

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M. 2021/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Solutions S-asymptotiquement ω -périodiques de l'équation de Liénard

Option: Commande optimale et systèmes dynamiques

Par :
Louahem Besma

Encadré par : Boudjema Souhila

MCB U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : Bouadi Abdelkader
Examinatrice: Khenniche Ghania

MCB U. SKIKDA
MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciement

Tout d'abord je remercie Dieu de m'avoir donné la force et la capacité de terminer ce travail modeste qui fait ma fierté et ma personnalité.

Je remercie mes parents pour m'avoir facilité la vie et donner tout ce que j'en avais besoin pour réussir dans mes études.

Mes remerciements s'adressent à tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont coopéré à l'élaboration de ce travail et particulièrement:

Mon encadreur BOUJDEMA Souhila qui m'a guidé à concrétiser travail.

Mon membres de jury: Bouadi Abdelkader et Khenniche Ghania.

A tous mes enseignants de l'institué de mathématique et Aussi, à tous ceux qui ont de loin ou de près renseignés à élaborer mon humble travail.



Dédicace

★ *Je* tiens à dédier ce travail

★ *A* la lumière de mes yeux, l'ombre de mes pas et le bonheur de ma vie **ma mère** qui vielle à ma réussite et mon bonheur pour son sacrifice et soutien qui m'ont donné confiance, courage et sécurité.

★ *A* mon **cher père** qui a toujours cru en moi et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

★ *A* ma chère sœur : **Meriem.**

Et mes frères : **Mounir, Toufik, Halim, Zouhir,
Daoud et lokman.**

★ *A* mes chères amies et mes collègues : **Fatima, Khadîdja,
Et Sara.**

★ *A* tous ceux qui ont contribué de près ou de loin.

★ *A* toutes les personnes que je n'ai pas citées mais que je prote dans mon cœur.

Besma..Louahem

Abstract

In this work, starting from the zero solution, we prove the existence, uniqueness and regular dependence of, S-asymptotically ω -periodic solution, $x(e)$ of Liénard's differential equation, in the form:

$$x''(t) + f(x(t), x'(t)) \cdot x'(t) + g(x(t)) = e(t)$$

Where "e" is asymptotically ω -periodic forcing term.

Keywords

S-asymptotically ω -periodic functions, Liénard equation, Implicit function, Nemytskii operator.

Résumé

Dans ce travail, au voisinage de zéro, on démontre l'existence, l'unicité et la dépendance régulière d'une solution $x(e)$, S-Asymptotiquement ω -périodique, de l'équation de Liénard de la forme:

$$X''(t)+f(x(t), x'(t)).x'(t)+g(x(t))=e(t)$$

où "e" est une force extérieure S-Asymptotiquement ω -périodique.

Mots-clés

Fonction S-asymptotiquement ω -périodique, Equation de Liénard, Fonction implicite, Opérateur de Nemytskii.

الملخص

في هذا العمل سوف نبرهن، في جوار الصفر، الوجود والوحدانية والارتباط من صنف C^1 لحل $x(e)$ ، S -مالا نهاية ω -دوري، وذلك لمعادلة لينار من الشكل:

$$X''(t)+f(x(t), x'(t)).x'(t)+g(x(t))=e(t)$$

أين "e" قوة خارجية S -مالا نهاية ω -دورية.

الكلمات المفتاحية

دوال S -مالا نهاية ω -دورية، معادلة لينار، دوال ضمنية، مؤثر نومتسكي.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Préliminaire	4
1 Espace de Banach	4
2 Différentielle en un point et sur un ouvert	5
3 Opérateurs linéaires	7
4 Fonction S-asymptotiquement ω -periodique	8
5 Propriétés des Fonctions s-asymptotiquement ω -periodiques	9
6 Théorème des fonctions implicites	12
2 Opérateurs importants.	13
1 Opérateurs de dérivation	13
2 Opérateurs d'injections	14
3 Opérateurs de projections	16
4 Opérateur de Nemytski	17
5 Opérateur du produit	20
3 Existence et unicité des solutions S-asymptotiquement ω périodiques de L'équation de Liénard	21

Introduction générale

Depuis peu, une nouvelle classe de fonctions généralisant celle des fonctions périodiques a été définie : il s'agit de la classe des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques. Cette classe de fonctions généralise aussi celle des fonctions asymptotiquement ω -périodiques. Dans [13] Lizama et N'Guérékata montrent une relation entre les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques et plusieurs sous espaces de $BC(\mathbb{R}, X)$ où X est un espace de Banach.

L'existence et l'unicité d'une solution S-asymptotiquement ω -périodiques a une grande importance dans l'étude qualitative de la théorie des équations différentielles due à leurs applications dans plusieurs domaines comme la biologie mathématique, la physique, la théorie du contrôle et d'autres domaines. Parmi ces applications, on trouve comme modèle oscillatoire important dans le domaine de la physique, l'équation de Liénard forcée.

Dans [5] les auteurs donnent des résultats d'existence, au moins, d'une solution périodique pour l'équation de Liénard généralisée

$$x''(t) + \phi(x(t), x'(t)) \cdot x'(t) + \psi(x(t)) = 0.$$

D'autres résultats de dépendance ont été établis en [1] et [2], pour des différents types de solutions x_p de la famille d'équations suivantes :

$$x''(t) + f(x(t), p) \cdot x'(t) + g(x(t), p) = e_p(t),$$

pour un p , dans un voisinage de 0 et dans un espace de Banach.

