ^μ de Dirac, la représentation de Weyl (aussi appelée la représentation chirale). Dans cette représentation les matrices γ^μ ont la forme suivante [5, 21] :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les matrices de Pauli habituelles. Grâce à ce choix de la représentation, les matrices $\sigma^{\mu\nu}$ sont diagonales par blocs, nous trouvons pour (i, j, k) cyclique

$$\sigma^{0k} = i \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

où ε_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita. Si l'on introduit maintenant un spineur $\Phi_s(\vec{r}, t)$ à $2^{2s}(2s+1)$ composantes, défini comme suit :

$$\Phi_s(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Phi_s^-(\vec{r}, t) \\ \Phi_s^+(\vec{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

où $\Phi_s^-(\vec{r}, t)$ et $\Phi_s^+(\vec{r}, t)$ sont des spineurs à 2^{2s} composantes. Ensuite, insérons l'expression précédente dans l'équation (2.15), développée de manière explicite dans la représentation de Weyl, il vient :

Pour le spin-1/2, l'équation de Klein Gordon se transforme en un système de deux

équations différentielles couplées du second ordre,

$$\begin{pmatrix} H_{1/2}^- & 0 \\ 0 & H_{1/2}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{1/2}^-(\vec{r}, t) \\ \Phi_{1/2}^+(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.26)$$

$\Phi_{1/2}^-(\vec{r}, t)$ et $\Phi_{1/2}^+(\vec{r}, t)$ sont des spineurs à 2 composantes, et

$$H_{1/2}^\mp = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2 \right] I_2 \pm ie\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{E} \pm i\vec{B} \right), \quad (2.27)$$

ici, \vec{E} et \vec{B} sont les champs électriques et magnétiques.

Pour le spin-0, l'équation de Klein Gordon se transforme en un système de deux équations couplées du second ordre,

$$\begin{pmatrix} H_0^- & 0 \\ 0 & H_0^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0^-(\vec{r}, t) \\ \Phi_0^+(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

où $\Phi_0^-(\vec{r}, t)$ and $\Phi_0^+(\vec{r}, t)$ sont des fonctions d'onde à une composante, et

$$H_0^- = H_0^+ = H_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2. \quad (2.29)$$

Remarquons qu'il y a redondance car $H_0^- = H_0^+$ et par conséquent les équations du système (2.28) sont identiques.

Là encore, les systèmes d'équations différentielles (2.26) et (2.28) peuvent également être rassemblés dans une écriture unifiée comme

$$\begin{pmatrix} H_s^- & 0 \\ 0 & H_s^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(\vec{r}, t) \\ \Phi_s^+(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.30)$$

et

$$H_s^\mp = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2 \right] I_{2^{2s}} \pm 2ise (\vec{\sigma})^{2s} \left(\vec{E} \pm i\vec{B} \right). \quad (2.31)$$

Après avoir donné les éléments constituant le formalisme de Klein Gordon pour les particules de spin- s , passons maintenant à la construction du formalisme de la matrice de diffusion unidimensionnelle d'une particule de Klein Gordon spin- s dans un champ électromagnétique localisé.

2.4 Formalisme de la matrice de diffusion pour Klein-Gordon spin- s à une dimension

L'étude des problèmes de diffusion à une dimension a lui aussi son importance. En effet, si en physique les cas réalistes sont en général à trois dimensions, le cas à une dimension s'insère dans le cadre de modèle ou d'approximation représentant cette réalité. Dans ce qui suit, nous allons adapter le formalisme de la matrice de diffusion au cas à une dimension. Cette matrice trouve son interprétation physique en la reliant aux coefficients de réflexion et de transmission.

Venons-en maintenant à la construction de la matrice de diffusion d'une particule relativiste de masse m , d'énergie E , de charge e et de spin- s ($s = 0, 1/2$) par un champ électromagnétique $A_\mu(x, t)$ localisé ($A_\mu(x, t) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$). Dans ce cas, l'équation d'évolution (2.15), s'écrit [28]

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} + se(\sigma F)^{2s} \right\} \Phi_s(x, t) = 0, \quad (2.32)$$

où $A_0 = A_0(x, t)$, $\vec{A} = \vec{A}(x, t)$ et $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_x = (d/dx) \vec{i}$.

A grande distance ($|x| \rightarrow \infty$), dans les régions asymptotiques, l'hamiltonien H_s^\mp peut

être approximé par l'hamiltonien d'une particule libre $H_s^{\mp,0} = P^2/2m$. Par conséquent, parmi toutes les formes possibles des états qui satisfont l'équation (2.32), nous choisirons des solutions pour un ensemble continu de valeurs de l'énergie E . Dans ce cas, l'équation qui régit l'évolution de la particule de Klein Gordon spin- s possède une classe de solutions particulières, appelées états stationnaires, où les variables de temps et d'espace sont séparées. Plus précisément, la fonction d'onde (2.25), s'écrit

$$\Phi_s(x, t) = e^{-iEt} \Phi_s(x) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(x) \\ \Phi_s^+(x) \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Loin de la zone d'action du centre diffuseur, le champ $A_\mu(x, t)$ doit être compris comme une perturbation de $H_s^{\mp,0}$ dont les effets sont négligeables dans les régions asymptotiques de l'espace. Dans ces conditions, la particule est considérée libre; elle peut donc être représentée par une onde plane. La forme asymptotique a grande distance ($|x| \rightarrow +\infty$) de la fonction d'onde décrivant la propagation de la particule vers la droite ou la gauche respectivement, doit être une superposition d'ondes planes $e^{\pm ikx}$, avec $k = \sqrt{E^2 - m^2} > 0$. Comme elles sont linéairement indépendantes pour toutes les valeurs de x , la solution générale $\Phi_s(x)$ de l'équation différentielle (2.32) est une combinaison linéaire d'exponentielles. Plus précisément, la forme asymptotique à gauche de la fonction d'onde $\Phi_{s,L}^{\mp}(x)$ (arrivée de $-\infty$) et $\Phi_{s,R}^{\mp}(x)$ (arrivée de $+\infty$) se comportent comme suit [28, 29, 37],

$$\begin{aligned} \Phi_{s,L}^{\mp}(x) &= \begin{cases} 1_s^{\mp} e^{ikx} + R_{s,L}^{\mp} e^{-ikx} & x \longrightarrow -\infty \\ T_{s,L}^{\mp} e^{ikx} & x \longrightarrow +\infty \end{cases} \\ \Phi_{s,R}^{\mp}(x) &= \begin{cases} 1_s^{\mp} e^{-ikx} + R_{s,R}^{\mp} e^{ikx} & x \longrightarrow +\infty \\ T_{s,R}^{\mp} e^{-ikx} & x \longrightarrow -\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$T_{s,L}^{\mp}$, $T_{s,R}^{\mp}$, $R_{s,L}^{\mp}$, $R_{s,R}^{\mp}$ et 1_s^{\mp} sont des vecteurs à 2^{2s} composantes, donnés par :

$$T_{s,L}^{\mp} = \begin{pmatrix} T_{1,s}^{\mp,L} \\ T_{2,s}^{\mp,L} \end{pmatrix}, \quad T_{s,R}^{\mp} = \begin{pmatrix} T_{1,s}^{\mp,R} \\ T_{2,s}^{\mp,R} \end{pmatrix}, \quad 1_s^{\mp} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{2s} \quad (2.35)$$

$$R_{s,L}^{\mp} = \begin{pmatrix} R_{1,s}^{\mp,L} \\ R_{2,s}^{\mp,L} \end{pmatrix}, \quad R_{s,R}^{\mp} = \begin{pmatrix} R_{1,s}^{\mp,R} \\ R_{2,s}^{\mp,R} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Ici, $T_{j,s}^{\mp,L}$, $T_{j,s}^{\mp,R}$, $R_{j,s}^{\mp,L}$ et $R_{j,s}^{\mp,R}$ ($j = 1, 2$) sont des coefficients qui dépendent de l'énergie E , du potentiel d'interaction et de la masse m de la particule.

Introduisons la matrice de diffusion de Klein Gordon spin- s (\hat{S}_{KG-s}) à une dimension, et examinons le problème général. La fonction d'onde stationnaire solution de l'équation (2.32) s'écrit alors [28] :

$$\Phi_s^{\mp}(x) = \begin{cases} \Phi_s^{\mp}(out, +\infty) e^{ikx} + \Phi_s^{\mp}(in, +\infty) e^{-ikx} & x \longrightarrow +\infty \\ \Phi_s^{\mp}(in, -\infty) e^{ikx} + \Phi_s^{\mp}(out, -\infty) e^{-ikx} & x \longrightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.37)$$

Dans la formule (2.37), $\Phi_s^{\mp}(in, out, \pm\infty)$ sont des vecteurs à 2^{2s} composantes. Nous pouvons voir que le vecteur $\Phi_s^{\mp}(x)$ peut être encore écrit sous la forme

$$\Phi_s^{\mp}(x) = \Phi_s^{\mp,in}(x) + \Phi_s^{\mp,out}(x) \quad (2.38)$$

où $\Phi_s^{\mp,in}(x)$ et $\Phi_s^{\mp,out}(x)$ sont respectivement les parties incidente et sortante, données par :

$$\begin{cases} \Phi_s^{\mp,in}(x) = \Phi_s^{\mp}(in, -\infty) e^{ikx\theta(-x)} + \Phi_s^{\mp}(in, +\infty) e^{-ikx\theta(x)} \\ \Phi_s^{\mp,out}(x) = \Phi_s^{\mp}(out, -\infty) e^{-ikx\theta(-x)} + \Phi_s^{\mp}(out, +\infty) e^{ikx\theta(x)}, \end{cases} \quad (2.39)$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside habituelle ($\theta(x < 0) = 0$, $\theta(x > 0) = 1$).

Nous allons maintenant relier la fonction d'onde sortante $\Phi_s^{\mp,out}(x)$ à la fonction

d'onde entrante $\Phi_s^{\mp, in}(x)$. En effet, pour un champ d'interaction à variation bornée, le rôle des conditions aux limites et de continuité est alors essentiel. Ces deux conditions ont pour conséquence que les amplitudes sortantes sont linéairement dépendantes des amplitudes entrantes. Il existe donc un opérateur de diffusion $\hat{\mathbf{S}}_{KG-s}$ telle que [28, 29, 37] :

$$\Phi_s^{out}(x) = \hat{\mathbf{S}}_{KG-s} \Phi_s^{in}(x) \quad (2.40)$$

ou encore explicitement, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^-(out, +\infty) \\ \Phi_s^+(out, +\infty) \\ \Phi_s^-(out, -\infty) \\ \Phi_s^+(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} & \hat{s}_{14} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} & \hat{s}_{24} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} \\ \hat{s}_{41} & \hat{s}_{42} & \hat{s}_{43} & \hat{s}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(in, -\infty) \\ \Phi_s^+(in, -\infty) \\ \Phi_s^-(in, +\infty) \\ \Phi_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

\hat{s}_{ij} , ($i, j = 1, 4$) sont des éléments blocs de matrices de dimension 2^{2s} . Dans le cas de spin zéro, l'équation (2.41) se réduit à

$$\begin{pmatrix} \Phi_0(out, +\infty) \\ \Phi_0(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0(in, -\infty) \\ \Phi_0(in, +\infty) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

où $\Phi_0(in, out, \pm\infty)$ et s_{ij} ($i, j = 1, 2$) sont des coefficients.

2.4.1 Calcul de la matrice de diffusion

À cause de l'existence de la symétrie, $C_s P_s T_s$, qui est le produit de trois symétries fondamentales : P_s , la parité, C_s , la conjugaison de charge et T_s , le renversement du temps [10, 22, 38], les matrices \hat{s}_{ij} ne sont pas indépendantes.

Considérons premièrement l'opération de parité P_s , c'est-à-dire l'opération qui transforme $(x, t) \rightarrow (-x, t)$. Par suite, le champ électromagnétique $A_\mu(x, t)$, le terme de couplage (σF) et la fonction d'onde $\Phi_s(x, t)$ se transforment de la façon suivante [10, 22, 37] :

$$\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = \left(A_0, -\vec{A} \right), & \Phi_s(x, t) &\rightarrow \Phi_s(-x, t), \\
(\sigma F) &\rightarrow (\sigma F)' = -\sigma^{0i} F_{0i} + \sigma^{ij} F_{ij}, & i, j &= 1 \rightarrow 3.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Si on effectue le changement $x \rightarrow -x$, et si on tient compte de (2.43), l'équation (2.32) prend la forme

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} + se ((\sigma F)')^{2s} \right\} \Phi_s(-x, t) = 0. \tag{2.44}$$

En appliquant P_s à (2.44) et avec $P_s^{-1}P_s = \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)}$, on peut alors écrire

$$P_s \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} + se ((\sigma F)')^{2s} \right\} P_s^{-1} \Phi_s^{P_s}(x, t) = 0, \tag{2.45}$$

On voit que si $\Phi_s(x, t)$ est une solution de l'équation (2.32), $\Phi_s^{P_s}(x, t)$ telle que

$$\Phi_s^{P_s}(x, t) = P_s \Phi_s(-x, t), \tag{2.46}$$

en est une autre. Comparant (2.32) et (2.45), elles coïncident si l'opérateur P_s satisfait aux conditions

$$P_s (\sigma^{0l})_s^{2s} P_s^{-1} = (-\sigma^{0l})^{2s}, \quad P_s (\sigma^{ij})_s^{2s} P_s^{-1} = (\sigma^{ij})^{2s}. \tag{2.47}$$

C'est la propriété que possède l'opérateur $P_s = \eta_{p_s} (\gamma^0)^{2s}$ (où η_{p_s} est un nombre complexe arbitraire). Nous prendrons par la suite $\eta_p = i$.

Avec ce choix de phase, en utilisant les relations (2.37) et (2.46), on peut s'assurer aisément que $\Phi_s^{\mp, P_s}(x)$ s'obtient de $\Phi_s^\mp(x)$ par la substitution

$$\begin{aligned}
\Phi_s^\mp(out, +\infty) &\leftrightarrow i\Phi_s^\pm(out, -\infty), \\
\Phi_s^\mp(in, +\infty) &\leftrightarrow i\Phi_s^\pm(in, -\infty).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Puis en insérant cette dernière expression dans (2.41), on trouve que la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s} doit vérifier la condition

$$(\sigma_1 \otimes P_s) \left(\hat{S}_{KG-s} \right) (\sigma_1 \otimes P_s)^{-1} = \hat{S}_{KG-s}. \quad (2.49)$$

Le symbol \otimes est le produit de Kronecker des matrices. De la condition (2.49), il vient

$$\begin{aligned} \hat{s}_{11} &= \hat{s}_{44}, & \hat{s}_{22} &= \hat{s}_{33}, & \hat{s}_{13} &= \hat{s}_{42}, & \hat{s}_{31} &= \hat{s}_{24}, \\ \hat{s}_{12} &= \hat{s}_{43}, & \hat{s}_{21} &= \hat{s}_{34}, & \hat{s}_{23} &= \hat{s}_{32}, & \hat{s}_{14} &= \hat{s}_{41}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Effectuons encore l'opération de renversement du temps. Cette opération consiste à inverser le cours du temps dans un processus physique : c'est-à-dire à effectuer la transformation mathématique $(x, t) \rightarrow (x, -t)$ dans les équations qui régissent le mouvement du système étudié. Ainsi, par reversement du temps $t \rightarrow -t$, on peut facilement voir que $A_\mu(x, t)$, (σF) et $\Phi_s(x, t)$ se transforment comme [10, 22, 38] :

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = \left(A_0, -\vec{A} \right), & \Phi_s(x, t) &\rightarrow \Phi_s(x, -t), \\ (\sigma F) &\rightarrow (\sigma F)' = \sigma^{0l} F_{0l} - \sigma^{ij} F_{ij}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dans (2.32) si l'on effectue le changement $t \rightarrow -t$, en tenant compte de (2.51), et si on prend le complexe conjugué, sachant que le tenseur $F_{\mu\nu}$ est hermitique, il vient :

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \right. \\ &\left. + se \left((\sigma^{0l})^* F_{0l} - (\sigma^{ij})^* F_{ij} \right)^{2s} \right\} \Phi_s^*(x, -t) = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Pour expliciter l'action de l'opérateur renversement du temps T_s , multiplions l'équation précédente à gauche par T_s et avec $T_s^{-1}T_s = \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)}$, il vient

$$\begin{aligned} &T_s \left\{ \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \right. \\ &\left. + se \left((\sigma^{0l})^* F_{0l} - (\sigma^{ij})^* F_{ij} \right)^{2s} \right\} T_s^{-1} \Phi_s^{T_s}(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Nous voulons que la fonction $\Phi_s^{T_s}(x, t)$ telle que

$$\Phi_s^{T_s}(x, t) = T_s \Phi_s^*(x, -t), \quad (2.54)$$

vérifier la même équation que $\Phi_s(x, t)$. On trouve que l'opérateur T_s doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$T_s \left((\sigma^{0l})^* \right)^{2s} T_s^{-1} = (\sigma^{0l})^{2s}, \quad T_s \left((\sigma^{ij})^* \right)^{2s} T_s^{-1} = (-\sigma^{ij})^{2s}. \quad (2.55)$$

À un facteur de phase près $\eta_{T_s} = i$, ces conditions sont vérifiées par l'opérateur $T_s = i(\gamma^1 \gamma^3)^{2s}$.

D'autre part, avec (2.37) et (2.54), on voit qu'on peut passer de $\Phi_s^\mp(x)$ à $\Phi_s^{\mp, T_s}(x)$ et réciproquement par le changement suivant

$$\begin{aligned} \Phi_s^\mp(out, +\infty) &\leftrightarrow -(\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^\mp(in, +\infty))^*, \\ \Phi_s^\mp(out, -\infty) &\leftrightarrow -(\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^\mp(in, -\infty))^*. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sous forme matricielle, avec (2.41), si l'on tient compte de (2.56), on aboutit à l'expression

$$(S_{KG-s})(\sigma_1 \otimes T_s)(S_{KG-s}^*)(\sigma_1 \otimes T_s)^{-1} = \mathbb{I}_{2^{2s+1}(2s+1)}. \quad (2.57)$$

Passons maintenant à la troisième transformation, la transformation, qui change une particule pour son antiparticule se trouvant dans le même état d'impulsion, de position, etc... Cette opération transforme une particule en son antiparticule de masse et de spin identiques, portant la même quantité de mouvement mais en changeant le signe de tous les autres nombres quantiques additifs : charge électrique, nombre baryonique, étrangeté, nombres leptoniques [25, 26]. À cette opération est associée un opérateur C_s qui agit sur le vecteur d'état $\Phi_s(x, t)$ d'une particule en le transformant en un état $\Phi_s^{C_s}(x, t)$ qui est son conjugué de charge (antiparticule).

En effet, par conjugaison de charge $e \rightarrow -e$, le champ électromagnétique $A_\mu(x, t)$ et le terme de couplage (σF) se transforment de la façon suivante [10, 22, 38]

$$A_\mu \rightarrow (A_\mu)^{C_s} = -A_\mu, \quad (\sigma F) \rightarrow (\sigma F)^{C_s} = -\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.58)$$

Pour comprendre comment la fonction d'onde $\Phi_s(x, t)$, se transforme pendant l'opération de la conjugaison de charge, effectuons dans l'équation (2.32), la substitution $e \rightarrow -e$, ensuite, prenons l'hermitique conjugué, en tenant compte de (2.58), il vient :

$$\begin{aligned} \Phi_s^\dagger(x, t) \left\{ \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \right. \\ \left. - se \left((\sigma^{0l})^\dagger F_{0l} + (\sigma^{ij})^\dagger F_{ij} \right)^{2s} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Après multiplication des deux membres de l'équation (2.59) à droite par $(\gamma^0)^{2s}$, et si on tient compte des relations

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^{2s} (\sigma^{ij})^{2s} = (\sigma^{ij})^{2s} (\gamma^0)^{2s}, \quad (\gamma^0)^{2s} (\sigma^{0l})^{2s} = -(\sigma^{0l})^{2s} (\gamma^0)^{2s} \\ \left((\sigma^{0l})^{2s} \right)^\dagger = -(\sigma^{0l})^{2s}, \quad \left((\sigma^{ij})^{2s} \right)^\dagger = (\sigma^{ij})^{2s}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

nous obtenons

$$\bar{\Phi}_s(x, t) \left\{ \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} - se (\sigma F)^{2s} \right\} = 0. \quad (2.61)$$

Cette équation (2.61) diffère de (2.32) par le changement de signe devant $(\sigma F)^{2s}$. Pour établir la forme de l'opérateur C_s , prenons des deux membres de l'équation (2.61) le transposé, multiplions le résultat à gauche par C_s et avec $C_s^{-1}C_s = \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)}$, il vient

$$\begin{aligned} C_s \left\{ \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \right. \\ \left. - se \left((\sigma^{0l})^T F_{0l} + (\sigma^{ij})^T F_{ij} \right)^{2s} \right\} C_s^{-1} \Phi_s^{C_s}(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dans ces conditions, on voit que si $\Phi_s(x, t)$ est solution de (2.32), la fonction $\Phi_s^{C_s}(x, t)$ telle que

$$\Phi_s^{C_s}(x, t) = C_s \overline{\Phi_s^T}(x, t), \quad (2.63)$$

en est une autre. Nous définirons l'opérateur C_s conjugaison de charge par

$$C_s \left((\sigma^{0l})^T \right)^{2s} C_s^{-1} = - (\sigma^{0l})^{2s}, \quad C_s \left((\sigma^{ij})^T \right)^{2s} C_s^{-1} = - (\sigma^{ij})^{2s}. \quad (2.64)$$

Alors les conditions (2.64) sont vérifiées par l'opérateur $C_s = \eta_{C_s} (\gamma^2 \gamma^0)^{2s}$ avec la constante arbitraire $\eta_{C_s} = i$.

Ainsi l'équation de Klein Gordon spin- s est invariante dans l'opération conjugaison de charge et la fonction d'onde stationnaire relative à l'antiparticule $\Phi_s^{\mp, C_s}(x)$ se déduit de celle relative de la particule $\Phi_s^{\mp}(x)$ par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_s^{\mp}(out, +\infty) &\leftrightarrow \mp i (\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^{\pm}(in, +\infty))^*, \\ \Phi_s^{\mp}(out, -\infty) &\leftrightarrow \mp i (\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^{\pm}(in, -\infty))^*. \end{aligned} \quad (2.65)$$

En portant cette dernière expression dans (2.41), on aboutit à

$$\left(\hat{S}_{KG-s} \right) (\sigma_1 \otimes C_s) \left(\hat{S}_{KG-s}^* \right) (\sigma_1 \otimes C_s)^{-1} = \mathbb{I}_{2^{2s+1}(2s+1)}. \quad (2.66)$$

Ces relations obtenues à partir de l'invariance par rapport à la réflexion d'espace, du renversement du temps et de la conjugaison de charge et après combinaison nous donnent :

$$\hat{s}_{12} = \hat{s}_{21} = \hat{s}_{23} = \hat{s}_{32} = \hat{s}_{14} = \hat{s}_{41} = \hat{s}_{34} = \hat{s}_{43} = 0. \quad (2.67)$$

En outre, la conservation de charge de l'équation de Klein Gordon spin- s permet d'écrire :

$$\langle \Phi_s^{out} | \Phi_s^{out} \rangle = \langle \Phi_s^{in} | \Phi_s^{in} \rangle \quad (2.68)$$

En y faisant la substitution

$$\bar{\Phi}_s^{out} = (\Phi_s^{in})^\dagger \hat{S}_{KG-s}^\dagger \left(\mathbb{I}_{2^{2s}} \otimes (\gamma^0)^{2s} \right), \quad \bar{\Phi}_s^{in} = (\Phi_s^{in})^\dagger \left(\mathbb{I}_{2^{2s}} \otimes (\gamma^0)^{2s} \right), \quad (2.69)$$

dans (2.68), nous vérifions facilement que la matrice \hat{S}_{KG-s} satisfait :

$$\left(\mathbb{I}_{2^{2s}} \otimes (\gamma^0)^{2s} \right) \left(\hat{S}_{KG-s}^\dagger \right) \left(\mathbb{I}_{2^{2s}} \otimes (\gamma^0)^{2s} \right) \left(\hat{S}_{KG-s} \right) = \mathbb{I}_{2^{(2s+1)}(2s+1)}. \quad (2.70)$$

Combinons les relations déduites de l'unitarité, des invariances par rapport aux opérations réflexion de l'espace P_s , du renversement du temps T_s et de la conjugaison de charge C_s . De ces relations, nous pouvons extraire

$$\hat{s}_{11} = \hat{s}_{44} = \check{T}_s^+, \quad \hat{s}_{22} = \hat{s}_{33} = \check{T}_s^-, \quad \hat{s}_{13} = \hat{s}_{42} = \check{R}_s^+, \quad \hat{s}_{24} = \hat{s}_{31} = \check{R}_s^-. \quad (2.71)$$

La matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s} se réduit à :

$$\hat{S}_{KG-s} = \begin{pmatrix} \check{T}_s^+ & 0 & \check{R}_s^+ & 0 \\ 0 & \check{T}_s^- & 0 & \check{R}_s^- \\ \check{R}_s^- & 0 & \check{T}_s^- & 0 \\ 0 & \check{R}_s^+ & 0 & \check{T}_s^+ \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

\check{T}_s^\pm et \check{R}_s^\pm sont des blocs de matrices de dimension $2^{2s} \times 2^{2s}$. Ils représentent maintenant, les coefficients de transmissions et de réflexions (left) et (right), de l'équation de Klein Gordon spin-s. Ils sont donnés par :

$$\check{T}_s^\pm = \begin{pmatrix} t_s & \pm\omega_s \\ \pm\omega_s & t_s \end{pmatrix}, \quad \check{R}_s^\pm = \begin{pmatrix} r_s & \pm\rho_s \\ \pm\rho_s & r_s \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

où t_s , r_s, ρ_s et ω_s sont des fonctions de l'énergie E , du potentiel et de la masse m de la particule.