Blot, Cieutat et N'Guérékata [4], Cuevas, Pierri et Sepulveda [7], Cuevas et de Souza [8], Henriquez, Pierri et Táboas [10],[11], Nicola et Pierri [12], sont penchés vers ce type d'équations et sur les conditions d'existence et d'unicité et de la dépendance différentielle de la solution S-asymptotiquement ω -périodique des équations différentielles dans des espaces de dimension finie ou infinie. Dans [3], les auteurs montrent l'existence d'une solution S-asymptotiquement ω -périodique pour les équations d'évolution sous la forme du problème de Cauchy.

Plan du mémoire

Le principal résultat obtenu dans ce travail concerne l'existence et l'unicité d'une solution S-asymptotiquement ω -periodique de l'équation de Liénard

$$(\mathcal{F}, e) \quad x''(t) + f(x(t), x'(t)).x'(t) + g(x(t)) = e(t).$$

Pour réaliser notre objectif on divise notre travail en trois chapitres

Dans le chapitre 0I, on rappelle les définitions et les propriétés des fonctions S-asymptotiquement ω -periodiques en abordant quelques outils d'analyse fonctionnelle (Espace de Banach, opérateur linéaire, différentielle d'un opérateur, théorème des fonctions implicites)

Dans le chapitre II, nous établissons des nouvelles propriétés sur les opérateurs de Nemytskii sur l'espace des fonctions S-asymptotiquement ω -periodiques. Nous étudions aussi la continuité et la différentiabilité des opérateurs utilisés dans la démonstration de notre théorème principal.

Dans le chapitre III, on présente notre théorème principal sur l'existence et l'unicité de la solution S-asymptotiquement ω -periodique de l'équation de Liénard (\mathcal{F}, e) avec un résultat de dépendance de la solution par rapport au terme forcé $e(t)$.

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre est une collection des définitions, des théorèmes et des propriétés qui seront utiles pour la suite de ce travail.

1 Espace de Banach

Définition 1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On appelle norme sur un espace vectoriel E une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans \mathbb{R}_+ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle un espace vectoriel normé où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Définition 1.2 Une suite de vecteurs (x_n) dans X est de Cauchy si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } n, m > N.$$

Définition 1.3 On dit qu'un espace normé E est de Banach, si toute suite de Cauchy f_n est convergente dans E . C'est-à-dire E est complet en tant qu'un espace métrique muni de la distance associée à sa norme.

Définition 1.4 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $BC^0(\mathbb{R}_+, X)$ désigne l'espace des fonctions bornées et continues. On note :

$$BC^0(\mathbb{R}_+, X) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X, f \text{ est continues, } \|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|f(t)\|_X < \infty\}.$$

Pour $k \in \{1, 2\}$, l'espace

$$BC^k(\mathbb{R}_+, X) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X, f \in C^k(\mathbb{R}_+, X) \forall j = 1, \dots, k \quad f^j \in BC^0(\mathbb{R}_+, X)\},$$

est muni de la norme

$$\|f\|_{BC^k} := \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{j=k} \|f^j\|_\infty$$

est un espace de Banach.

Exemple 1.1 On a

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.
2. Pour $E = C([a, b], \mathbb{R})$, on a $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, avec

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

2 Différentielle en un point et sur un ouvert

Soit E, F deux espaces normés.

Définition 1.5 Soit U ouvert sur E . On dit qu'une application $f : U \rightarrow F$ est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue L_a de E dans F telle que, pour h suffisamment petit on ait

$$f(a+h) - f(a) - L_a \cdot h = o(h) = \|h\| \epsilon(h),$$

avec $\epsilon(h)$ qui tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.

L_a est appelée différentielle de f au point a est notée $Df(a)$ telle que

$$\begin{aligned} Df : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\longmapsto Df(a) \end{aligned}$$

On dit que f est différentiable sur U si elle l'est en tout point de U .

Proposition 1.1 Si $f : U \subset E \rightarrow F$ et $g : V \subset E \rightarrow F$ sont différentiables respectivement sur des ouverts U et V d'un même espace E , alors leur somme $f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et

$$D(f + g) = Df + Dg.$$

C'est-à-dire que pour tout $x \in U \cap V$ et pour tout $h \in E$

$$D(f + g)(x).h = Df(x).h + Dg(x).h.$$

De plus, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est différentiable et

$$D(\lambda f) = \lambda Df.$$

Théorème 1.1 Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable en un point $x \in U$ et si $g : V \subset F \rightarrow G$ est différentiable en $f(x) \in V$, alors la fonction composée $g \circ f : U \subset E \rightarrow G$ est différentiable en x et on a

$$D(g \circ f)(x) \cdot h = Dg(f(x)) \cdot (Df(x) \cdot h) \quad \forall x \in U \text{ et } \forall h \in E.$$

Autrement dit,

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \quad \forall x \in U.$$

Exemple 1.2 soit ϕ une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ vers F continue et continument différentiable, alors on a :

$$D\phi(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \phi(x_1, h_2) + \phi(h_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2), (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2.$$

En effet on a

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \left\| \frac{\phi((x_1, x_2) + (h_1, h_2)) - \phi((x_1, x_2)) - D\phi(x_1, x_2)(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|_{E_1 \times E_2}} \right\|_F = 0$$

d'autre part : ϕ est bilinéaire donc

$$\begin{aligned} \phi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) &= \phi(x_1, x_2 + h_2) + \phi(h_1, x_2 + h_2) \\ &= \phi(x_1, x_2) + \phi(x_1, h_2) + \phi(h_1, x_2) + \phi(h_1, h_2) \end{aligned}$$

et donc

$$\|\phi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \phi(x_1, x_2) - \phi(x_1, h_2) - \phi(h_1, x_2)\|_F = \|\phi(h_1, h_2)\|_F,$$

et puisque

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\|\phi(h_1, h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

alors

$$D\phi(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \phi(x_1, h_2) + \phi(h_1, x_2)$$

Exemple 1.3 Soit E et F deux espaces normés. soit f une application linéaire de E vers F continue, alors on a :

$$Df(x).h = f(h) \quad \forall x, h \in E.$$

En effet : puisque f est linéaire et continue alors f est de classe C^1 donc $\forall x \in E$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x).h\|}{\|h\|} = 0,$$

d'autre part f est linéaire, donc

$$f(x+h) - f(x) - f(h) = 0,$$

alors :

$$Df(x).h = f(h).$$

3 Opérateurs linéaires

Définition 1.6 Soit X un espace de Banach. Une application

$$A : D(A) \subset X \rightarrow X$$

est un opérateur linéaire si $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X et A est linéaire. $D(A)$ est appelé domaine de A .

Exemple 1.4 Soit A l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ où

$$D(A) = \{f \in C^1(\mathbb{R}, X), \frac{d}{dt} \in BC^0(\mathbb{R}, X).\}$$

Nous noterons par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires de X dans X .

Définition 1.7 Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach X avec $D(A) = X$.

A est un opérateur linéaire borné sur X s'il existe une constante positive c telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.8 Un opérateur linéaire sur un espace X est continu au point $x \in X$, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \rightarrow x$, nous avons $Ax_n \rightarrow Ax$, c'est à dire

$$\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0, \quad \text{quant } \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

Définition 1.9 *Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow X$ est continu sur X si et seulement s'il est continu pour tout point $x \in X$.*

Théorème 1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. A est continue sur E .
2. A est continue en 0_E .
3. l'image par A de toute borné de E est un borné de F .
4. $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in E$ on a

$$\|A(x)\|_F \leq c \|x\|_E$$

Exemple 1.5 *Soit $E = C([0, 1], \mathbb{C})$, avec*

$$\|f\|_E = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Soit $t_0 \in [0, 1]$, on définit A par

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(t_0) \end{aligned}$$

A est continue sur E , car $\forall f \in E$ on a

$$\|Af\| = \|f(t_0)\| = |f(t_0)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_E.$$

4 Fonction S-asymptotiquement ω -periodique

Définition 1.10 [10], [4] *Soit $\omega \in (0, \infty)$.*

Une fonction $x \in BC^0(\mathbb{R}_+, X)$ est dite S-asymptotiquement ω -périodique si elle vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t + \omega) - x(t)) = 0.$$

On note par $SAP_\omega^0(X)$ l'espace des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques.

Théorème 1.3 [4]. *$(SAP_\omega^0(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

démonstration :

Soit f_n une suite dans $SAP_\omega^0(X)$ qui converge vers f pour $n \rightarrow \infty$. Montrons que $f \in SAP_\omega^0(X)$, et f est fermé dans $SAP_\omega^0(x)$ En effet :

$$f(t + \omega) - f(t) = f(t + \omega) - f_n(t + \omega) + f_n(t + \omega) - f_n(t) + f_n(t) - f(t).$$

Comme on a la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour $n \rightarrow \infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(t) - f(t)) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t + \omega) - f(t + \omega) = 0,$$

et puisque $f_n \in SAP_\omega(X)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t + \omega) - f_n(t) = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \omega) - f(t) = 0.$$

Alors on obtient $SAP_w^0(X)$ est un fermé dans un complet $BC^0(\mathbb{R}_+, X)$, d'où $SAP_w^0(X)$ est complet.

Pour $k \in \{1, 2\}$, l'espace

$$SAP_w^k(X) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X, f \in SAP_w^0(X) \forall j = 1, \dots, k f^{(j)} \in SAP_w^0(X)\},$$

est muni de la norme de $\|f\|_{BC^k}$, est un espace de Banach.

Exemple 1.6 *La fonction*

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin(\ln(t + 1)) \text{ ,}$$

est une fonction s-asymptotiquement ω -périodique.

En effet : puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\ln(t + 1))}{t + 1} = 0,$$

alors pour $\omega > 0$ et pour $0 < \delta < 1$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t + \delta\omega)\omega = 0.$$

5 Propriétés des Fonctions s-asymptotiquement ω -périodiques

Proposition 1.2 *Soit X un espace de Banach. Si $a \in SAP_w^0(\mathbb{R})$ et $f \in SAP_w^0(X)$, alors $af \in SAP_w^0(X)$.*

Démonstration Comme a et f sont bornés, $\exists k_1, k_2$, tel que $|a(t)| \leq k_1$ et $\|f(t)\|_X \leq k_2, \forall t \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|a(t+\omega)f(t+\omega) - a(t)f(t)\| &\leq \|(a(t+\omega) - a(t)).f(t+\omega)\| \\ &\quad + \|a(t).(f(t+\omega) - f(t))\| \\ &\leq |a(t+\omega) - a(t)|. \|f(t+\omega)\| \\ &\quad + \|f(t+\omega) - f(t)\|. |a(t)| \end{aligned}$$

d'où

$$\|a(t+\omega)f(t+\omega) - a(t)f(t)\| \leq |a(t+\omega) - a(t)|.k_2 + \|f(t+\omega) - f(t)\|.k_1.$$