Nous remarquons que, pour ce spin-0, nous avons $\rho_0 = \omega_0 = 0$. La matrice \hat{S}_{KG-0} est symétrique car $\check{T}_0^+ = \check{T}_0^-$ et $\check{R}_0^+ = \check{R}_0^-$. Elle est pseudo-symétrique pour spin-1/2 car nous avons $\sigma_3 \check{T}_{1/2}^+ \sigma_3 = \check{T}_{1/2}^-$ et $\sigma_3 \check{R}_{1/2}^+ \sigma_3 = \check{R}_{1/2}^-$. Cette dernière propriété est spécifique au spin des particules.

En utilisant la condition de conservation de charge (2.70), d'après (2.72), nous trouvons facilement que ces blocs de matrices vérifient les équations suivantes :

$$(\check{T}_s^+)^{\dagger} \check{T}_s^- + (\check{R}_s^-)^{\dagger} \check{R}_s^+ = \mathbb{I}_{2^{2s}}, \quad (\check{T}_s^+)^{\dagger} \check{R}_s^- + (\check{R}_s^-)^{\dagger} \check{T}_s^+ = (\check{T}_s^-)^{\dagger} \check{R}_s^+ + (\check{R}_s^+)^{\dagger} \check{T}_s^- = 0 \quad (2.74)$$

Nous avons calculé la forme générale de la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s} d'une particule de Klein Gordon spin- s ($s = 0, 1/2$) par un champs électromagnétique localisé.

Matrice de diffusion dans la base des ondes partielles

En mécanique quantique, la nature mathématique particulière de l'opérateur moment cinétique \vec{J}_s ($\vec{J}_s = \vec{L} + \vec{S}$) a plusieurs conséquences très spéciales. D'une part, les valeurs que peuvent prendre les observables que sont ses composantes et son module, qui sont égales aux valeurs propres des opérateurs correspondant, sont quantifiées. D'autre part, ses différentes composantes ne commutent pas entre elles; on ne peut donc pas trouver de fonction d'onde ayant simultanément une valeur bien définie pour deux composantes différentes du moment cinétique total. Seuls le carré de son module \vec{J}_s^2 et sa composante $J_{s,z}$ forment, avec le hamiltonien H_s , un ensemble complet d'observables qui commutent. Les états propres correspondant à ces opérateurs forment une base de l'espace des états. On les appelle harmoniques sphériques ou ondes partielles [39, 40].

En utilisant un développement en harmoniques sphériques appelé analyse en ondes partielles, ondes paire et impaire, des états stationnaires de diffusion $\Phi_s^{\mp}(x)$, on peut montrer que la matrices de diffusion \hat{S}_{KG-s} devient diagonale.

Pour illustrer ce propos, nous appliquons une transformation unitaire sur \hat{S}_{KG-s} de

manière à obtenir une nouvelle matrice \hat{M}_{KG-s} . Cela peut être fait en introduisant l'opérateur hermitique \hat{U}_s , définie par :

$$\varkappa_s^{in}(x) = \hat{U}_s \Phi_s^{in}(x), \quad \varkappa_s^{out}(x) = \hat{U}_s \Phi_s^{out}(x), \quad (2.75)$$

ou sous forme matricielle [28, 29] :

$$\begin{pmatrix} \varkappa_s^-(in, -\infty) \\ \varkappa_s^+(in, -\infty) \\ \varkappa_s^-(in, +\infty) \\ \varkappa_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & \mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & \mathbb{I}_{2^{2s}} \\ i\mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & -i\mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & i\mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & -i\mathbb{I}_{2^{2s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(in, -\infty) \\ \Phi_s^+(in, -\infty) \\ \Phi_s^-(in, +\infty) \\ \Phi_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

et

$$\begin{pmatrix} \varkappa_s^-(out, +\infty) \\ \varkappa_s^+(out, +\infty) \\ \varkappa_s^-(out, -\infty) \\ \varkappa_s^+(out, -\infty) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & \mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & \mathbb{I}_{2^{2s}} \\ i\mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & -i\mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & i\mathbb{I}_{2^{2s}} & 0 & -i\mathbb{I}_{2^{2s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(out, +\infty) \\ \Phi_s^+(out, +\infty) \\ \Phi_s^-(out, -\infty) \\ \Phi_s^+(out, -\infty) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

où $\varkappa_s^\mp(out, +\infty)$ et $\varkappa_s^\mp(in, +\infty)$ sont des vecteurs à 2^{2s} composantes.

Cette transformation permet de définir la matrice \hat{M}_{KG-s} . En effet, après quelques manipulations, des expressions (2.76) et (2.77), déduisons $\Phi_s^\mp(in, \pm\infty)$ et $\Phi_s^\mp(out, \pm\infty)$ respectivement en fonction de $\varkappa_s^\mp(in, \pm\infty)$ et $\varkappa_s^\mp(out, \pm\infty)$, insérant le résultat obtenu dans (2.41) en tenant compte de (2.72), on trouve :

$$\begin{pmatrix} \varkappa_s^-(out, +\infty) \\ \varkappa_s^+(out, +\infty) \\ \varkappa_s^-(out, -\infty) \\ \varkappa_s^+(out, -\infty) \end{pmatrix} = \hat{M}_{KG-s} \begin{pmatrix} \varkappa_s^-(in, -\infty) \\ \varkappa_s^+(in, -\infty) \\ \varkappa_s^-(in, +\infty) \\ \varkappa_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

où \hat{M}_{KG-s} est la matrice $(2^{(2s+1)}(2s+1) \times 2^{(2s+1)}(2s+1))$, donnée par :

$$\hat{M}_{KG-s} = \hat{U}_s \hat{S}_{KG-s} \hat{U}_s^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{T}_s^+ & 0 & i\bar{R}_s^- & 0 \\ 0 & \bar{T}_s^+ & 0 & -i\bar{R}_s^- \\ i\bar{R}_s^+ & 0 & \bar{T}_s^- & 0 \\ 0 & -i\bar{R}_s^+ & 0 & \bar{T}_s^- \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

et

$$\bar{T}_s^\pm = \begin{pmatrix} t_s \pm r_s & 0 \\ 0 & t_s \pm r_s \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_s^\pm = \begin{pmatrix} 0 & \rho_s \pm \omega_s \\ \rho_s \pm \omega_s & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Procédons maintenant à la diagonalisation de la matrice \hat{M}_{KG-s} . Pour illustrer ce propos, comme d'habitude, nous écrivons l'équation aux valeurs propres

$$\det \left(\hat{M}_{KG-s} - \beta_s \mathbb{I}_{2^{(2s+1)}(2s+1)} \right) = 0. \quad (2.81)$$

Par un simple calcul les valeurs propres sont

$$\beta_s^\pm = t_s \pm \sqrt{\omega_s^2 + r_s^2 - \rho_s^2}, \quad (2.82)$$

et la matrice diagonale qui représente \hat{M}_{KG-s} est la suivante

$$\hat{M}_{KG-s} = \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \otimes \begin{pmatrix} t_s + \sqrt{\omega_s^2 + r_s^2 - \rho_s^2} & 0 \\ 0 & t_s - \sqrt{\omega_s^2 + r_s^2 - \rho_s^2} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Ayant obtenu la matrice de diffusion \hat{M}_{KG-s} , nous passons maintenant au calcul de la fonction d'onde stationnaire $\Phi_s^\mp(x)$ dans la base des ondes partielles, et qui conduit au développement asymptotique (2.37).

Pour illustrer ce propos, partons des équations (2.76) et (2.77), exprimant les vecteurs $\Phi_s^\mp(in, \pm\infty)$ et $\Phi_s^\mp(out, \pm\infty)$ en fonction de $\varkappa_s^\mp(in, \pm\infty)$ et $\varkappa_s^\mp(out, \pm\infty)$,

$$\begin{aligned}
\Phi_s^\mp(in, \pm\infty,) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_s^\mp(in, -\infty) \pm i\chi_s^\mp(in, +\infty)], \\
\Phi_s^\mp(out, \pm\infty,) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_s^\mp(out, +\infty) \mp i\chi_s^\mp(out, -\infty)].
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Ensuite, portant l'expression précédente dans l'équation (2.39), les ondes incidentes et sortantes s'écrivent alors :

$$\begin{cases}
\Phi_s^{\mp,in}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_s^\mp(in, -\infty) + i\varepsilon\chi_s^\mp(in, +\infty)] e^{-ik|x|}, \\
\Phi_s^{\mp,out}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [[\chi_s^\mp(out, +\infty) - i\varepsilon\chi_s^\mp(out, -\infty)] e^{ik|x|}].
\end{cases} \tag{2.85}$$

Où $\varepsilon = + (-)$ pour $x > 0$ ($x < 0$).

Pour la fonction d'onde stationnaire solution de l'équation (2.32). Insérons (2.84) dans (2.37), nous obtenons :

Pour $x \longrightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
\Phi_s^\mp(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [\chi_s^\mp(out, +\infty) - i\chi_s^\mp(out, -\infty)] e^{ikx} + \\
&\quad [\chi_s^\mp(in, -\infty) + i\chi_s^\mp(in, +\infty)] \} e^{-ikx}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

et pour $x \longrightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
\Phi_s^\mp(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [\chi_s^\mp(out, +\infty) + i\chi_s^\mp(out, -\infty)] e^{-ikx} + \\
&\quad [\chi_s^\mp(in, -\infty) - i\chi_s^\mp(in, +\infty)] e^{ikx} \}.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Méthode des déphasages

En général il est très difficile de calculer les solutions de l'équation stationnaire, et en particulier l'amplitude de diffusion. Cependant, pour un potentiel très faible (potentiel localisé), on peut calculer l'amplitude de diffusion, en utilisant la théorie des perturbations stationnaires. Le résultat obtenu s'appelle l'approximation de Born [39, 40].

Dans ce paragraphe, nous développons une méthode non perturbative qui part de la solution de l'équation de (KG-s) au spectre continu en présence d'un centre diffuseur. Nous envisageons les changements minimaux dans le développement asymptotique ($|x| \rightarrow \infty$) du cas libre. Le plus simple est d'ajouter un déphasage. Autrement dit, on pose a

priori que l'effet du terme d'interaction à courte portée se réduit à donner un déphasage spécifique à chaque onde partielle de la particule libre.

Pour illustrer ce propos, utilisons la propriété de conservation du courant (2.74), et introduisons les déphasages relatifs aux ondes paires δ_s^0 et impaires δ_s^1 , on peut finalement exprimer l'expression (2.83) sous une forme plus explicite

$$\hat{M}_{KG-s} = \mathbb{I}_{2^{2s(2s+1)}} \otimes \begin{pmatrix} e^{2i\delta_s^0} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_s^1} \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

avec

$$e^{2i\delta_s^l} = t_s + (-1)^l \sqrt{\omega_s^2 + r_s^2 - \rho_s^2}, \quad l = 0, 1. \quad (2.89)$$

Cherchons maintenant la forme asymptotique ($|x| \rightarrow \infty$) de la fonction d'onde stationnaire $\Phi_s^\mp(x)$, qui conduit au développement asymptotique (2.37). pour déduire la forme asymptotique de la fonction d'onde, remplaçons dans (2.86) et (2.87) $\varkappa_s^\mp(out, \pm\infty)$ par leurs expressions (2.78), tenant compte de (2.88) et (2.38), nous obtenons pour la fonction d'onde stationnaire solution de l'équation de (KG-s),

$$\Phi_s^\mp(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varkappa_s^\mp(in, -\infty) \psi_s^0(x) + \varkappa_s^\mp(in, +\infty) \psi_s^1(x)] \quad (2.90)$$

avec

$$\psi_s^l(x) = (i\varepsilon)^l \left[e^{-ik|x|} + (-1)^l e^{2i\delta_s^l} e^{ik|x|} \right] = \begin{cases} 2e^{i\delta_s^0} [\cos(k|x| + \delta_s^0)] & \text{pour } l = 0, \\ 2\varepsilon e^{i\delta_s^1} [\sin(k|x| + \delta_s^1)] & \text{pour } l = 1. \end{cases} \quad (2.91)$$

Ce déphasage additionnel δ_s^l ($l = 0, 1$) possède donc l'interprétation physique suivante : Il est la seule trace visible à grande distance dans la fonction d'onde de la présence d'un terme d'interaction à courte portée.

Coefficients de transmission et de réflexion

Dans les problèmes de diffusion, on s'attache le plus souvent à la recherche des coefficients de réflexion et de transmission \mathbb{R}_s et \mathbb{T}_s définis respectivement comme les rapports des flux de particules réfléchies et transmises au flux incident. Eût égard aux notions probabilistes de la théorie quantique, ces flux correspondent aux flux des vecteurs densités de courant de probabilité associés.

Les solutions de l'équation (2.32) dans les régions asymptotique $|x| \rightarrow \infty$, sont des solutions d'ondes planes $\notin L^2$ (espace des fonctions de carré sommable) et donc non normalisables. Ces solutions sont utilisées pour décrire des courants stationnaires de particules. Pour évaluer les probabilités de réflexion et de transmission d'un tel faisceau, comparons les flux réfléchi et transmis avec le flux incident.

Pour pouvoir exprimer les courants, il est nécessaire de déterminer la fonction d'onde. Pour une particule venant de la gauche, la présence du centre diffuseur donne lieu, à gauche, à deux ondes $e^{\pm ikx}$ incidente et réfléchie, caractérisées par leurs amplitudes. A droite il a seulement une onde émergente c'est-à-dire $\Phi_s^\mp(in, +\infty) = 0$. Pour une particule venant de droite, (c'est à dire, qu'il a seulement une onde émergente pour $x \rightarrow -\infty$); cela impose $\Phi_s^\mp(in, -\infty) = 0$.

Comme les deux cas sont similaires, considérons celui d'une particule venant de la gauche. Avec ce choix, d'après (2.84) nous avons

$$\Phi_s^\mp(in, +\infty) = 0, \quad \mathcal{R}_s^\mp(in, +\infty) = i\mathcal{R}_s^\mp(in, -\infty). \quad (2.92)$$

En remplaçant l'expression (2.92) dans le développement (2.90), la fonction d'onde de l'état stationnaire s'écrit :

$$\Phi_{s,L}^\mp(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{R}_s^\mp(in, -\infty) [\psi_s^0(x) + i\psi_s^1(x)]. \quad (2.93)$$

Ensuite, insérons (2.91) dan (2.93), nous trouvons :

$$\Phi_{s,L}^{\mp}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\mathcal{K}_s^{\mp}(in, -\infty) [e^{ikx} + f_s^- e^{-ikx}] & x \rightarrow -\infty, \\ \sqrt{2}\mathcal{K}_s^{\mp}(in, -\infty) [(1 + f_s^+) e^{ikx}] & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.94)$$

où f_s^{\mp} sont les amplitudes de diffusion, données par :

$$f_s^{\mp} = f_s^0 \mp f_s^1, \quad f_s^l = \frac{1}{2} \left(e^{2i\delta_s^l} - 1 \right) = ie^{i\delta_s^l} \sin \delta_s^l, \quad l = 0, 1. \quad (2.95)$$

Ayant obtenu la forme asymptotique à gauche de la fonction d'onde $\Phi_{s,L}^{\mp}(x)$ (arrivée de $-\infty$), on pourra alors calculer les coefficients de réflexion et de transmission \mathbb{R}_s et \mathbb{T}_s , ainsi que la section efficace σ_s^t .

Les coefficients de réflexion et de transmission sont calculés à partir de la densité de courant (2.21). Loins de la zone d'action du champ diffuseur ($|x| \rightarrow +\infty$), le potentiel vecteur $\vec{A} = \vec{0}$, l'expression du courant s'écrit :

$$\vec{J}_s = \frac{1}{2im} \left[\bar{\Phi}_s (\vec{\nabla} \Phi_s) - (\vec{\nabla} \bar{\Phi}_s) \Phi_s \right], \quad \bar{\Phi}_s = \Phi_s^{\dagger} (\gamma^0)^{2s} \quad (2.96)$$

Avec le choix $\Phi_s^{\mp}(in, +\infty) = 0$, et si on suppose que le flux incident est normalisé, c'est-à-dire $\Phi_s^{\mp}(in, -\infty) = \sqrt{2}\mathcal{K}_s^{\mp}(in, -\infty) = 1_s^{\mp}$. Dans ce cas, en comparant (2.34) et (2.94), l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise s'écrivent

$$\begin{aligned} \Phi_s^{\mp,inc} &= 1_s^{\mp} e^{ikx}, & \Phi_s^{\mp,ref} &= 1_s^{\mp} f_s^- e^{-ikx} = R_{s,L}^{\mp} e^{-ikx}, \\ \Phi_s^{\mp,tr} &= 1_s^{\mp} (1 + f_s^+) e^{ikx} = T_{s,L}^{\mp} e^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

De la définition (2.96) du courant et de l'onde incidente, l'expression du courant incident est

$$\vec{j}_s^{in} = \left[(1_s^-)^{\dagger} (1_s^+) + (1_s^+)^{\dagger} (1_s^-) \right] \frac{k}{m} \vec{i}. \quad (2.98)$$

De même pour le courant transmis, nous avons

$$\vec{j}_s^{tr} = \left[(1_s^-)^{\dagger} (1_s^+) + (1_s^+)^{\dagger} (1_s^-) \right] \frac{k}{m} |(1 + f_s^+)|^2 \vec{i}. \quad (2.99)$$

Le coefficient de transmission est par définition le rapport du courant transmis et incident [28, 29]. Il est égal à

$$\mathbb{T}_s = \left| \frac{\vec{j}_s^{tr}}{\vec{j}_s^{inc}} \right| = |(1 + f_s^+)|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{2i\delta_s^0} + e^{2i\delta_s^1} \right|^2. \quad (2.100)$$

A partir de la définition (2.76) du courant et de l'onde réfléchie, l'expression du courant réfléchi est

$$\vec{j}_s^{ref} = - \left[(1_s^-)^\dagger (1_s^+) + (1_s^+)^\dagger (1_s^-) \right] \frac{k}{m} |f_s^-|^2 \vec{i} \quad (2.101)$$

Le coefficient de réflexion est par définition le rapport du courant réfléchi et incident. Il est égal à

$$\mathbb{R}_s = \left| \frac{\vec{j}_s^{ref}}{\vec{j}_s^{inc}} \right| = |f_s^-|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{2i\delta_s^0} - e^{2i\delta_s^1} \right|^2. \quad (2.102)$$

On vérifie alors facilement

$$\mathbb{R}_s + \mathbb{T}_s = 1. \quad (2.103)$$

Une interprétation de ces coefficients est la suivante : si l'on effectue une mesure de la position de la particule juste après qu'elle a fini d'interagir avec la barrière, la particule aura une probabilité \mathbb{R}_s d'apparaître à gauche, et une probabilité \mathbb{T}_s d'apparaître à droite. Les coefficients \mathbb{R}_s et \mathbb{T}_s prennent ainsi valeur de probabilité de rebond et de probabilité de franchissement de la barrière.

Calculons maintenant la section efficace différentielle et la section totale. Comme il y a deux directions discrètes dans le cas à une dimension, caractérisées par $\varepsilon = \pm 1$ selon que $x > 0$ ($x < 0$). Les sections efficaces différentielles discrètes dans ces deux directions sont données par [41, 42]:

$$\sigma_s^\varepsilon = |f_s^\varepsilon|^2. \quad (2.104)$$

La section efficace totale est la somme des intensités des ondes diffusées en avant et en arrière

$$\sigma_s^t = \sum_{\varepsilon} \sigma_s^{\varepsilon} = |f_s^+|^2 + |f_s^-|^2 = 2 (\sin^2 \delta_s^0 + \sin^2 \delta_s^1). \quad (2.105)$$

Ayant présenté le formalisme de la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s} , dans ce qui suit, et comme application nous allons adapter le formalisme de la matrice de diffusion à une dimension, pour décrire la diffusion d'une particule relativiste de spin-s par un potentiel scalaire localisé.

Chapitre 3

Application du formalisme matrice de diffusion à une dimension

Après avoir donné les éléments constituant le formalisme de la matrice de diffusion à une dimension pour les particules de Klein-Gordon spin- s ($s = 0, 1/2$) en interaction avec un champ électromagnétique $A_\mu \left(A_0(x, t), \vec{A}(x, t) \right)$ à courte portée, passons au côté pratique à savoir l'application de ce formalisme de la matrice de diffusion développé dans le chapitre deux pour étudier la diffusion d'une particule relativiste de spin- s par certains potentiels scalaires ayant quelques propriétés de symétrie et de portée.

Nous commençons par considérer une particule relativiste de masse m , d'énergie E , de charge e et de spin- s ($s=0,1/2$), évoluant dans un monde à une dimension. La particule, incidente sur un centre diffuseur, évolue librement avant d'atteindre la région où elle va subir les effets d'un centre diffuseur localisé, composé d'un potentiel scalaire symétrique à une dimension indépendant du temps $A_0(x, t) = V(x)$ et d'un potentiel vecteur $\vec{A}(x, t) = \vec{0}$. Dans cette région d'interaction, le potentiel $V(x)$ est non nul. Nous envisageons le cas où $V(x)$ a la même limite lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, et suivant la coutume nous adoptons cette valeur ($\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow 0$).

Dans ce cas, l'hamiltonien (2.31) de l'équation de Klein Gordon spin- s à une dimension, soumise à l'action d'un champ scalaire $V(x)$, à savoir les potentiels électromagné-

tiques A_0 et \vec{A} , reliés aux champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{dV(x)}{dx}\vec{i}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{0}, \quad (3.1)$$

s'écrit :

$$H_s^\mp = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV(x) \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}} \mp 2ise(\sigma_1)^{2s} \frac{dV(x)}{dx}. \quad (3.2)$$

En y faisant la substitution (3.2) dans (2.30), l'équation de Klein Gordon spin- s dans le potentiel $V(x)$, se ramène à l'équation :

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV(x) \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}} \mp 2ise(\sigma_1)^{2s} \frac{dV(x)}{dx} \right\} \Phi_s^\mp(x, t) = 0. \quad (3.3)$$

Le terme $\mp 2is(\sigma_1)^{2s} dV(x)/dx$ contient l'interaction du spin avec le potentiel extérieur. Si on le supprime ($s = 0$), l'équation (3.3) se réduit à la même équation qui représente le cas du spin-0 (KG-0). En posant ($s = 1/2$), on obtient l'équation de Klein Gordon spin-1/2 (ou équation de Dirac quadratique) .