Par conséquent

$$\limsup \|a(t+\omega)f(t+\omega) - a(t)f(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |a(t+\omega) - a(t)|.k_2 + \lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t+\omega) - f(t)\|.k_1.$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|a(t+\omega)f(t+\omega) - a(t)f(t)\| = 0.$$

Proposition 1.3 *Supposons que $f \in SAP_w^0(\mathbb{R})$ tel que $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)| \geq \gamma > 0$, alors $g := \frac{1}{f} \in SAP_w^0(\mathbb{R})$.*

Démonstration : Il est évident que $|f(t)| \geq \gamma$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Nous déduisons alors que

$$\frac{1}{|f(t).f(t+w)|} \leq \frac{1}{\gamma^2}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $T_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(t+w) - f(t)| < \epsilon\gamma^2, \quad t > T_\epsilon.$$

Pour $t > T_\epsilon$ nous avons donc

$$|g(t+w) - g(t)| \leq \left| \frac{f(t+w) - f(t)}{f(t).f(t+w)} \right| \leq \epsilon.$$

Proposition 1.4 *Soit $f \in SAP_w^0(X)$ et $\phi : X \rightarrow X$ un opérateur uniformément continu sur les sous ensemble bornés de X . Alors la fonction $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ définie par*

$$F(t) = \phi \circ f(t)$$

est dans $SAP_w^0(X)$.

Démonstration : Soit $\delta > 0$. Comme $f \in SAP_w^0(X)$, il existe T_δ tel que pour tout $t > T_\delta$ nous avons

$$\|f(t+w) - f(t)\| < \delta.$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathcal{R}_f$ (l'image de f qui est un ensemble borné inclus dans X), tel que $\|x - y\| \leq \tau$ nous avons

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| < \epsilon.$$

Pour $x = f(t+w)$ et $y = f(t)$ et $\delta = \tau$ nous obtenons donc

$$\|\phi(f(t)) - \phi(f(t+w))\| < \epsilon, \quad \forall t > T_\delta.$$

Proposition 1.5 Soit $f \in SAP_w^0(X)$ et $a \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Alors la fonction $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(t) := \int_0^t a(t-s)f(s)ds,$$

est dans $SAP_w^0(X)$.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $T > 0$ tel que

$$|f(t+w) - f(t)| < \epsilon, \quad t > T,$$

et

$$|a(t)| < \epsilon. \quad \text{Car les fonctions a support compact sont dense dans } L^1$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|G(t+w) - G(t)\| &= \left\| \int_0^w a(t+w-s)f(s)ds + \int_w^{t+w} a(t+w-s)f(s)ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t a(t-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^w a(t+s)f(w-s)ds \right\| + \int_0^t |a(t-s)| \|f(s+w) - f(s)\| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^w |a(t+s)| ds + \int_0^T |a(t-s)| \|f(s+w) - f(s)\| ds \\ &\quad + \int_T^t |a(t-s)| \|f(s+w) - f(s)\| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot w \cdot \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_0^T |a(t-s)| ds + \epsilon \int_T^t |a(t-s)| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot w \cdot \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{t-T}^t |a(s)| ds + \epsilon \int_0^{t-T} |a(s)| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot w \cdot \epsilon + 2\|f\|_\infty \epsilon T + \epsilon \int_0^{t-T} |a(s)| ds \end{aligned}$$

qui montre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t+w) - G(t)\|.$$

6 Théorème des fonctions implicites

Définition 1.11 *On appelle fonction implicite définie par l'équation f est continue et linéaire, $f(x_1, x_2) = 0$ toute fonction ϕ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans un intervalle J de \mathbb{R} et telle que $\forall x_1 \in I$, $f(x_1, \phi(x_1)) = 0$.*

Théorème 1.4 [6] *Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $U \subset E_1, V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \rightarrow F$ une application de classe C^r ($r \geq 1$). Soit $(a, b) \in U \times V$ tel que*

$$f(a, b) = 0 \text{ et } D_y f(a, b) \in \text{Isom}(E_2, F).$$

Alors, il existe un voisinage ouvert de a , $U_a \subset U$, un voisinage ouvert de b , $V_b \subset V$ et une application de classe C^1 , $\phi : U_a \rightarrow V_b$ tel que $\phi(a) = b$ et on a :

$$\forall (x, y) \in U_a \times V_b, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in U_a \quad y = \phi(x),$$

c'est à dire

$$\{(x, y) \in U_a \times V_b, f(x, y) = 0\} = \{(x, \phi(x)), x \in U_a\}.$$

Chapitre 2

Opérateurs importants.

Dans ce chapitre on présente les opérateurs linéaires utilisés dans notre résultat principal et nous établissons la différentiabilité de l'opérateur de Nemytskii sur l'espace des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques.

1 Opérateurs de dérivation

— $\frac{d^2}{dt^2} : SAP_w^2(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^0(\mathbb{R})$ est défini par

$$\frac{d^2}{dt^2}x := x''.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= (\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2))'' \\ &= \lambda_1 x_1'' + \lambda_2 x_2'' \\ &= \lambda_1 \frac{d^2}{dt^2}x_1 + \lambda_2 \frac{d^2}{dt^2}x_2\end{aligned}$$

alors l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2}$ est linéaire.

Et puisque

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2}x \right\|_\infty \leq \|x''\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x\|_\infty,$$

on a

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2}x \right\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2}$ est linéaire et continu, donc

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{ est de classe } C^1, \tag{2.1}$$

et on a
pour tout x, y dans $SAP_w^2(\mathbb{R})$

$$D \frac{d^2}{dt^2}(x(\cdot))(y(\cdot)) = \frac{d^2}{dt^2}(y(\cdot))$$

— $\frac{d}{dt} : SAP_w^1(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^0(\mathbb{R})$ est défini par

$$\frac{d}{dt}x := x'.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) &= (\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2))' \\ &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' \\ &= \lambda_1 \frac{d}{dt}x_1 + \lambda_2 \frac{d}{dt}x_2 \end{aligned}$$

alors l'opérateur $\frac{d}{dt}$ est linéaire.

Et puisque

$$\left\| \frac{d}{dt}x \right\|_\infty \leq \|x'\|_\infty + \|x\|_\infty,$$

on a

$$\left\| \frac{d}{dt}x \right\|_\infty \leq \|x\|_{BC^1}.$$

Alors l'opérateur $\frac{d}{dt}$ est linéaire et continu, donc

$$\frac{d}{dt} \text{ est de classe } C^1, \tag{2.2}$$

et on a
pour tout x, y dans $SAP_w^1(\mathbb{R})$

$$D \frac{d}{dt}(x(\cdot))(y(\cdot)) = \frac{d}{dt}(y(\cdot))$$

2 Opérateurs d'injections

— $\text{in}_1 : SAP_w^2(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^1(\mathbb{R})$ est défini par

$$\text{in}_1(x) := x.$$

On a

$$\begin{aligned} in_1(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &= \lambda_1 in_1(x_1) + \lambda_2 in_1(x_2) \end{aligned}$$

alors l'opérateur in_1 est linéaire. Puisque

$$\|in_1(x)\|_{BC^1} = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty,$$

on a

$$\|x\|_{BC^1} \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où

$$\|in_1(x)\|_{BC^1} \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur

$$in_1 \text{ est de classe } C^1, \quad (2.3)$$

et on a, pour tout x, y dans $SAP_w^2(\mathbb{R})$

$$Din_1(x(\cdot))(y(\cdot)) = in_1(y(\cdot)).$$

— $in_2 : SAP_w^2(\mathbb{R}) \times SAP_w^1(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^0(\mathbb{R}) \times SAP_w^0(\mathbb{R})$ est défini par

$$in_2(x, y) := (x, y).$$

On a

$$\begin{aligned} in_2(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) &= \lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \\ &= \lambda_1 in_2(x_1, y_1) + \lambda_2 in_2(x_2, y_2) \end{aligned}$$

alors l'opérateur in_2 est linéaire. Puisque

$$\|(x, y)\|_{BC^0 \times BC^0} = \sup(\|x\|_{BC^0}, \|y\|_{BC^0}) \leq \|(x, y)\|_{BC^2 \times BC^1} = \sup(\|x\|_{BC^2}, \|y\|_{BC^1}),$$

d'où

$$\|in_2(x, y)\|_{BC^0 \times BC^0} \leq \|(x, y)\|_{BC^2 \times BC^1}.$$

Alors l'opérateur

$$in_2 \text{ est de classe } C^1, \quad (2.4)$$

et on a, pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dans $SAP_w^2(\mathbb{R}) \times SAP_w^1(\mathbb{R})$

$$Din_2((x_1, y_1)(\cdot))(x_2, y_2(\cdot)) = in_2((x_2, y_2)(\cdot)).$$

— $\text{in}_3 : SAP_w^2(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^0(\mathbb{R})$ est défini par

$$\text{in}_3(x) := x.$$

On a

$$\begin{aligned} \text{in}_3(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &= \lambda_1 \text{in}_3(x_1) + \lambda_2 \text{in}_3(x_2) \end{aligned}$$

alors l'opérateur in_3 est linéaire. Puisque

$$\|\text{in}_3(x)\|_{BC^0} = \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty,$$

on a

$$\|x\|_{BC^0} \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où

$$\|\text{in}_3(x)\|_{BC^0} \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur

$$\text{in}_3 \text{ est de classe } C^1, \tag{2.5}$$

et on a, pour tout x, y dans $SAP_w^2(\mathbb{R})$

$$D\text{in}_3(x(\cdot))(y(\cdot)) = \text{in}_3(y(\cdot)).$$

3 Opérateurs de projections

— $\pi_1 : SAP_w^2(\mathbb{R}) \times SAP_w^0(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^2(\mathbb{R})$ défini par

$$\pi_1(x, e) := x$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\lambda_1(x_1, e_1) + \lambda_2(x_2, e_2)) &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &= \lambda_1 \pi_1(x_1, e_1) + \lambda_2 \pi_1(x_2, e_2) \end{aligned}$$

alors l'opérateur π_1 est linéaire.

On a

$$\|x\|_{BC^2} \leq \sup(\|x\|_{BC^2}, \|x'\|_{BC^0}),$$

donc

$$\|\pi_1(x, e)\|_{BC^2} \leq \|(x, e)\|_{BC^2 \times BC^0}.$$

Alors l'opérateur π_1 est linéaire et continu,

$$\pi_1 \text{ est de classe } C^1. \tag{2.6}$$

— $\pi_2 : SAP_w^2(\mathbb{R}) \times SAP_w^0(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_w^0(\mathbb{R})$ défini par

$$\pi_2(x, e) := e$$

$$\begin{aligned} \pi_2(\lambda_1(x_1, e_1) + \lambda_2(x_2, e_2)) &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \\ &= \lambda_1 \pi_2(x_1, e_1) + \lambda_2 \pi_2(x_2, e_2) \end{aligned}$$

alors l'opérateur π_2 est linéaire.