La particule est soumise à un potentiel $V(x)$ qui ne dépend pas du temps. Dans ce cas, l'équation d'évolution peut être simplifiée en écrivant la fonction d'onde associée à un état propre d'énergie E sous la forme

$$\Phi_s^\mp(x, t) = e^{-iEt} \Phi_s^\mp(x). \quad (3.4)$$

En substituant cette forme dans l'équation (3.3), permettent d'éliminer la dérivée partielle par rapport au temps et les solutions stationnaires $\Phi_s^\mp(x)$ doivent alors satisfaire à l'équation suivante

$$\left\{ D_{KG}^2 \mathbb{I}_{2^{2s}} \pm 2ise(\sigma_1)^{2s} \frac{dV(x)}{dx} \right\} \Phi_s^\mp(x) = 0, \quad (3.5)$$

nous avons noté $D_{KG}^2 = \frac{d^2}{dx^2} + (E - eV(x))^2 - m^2$ l'opérateur relatif à l'équation de Klein-Gordon de spin-0.

Afin de découpler l'équation (3.5), introduisons la nouvelle variable

$$\Phi_s^\mp(x) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \chi_s^\mp(x), \quad (3.6)$$

et reportons cette expression dans l'équation (3.5), on obtient pour chaque composante de la fonction d'onde $\chi_s^\mp(x)$ une équation de type Klein-Gordon qui contient en plus un terme décrivant le couplage spin-champ

$$\left\{ D_{KG}^2 \mathbb{I}_{2^{2s}} \pm 2is (\sigma_3)^{(2s)} \frac{dV(x)}{dx} \right\} \chi_s^\mp(x) = 0. \quad (3.7)$$

3.1 Étude dans le potentiel de Cusp

Passons maintenant à la résolution de l'équation stationnaire (3.7) en présence d'un potentiel scalaire symétrique. Ce potentiel, nous le choisissons comme étant celui de Cusp [9], représenté par :

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad (3.8)$$

où V_0 , et a sont des constantes positives. Dans le cas limite $a \rightarrow 0$, $V_0 \rightarrow \infty$, $2aV_0 \rightarrow \alpha$, ce potentiel lisse est une bonne réalisation du potentiel fonctionnel delta,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+, V_0 \rightarrow +\infty} V_0 e^{-\frac{|x|}{a}} \rightarrow \alpha \delta(x) \quad \text{avec} \quad \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 e^{-\frac{|x|}{a}} dx = 2aV_0 \quad (3.9)$$

Le potentiel $V(x)$ varie comme l'indique la figure-1, de la valeur $V(x) \rightarrow 0$ pour $|x| \rightarrow +\infty$ à la valeur $V = V_0$ pour $x = 0$. Ceci modélise un centre attractif où l'énergie potentielle de la particule est soit nulle si la distance $|x|$ est très grande, soit constante et positive si la particule est très près du centre attractif si la distance $|x| \sim 0$. C'est

clairement un modèle d'atome (potentiel coulombien) [9]

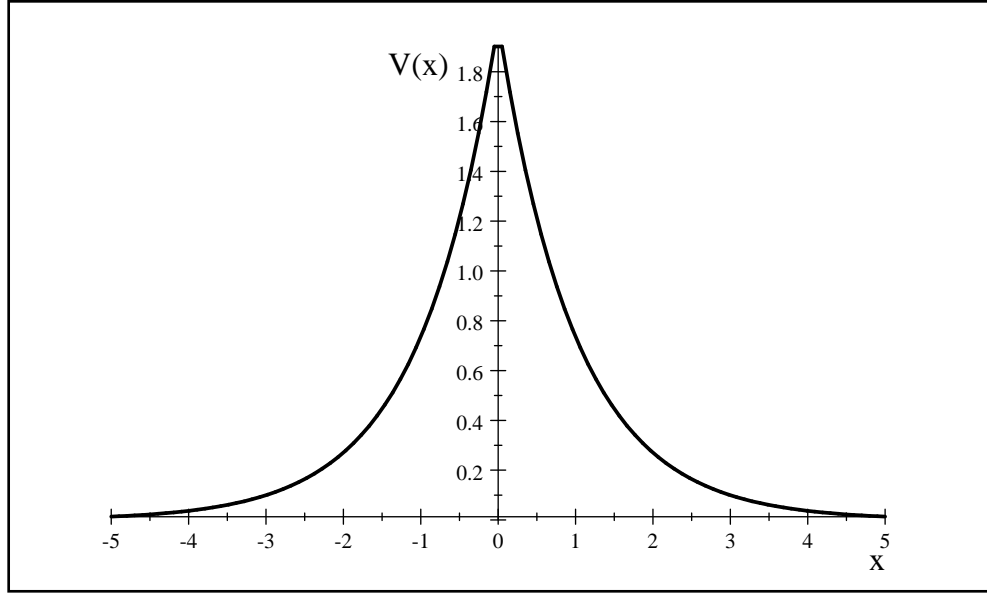


Figure 1 : Potentiel de Cusp pour $a = 1$, $V_0 = 2$

Reportons cette expression (3.8) dans (3.7), l'équation de Klein-Gordon spin-s à résoudre est la suivante :

$$\left\{ \left[\frac{d^2}{dx^2} + (E - eV_0 e^{-\frac{|x|}{a}})^2 - m^2 \right] \mathbb{I}_{2s} \pm 2ies (\sigma_3)^{(2s)} \frac{d}{dx} \left(V_0 e^{-\frac{|x|}{a}} \right) \right\} \chi_s^{\mp, c}(x) = 0. \quad (3.10)$$

Comme il y a une valeur absolue pour la variable x , distinguons comme d'habitude les deux régions $x < 0$ et $x > 0$.

Cherchons d'abord les solutions dans la région $x < 0$. Pour calculer les solutions de l'équation différentielle (3.10), introduisons une nouvelle variable $x \rightarrow y$ définie par

$$y = 2iaeV_0 e^{\frac{x}{a}}. \quad (3.11)$$

l'intervalle $x \in]-\infty, 0[$ est réduit à l'intervalle $y \in]0, 2iaeV_0[$. Par un calcul direct, on voit immédiatement que

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d}{dy} = \frac{y}{a} \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dx} (V_0 e^{\frac{x}{a}}) = \frac{y}{a} \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{2iea} \right) = \frac{y}{2iea^2}, \quad (3.12)$$

et

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{a} \frac{d}{dy} \right) = \frac{y^2}{a^2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{y}{a^2} \frac{d}{dy}, \quad (3.13)$$

et en reportant ces expressions dans (3.10), on obtient pour la fonction d'onde stationnaire $\chi_s^\mp(y)$ relative à la nouvelle variable $y = 2iaeV_0e^{\frac{x}{a}}$, l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \left[y \frac{d}{dy} \left(y \frac{d}{dy} \right) - \left(iaE - \frac{y}{2} \right)^2 - (ma)^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}} \pm sy (\sigma_3)^{2s} \right\} \chi_s^{\mp,c}(y) = 0. \quad (3.14)$$

Pour résoudre cette équation, faisons le nouveau changement de variable

$$\chi_s^{\mp,c}(y) = y^{-\frac{1}{2}} f_s^\mp(y), \quad (3.15)$$

par un calcul direct, on voit immédiatement que

$$y \frac{d}{dy} \left(y^{-\frac{1}{2}} f_s^\mp(y) \right) = -\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} f_s^\mp(y) + y^{\frac{1}{2}} \frac{df_s^\mp(y)}{dy}, \quad (3.16)$$

et

$$y^2 \frac{d^2}{dy^2} \left(y^{-\frac{1}{2}} f_s^\mp(y) \right) = y^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f_s^\mp(y)}{dy^2} - y^{\frac{1}{2}} \frac{df_s^\mp(y)}{dy} + \frac{3}{4} y^{-\frac{1}{2}} f_s^\mp(y). \quad (3.17)$$

La formule (3.14) peut être mise, après l'introduction de de (3.16) et (3.17) et quelques transformations simples, prend pour la fonction $f_s^\mp(y)$ une forme absolument analogue à une équation de type Whittaker [41, 42, 43],

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} + \frac{iaE}{y} + \frac{1/4 - (ia\sqrt{E^2 - m^2})^2}{y^2} \right) \mathbb{I}_{2^{2s}} \pm \frac{s(\sigma_3)^{2s}}{y} \right\} f_s^\mp(y) = 0. \quad (3.18)$$

L'équation précédente est une équation différentielle du deuxième ordre, elle possède deux solutions linéairement indépendantes. La solution générale est une combinaison linéaire de deux fonctions de Whittaker [43, 44, 45],

$$f_s^\mp(y) = \begin{pmatrix} C_1^\mp M_{\kappa^\pm, -\mu}(y) + C_2^\mp M_{\kappa^\pm, \mu}(y) \\ D_1^\mp M_{\kappa^\mp, -\mu}(y) + D_2^\mp M_{\kappa^\mp, \mu}(y) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Ici, nous avons employé les notations

$$\begin{aligned} M_{\kappa^\pm, \pm\mu}(y) &= y^{1/2 \pm \mu} e^{-y/2} {}_1F_1(1/2 - \kappa^\pm \pm \mu, 1 \pm 2\mu, y), \\ \kappa^\pm &= iaE \pm s, \quad \mu = ia\sqrt{E^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

où ${}_1F_1(1/2 - \kappa^\pm \pm \mu, 1 \pm 2\mu, y)$ est la fonction hypergéométrique confluente [43, 44, 45].

Le terme $\kappa^\pm = iaE \pm s$ représente l'effet du spin- s . Si on prend $s = 0$, les deux solutions de (3.19) sont identiques et représentent la même solution dans le cas d'une particule de Klein Gordon de spin-0. Pour $s = 1/2$, la solution représente la diffusion d'une particule de Klein Gordon de spin-1/2 (ou Dirac quadratique).

Passons maintenant à l'autre région $x > 0$, et effectuons le changement de variable suivant

$$y = 2iaeV_0 e^{-\frac{x}{a}}, \quad (3.21)$$

En faisant usage de (3.16) et (3.17), et en tenant compte de changement de signe devant le terme d'interaction spin-champ

$$\pm 2ise(\sigma_3)^{(2s)} \frac{d}{dx} (V_0 e^{-\frac{x}{a}}) = \mp \frac{sy}{a^2} (\sigma_3)^{(2s)}, \quad (3.22)$$

nous obtenons un système d'équations similaire à (3.14)

$$\left\{ \left[y \frac{d}{dy} \left(y \frac{d}{dy} \right) - \left(iaE - \frac{y}{2} \right)^2 - (ma)^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}} \mp sy (\sigma_3)^{2s} \right\} \chi_s^\mp(y) = 0. \quad (3.23)$$

Pour résoudre cette équation, introduisons une nouvelle fonction $g_s^\mp(y)$ à travers la relation

$$\chi_s^\mp(y) = y^{-\frac{1}{2}} g_s^\mp(y), \quad (3.24)$$

et en reportant cette expression dans (3.23), l'équation pour la fonction $g_s^\mp(y)$ en présence du potentiel de Cusp, prend une forme absolument analogue à l'équation de Whittaker, donnée par :

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} + \frac{iaE}{y} + \frac{1/4 - (ia\sqrt{E^2 - m^2})^2}{y^2} \right) \mathbb{I}_{2^{2s}} \mp \frac{s(\sigma_3)^{2s}}{y} \right\} g_s^\mp(y) = 0 \quad (3.25)$$

qui a aussi pour solution

$$g_s^\mp(y) = \begin{pmatrix} C_3^\mp M_{\kappa^\mp, -\mu}(y) + C_4^\mp M_{\kappa^\mp, \mu}(y) \\ D_3^\mp M_{\kappa^\pm, -\mu}(y) + D_4^\mp M_{\kappa^\pm, \mu}(y) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Enfin, les solutions (3.19) et (3.26) peuvent se regrouper pour être écrites en une seule équation incluant des solutions relatives à $x < 0$ et $x > 0$:

$$\zeta_s^\mp(y) = \theta(-x) f_s^\mp(y) + \theta(x) g_s^\mp(y), \quad (3.27)$$

avec

$$y = 2iaeV_0 e^{-\frac{|x|}{a}}. \quad (3.28)$$

Insérons toutes ces relations dans (3.6), la fonction d'onde stationnaire $\Phi_s(y) =$

$(\Phi_s^-(y), \Phi_s^+(y))^T$ à $2^{2s}(2s+1)$ composantes, solution de l'équation de Klein Gordon spin- s (3.5), en présence d'un potentiel scalaire (potentiel de Cusp), s'écrit :

$$\Phi_s^c(y) = \begin{pmatrix} \Phi_s^{-,c}(y) \\ \Phi_s^{+,c}(y) \end{pmatrix} = y^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \left[\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right]^{(2s)} & 0 \\ 0 & \left[\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right]^{(2s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s^-(y) \\ \zeta_s^+(y) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

3.1.1 Conditions de raccordement

Notons que les coefficients $(C_j^\mp, D_j^\mp, j = 1, 4)$ ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils sont déterminés par les conditions de raccordement de la fonction d'onde $\Phi_s^\mp(x)$ et de sa dérivée $(\Phi_s^\mp(x))'$ aux points $x = 0$ ou $y = 2iaeV_0 = \lambda$.

Afin de déterminer ces conditions, procédons de la manière suivante. Revenons à l'équation de Klein Gordon (3.7), et examinons ce qui se passe au voisinage d'un point d'abscisse x_0 où le potentiel $V(x)$ présente un saut fini de la forme :

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x) & \text{pour } x < x_0 \\ V_2(x) & \text{pour } x > x_0 \end{cases} \quad (3.30)$$

avec

$$\frac{dV(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{dV_1(x)}{dx} & \text{pour } x < x_0, \\ [V_2(x_0^+) - V_1(x_0^-)] \delta(x - x_0) & \text{pour } x = x_0, \\ \frac{dV_2(x)}{dx} & \text{pour } x > x_0. \end{cases} \quad (3.31)$$

où $\delta(x - x_0)$ est la distribution de Dirac. La présence de delta de Dirac dans l'équation (3.7) implique que la fonction d'onde $\Phi_s^\mp(x)$ est continue au point x_0 et que la dérivée $(\Phi_s^\mp(x))'$ est discontinue en ce point. En intégrant membre à membre l'équation (3.7) de part et d'autre de $x = x_0$, on obtient

$$\Phi_s^{\mp,c}(x_0^+) = \Phi_s^{\mp,c}(x_0^-), \quad (3.32)$$

et

$$\left. \frac{d\Phi_s^{\mp,c}(x)}{dx} \right|_{x=x_0^+} = \left. \frac{d\Phi_s^{\mp,c}(x)}{dx} \right|_{x=x_0^-} \pm 2ise [V_2(x_0^+) - V_1(x_0^-)] (\sigma_3)^{2s} \Phi_s^{\mp,c}(x_0). \quad (3.33)$$

Le potentiel de Cusp est continu en $x = 0^\pm$, c'est à dire $V_2(0^+) = V_1(0^-) = V_0$. En conformité avec la discussion générale, la fonction d'onde de Klein-Gordon spin-s ainsi que sa dérivée première sont continues en $x = 0$ ou $y = 2iaeV_0 = \lambda$, c'est-à-dire :

$$\Phi_s^{\mp,c}(0^+) = \Phi_s^{\mp,c}(0^-), \quad \left. \frac{d\Phi_s^{\mp,c}(x)}{dx} \right|_{x=0^+} = \left. \frac{d\Phi_s^{\mp,c}(x)}{dx} \right|_{x=0^-} \quad (3.34)$$

Par le jeu des conditions de raccordement (3.34), de la fonction d'onde $\Phi_s^\mp(x)$ au point $x = 0$ ou $y = 2iaeV_0 = \lambda$, fournissent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_1^\mp M_{\kappa^\pm, -\mu}(\lambda) + C_2^\mp M_{\kappa^\pm, \mu}(\lambda) = C_3^\mp M_{\kappa^\mp, -\mu}(\lambda) + C_4^\mp M_{\kappa^\mp, \mu}(\lambda), \\ D_1^\mp M_{\kappa^\mp, -\mu}(\lambda) + D_2^\mp M_{\kappa^\mp, \mu}(\lambda) = D_3^\mp M_{\kappa^\pm, -\mu}(\lambda) + D_4^\mp M_{\kappa^\pm, \mu}(\lambda). \end{cases} \quad (3.35)$$

De la même façon, les conditions de raccordement (3.34), de la dérivée de la fonction d'onde au point $x = 0$, fournissent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_1^\mp M'_{\kappa^\pm, -\mu}(\lambda) + C_2^\mp M'_{\kappa^\pm, \mu}(\lambda) = C_3^\mp M'_{\kappa^\mp, -\mu}(\lambda) + C_4^\mp M'_{\kappa^\mp, \mu}(\lambda), \\ D_1^\mp M'_{\kappa^\mp, -\mu}(\lambda) + D_2^\mp M'_{\kappa^\mp, \mu}(\lambda) = D_3^\mp M'_{\kappa^\pm, -\mu}(\lambda) + D_4^\mp M'_{\kappa^\pm, \mu}(\lambda), \end{cases} \quad (3.36)$$

Les systèmes d'équations algébriques (3.35) et (3.36), permettent d'exprimer quatres des coefficients, comme C_1^\mp , C_3^\mp , D_1^\mp et D_3^\mp , en fonction des quatres autres C_2^\mp , C_4^\mp , D_2^\mp et D_4^\mp ,

$$\begin{aligned} C_1^\mp &= C_2^\mp W_{12}^\mp + C_4^\mp W_{14}^\mp, & C_3^\mp &= C_2^\mp W_{32}^\mp + C_4^\mp W_{34}^\mp, \\ D_1^\mp &= D_2^\mp W_{12}^\pm + D_4^\mp W_{14}^\pm, & D_3^\mp &= D_2^\mp W_{32}^\pm + D_4^\mp W_{34}^\pm, \end{aligned} \quad (3.37)$$

ou sous forme matricielle, l'équation (3.37) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \chi_s^{-,c}(out, +\infty) \\ \chi_s^{+,c}(out, +\infty) \\ \chi_s^{-,c}(out, -\infty) \\ \chi_s^{+,c}(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_s^{+,c} & 0 & \hat{G}_s^{+,c} & 0 \\ 0 & \hat{D}_s^{-,c} & 0 & \hat{G}_s^{-,c} \\ \hat{G}_s^{-,c} & 0 & \hat{D}_s^{-,c} & 0 \\ 0 & \hat{G}_s^{+,c} & 0 & \hat{D}_s^{+,c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s^{-,c}(in, -\infty) \\ \chi_s^{+,c}(in, -\infty) \\ \chi_s^{-,c}(in, +\infty) \\ \chi_s^{+,c}(in, +\infty) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

avec

$$\chi_s^{\mp,c}(out, +\infty) = \begin{pmatrix} C_3^{\mp} \\ D_3^{\mp} \end{pmatrix}, \quad \chi_s^{\mp,c}(out, -\infty) = \begin{pmatrix} C_1^{\mp} \\ D_1^{\mp} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\chi_s^{\mp,c}(in, +\infty) = \begin{pmatrix} C_4^{\mp} \\ D_4^{\mp} \end{pmatrix}, \quad \chi_s^{\mp,c}(in, -\infty) = \begin{pmatrix} C_2^{\mp} \\ D_2^{\mp} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Les matrices $\hat{D}_s^{\pm,c}$ et $\hat{G}_s^{\pm,c}$ apparaissent dans (3.38) sont données par les formules suivantes

$$\hat{D}_s^{\pm,c} = \begin{pmatrix} W_{14}^{\pm} & 0 \\ 0 & W_{14}^{\mp} \end{pmatrix}, \quad \hat{G}_s^{\pm,c} = \begin{pmatrix} W_{12}^{\pm} & 0 \\ 0 & W_{12}^{\mp} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

où

$$W_{12}^{\mp} = W_{34}^{\pm} = -\frac{F_1^{\mp}(F_2^{\pm})' + F_2^{\pm}(F_1^{\mp})'}{(F_1^{\mp}F_1^{\pm})'}, \quad W_{14}^{\mp} = W_{32}^{\pm} = \frac{F_2^{\mp}(F_1^{\mp})' - F_1^{\mp}(F_2^{\mp})'}{(F_1^{\mp}F_1^{\pm})'}, \quad (3.42)$$

ici, $F_1^{\mp}, F_2^{\mp}, (F_1^{\mp})'$ et $(F_2^{\mp})'$ sont définis par :

$$\begin{aligned} (F_1^{\mp})' &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \kappa^{\mp}\right)M_{\kappa^{\mp}, -\mu}(\lambda) + \left(\frac{1}{2} - \mu + \kappa^{\mp}\right)M_{\kappa^{\mp}+1, -\mu}(\lambda), \\ (F_2^{\mp})' &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \kappa^{\mp}\right)M_{\kappa^{\mp}, \mu}(\lambda) + \left(\frac{1}{2} + \mu + \kappa^{\mp}\right)M_{\kappa^{\mp}+1, \mu}(\lambda), \\ F_1^{\mp} &= M_{\kappa^{\mp}, -\mu}(\lambda), \quad F_2^{\mp} = M_{\kappa^{\mp}, \mu}(\lambda). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nous avons employé la propriété de la fonction de Whittaker [43, 44, 45],

$$yM'_{\kappa,\mu}(y) = \left(\frac{1}{2}y - \kappa\right) M_{\kappa,\mu}(y) + \left(\frac{1}{2} + \mu + \kappa\right) M_{\kappa+1,\mu}(y) \quad (3.44)$$

3.1.2 Matrice de diffusion de l'équation de Klein Gordon spin-s dans le potentiel de Cusp

Dans cette section, nous construisons la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s}^c d'une particule de Klein Gordon de masse m d'énergie E , de charge e et de spin- s ($s = 0, 1/2$), soumise à une interaction décrite par un potentiel symétrique $V(x) = V(-x)$ avec pour comportement à l'infini $V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Ce potentiel nous le choisissons comme étant celui de Cusp. On rappelle que ce potentiel s'écrit :

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (3.45)$$

Pour analyser ce problème, nous allons nous appuyer sur les solutions stationnaires de l'équation de Klein Gordon spin- s (3.5) dans le potentiel de Cusp, qui s'écrit :

$$\left\{ \left[\frac{d^2}{dx^2} + (E - eV_0 e^{-\frac{|x|}{a}})^2 - m^2 \right] \mathbb{I}_{2^{2s}} + \pm 2ise (\sigma_1)^{2s} \frac{d}{dx} \left(V_0 e^{-\frac{|x|}{a}} \right) \right\} \Phi_s^{\mp,c}(x) = 0, \quad (3.46)$$

dont les solutions sont données par l'équation (3.29),

$$\Phi_s^{\mp,c}(y) = y^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \zeta_s^{\mp}(y). \quad (3.47)$$

Afin de calculer les éléments de la matrice \hat{S}_{KG-s}^c , on se place toujours dans le cas d'observations effectuées "à l'infini" ($|x| \rightarrow +\infty$, ou encore pour $y \rightarrow 0$). Parmi toutes les formes possibles des états qui satisfont l'équation (3.46), nous choisirons des solutions pour un ensemble continu de valeurs de l'énergie E , qui correspondent aux états de diffusion ($(E - eV_0)^2 - m^2 > 0$). Asymptotiquement, de telles solutions sont

des ondes planes puisque le potentiel est constant lorsque $|x| \rightarrow \infty$. En analysant ces solutions correctement, on constate qu'elles correspondent aux états de diffusion de particules asymptotiquement libres, diffusées par le potentiel $V(x)$. Admettant, dans le cas $(E - eV_0)^2 - m^2 \sim E^2 - m^2 = k^2 \gg 0$, des solutions sous forme d'ondes planes monochromatiques $e^{\pm ikx}$ se dirigeant vers la droite ou vers la gauche.

L'état quantique décrivant cette situation est une combinaison linéaire des fonctions de Whittaker (3.47). Pour déduire les états stationnaires de diffusion, examinons maintenant brièvement le comportement asymptotique de la fonction d'onde $\Phi_s^c(x)$ à très grande distance $|x| \rightarrow \infty$ (c'est à dire que $y \rightarrow 0$).

3.1.3 Comportement asymptotique de la fonction d'onde

Loin de la zone d'action du potentiel, lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ l'argument y de la fonction hypergéométrique vaut zéro. Alors, en vertu de la formule connue de la fonction hypergéométrique ${}_1F_1(a, b, 0) = 1$ [43, 44, 45], et du comportement asymptotique de la fonction de Whittaker [43, 44, 45],

$$M_{k^\pm, \pm\mu}(y \rightarrow 0) \rightarrow y^{1/2 \pm \mu} e^{-y/2}. \quad (3.48)$$

Portons ces expressions dans l'équation (3.27), après quelque processus calculatoire qu'il est recommandé de faire pour s'entraîner, insérons le résultat dans (3.47), on aboutit à l'asymptotique de la fonction d'onde stationnaire

$$\Phi_s^{\mp, c}(x) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \eta_s^{\mp, c}(x), \quad (3.49)$$

où

$$\eta_s^{\mp,c}(x) = \begin{cases} \lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_3^{\mp} \\ D_3^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \lambda^{\mu} \begin{pmatrix} C_4^{\mp} \\ D_4^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} & x \rightarrow +\infty \\ \lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_1^{\mp} \\ D_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} + \lambda^{\mu} \begin{pmatrix} C_2^{\mp} \\ D_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.50)$$

En reportant l'expression précédente dans (3.49), comparons le résultat avec (2.37), la forme asymptotique de la fonction d'onde $\Phi_s^{\mp,c}(x)$, solution générale de l'équation différentielle (3.46) est,

$$\Phi_s^{\mp,c}(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \left[\lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_3^{\mp} \\ D_3^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \lambda^{\mu} \begin{pmatrix} C_4^{\mp} \\ D_4^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} \right] & x \rightarrow +\infty \\ \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \left[\lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_1^{\mp} \\ D_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} + \lambda^{\mu} \begin{pmatrix} C_2^{\mp} \\ D_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} \right] & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.51)$$

Pour calculer les vecteurs $\Phi_s^{\mp,c}(out, \pm\infty)$ et $\Phi_s^{\mp,c}(in, \pm\infty)$, insérons l'expression (3.37) dans (3.51), après quelques calculs élémentaires, comparons le résultat obtenu avec la formules (2.37), nous obtenons :

$$\Phi_s^{\mp,c}(out, +\infty) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_2^{\mp} W_{32}^{\mp} + C_4^{\mp} W_{34}^{\mp} \\ D_2^{\mp} W_{32}^{\pm} + D_4^{\mp} W_{34}^{\pm} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\Phi_s^{\mp,c}(out, -\infty) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_2^{\mp} W_{12}^{\mp} + C_4^{\mp} W_{14}^{\mp} \\ D_2^{\mp} W_{12}^{\pm} + D_4^{\mp} W_{14}^{\pm} \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

et

$$\Phi_s^{\mp,c}(in, -\infty) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\Phi_s^{\mp,c}(in, +\infty) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_4^\mp \\ D_4^\mp \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

En utilisant les méthodes développées dans le chapitre-2, on trouve sans peine que l'état final après diffusion $\Phi_s^{out,c}(x)$ est d'après (2.40) relié à l'état initial $\Phi_s^{in,c}(x)$ par la relation :

$$\Phi_s^{out,c}(x) = \hat{\mathbf{S}}_{KG-s}^c \Phi_s^{in,c}(x), \quad (3.56)$$

ou encore explicitement sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^{-,c}(out, +\infty) \\ \Phi_s^{+,c}(out, +\infty) \\ \Phi_s^{-,c}(out, -\infty) \\ \Phi_s^{+,c}(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{T}_s^{+,c} & 0 & \check{R}_s^{+,c} & 0 \\ 0 & \check{T}_s^{-,c} & 0 & \check{R}_s^{-,c} \\ \check{R}_s^{-,c} & 0 & \check{T}_s^{-,c} & 0 \\ 0 & \check{R}_s^{+,c} & 0 & \check{T}_s^{+,c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^{-,c}(in, -\infty) \\ \Phi_s^{+,c}(in, -\infty) \\ \Phi_s^{-,c}(in, +\infty) \\ \Phi_s^{+,c}(in, +\infty) \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Reportons les expressions des vecteurs $\Phi_s^{\mp,c}(out, \mp\infty)$ et $\Phi_s^{\mp,c}(in, \mp\infty)$ donnés par les équations (3.52), (3.53), (3.54) et (3.55) dans (3.57), et prenons en compte que les vecteurs $\Phi_s^{\mp,c}(in, \mp\infty)$ sont indépendants, On peut vérifier facilement que les éléments blocs de matrices de dimension $(2^{2s} \times 2^{2s})$ $\check{T}_s^{\pm,c}$ et $\check{R}_s^{\pm,c}$ sont donnés par :

$$\check{T}_s^{\pm,c} = \begin{pmatrix} t_s^c & \pm\omega_s^c \\ \pm\omega_s^c & t_s^c \end{pmatrix}, \quad \check{R}_s^{\pm,c} = \begin{pmatrix} r_s^c & \pm\rho_s^c \\ \pm\rho_s^c & r_s^c \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{aligned}
t_s^c &= \frac{1}{2}\lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ + W_{14}^-), & \omega_s^c &= \frac{1}{2}\lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ - W_{14}^-), \\
r_s^c &= \frac{1}{2}\lambda^{-2\mu} (W_{12}^+ + W_{12}^-), & \rho_s^c &= \frac{1}{2}\lambda^{-2\mu} (W_{12}^+ - W_{12}^-).
\end{aligned}
\tag{3.59}$$

Ces blocs de matrices $\check{T}_s^{\pm,c}$ et $\check{R}_s^{\pm,c}$, représentent respectivement les coefficients de transmissions et de réflexions (left) et (right), de l'équation de KG-s et t_s^c , ω_s^c , r_s^c et ρ_s^c sont des fonctions de E, V_0 et m .

Nous remarquons que, pour ce spin-0, nous avons $\rho_0^c = \omega_0^c = 0$. La matrice \hat{S}_{KG-0}^c est symétrique car $\check{T}_0^{+,c} = \check{T}_0^{-,c}$ et $\check{R}_0^{+,c} = \check{R}_0^{-,c}$. Elle est pseudo-symétrique pour spin-1/2 car nous avons $\sigma_3 \check{T}_{1/2}^+ \sigma_3 = \check{T}_{1/2}^-$ et $\sigma_3 \check{R}_{1/2}^+ \sigma_3 = \check{R}_{1/2}^-$. Cette dernière propriété est spécifique au spin des particules.

3.1.4 Représentation des ondes partielles

Donnons maintenant l'expression de la matrice de diffusion \hat{M}_{KG-s}^c , la matrice représentant \hat{S}_{KG-s}^c dans la base des ondes partielles.

Pour illustrer ce propos, nous appliquons la transformation unitaire \hat{U}_s introduite dans les équations (2.65) et (2.66), et qui transforme $\Phi_s^{out,c}$ et $\Phi_s^{in,c}$ en $\mathcal{X}_s^{out,c}$ et $\mathcal{X}_s^{in,c}$, donnés par :

$$\mathcal{X}_s^{out,c}(x) = \hat{U}_s \Phi_s^{out,c}(x), \quad \mathcal{X}_s^{in,c}(x) = \hat{U}_s \Phi_s^{in,c}(x).
\tag{3.60}$$

Ensuite, remplaçons (3.56) dans (3.60), et utilisons la propriété des matrices unitaires $\hat{U}_s \hat{U}_s^\dagger = \mathbb{I}_{2^{2s+1}(2s+1)}$, on obtient après un calcul simple

$$\mathcal{X}_s^{out,c}(x) = \left(\hat{U}_s \hat{S}_{KG-s}^c \hat{U}_s^\dagger \right) \mathcal{X}_s^{in,c}(x) = \hat{M}_{KG-s}^c \mathcal{X}_s^{in,c}(x).
\tag{3.61}$$

Introduisons maintenant les matrices \hat{S}_{KG-s}^c et \hat{U}_s , données par les équations (3.57) et (2.75), dans l'équation (3.71). Après quelques manipulations, on peut finalement exprimer la matrice de Klein Gordon spin-s dans la représentation des ondes partielles

$$\hat{M}_{KG-s}^c = \hat{U}_s \hat{S}_{KG-s}^c \hat{U}_s^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{T}_s^{+,c} & 0 & i\overline{R}_s^{-,c} & 0 \\ 0 & \overline{T}_s^{+,c} & 0 & -i\overline{R}_s^{-,c} \\ i\overline{R}_s^{+,c} & 0 & \overline{T}_s^{-,c} & 0 \\ 0 & -i\overline{R}_s^{+,c} & 0 & \overline{T}_s^{-,c} \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

où

$$\overline{T}_s^{\pm,c} = \begin{pmatrix} t_s^c \pm r_s^c & 0 \\ 0 & t_s^c \pm r_s^c \end{pmatrix}, \quad \overline{R}_s^{\pm,c} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_s^c \pm \omega_s^c \\ \rho_s^c \pm \omega_s^c & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Procédons maintenant à la diagonalisation de la matrice \hat{M}_{KG-s}^c . Comme d'habitude, nous écrivons l'équation aux valeurs propres

$$\det \left(\hat{M}_{KG-s}^c - \beta_s^c \mathbb{I}_{2(2s+1)(2s+1)} \right) = 0. \quad (3.64)$$

Par un simple calcul les valeurs propres sont :

$$\beta_s^{\pm,c} = t_s^c \pm \sqrt{(\omega_s^c)^2 + (r_s^c)^2 - (\rho_s^c)^2}, \quad (3.65)$$

et la matrice diagonale qui représente \hat{S}_{KG-s}^c est la suivante

$$\hat{M}_{KG-s}^c = \mathbb{I}_{2s(2s+1)} \otimes \begin{pmatrix} \beta_s^{+,c} & 0 \\ 0 & \beta_s^{-,c} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Ayant diagonalisé la matrice \hat{M}_{KG-s}^c , utilisons la propriété de conservation du courant (2.74), en introduisant les déphasages relatifs aux ondes paires $\delta_s^{0,c}$ et impaires $\delta_s^{1,c}$, l'expression précédente se met, après un calcul élémentaire, sous la forme :

$$\hat{M}_{KG-s}^c = \mathbb{I}_{2s(2s+1)} \otimes \begin{pmatrix} e^{2i\delta_s^{0,c}} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_s^{1,c}} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

En comparant maintenant (3.67) à (3.66), les déphasages relatifs aux ondes paires

$\delta_s^{0,c}$ et impaires $\delta_s^{1,c}$ pour une particule de Klein Gordon de spin- s en interaction avec le potentiel de Cusp, sont donnés par :

$$e^{2i\delta_s^{l,c}} = t_s^c + (-1)^l \sqrt{(\omega_s^c)^2 + (r_s^c)^2 - (\rho_s^c)^2}. \quad (3.68)$$

Le déphasage $\delta_s^{l,c}$ est une fonction de l'énergie E et de la masse m , ainsi que des paramètres V_0 et a .

3.1.5 Coefficients de transmission et de réflexion

Ayant obtenu la matrice de diffusion dans la représentation des ondes partielles, ainsi que les déphasages δ_s^l ($l = 0, 1$), passons maintenant au calcul des coefficients de transmission et de réflexion \mathbb{R}_s^c et \mathbb{T}_s^c .

Pour illustrer ce propos, considérons la situation physique usuelle où la particule ne provienne que d'une source unique située, mettons, à l'infini à gauche. Dans ce cas l'amplitude entrante de droite est nulle : $\Phi_s^\mp(in, +\infty) = 0$, et les vecteurs $\Phi_s^\mp(out, +\infty)$ et $\Phi_s^\mp(out, -\infty)$ décrivent la transmission et la réflexion de la particule.

Dans l'hypothèse où, on élimine l'onde se propageant dans le sens de x décroissant, qui correspond à une particule venant de la droite, il y'a seulement une onde émergente c'est-à-dire $\varkappa_s^{\mp,c}(in, +\infty) = i\varkappa_s^{\mp,c}(in, -\infty)$. Dans ces conditions, l'équation (2.90) pour une particule de (KG- s) placée dans le potentiel de Cusp devient :

$$\Phi_{s,L}^{\mp,c}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varkappa_s^{\mp,c}(in, -\infty) \sum_{l=0}^1 (i\varepsilon)^l \left[e^{-ik|x|} + (-1)^l e^{2i\delta_s^{l,c}} e^{ik|x|} \right]. \quad (3.69)$$

Exploitant à nouveau les équations (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) et (3.61), par un calcul direct, nous trouvons :

$$\varkappa_s^{\mp,c}(in, -\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

et insérons l'expression précédente dans (3.69), on voit immédiatement que la forme

asymptotique à gauche de la fonction d'onde $\Phi_{s,L}^{\mp,c}(x)$ (arrivée de $-\infty$), s'écrit :

$$\Phi_{s,L}^{\mp,c}(x) = \begin{cases} [e^{ikx} + f_s^{-,c} e^{-ikx}] \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right]^{(2s)} \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} & x \rightarrow -\infty, \\ [(1 + f_s^{+,c}) e^{ikx}] \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right]^{(2s)} \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.71)$$

où $f_s^{\mp,c}$ sont les amplitudes de diffusion d'une particule de Klein Gordon spin- s par le potentiel de Cusp.

Pour calculer ces amplitudes, utilisons l'hypothèse d'une particule émise depuis $-\infty$, c'est-à-dire $C_4^\mp = D_4^\mp = 0$. Avec ces conditions, comparons (3.51) et (3.71), il vient :

$$f_s^{+,c} = \frac{1}{2} \lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ + W_{14}^-) - 1, \quad f_s^{-,c} = \frac{1}{2} \lambda^{-2\mu} \sqrt{(W_{14}^+ - W_{14}^-)^2 + 4W_{12}^- W_{12}^+} \quad (3.72)$$

On note en particulier que pour le spin-0, nous avons $\rho_0^c = \omega_0^c = 0$, ce qui signifie que $W_{14}^+ = W_{14}^-$ et $W_{12}^+ = W_{12}^-$. Dans ce cas, les amplitudes $f_0^{\mp,c}$ deviennent :

$$f_0^{+,c} = \lambda^{-2\mu} W_{14}^+ - 1, \quad f_0^{-,c} = \lambda^{-2\mu} W_{12}^+. \quad (3.73)$$

Cherchons maintenant les coefficients de réflexion et de transmission \mathbb{R}_s^c et \mathbb{T}_s^c .

Comme l'interprétation de la fonction d'onde reste la même si on la multiplie par un vecteur constant, on peut poser $\varkappa_s^{\mp,c}(in, -\infty) = 1_s^\mp$, comme nous l'avons fait en (2.87). Dans ces conditions, on vérifiera en utilisant (3.71) que l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise s'écrivent :

$$\Phi_{s,L}^{\mp,inc,c} = 1_s^\mp e^{ikx}, \quad \Phi_{s,L}^{\mp,ref,c} = 1_s^\mp f_s^{-,c} e^{-ikx}, \quad \Phi_{s,L}^{\mp,tr,c} = 1_s^\mp (1 + f_s^{+,c}) e^{ikx}. \quad (3.74)$$

Calculons les courants de probabilité $\vec{j}_s^{inc,c}$, $\vec{j}_s^{ref,c}$ et $\vec{j}_s^{tr,c}$ associés respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise. Comme l'amplitude de l'onde incidente de la gauche soit normalisée à 1, c'est-à-dire $|1_s^\mp|^2 = 1$, nous obtenons :

$$\vec{j}_s^{inc,c} = \frac{k}{m} \vec{i}, \quad \vec{j}_s^{ref,c} = -\frac{k}{m} |f_s^{-,c}|^2 \vec{i}, \quad \vec{j}_s^{tr,c} = \frac{k}{m} |(1 + f_s^{+,c})|^2 \vec{i}. \quad (3.75)$$

Le coefficient de transmission est par définition le rapport du courant transmis et incident. Il est égal à

$$\mathbb{T}_s^c = \left| \frac{\vec{j}_s^{tr,c}}{\vec{j}_s^{inc,c}} \right| = |(1 + f_s^{+,c})|^2 = \frac{1}{4} \left| \lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ + W_{14}^-) \right|^2. \quad (3.76)$$

Le coefficient de réflexion est par définition le rapport du courant réfléchi et incident. Il est égal à

$$\mathbb{R}_s^c = \left| \frac{\vec{j}_s^{ref,c}}{\vec{j}_s^{inc,c}} \right| = |f_s^{-,c}|^2 = \frac{1}{4} \left| \lambda^{-2\mu} \sqrt{(W_{14}^+ - W_{14}^-)^2 + 4W_{12}^- W_{12}^+} \right|^2. \quad (3.77)$$

avec

$$\mathbb{R}_s^c + \mathbb{T}_s^c = 1. \quad (3.78)$$

Enfin, pour calculer les sections efficaces différentielles et totale, utilisons les formes (2.104) et (2.105) trouvées pour σ_s^ε ($\varepsilon(x < 0) = -$ et $\varepsilon(x > 0) = +$) et σ_s^t dans le cas d'une particule de Klein Gordon spin- s en interaction avec un champ électromagnétique localisé. On déduit pour le cas de Cusp.

Pour les sections efficaces différentielles discrètes dans ces deux directions, nous trouvons :

$$\sigma_s^{-,c} = |f_s^{\mp,c}|^2 = \frac{1}{4} \left| \lambda^{-2\mu} \sqrt{(W_{14}^+ - W_{14}^-)^2 + 4W_{12}^- W_{12}^+} \right|^2 \quad (3.79)$$

$$\sigma_s^{+,c} = |f_s^{+,c}|^2 = \frac{1}{4} |\lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ + W_{14}^-) - 1|^2 \quad (3.80)$$

La section efficace totale est la somme des intensités des ondes diffusées en avant et en arrière

$$\sigma_s^{t,c} = \frac{1}{4} \left[|\lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ + W_{14}^-) - 1|^2 + \left| \lambda^{-2\mu} \sqrt{(W_{14}^+ - W_{14}^-)^2 + 4W_{12}^- W_{12}^+} \right|^2 \right]. \quad (3.81)$$

3.2 Étude dans le potentiel barrière

Considérons maintenant comme application des résultats du chapitre-2, le cas d'une particule relativiste de masse m d'énergie E , de charge e et de spin- s , soumise à l'action d'un potentiel scalaire symétrique (potentiel barrière) dont la forme est la suivante

$$V(x) = A_0 = V_0 \theta(a - |x|) \quad \text{et} \quad \vec{A} = \vec{0} \quad (3.82)$$

où V_0 et a sont deux constantes positives. $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside. Le potentiel $V(x)$ varie comme l'indique la figure-2, de la valeur $V(x) \rightarrow 0$ pour $|x| > a$ à la valeur $V = V_0$ pour $|x| < a$.

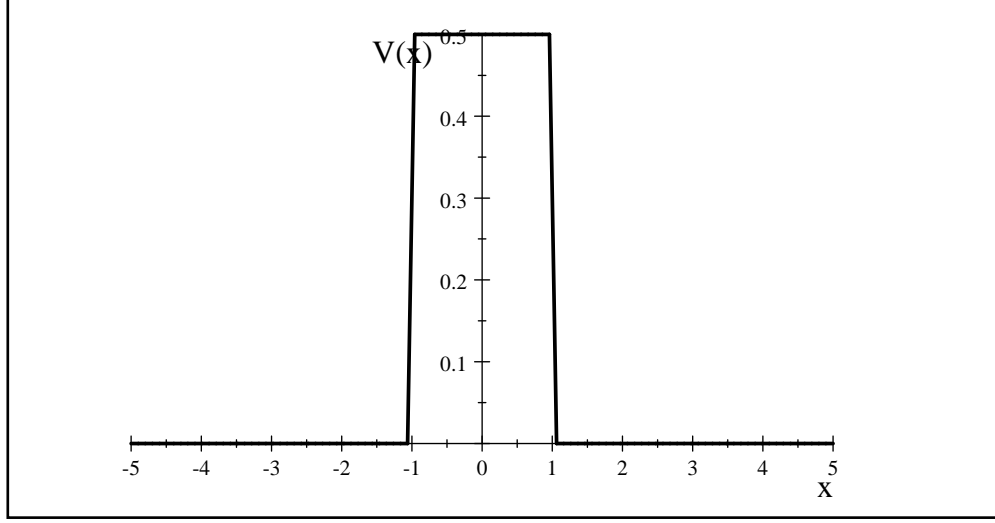


Figure 2 : potentiel barriere pour $a = 1$, $V_0 = 1/2$

La particule est soumise à un potentiel $V(x)$ qui ne dépend pas du temps. Dans ce cas, la fonction $\Phi_s^{\mp,b}(x,t)$ solution de l'équation (3.3), s'écrit sous la forme $\Phi_s^{\mp,b}(x,t) = e^{-iEt}\Phi_s^{\mp,b}(x)$. En portant cette expression dans l'équation (3.3), la variation en fonction du temps se trouve éliminée et on obtient pour $\Phi_s^{\mp,b}(x)$ l'équation stationnaire suivante :

$$\left[D_{KG}^2 \mathbb{I}_{2^{2s}} \pm 2ise(\sigma_1)^{2s} \frac{dV(x)}{dx} \right] \Phi_s^{\mp,b}(x) = 0 \quad (3.83)$$

Afin de découpler l'équation (3.83), introduisons la nouvelle variable

$$\Phi_s^{\mp,b}(x) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \chi_s^{\mp,b}(x), \quad (3.84)$$

et reportons cette expression dans l'équation (3.83), on obtient pour chaque composante de la fonction d'onde $\chi_s^{\mp,b}(x)$ une équation de type Klein-Gordon qui contient en plus un terme décrivant le couplage spin-champ

$$\left[D_{KG}^2 \mathbb{I}_{2^{2s}} \pm 2ies(\sigma_3)^{(2s)} \frac{dV(x)}{dx} \right] \chi_s^{\mp,b}(x) = 0, \quad (3.85)$$

ici, les fonctions $\chi_s^{-,b}(x)$ et $\chi_s^{+,b}(x)$, sont des spineurs à 2^{2s} composantes. D_{KG}^2 est

l'opérateur relatif à l'équation de Klein-Gordon de spin-0, donné par :

$$D_{KG}^2 = \frac{d^2}{dx^2} + (E - eV_0\theta(a - |x|))^2 - m^2. \quad (3.86)$$

Passons maintenant à la résolution de l'équation (3.85) pour le potentiel barrière (3.82).

La variation de l'énergie potentiel $eV(x)$ qui est égale à eV_0 ($V_0 > 0$), dans la région $|x| < a$ et nulle en dehors de cet intervalle. Dans ces conditions, l'équation de Klein Gordon spin-s (3.85), s'écrit :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + E^2 - m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}} \right] \chi_s^{\mp, b}(x) = 0 \quad \text{pour } |x| > a, \quad (3.87)$$

et

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + (E - eV_0)^2 - m^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}} \right] \chi_s^{\mp, b}(x) = 0 \quad \text{pour } |x| < a. \quad (3.88)$$

Nous avons trois régions distinctes dans lesquelles nous devons résoudre l'équation de (KG-s).