On a

$$\|e\|_{BC^0} \leq \sup(\|x\|_{BC^2}, \|e\|)_{BC^0},$$

donc

$$\|\pi_2(x, e)\|_{BC^2} \leq \|(x, e)\|_{BC^2 \times BC^0}.$$

Alors l'opérateur π_2 est linéaire et continu, donc

$$\pi_2 \text{ est de classe } C^1. \tag{2.7}$$

4 Opérateur de Nemytski

Dans cette section, nous définissons l'opérateur de Nemytski (dite aussi opérateur de superposition). Soit X, Y deux espaces de Banach

Définition 2.1 *Pour $f : X \rightarrow Y$ une fonction, l'opérateur de Nemytski par rapport à f est l'opérateur donné par*

$$\begin{aligned} N_f : BC^0(\mathbb{R}_+, X) &\longrightarrow BC^0(\mathbb{R}_+, Y) \\ [t \mapsto u(t)] &\longmapsto [t \mapsto f(u(t))] \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_b(X)$ désigne l'ensemble des parties bornées de X .

Définition 2.2 *Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction. on dit que ϕ est bornée uniformément continue si on a les conditions suivantes :*

(a) *Pour tout $B \in \mathcal{P}_b(X)$,*

$$\phi(B) \in \mathcal{P}_b(Y).$$

(b) *$\forall B \in \mathcal{P}_b(X)$, la restriction $\phi|_B$ est uniformément continue.*

On note par $UC_b(X, Y)$ l'espace de ces fonctions.

Définition 2.3 *soit $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que ϕ est C^1 uniformément sur les sous-ensembles bornés de X si*

- (a) $\phi \in UC_b(X, Y)$.
- (b) $\phi \in C^1(X, Y)$.
- (c) $D\phi \in UC_b(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

On note par $UC_b^1(X, Y)$ l'espace de ces fonctions.

En premier temps nous étudions la continuité d'opérateurs de Nemytski.

Théorème 2.1 *Soit $f \in UC_b(X, Y)$. Alors on a*

$$N_f \in C^0(BC^0(\mathbb{R}_+, X), BC^0(\mathbb{R}_+, Y)).$$

Démonstration

On fixe $u \in BC^0(\mathbb{R}_+, X)$. On pose

$$y(t) := f(u(t)), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+;$$

et donc nous définissons la fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$. Puisque u est bornée, alors on a

$$u(\mathbb{R}_+) \in \mathcal{P}_b(Y),$$

et par l'utilisation de deuxième condition de la Définition , on obtient

$$y(\mathbb{R}_+) \subset f(u(\mathbb{R}_+)) \in \mathcal{P}_b(Y).$$

Et donc y est bornée. Notons que

$$y = f \circ (u).$$

Puisque u , et f (d'après la première condition de la définition) sont continues, alors il en est de même pour y . Et donc $N_f : BC^0(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow BC^0(\mathbb{R}_+, Y)$ est bien défini.

Maintenant nous étudions la continuité de N_f , on fixe $u \in BC^0(\mathbb{R}_+, X)$. Alors il existe $R \in (0, \infty)$ tel que

$$u(\mathbb{R}_+) \subset B_X(0, R).$$

On pose

$$B_1 := B(0, R + 1) \in \mathcal{P}_b(X).$$

On fixe $\varepsilon \in (0, \infty)$. Soit $u_1 \in BC^0(\mathbb{R}_+, X)$ tel que

$$\|u - u_1\|_\infty \leq \delta(B_1, \varepsilon),$$

tel que $\delta(B_1, \varepsilon)$ donner par la deuxième condition de la définition que l'on peut choisir plus petit que 1. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|u_1(t)| \leq |u_1(t) - u(t)| + |u(t)|,$$

et donc on a

$$|u_1(t)| \leq R + 1.$$

Alors $u_1(\mathbb{R}_+) \subset B_1$. Par l'utilisation de la deuxième condition de la définition 4 et puisque on a

$$\|u - u_1\|_\infty \leq \delta(B_1, \varepsilon), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

on obtient

$$|f(u(t)) - f(u_1(t))| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

c-à-d

$$\|N_f(u) - N_f(u_1)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

D'où la continuité de N_f . □

Théorème 2.2 *Soit $f \in UC_b(X, Y)$. Alors on a*

$$N_f \in C^0(SAP_\omega^0(X), SAP_\omega^0(Y)).$$

Démonstration

Nous savons que $N_f(SAP_\omega^0(X)) \subset SAP_\omega^0(Y)$ d'après [10] ou Théorème 3.14 de [4]. Puisque la restriction d'un opérateur continu est continue, on obtient la continuité de N_f d'après le Théorème 2.1. □

Théorème 2.3 *Soit $f \in UC_b^1(X, Y)$. Alors on a*

$$N_f \in C^1(SAP_\omega^0(X), SAP_\omega^0(Y)),$$

et on a pour tout $u, h \in SAP_\omega^0(X)$

$$DN_f(u).h = [t \mapsto D\phi(u(t)).h(t)].$$

Pour la démonstration voir [3].