Considérons d'abord la région **(I)** quand $x < -a$, la particule est libre (pas de potentiel $V(x) = 0$). Introduisons la notation $k^2 = E^2 - m^2$ ($k > 0$), ce qui permet de récrire (3.85) sous la forme :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}} \right] \chi_s^{\mp, b}(x) = 0 \quad \text{pour } x < -a. \quad (3.89)$$

La solution générale de cette équation différentielle du second ordre est une superposition linéaire arbitraire d'ondes planes :

$$\chi_{s,I}^{\mp, b}(x) = \begin{pmatrix} A_1^{\mp} \\ B_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \begin{pmatrix} A_2^{\mp} \\ B_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx}. \quad (3.90)$$

Quand x est compris entre $-a < x < a$ (région **II**), le potentiel $V(x) = V_0$. On distingue

deux cas selon que $(E - eV_0)^2 - m^2$ est supérieur ou inférieur à 0. Nous ne traiterons ici que le cas $(E - eV_0)^2 - m^2 > 0$, correspondant à des états de diffusion. On introduira la notation $k_1^2 = (E - eV_0)^2 - m^2 > 0$ ($k_1 > 0$), l'équation (3.85) pour les états stationnaires prend la forme :

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_1^2 \right) \mathbb{I}_{2^{2s}} \right] \chi_s^{\mp,b}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad -a \leq x \leq a. \quad (3.91)$$

Sa solution générale est :

$$\chi_{s,II}^{\mp,b}(x) = \begin{pmatrix} C_1^{\mp} \\ D_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + \begin{pmatrix} C_2^{\mp} \\ D_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ik_1 x} \quad (3.92)$$

Enfin, dans la région **(III)** quand $x > a$, le potentiel $V(x)$ est à nouveau identiquement nul. L'équation aux valeurs propres prend une forme absolument analogue à (3.89). Sa solution générale est de la forme :

$$\chi_{s,III}^{\mp,b}(x) = \begin{pmatrix} A_3^{\mp} \\ B_3^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \begin{pmatrix} A_4^{\mp} \\ B_4^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad (3.93)$$

À ce stade, on dispose donc des trois expressions suivantes pour la fonction d'onde, chaque expression étant associée à un intervalle donné pour x :

$$\chi_s^{\mp,b}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_1^{\mp} \\ B_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \begin{pmatrix} A_2^{\mp} \\ B_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} & \text{pour } x \leq -a \\ \begin{pmatrix} C_1^{\mp} \\ D_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + \begin{pmatrix} C_2^{\mp} \\ D_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ik_1 x} & \text{pour } -a \leq x \leq a \\ \begin{pmatrix} A_3^{\mp} \\ B_3^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \begin{pmatrix} A_4^{\mp} \\ B_4^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} & \text{pour } a \leq x \end{cases} \quad (3.94)$$

Insérons toutes ces relations dans (3.84), la solution $\Phi_s(x)$ à $2^{2s} (2s + 1)$ composantes de l'équation de (Klein Gordon spin-s) en présence d'un potentiel scalaire (potentiel

barrière) est :

$$\Phi_s^b(x) = \begin{pmatrix} \Phi_s^{-,b}(x) \\ \Phi_s^{+,b}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right]^{(2s)} \chi_s^{-,b}(x) \\ \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right]^{(2s)} \chi_s^{+,b}(x) \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Notons que les $(A_j^\mp, B_j^\mp, j = 1 \rightarrow 4)$ et $(C_i^\mp, D_i^\mp, i = 1, 2)$ sont des vecteurs à 2^{2s} composantes, qui dépendent de l'énergie E , de la masse m de la particule et des paramètres V_0 et a . Ces vecteurs ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils sont déterminés par les conditions de raccordement de la fonction d'onde $\Phi_s^{\mp,b}(x)$ et de sa dérivée $(\Phi_s^{\mp,b}(x))'$ aux points $x = \pm a$.

Comme le potentiel possède un saut fini, les conditions de raccordement (3.32) et (3.33) sont adéquates.

En écrivant les conditions de continuité de la fonction d'onde $\chi_s^{\mp,b}(x)$ et de sa dérivée en $x = -a$, nous nous obtenons :

$$\chi_s^{\mp,b}(-a^-) = \chi_s^{\mp,b}(-a^+), \quad (3.96)$$

$$\frac{d\chi_s^{\mp,b}(x)}{dx} \Big|_{-a^+} = \frac{d\chi_s^{\mp,b}(x)}{dx} \Big|_{-a^-} \pm 2ise [V_2(-a^+) - V_1(-a^-)] (\sigma_3)^{2s} \chi_s^{\mp,b}(-a). \quad (3.97)$$

Avec $V_1(-a^-) = 0$ et $V_2(-a^+) = V_0$, les deux équations précédentes fournissent un système linéaire pour les deux inconnues C_i^\mp et D_i^\mp ($i = 1, 2$) que l'on peut donc exprimer en fonction de A_j^\mp et B_j^\mp ($j = 1, 2$). On trouve ainsi :

$$\begin{pmatrix} C_1^\mp \\ D_1^\mp \end{pmatrix} e^{-ik_1 a} + \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} e^{ik_1 a} = \begin{pmatrix} A_1^\mp \\ B_1^\mp \end{pmatrix} e^{-ika} + \begin{pmatrix} A_2^\mp \\ B_2^\mp \end{pmatrix} e^{ika}, \quad (3.98)$$

$$k_1 \left\{ \begin{pmatrix} C_1^\mp \\ D_1^\mp \end{pmatrix} e^{-ik_1 a} - \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} e^{ik_1 a} \right\} = k \left\{ \begin{pmatrix} A_1^\mp \\ B_1^\mp \end{pmatrix} e^{-ika} - \begin{pmatrix} A_2^\mp \\ B_2^\mp \end{pmatrix} e^{ika} \right\} \\ \pm 2iseV_0(\sigma_3)^{2s} \left\{ \begin{pmatrix} A_1^\mp \\ B_1^\mp \end{pmatrix} e^{-ika} + \begin{pmatrix} A_2^\mp \\ B_2^\mp \end{pmatrix} e^{ika} \right\}, \quad (3.99)$$

Les conditions de continuité de la fonction d'onde $\chi_s^{\mp,b}$ et de sa dérivée en $x = a$, nous donnent :

$$\chi_s^{\mp,b}(a^-) = \chi_s^{\mp,b}(a^+), \quad (3.100)$$

$$\frac{d\chi_s^{\mp,b}(x)}{dx} \Big|_{a^+} = \frac{d\chi_s^{\mp,b}(x)}{dx} \Big|_{a^-} \pm 2ise [V_2(a^+) - V_1(a^-)] (\sigma_3)^{2s} \chi_s^{\mp,b}(a). \quad (3.101)$$

Nous prenons maintenant $V_1(a^-) = V_0$ et $V_2(a^+) = 0$, les deux équation précédentes fournissent un système linéaire pour A_j^\mp et B_j^\mp ($j = 3, 4$) que l'on peut exprimer en fonction de C_i^\mp et D_i^\mp ($i = 1, 2$) (maintenant connus en fonction de A_j^\mp et B_j^\mp ($j = 1, 2$)) :

$$\begin{pmatrix} A_3^\mp \\ B_3^\mp \end{pmatrix} e^{ika} + \begin{pmatrix} A_4^\mp \\ B_4^\mp \end{pmatrix} e^{-ika} = \begin{pmatrix} C_1^\mp \\ D_1^\mp \end{pmatrix} e^{ik_1 a} + \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} e^{-ik_1 a} \quad (3.102)$$

$$k \left\{ \begin{pmatrix} A_3^\mp \\ B_3^\mp \end{pmatrix} e^{ika} - \begin{pmatrix} A_4^\mp \\ B_4^\mp \end{pmatrix} e^{-ika} \right\} = k_1 \left\{ \begin{pmatrix} C_1^\mp \\ D_1^\mp \end{pmatrix} e^{ik_1 a} - \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} e^{-ik_1 a} \right\} \\ \mp 2iseV_0(\sigma_3)^{2s} \left\{ \begin{pmatrix} C_1^\mp \\ D_1^\mp \end{pmatrix} e^{ik_1 a} + \begin{pmatrix} C_2^\mp \\ D_2^\mp \end{pmatrix} e^{-ik_1 a} \right\} \quad (3.103)$$

En écrivant (3.98), (3.99), (3.102) et (3.103) sous forme matricielle et en effectuant

le produit des matrices, il vient :

$$\begin{pmatrix} \chi_s^{-,b}(out, +\infty) \\ \chi_s^{+,b}(out, +\infty) \\ \chi_s^{-,b}(out, -\infty) \\ \chi_s^{+,b}(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_s^b & 0 & \hat{G}_s^{+,b} & 0 \\ 0 & \hat{D}_s^b & 0 & \hat{G}_s^{-,b} \\ \hat{G}_s^{-,b} & 0 & \hat{D}_s^b & 0 \\ 0 & \hat{G}_s^{+,b} & 0 & \hat{D}_s^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s^{-,b}(in, -\infty) \\ \chi_s^{+,b}(in, -\infty) \\ \chi_s^{-,b}(in, +\infty) \\ \chi_s^{+,b}(in, +\infty) \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

où

$$\chi_s^{\mp,b}(out, +\infty) = \begin{pmatrix} A_3^{\mp} \\ B_3^{\mp} \end{pmatrix}, \quad \chi_s^{\mp,b}(out, -\infty) = \begin{pmatrix} A_2^{\mp} \\ B_2^{\mp} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

$$\chi_s^{\mp,b}(in, +\infty) = \begin{pmatrix} A_4^{\mp} \\ B_4^{\mp} \end{pmatrix}, \quad \chi_s^{\mp,b}(in, -\infty) = \begin{pmatrix} A_1^{\mp} \\ B_1^{\mp} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

et

$$\hat{D}_s^b = \begin{pmatrix} \vartheta_s & 0 \\ 0 & \vartheta_s \end{pmatrix}, \quad \hat{G}_s^{\pm,b} = \begin{pmatrix} \varsigma_s^{\mp} & 0 \\ 0 & \varsigma_s^{\pm} \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Ici, nous avons employé les notations

$$\begin{aligned} \vartheta_s &= \frac{4k_1k}{\xi_s^*}, \quad \varsigma_s^{\mp} = \frac{\eta_s^{\mp}}{\xi_s^*}, \quad \alpha_s^{\mp} = (k_1 + k \mp 2seV_0), \quad \beta_s^{\mp} = (k_1 - k \mp 2seV_0), \\ \xi_s &= [\alpha_s^{\mp}\alpha_s^{\pm}e^{2ik_1a} - \beta_s^{\mp}\beta_s^{\pm}e^{-2ik_1a}] e^{-2ika}, \quad \eta_s^{\mp} = \alpha_s^{\mp}\beta_s^{\pm} [e^{2ik_1a} - e^{-2ik_1a}]. \end{aligned} \quad (3.108)$$

3.2.1 Matrice de diffusion de l'équation de Klein Gordon spin-s dans le potentiel barrière

Ayant déterminé le comportement de la fonction d'onde pour la barrière, construisons la matrice \hat{S}_{KG-s}^b relative à l'équation de Klein Gordon spin -s ($s = 0, 1/2$).

Pour analyser ce problème, nous allons nous appuyer sur les solutions stationnaires

(3.95) de l'équation de (KG-s) correspondant aux états de diffusion. De tels états sont appelés états asymptotiques.

La forme asymptotique à gauche de la fonction d'onde $x \rightarrow -\infty$ et sa forme asymptotique à droite $x \rightarrow +\infty$ est d'après l'équation (3.95) :

$$\Phi_s^{\mp,b}(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \left\{ \begin{pmatrix} A_3^{\mp} \\ B_3^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \begin{pmatrix} A_4^{\mp} \\ B_4^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} \right\} & x \rightarrow +\infty, \\ \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \left\{ \begin{pmatrix} A_1^{\mp} \\ B_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx} + \begin{pmatrix} A_2^{\mp} \\ B_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx} \right\} & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.109)$$

En mettant l'expression de (3.109) sous la forme $\Phi_s^{\mp,b}(x) = \Phi_s^{\mp,in,b}(x) + \Phi_{sb}^{\mp,out}(x)$, et en effectuant quelques calculs simples, on obtient pour les fonctions d'ondes incidente et sortante les expressions suivantes :

$$\Phi_s^{\mp,in,b}(x) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \left\{ \begin{pmatrix} A_4^{\mp} \\ B_4^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx\theta(x)} + \begin{pmatrix} A_1^{\mp} \\ B_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx\theta(-x)} \right\}, \quad (3.110)$$

$$\Phi_s^{\mp,out,b}(x) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \left\{ \begin{pmatrix} A_3^{\mp} \\ B_3^{\mp} \end{pmatrix} e^{ikx\theta(x)} + \begin{pmatrix} A_2^{\mp} \\ B_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{-ikx\theta(-x)} \right\}. \quad (3.111)$$

En comparant le résultat (3.109) avec la formule (2.27), on trouve finalement

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^{-,b}(out, +\infty) \\ \Phi_s^{+,b}(out, +\infty) \\ \Phi_s^{-,b}(out, -\infty) \\ \Phi_s^{+,b}(out, -\infty) \end{pmatrix} = \left[\mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \otimes \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \right] \begin{pmatrix} \chi_s^{-,b}(out, +\infty) \\ \chi_s^{+,b}(out, +\infty) \\ \chi_s^{-,b}(out, -\infty) \\ \chi_s^{+,b}(out, -\infty) \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

et

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^{-,b}(in, -\infty) \\ \Phi_s^{+,b}(in, -\infty) \\ \Phi_s^{-,b}(in, +\infty) \\ \Phi_s^{+,b}(in, +\infty) \end{pmatrix} = \left[\mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \otimes \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \right] \begin{pmatrix} \chi_s^{-,b}(in, -\infty) \\ \chi_s^{+,b}(in, -\infty) \\ \chi_s^{-,b}(in, +\infty) \\ \chi_s^{+,b}(in, +\infty) \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

Puisqu'il est connu d'avance que la matrice \hat{S}_{KG-s}^b qui contient toute l'information quant au processus de diffusion, relie les coefficients $\Phi_s^{\mp,b}(in, \mp\infty)$ des ondes entrantes (se propageant vers la barrière) aux coefficients $\Phi_s^{\mp,b}(out, \pm\infty)$ des ondes sortantes par la relation $\Phi_s^{out,b} = \hat{S}_{KG-s}^b \Phi_s^{in,b}$. Pour déterminer la matrice \hat{S}_{KG-s}^b , des expressions (3.112) et (3.113) déduisons $\chi_s^{\mp,b}(out, \pm\infty)$ et $\chi_s^{\mp,b}(in, \pm\infty)$ respectivement en fonction de $\Phi_s^{\mp}(out, \pm\infty)$ et $\Phi_s^{\mp}(in, \pm\infty)$, insérant le résultat obtenu dans (3.104), nous trouvons :

$$\Phi^{out,b} = \left(\hat{A}_{-s} \hat{B}_{-s} \hat{A}_{-s}^{-1} \right) \Phi^{in,b} = \hat{S}_{KG-s}^b \Phi^{in,b}. \quad (3.114)$$

où \hat{A}_{-s}^{-1} est l'inverse de la matrice \hat{A}_{-s} . \hat{A}_{-s} et \hat{B}_{-s} sont des blocs de matrices de dimension $(2^{(2s+1)}(2s+1) \times 2^{(2s+1)}(2s+1))$, donnés par :

$$\hat{A}_{-s} = \left[\mathbb{I}_{2^{2s(2s+1)}} \otimes \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \right], \quad \hat{B}_{-s} = \begin{pmatrix} \hat{D}_s^b & 0 & \hat{G}_s^{+,b} & 0 \\ 0 & \hat{D}_s^b & 0 & \hat{G}_s^{-,b} \\ \hat{G}_s^{-,b} & 0 & \hat{D}_s^b & 0 \\ 0 & \hat{G}_s^{+,b} & 0 & \hat{D}_s^b \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

Reportons (3.115) dans (3.114), après quelque processus calculatoire qu'il est recommandé de faire pour s'entraîner, comparons le résultat avec (2.31), il vient :

$$\hat{S}_{KG-s}^b = \left(\hat{A}_{-s} \hat{B}_{-s} \hat{A}_{-s}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \check{T}_s^{,b} & 0 & \check{R}_s^{+,b} & 0 \\ 0 & \check{T}_s^{,b} & 0 & \check{R}_s^{-,b} \\ \check{R}_s^{-,b} & 0 & \check{T}_s^{,b} & 0 \\ 0 & \check{R}_s^{+,b} & 0 & \check{T}_s^{,b} \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

où $\check{T}_s^{,b}$ et $\check{R}_s^{\pm,b}$ sont des matrices de dimension $(2^{2s} \times 2^{2s})$. En tenant compte de (3.107), on démontre facilement que ces éléments blocs de matrices sont donnés par :

$$\check{T}_s^{,b} = \begin{pmatrix} t_s^b & 0 \\ 0 & t_s^b \end{pmatrix}, \quad \check{R}_s^{\pm,b} = \begin{pmatrix} r_s^b & \pm \rho_s^b \\ \pm \rho_s^b & r_s^b \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

avec

$$t_s^b = \vartheta_s, \quad r_s^b = \frac{1}{2} (\varsigma_s^- + \varsigma_s^+), \quad \rho_s^b = \frac{1}{2} (\varsigma_s^- - \varsigma_s^+). \quad (3.118)$$

Nous remarquons que pour une particule de spin-0, nous avons $\rho_0^b = 0$. Dans ce cas la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-0}^b de Klein Gordon est symétrique car $\check{R}_0^{+,b} = \check{R}_0^{-,b}$. Elle est pseudo-symétrique pour une particule de spin-1/2 car nous avons $\sigma_3 \check{R}_{1/2}^{+,b} \sigma_3 = \check{R}_{1/2}^{-,b}$. Cette dernière propriété est spécifique au spin des particules.

Enfin, donnons l'expression de la matrice \hat{M}_{KG-s}^b , des déphasages $\delta_s^{l,b}$ ($l = 0, 1$), de la fonction d'onde $\Phi_{s,L}^{\mp,b}(x)$, des coefficients de transmission ou de réflexion \mathbb{T}_s^b et \mathbb{R}_s^b et de la section efficace totale dans le cas du potentiel barrière.

Pour calculer la matrice de diffusion \hat{M}_{KG-s}^b dans la base des ondes partielles, reportons les valeurs des matrices \hat{S}_{KG-s}^b et \hat{U}_s données par les équations (3.116) et (2.74) dans l'équation (2.79), effectuons quelques calculs simples, nous obtenons :

$$\hat{M}_{KG-s}^b = \hat{U}_s \hat{S}_{KG-s}^b \hat{U}_s^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{T}_s^{+,b} & 0 & \bar{R}_s^{+,b} & 0 \\ 0 & \bar{T}_s^{+,b} & 0 & \bar{R}_s^{+,b} \\ \bar{R}_s^{+,b} & 0 & \bar{T}_s^{+,b} & 0 \\ 0 & \bar{R}_s^{+,b} & 0 & \bar{T}_s^{+,b} \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

où

$$\bar{T}_s^{\pm,b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\vartheta_s \pm (\varsigma_s^- + \varsigma_s^+) & 0 \\ 0 & 2\vartheta_s \pm (\varsigma_s^- + \varsigma_s^+) \end{pmatrix}, \quad (3.120)$$

$$\bar{R}_s^{\pm,b} = \pm \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\varsigma_s^- - \varsigma_s^+) \\ (\varsigma_s^- - \varsigma_s^+) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

Passons maintenant à la diagonalisation de la matrice \hat{M}_{KG-s}^b . Pour illustrer ce propos, comme d'habitude, nous écrivons l'équation aux valeurs propres

$$\det \left(\hat{M}_{KG-s}^b - \beta_s^b \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \right) = 0. \quad (3.122)$$

Par un simple calcul, on trouve les valeurs propres associées que l'on met en forme de la façon suivante :

$$\beta_s^{\pm,b} = \vartheta_s \pm \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)} \quad (3.123)$$

Et la matrice diagonale qui représente \hat{S}_{KG-s}^b est la suivante

$$\hat{M}_{KG-s}^b = \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \otimes \begin{pmatrix} \vartheta_s + \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)} & 0 \\ 0 & \vartheta_s - \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)} \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

En utilisant la propriété de conservation du courant (2.74), et en introduisant les

déphasages relatifs aux ondes paires $\delta_s^{0,b}$ et impaires $\delta_s^{1,b}$, on peut finalement exprimer ce résultat sous une forme plus explicite

$$\hat{M}_{KG-s}^b = \mathbb{I}_{2^{2s}(2s+1)} \otimes \begin{pmatrix} e^{2i\delta_s^{0,b}} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_s^{1,b}} \end{pmatrix}, \quad (3.125)$$

et comparons cette expression avec (3.124), il vient

$$e^{2i\delta_s^{l,b}} = \vartheta_s + (-1)^l \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)}, \quad l = 0, 1. \quad (3.126)$$

Pour la fonction d'onde, considérons le cas d'une particule venant de la gauche. La présence du potentiel donne lieu, à gauche, à deux ondes $e^{\pm ikx}$ incidente et réfléchie, caractérisées par leurs amplitudes. A droite il a seulement une onde émergente c'est-à-dire $A_4^\mp = B_4^\mp = 0$. Dans ces conditions, comme pour le potentiel de Cusp, nous avons $\chi_s^{\mp,b}(in, +\infty) = i\chi_s^{\mp,b}(in, -\infty)$.

En tenant compte de ces hypothèses, la forme asymptotique à gauche de la fonction d'onde $\Phi_{s,L}^{\mp,b}(x)$ (arrivée de $-\infty$), s'écrit :

$$\Phi_{s,L}^{\mp,b}(x) = \begin{cases} [e^{ikx} + f_s^{-,b} e^{-ikx}] \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \begin{pmatrix} A_1^\mp \\ B_1^\mp \end{pmatrix} & x \rightarrow -\infty, \\ [(1 + f_s^{+,b}) e^{ikx}] \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \begin{pmatrix} A_1^\mp \\ B_1^\mp \end{pmatrix} & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.127)$$

où $f_s^{\mp,b}$ sont les amplitudes de diffusion d'une particule de Klein Gordon spin-s en interaction avec la barrière de potentiel, données par :

$$f_s^{+,b} = \vartheta_s - 1, \quad f_s^{-,b} = \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)} \quad (3.128)$$

Tournons-nous maintenant vers les coefficients de transmission \mathbb{T}_s^b et de réflexion \mathbb{R}_s^b pour la barrière. Pour calculer ces coefficients, procédent de la même manière que pour

le cas du potentiel de Cusp, de façon que l'amplitude de l'onde incidente de la gauche soit normalisée, c'est-à-dire $\mathcal{A}_s^{\mp,b}(in, -\infty) = 1_s^{\mp}$ (avec $|1_s^{\mp}| = 1$). On obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_{s,L}^{\mp,inc,b} &= 1_s^{\mp} e^{ikx}, & \Phi_{s,L}^{\mp,ref,b} &= 1_s^{\mp} f_s^{-,b} e^{-ikx}, \\ \Phi_{s,L}^{\mp,tr,b} &= 1_s^{\mp} (1 + f_s^{+,b}) e^{ikx}.\end{aligned}\tag{3.129}$$

Il est évident que les coefficients de transmission \mathbb{T}_s^b et de réflexion \mathbb{R}_s^b pour la barrière se déduisent de la même manière que pour le cas du potentiel de Cusp.