5 Opérateur du produit

Soit l'opérateur $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$B(r, s) := r.s.$$

On a

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2, s) &= (\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)s \\ &= \lambda_1 r_1 s + \lambda_2 r_2 s \\ &= \lambda_1 B(r_1, s) + \lambda_2 B(r_2, s), \end{aligned}$$

alors B est linéaire par rapport à la première variable.

$$\begin{aligned} B(r, \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) &= r(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) \\ &= r\lambda_1 s_1 + r\lambda_2 s_2 \\ &= \lambda_1 B(r, s_1) + \lambda_2 B(r, s_2), \end{aligned}$$

alors B est linéaire par rapport à la deuxième variable et donc B est un opérateur bilinéaire.

Puisque B est un opérateur bilinéaire continu donc est de classe C^1

On considère l'opérateur de Nemystki construit sur B ,

$$\begin{aligned} N_B : \text{SAP}_w^0(\mathbb{R}) \times \text{SAP}_w^0(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SAP}_w^0(\mathbb{R}) \\ [t \mapsto (u(t), v(t))] &\longmapsto [t \mapsto u(t).v(t)] \end{aligned}$$

et on a

$$DN_B(a, b)(u, v) := [t \mapsto DB(a(t), b(t))(u(t)v(t))],$$

donc

$$DN_B(a, b)(u, v) := [t \mapsto B(a(t), v(t)) + B(u(t)b(t))],$$

alors

$$DN_B(a, b)(u, v) = N_B(a, v) + N_B(u, b).$$

Chapitre 3

Existence et unicité des solutions S-asymptotiquement ω périodiques de L'équation de Liénard

Dans ce chapitre, on donne un théorème sur l'existence et l'unicité et la dépendance régulière d'une solution S-asymptotiquement w -périodique de l'équation de Liénard.

Lemme 3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que toutes ses valeurs propres ont une partie réelle différente de zéro. Alors, pour tous $h \in SAP_w^0(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution S-asymptotiquement w -périodique de l'équation différentielle*

$$u'(t) = Au(t) + h(t). \quad (3.1)$$

Ce lemme est une généralisation d'un travail sur [2]

Théorème 3.1 *Soit l'équation de Liénard*

$$(\mathcal{F}, e) \quad x''(t) + f(x(t), x'(t)).x'(t) + g(x(t)) = e(t).$$

Sous les hypothèses

(A1) $f \in UC_b^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $g \in UC_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(A2) $g(0) = 0$.

(A3) $f(0, 0) \neq 0$ lorsque $f(0, 0)^2 < 4g'(0)$, et $g'(0) \neq 0$ lorsque $f(0, 0)^2 \geq 4g'(0)$.

Il existe un voisinage \mathcal{W} de 0 dans $SAP_w^0(\mathbb{R})$, un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $SAP_w^2(\mathbb{R}^2)$ et une application $e \mapsto \underline{x}[e]$ de classe C^1 , de \mathcal{W} dans \mathcal{U} qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $\underline{x}[0] = 0$.

(ii) Pour tout $e \in \mathcal{W}$, $\underline{x}[e]$ est une solution S-asymptotiquement ω -périodique de (\mathcal{F}, e) .

(iii) Si $x \in \mathcal{U}$ solution S-asymptotiquement ω -périodique de (\mathcal{F}, e) . avec $e \in \mathcal{W}$ dans $SAP_\omega^0(\mathbb{R})$, alors on a $x = \underline{x}[e]$.

On définit l'opérateur non linéaire $\Phi : SAP_\omega^2(\mathbb{R}) \times SAP_\omega^0(\mathbb{R}) \rightarrow SAP_\omega^0(\mathbb{R})$

$$\Phi(x, e) := [t \mapsto x''(t) + f(x(t), x'(t)).x'(t) + g(x(t)) - e(t)] \quad (3.2)$$

où $x \in SAP_\omega^2(\mathbb{R})$.

Il est facile de remarquer que, $x \in SAP_\omega^2(\mathbb{R})$ satisfait $\Phi(x, e) = 0$ si et seulement si x est une solution S-asymptotiquement ω -périodique de (\mathcal{F}, e) . Pour bien organiser notre démonstration de Théorème 3.1, on va la découper en des lemmes avec leurs démonstrations pour assurer les hypothèses du théorème des fonctions implicites ([6], p. 61) sur $\Phi(x, p) = 0$ sur $\Phi(x, e) = 0$ et donc l'existence et l'unicité d'une solution S-asympmtotiquement ω -périodique de (\mathcal{F}, e) .

Par l'hypothèse (A2), 0 est une solution S-asympmtotiquement ω -périodique de $(\mathcal{F}, 0)$, et alors on a l'égalité suivante

$$\Phi(0, 0) = 0. \quad (3.3)$$

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses (A1 – A2), l'opérateur Φ est bien défini, et il est de classe C^1 de $SAP_\omega^2(\mathbb{R}) \times SAP_\omega^0(\mathbb{R})$. De plus la dérivée partielle de Φ par rapport à la première variable, au point $(x, e) = (0, 0)$, est donnée par*

$$D_x \Phi(0, 0).y = [t \mapsto y''(t) + f(0).y'(t) + g'(0).y(t)]$$

où $y \in SAP_\omega^2(\mathbb{R})$.