Calculons les courants de probabilité $\vec{j}_s^{inc,b}$, $\vec{j}_s^{ref,b}$ et $\vec{j}_s^{tr,b}$ associés respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise. Comme l'amplitude de l'onde incidente de la gauche soit normalisée à 1, c'est-à-dire $|1_s^{\mp}|^2 = 1$, on obtient :

$$\vec{j}_s^{inc,b} = \frac{k}{m} \vec{i}, \quad \vec{j}_s^{ref,b} = -\frac{k}{m} |f_s^{-,b}|^2 \vec{i}, \quad \vec{j}_s^{tr,b} = \frac{k}{m} |(1 + f_s^{+,b})|^2 \vec{i}.\tag{3.130}$$

Le coefficient de transmission est par définition le rapport du courant transmis et incident. Il est égal à

$$\mathbb{T}_s^b = \left| \frac{\vec{j}_s^{tr,b}}{\vec{j}_s^{inc,b}} \right| = |(1 + f_s^{+,b})|^2 = |\vartheta_s|^2.\tag{3.131}$$

En insérant l'expression de ϑ_s , donnée par l'équation (3.108) dans (3.131), nous obtenons

$$\mathbb{T}_s^b = \frac{4k_1^2 k^2}{4k_1^2 k^2 + [k_1^2 - (k + 2seV_0)^2] [k_1^2 - (k - 2seV_0)^2] \sin^2(2k_1 a)}\tag{3.132}$$

Le coefficient de réflexion est par définition le rapport du courant réfléchi et incident. Il est égal à

$$\mathbb{R}_s^b = \left| \frac{\vec{j}_s^{ref,b}}{\vec{j}_s^{inc,b}} \right| = |f_s^{-,b}|^2 = \left| \sqrt{\zeta_s^- \zeta_s^+} \right|^2.\tag{3.133}$$

Insérons aussi les expressions de ζ_s^- et ζ_s^+ , données par l'équation (3.108) dans (3.133),

nous obtenons

$$\mathbb{R}_s^b = \frac{[k_1^2 - (k + 2seV_0)^2] [k_1^2 - (k - 2seV_0)^2] \sin^2(2k_1a)}{4k_1^2k^2 + [k_1^2 - (k + 2seV_0)^2] [k_1^2 - (k - 2seV_0)^2] \sin^2(2k_1a)} \quad (3.134)$$

avec

$$\mathbb{R}_s^b + \mathbb{T}_s^b = 1. \quad (3.135)$$

Notons, que le coefficient de transmission \mathbb{T}_s^b de la barrière en fonction de sa largeur $2a$ oscille de manière périodique entre sa valeur minimale $4k_1^2k^2 [4k_1^2k^2 + [k_1^2 - (k + 2seV_0)^2] [k_1^2 - (k - 2seV_0)^2] \sin^2(2k_1a)]^{-1}$ et sa valeur maximale, qui est 1. Il apparaît des résonances chaque fois que $2a$ est un multiple entier de la demi-longueur d'onde π/k_1 (ou $2ak_1 = n\pi$) dans la région **II**.

Enfin, pour calculer les sections efficaces partielles $\sigma_s^{\pm,b}$ et totale $\sigma_s^{t,b}$. Substituant l'expression (3.128) dans les formules (2.104) et (2.105), il vient :

$$\sigma_s^{+,b} = |f_s^{+,b}|^2 = |\vartheta_s - 1|^2, \quad \sigma_s^{-,b} = |f_s^{-,b}|^2 = \left| \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)} \right|^2, \quad (3.136)$$

et

$$\sigma_s^{t,b} = \sigma_s^{+,b} + \sigma_s^{-,b} = |\vartheta_s - 1|^2 + \left| \sqrt{(\varsigma_s^- \varsigma_s^+)} \right|^2 = 2(1 - \text{Re } \vartheta_s), \quad (3.137)$$

où

$$\text{Re } \vartheta_s = \frac{4k_1^2k^2 \cos 2k_1a \cos 2ka + 8k_1k (k_1^2 + k^2 - 4s^2e^2V_0^2) \sin 2k_1a \sin 2ka}{[k_1^2 - (k + 2seV_0)^2] [k_1^2 - (k - 2seV_0)^2] \sin^2(2k_1a)}. \quad (3.138)$$

3.2.2 Diffusion par effet tunnel

L'effet tunnel est au même titre que la quantification de l'énergie une prédiction spectaculaire de la mécanique quantique. Il désigne la propriété que possède un objet quantique de franchir une barrière de potentiel même si son énergie est inférieure à

l'énergie minimale requise pour franchir cette barrière. Ainsi, bien que l'énergie de la particule soit plus faible que la hauteur de la barrière, il y a malgré tout une probabilité non nulle pour que la particule puisse se trouver à l'intérieur de cette barrière. C'est un phénomène évidemment non classique mais analogue à la traversée d'ondes évanescentes en optique dans des milieux absorbants de faible épaisseur [46].

L'effet tunnel fut prédit dès le début de la mécanique quantique, et mis en évidence dès la fin des années 30 pour expliquer différents phénomènes (Fowler/Nordheim 1928 pour l'extraction d'électrons d'un métal sous l'effet d'un champ électrique fort, Gamow 1928 pour la radioactivité α , Frenkel 1930 sur la résistance de contact entre deux matériaux conducteurs). Les microscopes à effet tunnel développés depuis les années 1980 reposent sur cette possibilité appliquée aux électrons [10, 11]. Ce phénomène de pénétration dans les régions inaccessibles classiquement est encore plus spectaculaire si on considère une barrière finie de hauteur eV_0 et de largeur $2a$.

Nous discutons maintenant l'expression (3.132) du coefficient de transmission et comparons ses prédictions à celles obtenues en mécanique classique.

Classiquement, un tel effet est absolument impossible du point de vue énergétique : une particule classique d'énergie E ne peut jamais traverser une barrière de potentiel dont la hauteur est supérieure à l'énergie E . En effet, le mouvement d'une particule dans ce potentiel est extrêmement simple. Si E est l'énergie de la particule incidente que l'on suppose provenir de la gauche, elle subit une brusque décélération lors de son arrivée sur la barrière. La conservation de l'énergie permet d'écrire ;

$$E = T_I = T_{II} + eV_0 \tag{3.139}$$

où T_I et T_{II} sont les énergies cinétiques de la particule si elle se trouve dans les régions I ($V(x) = 0$) ou II ($V(x) = V_0$). Il s'ensuit que $T_{II} = E - eV_0$. Ainsi, si l'énergie E est supérieure à eV_0 ($E \geq eV_0$), la particule classique incidente de la gauche sur la barrière de potentiel est instantanément freinée, mais continue sa route avec une vitesse moindre et se retrouve donc à droite de la barrière de potentiel avec certitude. À l'opposé, si l'énergie

E est inférieure à eV_0 ($E < eV_0$), la particule classique rebondit élastiquement sur le mur et repart en arrière (puisqu'alors $T_{II} < 0$, ce qui est impossible). La probabilité est nulle de la trouver à droite de la barrière.

Contrairement au traitement classique, $\mathbb{T}_s^b \rightarrow 0$ pour $E < eV_0$; la théorie quantique relativiste montre donc que dans les deux cas suivants ($E \ll eV_0$ et $(E - eV_0)^2 - m^2 < 0$), il y a une probabilité de transmission non nulle à travers la barrière.

Pour mettre en évidence l'effet en question; partant des équations (3.132) et (3.134), et après substitution de $k^2 = (E^2 - m^2)$ et $k_1^2 = ((E - eV_0)^2 - m^2)$, nous obtenons :

$$\mathbb{T}_s^b = \frac{1}{1 + \Omega \left(\frac{eV_0}{2k_1k} \right)^2 \sin^2(2k_1a)}, \quad (3.140)$$

et

$$\mathbb{R}_s^b = \frac{\Omega \left(\frac{eV_0}{2k_1k} \right)^2 \sin^2(2k_1a)}{1 + \Omega \left(\frac{eV_0}{2k_1k} \right)^2 \sin^2(2k_1a)}. \quad (3.141)$$

avec,

$$\Omega = [(1 - 4s^2) [(1 - 4s^2) (eV_0)^2 + 4E(E - eV_0)] + 16s^2m^2] \quad (3.142)$$

Examinons tout d'abords le cas $E \ll eV_0$. À partir de l'équations (3.140), et en prenant l'approximation, tout à fait justifiée, pour une barrière haute $E \ll eV_0$, nous avons

$$\frac{1}{\Omega \left(\frac{eV_0}{2k_1k} \right)^2} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4(E^2 - m^2)} [(1 - 4s^2) eV_0^2 + 16s^2m^2]}, \quad (3.143)$$

dans ce cas l'expression (3.140) se simplifie, on obtient la relation :

$$\mathbb{T}_s^b \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{4(E^2 - m^2)} [(1 - 4s^2) eV_0^2 + 16s^2m^2] \sin^2(2k_1a)} \neq 0. \quad (3.144)$$

Examinant maintenant le cas $(E - eV_0)^2 - m^2 < 0$, c'est à dire k_1 est maintenant imaginaire pur. Dans ce cas, la solution (3.95) est encore valable pour la région $|x| > a$. Par contre dans la région $|x| < a$, cette fois nous pouvons toujours écrire $\pm \sqrt{(E - eV_0)^2 - m^2} = \pm iK$, où $K = \sqrt{m^2 - (E - eV_0)^2}$ et l'équation (3.95) devient

$$\Phi_s^{\mp,b}(x) = \left(\left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{(2s)} \bar{\chi}_s^{\mp,b}(x) \right) \theta(a - |x|), \quad (3.145)$$

où $\bar{\chi}_s^{\mp,b}(x)$ est obtenue en remplaçant dans $\chi_s^{\mp,b}(x)$ k_1 par iK , il vient :

$$\bar{\chi}_s^{\mp,b}(x) = \begin{pmatrix} C_1^{\mp} \\ D_1^{\mp} \end{pmatrix} e^{-Kx} + \begin{pmatrix} C_2^{\mp} \\ D_2^{\mp} \end{pmatrix} e^{Kx} \quad (3.146)$$

Si on calcule la densité de courant, avec (3.145), dans la région $|x| < a$ l'exponentielle est réelle et il n'y a plus de courant, c'est-à-dire

$$\vec{J}_s^b(x) = \vec{0}. \quad (3.147)$$

Pour mettre en évidence l'effet en question ; les relations de continuité écrites à propos des états non-liés de la barrière de potentiel restent valables et il suffit, si on souhaite les expliciter, de prendre en compte que le fait que maintenant $k_1 = iK$. Les relations de continuité se traduisent toujours par (3.104), mais comme k_1 est maintenant imaginaire pur $\cos(ix) = \cosh(x)$, $\sin(ix) = i \sinh(x)$. Dans ces conditions, les coefficients de transmission \mathbb{T}_s^b et de réflexion \mathbb{R}_s^b sont toujours donnés par les équations (3.140) et (3.141).

$$\mathbb{T}_s^b = \frac{1}{1 + \Omega\Gamma}, \quad \mathbb{R}_s^b = \frac{\Omega\Gamma}{1 + \Omega\Gamma} \quad (3.148)$$

avec

$$\Gamma = \frac{(eV_0)^2 \sinh^2(2Ka)}{4(E^2 - m^2)(m^2 - (E - eV_0)^2)}. \quad (3.149)$$

Le résultat de l'équation (3.148) nous indique que le coefficient de transmission $\mathbb{T}_s^b \neq 0$, la particule a une probabilité non nulle de franchir la barrière de potentiel même si $(E - eV_0)^2 - m^2 < 0$, un résultat tout à fait contraire à la physique classique. C'est ce qu'on appelle l'*effet tunnel*. Sous la barrière de potentiel, l'onde est évanescente, elle va comme e^{-Kx} avec une portée de l'ordre de $1/K$. Pour pouvoir observer l'effet tunnel, il faut que la portée de l'onde soit plus grande que la largeur de la barrière. On doit donc avoir $1/K \gtrsim 2a$.

L'effet tunnel relativiste, dit aussi effet tunnel de Klein, peut être expliqué par le même argument donné dans le paradoxe de Klein [10, 11], ie, la création de paires. En fait, à partir de la valeur critique du potentiel $V_c = E + m$ ou plutôt quand $V \rightarrow \infty$, les particules non relativistes ne peuvent pénétrer la barrière de potentiel à l'opposé des particules relativistes qui la traversent grâce à ce phénomène de création (combinaison des particules et antiparticules).

Lorsque $2Ka \gg 1$, on a :

$$\mathbb{T}_s^b \simeq \frac{4(E^2 - m^2)(m^2 - (E - eV_0)^2)e^{-2Ka}}{\Omega(eV_0)^2}. \quad (3.150)$$

la probabilité de traverser la barrière par effet tunnel décroît alors exponentiellement avec l'épaisseur de celle-ci.

Dans les deux situations $(E - eV_0)^2 - m^2 > 0$ et $(E - eV_0)^2 - m^2 < 0$, la théorie quantique impose que la particule soit simultanément transmise et réfléchi par l'obstacle. Cette réflexion-transmission simultanée constitue un comportement qui tranche avec la mécanique classique :

- il faut tout d'abord comprendre ce phénomène comme le fait qu'en interagissant avec la barrière, la fonction d'onde se sépare en deux composantes : une qui continue sa course vers la droite, et une qui revient vers la gauche. La particule quantique perd son unité, et son état après l'interaction est une superposition de deux états transmis et réfléchi ;

- ensuite, même avec une énergie inférieure à la hauteur de la barrière, une fraction

de la particule est capable, au moins en partie, de poursuivre sa route vers la droite. Plus fort encore, la fonction d'onde, et donc, la probabilité de présence, ne sont pas nulles dans la zone $|x| < a$ où l'énergie est pourtant inférieure au potentiel $V(x)$. Cela serait parfaitement inconcevable en mécanique classique. Pour autant, la théorie quantique autorise la particule à faire des excursions modérées dans ces zones interdites. Ces phénomènes sont désignés sous le terme d'effet tunnel.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le contenu de ce manuscrit, concerne en général le traitement de certains problèmes de la mécanique quantique relativiste via le formalisme de la matrice de diffusion.

Sur le plan de la forme, la thèse comporte une introduction et trois chapitres, clairement rédigés ; suivis d'une conclusion.

Le premier chapitre a été consacré à une analyse bibliographique, dans laquelle nous traitons l'équation de Klein-Gordon, première candidate pour satisfaire simultanément les exigences relativistes et les postulats quantiques et passage obligé pour aboutir à une autre équation quantique et relativiste, l'équation de Dirac. Les difficultés d'interprétation de l'équation de Klein-Gordon, en particulier l'existence de solutions d'énergies négatives, et les conséquences qui en découlent sont bien rappelées, de même que le passage vers une équation qui tient compte du couplage avec le champ électromagnétique.

Le second chapitre, est composé essentiellement de deux parties. Dans la première partie, nous avons unifié l'équation de Klein Gordon pour les particules de spin-0 et l'équation de Dirac pour les particules de spin-1/2 en une seule équation d'onde relativiste dite équation de Klein Gordon de spin- s ($s = 0, 1/2$) des particules en interaction avec un champ électromagnétique extérieur. Dans la deuxième partie, en se basant sur les états stationnaire de diffusion d'une particule de (KG- s) en présence d'un champ électromagnétique localisé, nous avons construit le formalisme de la matrice de diffusion de Klein Gordon spin- s à une dimension. Le formalisme y est bien exposé et les considérations de symétrie C_s , P_s et T_s et les conséquences qui en émergent sur les fonctions d'ondes et par de là sur la matrice de diffusion sont rappelés.

Pour envisager les changements minimaux dans le développement asymptotique exact du cas libre, la méthode des déphasages est utilisée, et nous a permis d'extraire les déphasages, les amplitudes de diffusion, les coefficients de réflexion et de transmission, ainsi que la section efficace totale.

Enfin, le dernier chapitre est dédié à l'application du formalisme de la matrice de diffusion pour les particules relativistes de spin- s en interaction avec des potentiels scalaires

ayant quelques propriétés de symétrie et de portée.

Ce chapitre est composé essentiellement de deux parties. Dans la première partie, nous avons solutionné l'équation de Klein Gordon spin- s pour ($s=0$ ou $1/2$), dans le potentiel de Cusp. La solution a été donnée sous forme analytique utilisant les fonctions de Whittaker. Les bonnes conditions de raccordement ont été déterminées dans le cas général. Dans le cas d'un saut de potentiel, la présence de la fonction delta de Dirac a modifié la forme des conditions de raccordement. Du Comportement asymptotique, nous avons tiré la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s}^c . En utilisant la base des ondes partielles (représentation des ondes partielles, ondes paire et impaire), nous avons donné l'expression de la matrice \hat{M}_{KG-s}^c , des déphasages $\delta_s^{l,c}$ ($l = 0, 1$), de la fonction d'onde, des amplitudes de diffusion $f^{\pm,c}$, les coefficients de transmission ou de réflexion \mathbb{T}_s^c et \mathbb{R}_s^c , ainsi que la section efficace totale $\sigma^{t,c}$ dans le cas du potentiel de Cusp.

La même méthode a été adoptée pour le cas du potentiel barrière et nous a permis de calculer la fonction d'onde, la matrice de diffusion \hat{S}_{KG-s}^b , la matrice \hat{M}_{KG-s}^b dans la base des ondes partielles, les déphasages $\delta_s^{l,b}$ ($l = 0, 1$), les amplitudes de diffusion $f^{\pm,b}$, les coefficients de transmission ou de réflexion \mathbb{T}_s^b et \mathbb{R}_s^b , ainsi que la section efficace totale $\sigma_s^{t,b}$.

Dans le cas de la barrière de potentiel, nous avons abordé le problème de l'effet tunnel. Nous avons montré que dans les deux cas suivants $E \ll eV_0$ et $(E - eV_0)^2 - m^2 < 0$, la théorie quantique autorise la particule à faire des excursions modérées dans les régions inaccessibles classiquement. Le coefficient de transmission \mathbb{T}_s^b ne s'annule pas et montre la possibilité d'existence de création de paire : c'est l'effet tunnel de Klein. Il a été en outre montré que pour certaines valeurs du potentiel, on obtient un effet de résonance relatif à la transmission.

Cette approche s'est révélée rigoureuse et nous a permis d'avoir des résultats concordant avec ceux de la littérature.

Bibliographie

- [1] R. Omnès, Comprendre la mécanique quantique, (EDP Sciences 2000).
- [2] E. Durand, Mécanique quantique (Particule dans un champ), Équation de Schrödinger, Tome-1, (Masson, 1976).
- [3] A. Messiah, Mécanique quantique, Tome-2, (Dunod, 1995).
- [4] E. Durand, Mécanique quantique (Particule dans un champ), Théorie relativiste des particules de spin zéro, Tome-2, (Masson, 1976).
- [5] E. Durand, Mécanique quantique (Particule dans un champ), Théorie relativiste des particules à spin, Tome-3, (Masson, 1976).
- [6] F.A. Reuse, Électrodynamique et optique quantique, (Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007).
- [7] V. M. Villalba, L Gonzalez-Arraga, Tunneling and transmission resonances of a Dirac particle by a double barrier, arXiv :1001.4712v1 26 (2010).
- [8] P. J. M. Bongarts, S. N. M. Ruijsenaars, The Klein Paradox as a Many Particle Problem, Annals of physics 101, 289–318 (1976).
- [9] V. M. Villalba and W Greiner, Transmission resonances and supercritical states in a one dimensional cusp potential. Phys. Rev. A 67 052707 (2003).
- [10] A. Wachter, Relativistic Quantum Mechanics, (Springer Science + Business Media B.V, 2011).
- [11] J. D. Jackson, Electrodynamique classique : Cours et exercices d'électromagnétisme, (Dunod, 2001).

- [12] E. J. Konopinski, Electromagnetic fields and relativistic particles, (McGraw-Hill Book Company, 1981).
- [13] L. Landau, E. Lifchitz, Physique Théorique, Tome I Mécanique, (Editions Mir Moscou, 1969).
- [14] H. Goldstein, Mécanique classique, (Presses Universitaires de France, 1964).
- [15] L. Landau, E. Lifchitz, Physique Théorique, Tome-3. Mécanique quantique, (Editions Mir Moscou, 1977).
- [16] W. Pauli, V. Weisskopf, Helv. On Quantization of the Scalar Relativistic Wave Equation. , Phys. Acta, 7, 709 (1934).
- [17] C. Itzykson and J. B. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill Inc, 1980).
- [18] A. Lahiri, B. Palash Pal, A first book of quantum field theory, (Narosa Publishing House, 2004).
- [19] L. Mario, O. Benhar, Relativistic quantum mechanics, An introduction to relativistic quantum fields, (CRC Press Taylor&Francis Group, 2016).
- [20] C. D. Anderson, and Neddermeyer, S. H. Positron from gamma rays. Phys. Rev. 43 (1933).
- [21] W. Greiner, Relativistic Quantum Mecanics, (Sperling, Berlin 1990), p.26.
- [22] L. Landau, E. Lifchitz, Électrodynamique quantique Physique théorique, (Editions Mir Moscou, 2012).
- [23] N. N. Bogoiubov and D. V. Shirkov, Quantum Fields, (Library of Congress Cataloging in Publication Data, U.S.A, 1982).
- [24] Z. Anton . Capri, Relativistic quantum mechanics and introduction to quantum fields theory, (World Scientific, 2002).
- [25] K. S. Krane, Introductory nuclear physics, (John Wiley & Sons, Inc, 2001).
- [26] A. Klimov, Nuclear physics and nuclear reactors, (Mir Publisher Moscow, 1975).

- [27] J. L. Basdevant, J. Rich, M. Spiro, *Énergie nucléaire*, (Édition de l'école polytechnique, 2009).
- [28] K. Khounfais, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Scattering matrix for Fehbach-Villars equation for spin 0 and 1/2 : Woods-Saxon potential, *Czechoslovak J. physics.* 54. 7 (2004). pp. 697-792.
- [29] Y. Nogami and C. K. Ross. Scattering from a nonsymmetric potential in one dimension as a coupledchannel problem, *Am. J. Phys.* 64 (1996) 923.
- [30] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique, Tome-2*, (Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 2007).
- [31] A. Messiah, *Mécanique quantique, Tome-1*, (Dunod, 2003).
- [32] T. Das, Exact Solutions of the Klein-Gordon Equation for q-Deformed Manning-Rosen Potential via Asymptotic Iteration Method *The African Review of Physics* 11 :0034 (2016).
- [33] A. N. Ikot H. Hassanabadi E. Etuk1 B H Yazarloo and S Zarrinkamar *The African Review of Physics* 9 :0031 (2014).
- [34] D. A. Nugraha A Suparmi C Cari and B Nur Pratiwi *J of Phys :Conf. Series* 795 (2017) A.
- [35] T. Ohlsson, *Relativistic quantum mechanics from advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory*, (Cambridge university press, 2011).
- [36] V. G. Bagrov, D. Gitman, *The Dirac Equation and its Solutions*, (Walter de Gruyter & Co, 2014).
- [37] K. A. Kiers and W. van Dijk. Scattering in one dimension : The coupled Schrödinger equation, threshold behaviour and Levinson's theorem, *J. Math. Phys.* 37 (12), (1996).
- [38] N. Nelipa, *Physique des particules élémentaires*, (Édition Mir Moscou, 1977).

- [39] R. G. Newton, Scattering Theory of Waves and Particles, (Springer, 1982).
- [40] N. Zettili, Quantum mechanics : concepts and applications, (John Wiley & Sons, LTD, 2001).
- [41] J.H. Eberly. Quantum Scattering Theory in One Dimension, Am. J. Phys. 33 :771, (1965).
- [42] B. Stec and C. Jedrzejek. Resonance scattering by a double square-well potential, Eur. J. Phys. 11 :75, (1990).
- [43] M. Abramowitz and I. A. Stegun Handbook of Mathematical Functions (New York : Dover) (1965)
- [44] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark NIST Handbook of Mathematical Functions (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [45] W. W. Bell, Special functions for scientists and engineers, (D. Van Nostrand Company Canada, Ltd, 1968).
- [46] F. de Fornel, Les ondes évanescentes en optique et en optoélectronique, (Eyrolles, 1999).

Annexes

Scattering Matrix Formalism for Spin s ($s=0, 1/2$) Particles

Soumia Ayeche Hamraoui¹, Kamel Khounfais²

LRPCSI University 20 août 1955 Skikda, BP-26, 21000 Skikda, Algeria.

Email: soumiahamraoui@yahoo.fr

In this work, we consider the problem of a relativistic spin- s ($0, 1/2$) particles interacting with a one-dimensional symmetrical scalar potential using the spin- s Klein Gordon equation. In the scattering case, we construct the formalism of scattering matrix for the spin- s Klein Gordon relativistic particle in a symmetric potential. Through the scattering matrix, we can derive the phase shift, the scattering amplitude and consequently reflection and transmission coefficients. Finally, we applied the results obtained to a symmetric scalar potential; this potential is that of cusp.

1. Introduction

The study of scattering plays a very important role in modern physics because it offers valuable insights into the nature of the interactions between particles coming into contact. This theory finds its origins in theories of classical and quantum mechanics. In classical physics, the state of the incoming (free) particle is entirely determined by its momentum, which is equally true for the outgoing particle. At the quantum level, it is not generally possible to predict with certainty which end state will result from a given collision. We are therefore only trying to predict the probabilities for a certain final state. The problem is to establish the relation between the initial state Ψ^{in} and the final state Ψ^{out} . In quantum mechanics, the knowledge scattering operator \hat{S} allows us to determine the final state Ψ^{out} from any initial state Ψ^{in} . The corresponding mathematical object is the scattering matrix \hat{S} , the S-matrix can be defined as the matrix that transforms the coefficients of the incoming waves into those of the outgoing waves $\Psi^{out} = \hat{S}\Psi^{in}$.

The purpose of this article is to address some scattering problems of relativistic particles of spin- s ($s=0, 1/2$) interacting with a symmetric scalar potential. The one-dimensional scattering problem has been studied in terms of the S-matrix by a number of authors (see, for example, [1-6]).

The manuscript has four sections. The second section introduces the spin- s Klein Gordon formalism for a charged particle coupled to an electromagnetic field. The spin- s Klein Gordon equation combines Klein Gordon and Dirac equations; Klein Gordon equation is used to describe spin zero particles [7] whereas the Dirac equation for the spin $1/2$ particles in relativistic quantum mechanics [8, 9]. In the third section, we express the scattering properties in terms of the S-matrix and determine the element of scattering matrix by using $C_s P_s T_s$ symmetry and the charge conservation. From scattering matrix, we drew phase shifts, the scattering amplitude, and reflection and transmission coefficients for

a symmetrical scalar potential. In the fourth section, the results and discussion are presented. Finally, in the fifth section, we present analytical solution of the spin- s Klein-like many studies [10-15], the exact solutions to spin- s , the Gordon equation with a Cusp potential in one dimension, where the Klein Gordon equation are given in terms of Whittaker's functions. In the scattering case, we obtain the scattering matrix, phase shifts the scattering amplitude and hence the reflection and transmission coefficients for the Cusp potential.

2. The Klein Gordon formalism for spin- s particles

In relativistic quantum mechanics, the Klein Gordon and the Dirac equation describe the massive particles of spin 0 and $1/2$, respectively. In presence of an electromagnetic field, $A_\mu(A_0, \vec{A})$ the Klein Gordon equation is given by ($\hbar = c = 1$)

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right\} \Psi_0(\vec{r}, t) = 0, \quad (1)$$

The Dirac equation is given by

$$(\not{p} - e\not{A} - m)\Psi_{1/2}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2)$$

Where, $\vec{r} = (x, y, z)$, A_0 and \vec{A} are the four-vector A_μ . $\not{p} - e\not{A} = \gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)$ and γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) are gamma matrices.

By making the substitution

$$\Psi_s(\vec{r}, t) = (\not{p} - e\not{A} + m)^{2s} \Phi_s(\vec{r}, t), \quad s = 0, \frac{1}{2} \quad (3)$$

If we adopt the following notation for any matrix A

$$(A)^{2s} = \begin{cases} 1 & \text{for } s = 0 \\ A & \text{for } s = 1/2, \end{cases} \quad (4)$$

In this case, Eqns. (1) and (2) can be expressed by a single relation, called the spin- s Klein Gordon (KG- s) equation

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right] I_{2^{2s}(2s+1)} + s e (\sigma F)^{2s} \right\} \Phi_s(\vec{r}, t) = 0, \quad (5)$$

Here, $\Phi_s(\vec{r}, t)$ is a wave function with $2^{2s}(2s+1)$ components and $I_{2^{2s}(2s+1)}$ is the identity matrix of dimension $2^{2s}(2s+1)$ and F is the electromagnetic tensor defined by the components $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ and $\sigma F = \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ with $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

For $s = 0$, Eqn. (5) reduces to the Klein-Gordon equation and for $s = 1/2$; we obtain the quadratic form of Dirac equation (or Klein-Gordon spin-1/2). Moreover, starting from Eqn. (5), we define a continuity equation:

$$\frac{\partial J_s^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = 0, \quad (6)$$

Where, J_s^0 and \vec{J}_s are given by:

$$J_s^0 = \frac{1}{2im} \left[\bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) \left(\frac{\partial \Phi_s(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_s(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) \Phi_s(\vec{r}, t) \right] \quad (7)$$

$$+ \frac{e}{m} A^0 \bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) \Phi_s(\vec{r}, t),$$

And

$$\vec{J}_s = \frac{1}{2im} \left[\bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) (\vec{\nabla} \Phi_s(\vec{r}, t)) - (\vec{\nabla} \bar{\Phi}_s(\vec{r}, t)) \Phi_s(\vec{r}, t) \right] \quad (8)$$

$$+ \frac{e}{m} A \bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) \Phi_s(\vec{r}, t),$$

Here, $\bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) = (\Phi_s(\vec{r}, t))^\dagger (\gamma^0)^{2s}$ denotes the adjoint and $(\Phi_s(\vec{r}, t))^\dagger = ((\Phi_s(\vec{r}, t)))^Y$.

In addition, the scalar product is defined by

$$\langle \Phi_s | \Phi_s \rangle = \int \bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + eA^0 \right) \Phi_s(\vec{r}, t) \right] \quad (9)$$

$$- \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right) \bar{\Phi}_s(\vec{r}, t) \right] \Phi_s(\vec{r}, t) d^3r.$$

If we write $\Phi_s(\vec{r}, t) = (\Phi_s^-(\vec{r}, t), \Phi_s^+(\vec{r}, t))^T$, and choose for the γ^μ the Weyl representation [16]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Where, $\Phi_s^-(\vec{r}, t)$ and $\Phi_s^+(\vec{r}, t)$ are a wave function with 2^{2s} components, and $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ are the usual Pauli matrices. With this representation, Eqn. (5) decomposes into a system of two coupled equations:

$$\begin{pmatrix} H_s^-(\vec{r}, t) & 0 \\ 0 & H_s^+(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(\vec{r}, t) \\ \Phi_s^+(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (11)$$

Here,

$$H_s^\mp(\vec{r}, t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0 \right)^2 - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + m^2 \right] I_{2^{2s}} \quad (12)$$

$$\mp 2ise(\vec{\sigma})^{2s} (\vec{E} \pm i\vec{B})$$

\vec{E} and \vec{B} are the electric and magnetic fields. After giving the elements constituting the Klein Gordon formalism for spin- s particles, let us now turn to the construction of the one-dimensional scattering matrix \hat{S}_{KG-s} .

3. Scattering matrix in a symmetrical potential

We consider a relativistic particle of mass m , energy E , spin- s and charge e in a one-dimensional model moving under the effect of a symmetrical scalar potential

$A_0(x, t) = V(x)$ and with infinite behavior $V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. In this case, \vec{E} and \vec{B} become:

$$\vec{E} = -\frac{dV(x)}{dx} \vec{1}, \quad \vec{B} = \vec{0}, \quad (13)$$

So, the system of equations (Eqn. (11)) is written as follows

$$\begin{pmatrix} H_s^-(x, t) & 0 \\ 0 & H_s^+(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(x, t) \\ \Phi_s^+(x, t) \end{pmatrix} = 0, \quad (14)$$

Here,

$$H_s^\mp(x, t) = \left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - eV(x) \right)^2 + \frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right] I_{2^{2s}} \quad (15)$$

$$\pm 2ise(\sigma_1)^{2s} \frac{dV(x)}{dx}.$$

As the potential $V(x)$ is time independent, we can write the solutions of Eqn. (14) under the form $\Phi_s^\mp(x, t) = e^{-iEt} \Phi_s^\mp(x)$, consequently, $\Phi_s^\mp(x)$ satisfies

$$\left\{ D_{KG}^2 I_{2^{2s}} \pm 2ies(\sigma_1)^{2s} \frac{dV(x)}{dx} \right\} \Phi_s^\mp(x) = 0. \quad (16)$$

$D_{KG}^2 = \frac{d^2}{dx^2} + (E - eV(x))^2 - m^2$ is the operator relative to KG-0.

At great distance from the diffuser $V(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, the asymptotic form of the wave functions $\Phi_{s,L}^\mp(x)$ (arrival of $(-\infty)$) and $\Phi_{s,R}^\mp(x)$ (arrival of $(+\infty)$), corresponding to scattering states ($E^2 - m^2 > 0$), can be written [5, 6, 17] as

$$\Phi_{s,L}^\mp(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_s e^{ikx} + R_{s,L} e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ T_{s,L} e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad (17)$$

$$\Phi_{s,R}^{\mp}(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_s e^{-ikx} + R_{s,R} e^{+ikx} & x \rightarrow +\infty \\ T_{s,R} e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (18)$$

Where, $\mathbf{1}_s = (\mathbf{1}_s^-, \mathbf{1}_s^+)^T$ is unit vector of $2^{2s}(2s+1)$ components $T_{s,L}, T_{s,R}, R_{s,L}$ and $R_{s,R}$ are vectors of $2^{2s}(2s+1)$ components.

Now, examine the general problem. The stationary wave function of Eqn. (16) [5, 6] and [17] is written as

$$\Phi_s^{\mp}(x) = \begin{cases} \Phi_s^{\mp}(out, +\infty) e^{ikx} + \Phi_s^{\mp}(in, +\infty) e^{-ikx} & x \rightarrow +\infty \\ \Phi_s^{\mp}(in, -\infty) e^{ikx} + \Phi_s^{\mp}(out, -\infty) e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (19)$$

Where, $\Phi_s^{\mp}(in, out, \pm\infty)$ are vectors with 2^{2s} components, and $k = \sqrt{E^2 - m^2}$.

Let us consider that the incoming and outgoing parts of the wave function $\Phi_s^{\mp}(x)$ are given by:

$$\begin{cases} \Phi_s^{\mp, in}(x) = \Phi_s^{\mp}(in, -\infty) e^{ikx} \theta(-x) + \Phi_s^{\mp}(in, +\infty) e^{-ikx} \theta(x) \\ \Phi_s^{\mp, out}(x) = \Phi_s^{\mp}(out, -\infty) e^{-ikx} \theta(-x) + \Phi_s^{\mp}(out, +\infty) e^{ikx} \theta(x) \end{cases} \quad (20)$$

By definition the matrix \hat{S}_{KG-s} connects $\Phi_s^{out}(x)$ to $\Phi_s^{in}(x)$ [5, 6] by

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^-(out, +\infty) \\ \Phi_s^+(out, +\infty) \\ \Phi_s^-(out, -\infty) \\ \Phi_s^+(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{13} & \hat{S}_{14} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} & \hat{S}_{24} \\ \hat{S}_{31} & \hat{S}_{32} & \hat{S}_{33} & \hat{S}_{34} \\ \hat{S}_{41} & \hat{S}_{42} & \hat{S}_{43} & \hat{S}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(in, -\infty) \\ \Phi_s^+(in, -\infty) \\ \Phi_s^-(in, +\infty) \\ \Phi_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Here \hat{S}_{ij} are matrices of dimension 2^{2s} . In the case of spin 0, the system reduce to

$$\begin{pmatrix} \Phi_0(out, +\infty) \\ \Phi_0(out, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{13} \\ \hat{S}_{31} & \hat{S}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0(in, -\infty) \\ \Phi_0(in, +\infty) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Where, $\Phi_0(in, out, \pm\infty)$ are coefficients.

Eqns. (21) and (22) can be unified into the following formula

$$\Phi_s(out) = \hat{S}_{KG-s} \Phi_s(in), \quad (23)$$

Where, the vectors $\Phi_s(in, out)$ and the \hat{S}_{KG-s} the matrix has respectively the dimension $2^{2s+1}(2s+1)$.

In fact, matrices \hat{S}_{ij} are not all independent but verify some constraints derived from general conditions reflecting the symmetry of the KG-s equation. Consider $C_s P_s T_s$ symmetry is the product of three fundamental operators: parity P_s , time reversal T_s and charge conjugation C_s , these operators are characterized by the following properties:

$$C_s C_s^{-1} = P_s P_s^{-1} = T_s T_s^{-1} = I_{2^{2s}(2s+1)} \quad (24)$$

Any operator is determined at a phase factor closure, we will take afterwards $\eta_c = \eta_p = \eta_t = i$, so that

$$|\eta_c|^2 = |\eta_p|^2 = |\eta_t|^2 = 1$$

Firstly, we apply the operator P_s , which transforms $(x, t) \rightarrow (-x, t)$; by changing $x \rightarrow -x$ in Eqn. (14), we get:

$$\begin{pmatrix} H_s^-(-x, t) & 0 \\ 0 & H_s^+(-x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(-x, t) \\ \Phi_s^+(-x, t) \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

Multiplying Eqn. (25) on the left by P_s , and using Eqn. (24), we find

$$P_s \begin{pmatrix} H_s^-(-x, t) & 0 \\ 0 & H_s^+(-x, t) \end{pmatrix} P_s^{-1} P_s \begin{pmatrix} \Phi_s^-(-x, t) \\ \Phi_s^+(-x, t) \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Posing

$$\Phi_s^p(x, t) = P_s \Phi_s(-x, t) = P_s \begin{pmatrix} \Phi_s^-(-x, t) \\ \Phi_s^+(-x, t) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$\Phi_s^p(x, t)$ is a solution of Eqn. (14) if P_s satisfies the condition

$$P_s \begin{pmatrix} H_s^-(-x, t) & 0 \\ 0 & H_s^+(-x, t) \end{pmatrix} P_s^{-1} = \begin{pmatrix} H_s^-(x, t) & 0 \\ 0 & H_s^+(x, t) \end{pmatrix} \quad (28)$$

This condition is true if $P_s = i(\gamma^0)^{2s}$.

Using Eqn. (19) and Eqn. (27) we move $\Phi_s(x, t)$ to $\Phi_s^p(x, t)$ and making the following changes:

$$\begin{aligned} \Phi_s^{\mp}(out, \pm\infty) &\leftrightarrow i\Phi_s^{\pm}(out, \mp\infty), \\ \Phi_s^{\mp}(in, \pm\infty) &\leftrightarrow i\Phi_s^{\pm}(in, \mp\infty). \end{aligned} \quad (29)$$

and transporting this last expression in (21), we find

$$\begin{aligned} \hat{S}_{11} = \hat{S}_{44}, \hat{S}_{33} = \hat{S}_{22}, \hat{S}_{12} = \hat{S}_{43}, \hat{S}_{31} = \hat{S}_{24}, \\ \hat{S}_{13} = \hat{S}_{42}, \hat{S}_{23} = \hat{S}_{32}, \hat{S}_{21} = \hat{S}_{34}, \hat{S}_{41} = \hat{S}_{14}. \end{aligned} \quad (30)$$

Let us perform again operation T_s , which changes $(x, t) \rightarrow (x, -t)$; by changing $t \rightarrow -t$, and taking the conjugate complex of Eqn. (14), we find

$$\begin{pmatrix} (H_s^-(x, -t))^* & 0 \\ 0 & (H_s^+(x, -t))^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Phi_s^-(x, -t))^* \\ (\Phi_s^+(x, -t))^* \end{pmatrix} = 0. \quad (31)$$

Multiplying (31) on the left by T_s , and using (24) we obtain

$$T_s \begin{pmatrix} (H_s^-(x, -t))^* & 0 \\ 0 & (H_s^+(x, -t))^* \end{pmatrix} T_s^{-1} T_s \begin{pmatrix} (\Phi_s^-(x, -t))^* \\ (\Phi_s^+(x, -t))^* \end{pmatrix} = 0, \quad (32)$$

Putting

$$\Phi_s^T(x, t) = T_s \Phi_s^*(x, -t) = T_s \begin{pmatrix} (\Phi_s^-(x, -t))^* \\ (\Phi_s^+(x, -t))^* \end{pmatrix} \quad (33)$$

$\Phi_s^T(x, t)$ satisfies Eqn. (14), if T_s satisfies the condition:

$$T_s \begin{pmatrix} (H_s^-(x,-t))^* & 0 \\ 0 & (H_s^+(x,-t))^* \end{pmatrix} T_s^{-1} = \begin{pmatrix} H_s^-(x,t) & 0 \\ 0 & H_s^+(x,t) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Eq. (34) is satisfied by the operator $T_s = i(\gamma^1 \gamma^3)^{2s}$.

From (19) and (33), we can go from $\Phi_s(x,t)$ to $\Phi_s^T(x,t)$ by carrying out the following change:

$$\begin{aligned} \Phi_s^T(out, \pm\infty) &\leftrightarrow -(\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^T(in, \pm\infty))^*, \\ \Phi_s^T(in, \pm\infty) &\leftrightarrow -(\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^T(out, \pm\infty))^*. \end{aligned} \quad (35)$$

Finally, let us apply the operator C_s , which transforms $e \rightarrow -e$; by changing $e \rightarrow -e$, and taking the Hermitian conjugate of Eqn. (14), we find

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^-(x,t) \\ \Phi_s^+(x,t) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} H_s^-(x,t) & 0 \\ 0 & H_s^+(x,t) \end{pmatrix} = 0. \quad (36)$$

Multiplying (36) by $(\gamma^0)^{2s}$ from the right and using $((\gamma^0)^{2s})^2 = I_{2^{2s}(2s+1)}$, we get

$$\bar{\Phi}_s(x,t) \begin{pmatrix} H_s^+(x,t) & 0 \\ 0 & H_s^-(x,t) \end{pmatrix} = 0, \quad (37)$$

Transposing Eqn. (37) and multiplying it from the left by C_s , we obtain

$$C_s \begin{pmatrix} H_s^+(x,t) & 0 \\ 0 & H_s^-(x,t) \end{pmatrix} C_s^{-1} C_s \begin{pmatrix} \Phi_s^-(x,t) \\ \Phi_s^+(x,t) \end{pmatrix} (\gamma^0)^{2s} = 0, \quad (38)$$

Suppose

$$\Phi_s^C(x,t) = C_s \bar{\Phi}_s^T(x,t) = C_s \begin{pmatrix} \Phi_s^-(x,t) \\ \Phi_s^+(x,t) \end{pmatrix} (\gamma^0)^{2s}, \quad (39)$$

for $\Phi_s^C(x,t)$ to be a solution to Eqn. (14), C_s must satisfy the conditions:

$$C_s \begin{pmatrix} H_s^+(x,t) & 0 \\ 0 & H_s^-(x,t) \end{pmatrix} C_s^{-1} = \begin{pmatrix} H_s^-(x,t) & 0 \\ 0 & H_s^+(x,t) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

Eqn. (40) is verified by $C_s = i(\gamma^2 \gamma^0)^{2s}$.

Using Eqns. (19) and (39), we move from $\Phi_s(x,t)$ to $\Phi_s^C(x,t)$ through the following changes

$$\begin{aligned} \Phi_s^T(out, \pm\infty) &\leftrightarrow \mp i (\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^T(in, \pm\infty))^*, \\ \Phi_s^T(in, \pm\infty) &\leftrightarrow \mp i (\sigma_2)^{2s} (\Phi_s^T(out, \pm\infty))^*. \end{aligned} \quad (41)$$

Combining Eqns. (29), (35), (41) and (21) we obtain

$$S_{12} = S_{21} = S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32} = S_{34} = S_{43} = \mathbf{0}. \quad (42)$$

In addition, charge conservation gives:

$$\langle \Phi_s^{out} | \Phi_s^{out} \rangle = \langle \Phi_s^{in} | \Phi_s^{in} \rangle. \quad (43)$$

The last equation leads to the next relationship

$$(I_{2^{2s}} \otimes (\gamma^0)^{2s}) \hat{S}_{KG-s}^\dagger (I_{2^{2s}} \otimes (\gamma^0)^{2s}) \hat{S}_{KG-s} = I_{2^{2s+1}(2s+1)}, \quad (44)$$

with $\hat{S}_{KG-s}^\dagger = (\hat{S}_{KG-s}^*)^T$, and \otimes being the tensor product.

By combining the relations deduced from, the invariances with respect to the operations P_s, T_s, C_s and the charge conservation, we obtain the final form of the scattering matrix of a spin- s ($s=0, 1/2$) relativistic particle in a symmetrical potential:

$$\hat{S}_{KG-s} = \begin{pmatrix} T_s^+ & 0 & R_s^+ & 0 \\ 0 & T_s^- & 0 & R_s^- \\ R_s^- & 0 & T_s^- & 0 \\ 0 & R_s^+ & 0 & T_s^+ \end{pmatrix} \quad (45)$$

T_s^\mp and R_s^\mp are matrices to $(2^{2s} \times 2^{2s})$ are given by:

$$\begin{aligned} T_s^+ &= \begin{pmatrix} t_s^- & t_s^+ \\ t_s^+ & t_s^- \end{pmatrix}, T_s^- = \begin{pmatrix} t_s^- & -t_s^+ \\ -t_s^+ & t_s^- \end{pmatrix}, \\ R_s^+ &= \begin{pmatrix} r_s^- & r_s^+ \\ r_s^+ & r_s^- \end{pmatrix}, R_s^- = \begin{pmatrix} r_s^- & -r_s^+ \\ -r_s^+ & r_s^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (46)$$

t_s^\pm and r_s^\pm are functions generally dependent on the potential shape.

For $s=0$ noting that $t_s^+ = r_s^+ = 0$, so $T_0^+ = T_0^-$ and $R_0^+ = R_0^-$, in this case \hat{S}_{KG-0} is symmetrical. For $s=1/2$ we get $(\sigma_3)(T_{1/2}^\pm)(\sigma_3) = T_{1/2}^\mp$ and $(\sigma_3)(R_{1/2}^\pm)(\sigma_3) = R_{1/2}^\mp$, so $\hat{S}_{KG-1/2}$ is pseudo-symmetrical. These latter properties are specific to the spinning particle.

Let us now express the matrix \hat{S}_{KG-s} in the partial wave basis, even and odd waves. To illustrate this, we apply the unitary transformation [5, 6]

$$\begin{pmatrix} \chi_s^-(in, -\infty) \\ \chi_s^+(in, -\infty) \\ \chi_s^-(in, +\infty) \\ \chi_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{2^{2s}} & 0 & I_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & I_{2^{2s}} & 0 & I_{2^{2s}} \\ iI_{2^{2s}} & 0 & -iI_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & iI_{2^{2s}} & 0 & -iI_{2^{2s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(in, -\infty) \\ \Phi_s^+(in, -\infty) \\ \Phi_s^-(in, +\infty) \\ \Phi_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix} \quad (47)$$

And

$$\begin{pmatrix} \chi_s^-(out, -\infty) \\ \chi_s^+(out, -\infty) \\ \chi_s^-(out, +\infty) \\ \chi_s^+(out, +\infty) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{2^{2s}} & 0 & I_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & I_{2^{2s}} & 0 & I_{2^{2s}} \\ iI_{2^{2s}} & 0 & -iI_{2^{2s}} & 0 \\ 0 & iI_{2^{2s}} & 0 & -iI_{2^{2s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^-(out, -\infty) \\ \Phi_s^+(out, -\infty) \\ \Phi_s^-(out, +\infty) \\ \Phi_s^+(out, +\infty) \end{pmatrix} \quad (48)$$

Where, $\chi_s^\mp(in, \pm\infty)$ and $\chi_s^\mp(out, \pm\infty)$ are vectors with 2^{2s} components. By combining Eqns. (47), (48) and (21) it comes to:

$$\begin{pmatrix} \chi_s^-(out, +\infty) \\ \chi_s^+(out, +\infty) \\ \chi_s^-(out, -\infty) \\ \chi_s^+(out, -\infty) \end{pmatrix} = M_{KG-s} \begin{pmatrix} \chi_s^-(in, -\infty) \\ \chi_s^+(in, -\infty) \\ \chi_s^-(in, +\infty) \\ \chi_s^+(in, +\infty) \end{pmatrix} \quad (49)$$

Where, M_{KG-s} is the scattering matrix in the partial wave base. Using Eqn. (44) we obtain

$$M_{KG-s} = I_{2^s} \otimes \begin{pmatrix} \exp(i\delta_s^0) & 0 \\ 0 & \exp(i\delta_s^1) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

Here δ_s^l , $l=0,1$ represents respectively the phase shift of the event and odd waves, given by:

$$\exp(i\delta_s^l) = t_s^- + (-1)^l \sqrt{(r_s^+)^2 + (r_s^-)^2} - (r_s^+)^2. \quad (51)$$

For the wave function, let's combine Eqns. (47) and (48) with Eqn. (21) and insert the result in Eqn. (19) to obtain the following:

$$\Phi_s^\mp(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_s^\mp(in, -\infty) \psi_s^0(x) + \chi_s^\mp(in, +\infty) \psi_s^1(x)], \quad (52)$$

With

$$\psi_s^l(x) = 2(i\varepsilon)^l e^{i\delta_s^l} \left[\cos\left(k|x| + \delta_s^l + \frac{l\pi}{2}\right) \right], \quad l=0,1, \quad (53)$$

Where, $\varepsilon = +(-)$ according to $x > 0$ ($x < 0$).

For a particle spreads $-\infty \rightarrow +\infty$, with (19), $\Phi_s^\mp(in, +\infty) = 0$, in these conditions $\chi_s^\mp(in, +\infty) = i\chi_s^\mp(in, -\infty)$. So, Eqn. (52) becomes

$$\Phi_{s,L}^\mp(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \chi_s^\mp(in, -\infty) [e^{ikx} + f_s^- e^{-ikx}] & x \rightarrow -\infty \\ \sqrt{2} \chi_s^\mp(in, -\infty) [e^{ikx} + (1 + f_s^+) e^{ikx}] & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (54)$$

with f_s^\mp are the scattering amplitude, given by:

$$f_s^\mp = f_s^0 \mp f_s^1, \quad f_s^l = \frac{1}{2} (e^{2i\delta_s^l} - 1) = ie^{i\delta_s^l} \sin \delta_s^l, \quad l=0,1. \quad (55)$$

To calculate the reflection and transmission coefficients we use Eqns. (54) and (55) to get

$$\begin{aligned} T_s &= |1 + f_s^+|^2 = \frac{1}{4} |e^{2i\delta_s^0} + e^{2i\delta_s^1}|^2, \\ R_s &= |f_s^-|^2 = \frac{1}{4} |e^{2i\delta_s^0} - e^{2i\delta_s^1}|^2. \end{aligned} \quad (56)$$

4. Application

We will consider as application of the previous results the case of a relativistic particle of mass m , energy E , spin- s and charge e diffused by the Cusp's potential, defined by [10]:

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad (57)$$

Where, V_0 and a are real positives. Here, V_0 represents the height of the potential and the parameter a defines the shape of the potential.

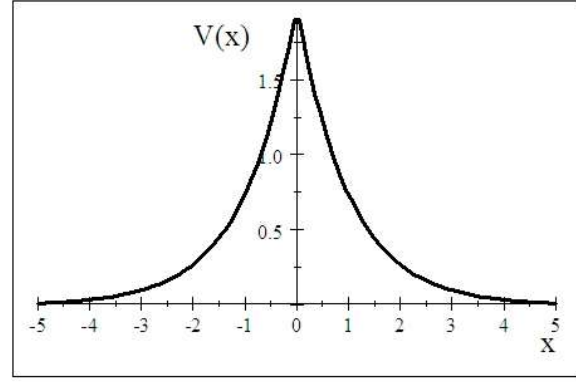


Figure 1: Cusp Potential for $a = 1$, $V_0 = 2$

In the limiting case, $a \rightarrow 0$, this potential reduces to a repulsive delta interaction of strength $2aV_0$ [10]. On the other hand, this potential models an attractive center where $V(x) \rightarrow 0$ for $|x| \rightarrow \infty$ to $V(x) \rightarrow V_0$ for $x \rightarrow 0$. This is an atom model (Coulomb potential) [10].

The particle is subjected to a time-independence and in this case the solution of Eqn. (14) is written as $\Phi_s^{\mp,c}(x,t) = e^{-iEt} \Phi_s^{\mp,c}(x)$, consequently, $\Phi_s^{\mp,c}(x)$ satisfies

$$\left\{ D_{KG}^{2,c} I_{2^s} \pm 2ies(\sigma_1)^{2s} \frac{d}{dx} (V_0 e^{-\frac{|x|}{a}}) \right\} \Phi_s^{\mp,c}(x) = 0. \quad (58)$$

Where, $D_{KG}^{2,c} = \frac{d^2}{dx^2} + (E - eV_0 e^{-\frac{|x|}{a}})^2 - m^2$. To decouple the system Eqn. (58) uses the following transformation

$$\Phi_s^{\mp,c}(x) = \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{2s} \chi_s^\mp(x), \quad V(x) = V_0 e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad (59)$$

We now obtain

$$\left[D_{KG}^{2,c} I_{2^s} \pm 2ise(\sigma_3)^{2s} \frac{d}{dx} (V_0 e^{-\frac{|x|}{a}}) \right] \chi_s^\mp(x) = 0. \quad (60)$$

We treat here the case ($E^2 - m^2 > 0$), corresponding to scattering states. Since there is an absolute value for variable x , let us distinguish as usual the two regions $x < 0$ and $x > 0$.

For $x < 0$, by the change of variable $y = 2iaV_0 e^{x/a}$, we transform the system (Eqn. (60)) into

$$\left\{ y \frac{d}{dy} \left(y \frac{d}{dy} \right) - \left(iaE - \frac{y}{2} \right)^2 + m^2 a^2 \right\} I_{2^s} \pm s(\sigma_3)^{2s} y \chi_s^\mp(x) = 0. \quad (61)$$

We now introduce the change $\chi_s^\mp(x) = y^{-\frac{1}{2}} f_s^\mp(y)$ and we obtain for $f_s^\mp(y)$ a Whittaker equation [20, 21]

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} + \frac{iaE}{y} + \frac{1/4 - (ia\sqrt{E^2 - m^2})^2}{y^2} \right\} I_{2^s} \pm \frac{s(\sigma_3)^{2s}}{y} f_s^\mp(y) = 0, \quad (62)$$

The solution of which is a combination of Whittaker's

functions

$$f_s^\mp(y) = \begin{pmatrix} C_1^\mp M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y) + C_2^\mp M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y) \\ D_1^\mp M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y) + D_2^\mp M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y) \end{pmatrix} \quad (63)$$

Where, $M_{\kappa_s^\pm, \pm\mu}(y)$, κ_s^\pm and μ are given by:

$$M_{\kappa_s^\pm, \pm\mu}(y) = y^{1/2 \pm \mu} e^{-y/2} {}_1F_1(1/2 - \kappa_s^\pm \pm \mu, 1 \pm 2\mu, y), \quad (64)$$

$$\kappa_s^\pm = iaE \pm s, \quad \mu = iak.$$

and ${}_1F_1(1/2 - \kappa_s^\pm \pm \mu, 1 \pm 2\mu, y)$ is the confluent hypergeometric function [20, 21].

As we proceed to the other region $x > 0$, and by making the change $y = 2iaV_0 e^{-x/a}$ and replacing $\chi_s^\mp(x)$ by $y^{\pm 1/2} g_s^\mp(y)$, we arrive at an equation similar to Eqn. (62)

$$\left\{ \left[\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} + \frac{iaE}{y} + \frac{1/4 - (ia\sqrt{E^2 - m^2})^2}{y^2} \right] I_{2s} \pm \frac{s(\sigma_3)^{2s}}{y} \right\} g_s^\mp(y) = 0, \quad (56)$$

which also has for solutions

$$g_s^\mp(y) = \begin{pmatrix} C_3^\mp M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y) + C_4^\mp M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y) \\ D_3^\mp M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y) + D_4^\mp M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y) \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Solutions of Eqns. (63) and (66) can be grouped together into a single equation including solutions relative to $x < 0$ and $x > 0$

$$\zeta_s^\mp(x) = f_s^\mp(y)\theta(-x) + g_s^\mp(y)\theta(x), \quad (67)$$

with $y = 2iaV_0 e^{-x/a}$ and $\theta(x)$ is the Heaviside function.

The stationary solution of Eqn. (58) is finally

$$\Phi_s^c(x) = \begin{pmatrix} \Phi_s^-(x) \\ \Phi_s^+(x) \end{pmatrix} = y^{-\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{2s} \zeta_s^-(y) \\ \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{2s} \zeta_s^+(y) \end{pmatrix}. \quad (68)$$

In addition, constants C_j^\mp and D_j^\mp ($j = 1 \rightarrow 4$) are not completely independent but are interconnected by the continuity condition of the wave function and its first derivative in the vicinity of zero point $x = 0$ or $y = 2iaV_0 = \lambda$. To determine these conditions, let us return to the KG-s Eqn. (58) and examined what happens near a point x_0 where the potential $V(x)$ has a jump of the form

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x) & \text{for } x < x_0 \\ V_2(x) & \text{for } x > x_0 \end{cases} \quad (69)$$

with

$$\frac{dV(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{dV_1(x)}{dx} & \text{for } x < x_0 \\ [V_2(x_0^+) - V_1(x_0^-)]\delta(x - x_0) & \text{for } x = x_0 \\ \frac{dV_2(x)}{dx} & \text{for } x > x_0 \end{cases}$$

(70) $\delta(x - x_0)$ is the delta function. Let us integrate Eqn. (58)

on the domain $[x_0^-, x_0^+]$ we get:

$$\Phi_s^{\mp,c}(x_0^+) = \Phi_s^{\mp,c}(x_0^-) \quad (71)$$

$$\frac{d\Phi_s^{\mp,c}(x_0^+)}{dx} = \frac{d\Phi_s^{\mp,c}(x_0^-)}{dx} \pm 2ise[V_2(x_0^+) - V_1(x_0^-)](\sigma_3)_s^{2s} \Phi_s^{\mp,c}(x_0) \quad (72)$$

By applying the continuity conditions given by Eqns. (71) and (72) to $x = 0$, a simple calculation yields

$$C_1^\mp = C_2^\mp W_{12}^\mp + C_4^\mp W_{14}^\mp, \quad C_3^\mp = C_2^\mp W_{32}^\mp + C_4^\mp W_{34}^\mp \quad (73)$$

$$D_1^\mp = D_2^\mp W_{12}^\mp + D_4^\mp W_{14}^\mp, \quad D_3^\mp = D_2^\mp W_{32}^\mp + D_4^\mp W_{34}^\mp$$

Where, the coefficients are defined as follows:

$$W_{12}^\mp = W_{34}^\pm = -\frac{F_1^\mp(F_2^\pm)' + F_2^\pm(F_1^\mp)'}{(F_1^\mp F_1^\pm)}, \quad (74)$$

$$W_{14}^\mp = W_{32}^\pm = \frac{F_2^\mp(F_1^\pm)' - F_1^\pm(F_2^\mp)'}{(F_1^\mp F_1^\pm)}.$$

F_1^\mp , F_2^\mp , (F_1^\mp) and (F_2^\mp) are defined by

$$(F_1^\mp) = [M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y)]_{y=\lambda} = y^{1/2-\mu} F_1(1/2+\mu, 1+2\mu, y),$$

$$(F_2^\mp) = [M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y)]_{y=\lambda} = y^{1/2+\mu} F_1(1/2-\mu, 1-2\mu, y),$$

$$(F_1^\mp) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \kappa_s^\pm\right) M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y) + \left(\frac{1}{2} - \mu + \kappa_s^\pm\right) M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y), \quad (75)$$

$$(F_2^\mp) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \kappa_s^\pm\right) M_{\kappa_s^\pm, \mu}(y) + \left(\frac{1}{2} + \mu + \kappa_s^\mp\right) M_{\kappa_s^\pm, -\mu}(y).$$

To calculate the scattering matrix \hat{S}_{KG-s}^c , we first look for the asymptotic behavior of the stationary wave function $\Phi_s^{\mp,c}(x)$ at very great distance $|x| \rightarrow \infty$ or again for $y \rightarrow 0$. By virtue of the known formula ${}_1F_1(a, b, 0) = 1$, and $M_{\kappa_s^\pm, \pm\mu}(y \rightarrow 0) \rightarrow y^{1/2 \pm \mu} e^{-y/2}$ [20], the stationary wave function is written:

$$\Phi_s^{\mp,c}(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{2s} \left[\lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_i^+ \\ D_i^+ \end{pmatrix} e^{ikx} + \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_i^- \\ D_i^- \end{pmatrix} e^{-ikx} \right] & x \rightarrow +\infty \\ \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^{2s} \left[\lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_i^- \\ D_i^- \end{pmatrix} e^{ikx} + \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_i^+ \\ D_i^+ \end{pmatrix} e^{-ikx} \right] & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (76)$$

Comparing only (76) with (19) we obtain:

$$\Phi_s^{\mp,c}(in, -\infty) = \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_i^+ + D_i^+ \\ C_i^- - D_i^- \end{pmatrix}, \quad \Phi_s^{\mp,c}(in, +\infty) = \lambda^\mu \begin{pmatrix} C_i^+ + D_i^+ \\ C_i^- - D_i^- \end{pmatrix},$$

$$\Phi_s^{\mp,c}(out, -\infty) = \lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_i^+ + D_i^+ \\ C_i^- - D_i^- \end{pmatrix}, \quad \Phi_s^{\mp,c}(out, +\infty) = \lambda^{-\mu} \begin{pmatrix} C_i^+ + D_i^+ \\ C_i^- - D_i^- \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Substituting $\Phi_s^{\mp,c}(out, \mp\infty)$ and $\Phi_s^{\mp,c}(in, \mp\infty)$ given by Eqn. (77) in Eqn. (21) and using Eqns. (73), (45) and

(46), we can determine \hat{S}_{KG-s} for Cusp potential:

$$\begin{pmatrix} \Phi_s^{-,c}(out,+∞) \\ \Phi_s^{+,c}(out,+∞) \\ \Phi_s^{-,c}(out,-∞) \\ \Phi_s^{+,c}(out,-∞) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_s^{+,c} & 0 & R_s^{+,c} & 0 \\ 0 & T_s^{-,c} & 0 & R_s^{-,c} \\ R_s^{-,c} & 0 & T_s^{-,c} & 0 \\ 0 & R_s^{+,c} & 0 & T_s^{+,c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s^{-,c}(in,-∞) \\ \Phi_s^{+,c}(in,-∞) \\ \Phi_s^{-,c}(in,+∞) \\ \Phi_s^{+,c}(in,+∞) \end{pmatrix} \quad (78)$$

Where,

$$\left. \begin{aligned} T_s^{+,c} &= \begin{pmatrix} t_s^{-,c} & t_s^{+,c} \\ t_s^{+,c} & t_s^{-,c} \end{pmatrix}, T_s^{-,c} = \begin{pmatrix} t_s^{-,c} & -t_s^{+,c} \\ -t_s^{+,c} & t_s^{-,c} \end{pmatrix}, \\ t_s^{\bar{c}} &= \frac{1}{2} \lambda^{-2\mu} (W_{14}^+ \pm W_{14}^-), \\ R_s^{+,c} &= \begin{pmatrix} r_s^{-,c} & r_s^{+,c} \\ r_s^{+,c} & r_s^{-,c} \end{pmatrix}, R_s^{-,c} = \begin{pmatrix} r_s^{-,c} & -r_s^{+,c} \\ -r_s^{+,c} & r_s^{-,c} \end{pmatrix}, \\ r_s^{\bar{c}} &= \frac{1}{2} \lambda^{-2\mu} (W_{12}^+ \pm W_{12}^-) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

$t_s^{\bar{c}}$ and $r_s^{\bar{c}}$ are functions of E, V_0 and m .

Finally, let us give the expression of the matrix M_{KG-s}^c , of the phase shift ($\delta_s^{l,c}$), of the wave function and the transmission and reflection coefficients in the case of Cusp potential. Using the reasoning previously exposed for the treatment of a symmetrical potential $V(x) = V(-x)$, for matrix M_{KG-s} , Eqn. (50) gives

$$M_{KG-s}^c = I_2 \otimes \begin{pmatrix} \exp(i\delta_s^{0,c}) & 0 \\ 0 & \exp(i\delta_s^{1,c}) \end{pmatrix} \quad (80)$$

Where,

$$\exp(i\delta_s^{l,c}) = t_s^{-,c} + (-1)^l \sqrt{(t_s^{+,c})^2 + (r_s^{-,c})^2 - (r_s^{+,c})^2}. \quad (81)$$

To calculate the wave function, substituting Eqn. (81) into Eqn. (55), the result into Eqn. (54), we find

$$\Phi_{s,l}^{\bar{c}}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \chi_s^{\bar{c}}(in,-∞) [e^{ikx} + f_s^{-,c} e^{-ikx}] & x \rightarrow -∞ \\ \sqrt{2} \chi_s^{\bar{c}}(in,-∞) [e^{ikx} + (1 + f_s^{+,c}) e^{ikx}] & x \rightarrow +∞ \end{cases} \quad (82)$$

Here,

$$\begin{aligned} f_s^{+,c} &= \frac{1}{2} (e^{2i\delta_s^{0,c}} + e^{2i\delta_s^{1,c}}) - 1 = \lambda^{-2\mu} W_{32}^+ - 1, f_s^{-,c} = \\ & \frac{1}{2} (e^{2i\delta_s^{0,c}} - e^{2i\delta_s^{1,c}}) = \lambda^{-2\mu} W_{12}^- \end{aligned} \quad (83)$$

From Eqn. (56), the reflection and transmission coefficients are given by

$$\begin{aligned} T_s^c &= |1 + f_s^{+,c}|^2 = \frac{1}{4} |e^{2i\delta_s^{0,c}} + e^{2i\delta_s^{1,c}}|^2 = |\lambda^{-2\mu}|^2 |W_{32}^-(W_{32}^-)^*|, \\ R_s^c &= |f_s^{-,c}|^2 = \frac{1}{4} |e^{2i\delta_s^{0,c}} - e^{2i\delta_s^{1,c}}|^2 = |\lambda^{-2\mu}|^2 |W_{12}^-(W_{12}^-)^*|. \end{aligned} \quad (84)$$

5. Results and discussion

The resolution of KG-s (Eqn. (60)) interacting with the Dirac delta potential $V(x) = \alpha\delta(x)$ (α being a positive parameter), leads to infinite matrices. This comes from the term $V^2(x)$ in (60). This term gives a square delta

$\delta(x)\delta(x) = \delta(0)\delta(x) \rightarrow \infty$. For this reason the delta potential is replaced by a regular potential. This potential, we choose it as that of Cusp. By assimilation of α to greatness $\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \exp(-\frac{|x|}{a}) dx = 2aV_0$, going to the limit $a \rightarrow 0, V_0 \rightarrow \infty$, the potential of Cusp becomes the delta potential $\lim_{a \rightarrow 0^+, V_0 \rightarrow \infty} V_0 \exp(-\frac{|x|}{a}) \rightarrow \alpha\delta(x)$ [10].

By a passage to the limit $a \rightarrow 0$ and $V_0 \rightarrow \infty$, we can express the wave function, the scattering matrix, the transmission and reflection coefficients and the phase shifts for a particle of KG-s interacting with the delta potential. For the coefficients R_s and T_s ,

$$R_s^\delta = \lim_{a \rightarrow 0^+, V_0 \rightarrow \infty} R_s^c \rightarrow 1, T_s^\delta = \lim_{a \rightarrow 0^+, V_0 \rightarrow \infty} T_s^c \rightarrow 0.$$

Similarly, it is easy to deduce the scattering matrix \hat{S}_D corresponding to Eqn. (2), which connects the outgoing wave $\Psi_{1/2}(out)$ to the incident wave $\Psi_{1/2}(in)$, by the relation $\Psi_{1/2}(out) = \hat{S}_D \Psi_{1/2}(in)$. To calculate \hat{S}_D , we start by noticing that for $|x| \rightarrow \infty, A \rightarrow 0$ and $p - eA + m \rightarrow p + m$. Inserting this into (2), we derive $\Phi_{1/2}(out) = \frac{1}{p+m} \Psi_{1/2}(out)$ and $\Phi_{1/2}(in) = \frac{1}{p+m} \Psi_{1/2}(in)$. Substituting these into Eqn. (23) and by a straight forward calculation one obtain $\hat{S}_D = \hat{S}_{KG-1/2}$.

6. Conclusion

Our work has been organized around two major parts. In the first part, we considered the spin-s ($s = 0, 1/2$) Klein Gordon equation interacting with the one-dimensional symmetrical scalar potential. The formalism of the scattering matrix \hat{S}_{KG-s} for a spin-s related particle interacting with a localized electromagnetic field was first constructed that allowed us to retrieve reflection and transmission coefficients again. In the second part, as an application of the results, the case of the Cusp's potential was investigated in detail and we solved the KG equation for a spin-s relativistic particle. The solution was given in analytical form using Whittaker's functions. From the asymptotic behaviour and by the conditions of continuity we drew the elements of scattering matrix \hat{S}_{KG-s}^c , phase shifts, reflection R_s^c and the transmission T_s^c coefficients.

Reference

- [1] L. Faddeev American Mathematical Society Translations 2 65, 139 (1964).
- [2] R. G. Newton Journal of Mathematical Physics 21 493 (1980).
- [3] R. G. Newton Journal of Mathematical Physics 24 2152 (1983).
- [4] R. G. Newton, Journal of Mathematical Physics 25, 2991 (1984).
- [5] Y. Nogami and C. K. Ross A. m. J. Phys. 64 (7)

- (1996).
- [6] K Khounfais T Boudjedaa and L Chetouani
Czechoslovak. J. physics. **54**. 7 (2004).
 - [7] Tapas Das The African Review of Physics **11**:0034
(2016).
 - [8] A N Ikot H Hassanabadi E. Etukl B H Yazarloo and
S Zarrinkamar The African Review of Physics
9:0031 (2014)
 - [9] D A Nugraha A Suparmi C Cari and B Nur Pratiwi J
of Phys:Conf. Series **795** (2017) A.
 - [10] V M Villalba and W Greiner Phys. Rev. A **67**
052707 (2003).
 - [11] Y Jiang S H Dong A Antillón and M Lozada-Cassou
Eur. Phys. J C **45** 525 (2006).
 - [12] V M Villalba and C Rojas Int. J. Mod. Phys. A **21**
313 (2006).
 - [13] V M Villalba and L A González-Díaz Phys. Scr. **75**
645 (2007).
 - [14] A N Ikot H Hassanabadi N Salehl H P Obong and M
C Onyeaju, Indian J Phys **89** 11:1221
(2015).
 - [15] M Chabab A. El Batoul H. Hassanabadi M. Oulne
and S. Zare, Eur Phys J **16387-8** October (2016)
 - [16] D. S. Staudte, J. Phys. A **29**, 169 (1996).
 - [17] K. A Kiers and W Van Dijk J. Math. Phys. **37** (12)
1996.
 - [18] A. Messiah, Quantum Mechanics, Vol II. (North-
Holland, Amesterdam, 1966).
 - [19] L. Landau and E. Lifchitz, Theoretical Physics tome-
4 Quantum Electrodynamics, (Édition Mir
Moscou,1979).
 - [20] M. Abramowitz and I. A. Stegun Handbook of
Mathematical Functions (New York: Dover) (1965)
 - [21] F W J Olver D W Lozier R F Boisvert and C W
Clark NIST Handbook of Mathematical Functions
(Cambridge University Press, New York, 2010).

Received: 12 November, 2019

Accepted: 02 December, 2019