Démonstration On note que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\Phi = \frac{d^2}{dt^2} \circ \pi_1 + N_B(N_f \circ in_2 \circ \Delta \circ \pi_1, \frac{d}{dt} \circ (in_1 \circ \pi_1)) + N_g \circ in_3 \circ \pi_1 - \pi_2. \quad (3.4)$$

D'après le théorème 2.3 et l'hypothèse (A₁) on a

$$N_f, N_g \text{ est de classe } C^1.$$

D'après les equations (2.1) jusqu'à (2.5) du chapitre 2 alors on a

$$\pi_1 \pi_2 N_B \frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2} in_1, in_2, in_3 \text{ sont de classe } C^1.$$

Pour l'opérateur Δ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta : SAP_{\omega}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow SAP_{\omega}^2(\mathbb{R}) \times SAP_{\omega}^1(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \Delta(x) = (x, x') \end{aligned}$$

Δ est linéaire puisque

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) &= \lambda_1(x_1, x'_1) + \lambda_2(x_2, x'_2) \\ &= \lambda_1\Delta(x_1) + \lambda_2\Delta(x_2) \end{aligned}$$

Et on a

$$\|(x, x')\|_{BC^2 \times BC^1} = \sup(\|x\|_{BC^2}, \|x'\|_{BC^1}) \leq \|x\|_{BC^2},$$

car si $\sup(\|x\|_{BC^2}, \|x'\|_{BC^1}) = \|x\|_{BC^2}$ on a

$$\|x\|_{BC^2} \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Et si $\sup(\|x\|_{BC^2}, \|x'\|_{BC^1}) = \|x'\|_{BC^1}$ on a

$$\|x'\|_{BC^1} = \|x'\|_{BC^0} + \|x''\|_{BC^0} \leq \|x\|_{BC^0} + \|x'\|_{BC^0} + \|x''\|_{BC^0}$$

donc

$$\|\Delta(x)\|_{BC^2 \times BC^1} \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où Δ est de classe C^1 . Par l'utilisation des règles habituelles du calcul différentiel dans les espaces de Banach, on obtient que Φ est de classe C^1 .

Et alors, pour tout $y \in SAP_{\omega}^2(\mathbb{R})$, et par l'utilisation des formules classique du calcul différentiel dans les espaces de Banach, on obtient

$$D_x\Phi(0, 0).y = \frac{d^2}{dt^2}y + N_B(D_x N_f(0, 0).y, 0) + N_B(N_f(0, 0), \frac{d}{dt}.y + D_x N_g(0).y) + 0,$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(D_x\Phi(0, 0).y)(t) = y''(t) + f(0, 0).y'(t) + g'(0).y(t).$$

Lemme 3.3 *Sous les hypothèses (A1-A3), $D_x\Phi(0, 0)$ est bijectif de $SAP_{\omega}^2(\mathbb{R})$ sur $SAP_{\omega}^0(\mathbb{R})$.*

Démonstration

Soit $e \in SAP_{\omega}^0(\mathbb{R})$. Nous voulons montrer qu'il existe une unique $y \in SAP_{\omega}^2(\mathbb{R})$ tel que $D_x\Phi(0, 0).y = e$. en utilisant la formule prouvée par le lemme 3.2, cette

équation est équivalente à dire que y est une solution S-asymptotiquement ω -périodique de l'équation différentielle linéaire du seconde ordre (qui est l'équation de Duffing) :

$$y''(t) + f(0, 0).y'(t) + g'(0).y(t) = e(t). \quad (3.5)$$

Soit le système différentiel de premier ordre équivalent à l'équation (3.5) suivant.

$$X'(t) = M.X(t) + B(t) \quad (3.6)$$

où $X(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$, $B(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ e(t) \end{bmatrix}$, et $M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -f(0, 0) \end{bmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de M est

$$\lambda^2 + f(0, 0).\lambda + g'(0).$$

On note par λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres (égales ou différentes) de M . Dans le cas où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, c.à.d

$$f(0, 0)^2 \geq 4g'(0),$$

la condition (A3) implique que $\lambda_1 \neq 0$ and $\lambda_2 \neq 0$ car on a

$$g'(0) = \lambda_1.\lambda_2 \neq 0.$$

Dans le cas où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, c.à.d

$$f(0, 0)^2 < 4g'(0),$$

la condition (A3) implique que $\Re\lambda_1 \neq 0$ et $\Re\lambda_2 \neq 0$ puisque

$$f(0, 0) = -2\Re\lambda_1 = -2\Re\lambda_2.$$

Alors les hypothèses du lemme 3.1 sont vérifiées, et donc il existe une unique solution S-asymptotiquement ω -périodique X . Par conséquent, la première coordonnée de X , notée par y , est l'unique S-asymptotiquement ω -périodique de (3.5). Donc y est l'unique élément dans $SAP_{\omega}^2(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$D_x\Phi(0, 0).y = e.$$

Par l'utilisation de (3.3), du Lemme 3.2, du Lemme 3.3 et avec le théorème des fonctions implicites ([6], p. 61) on obtient l'existence d'un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $SAP_{\omega}^2(\mathbb{R})$, un voisinage \mathcal{V} de 0 dans $SAP_{\omega}^0(\mathbb{R})$ et une application $e \mapsto \underline{x}[e]$ de classe C^1 de \mathcal{V} dans \mathcal{U} qui satisfont les conditions suivantes :

- a/ $\underline{x}[0] = 0$, qui est la condition (i) du notre théorème .
- b/ $\Phi(\underline{x}[e], e) = 0$ pour tous $e \in \mathcal{V}$, on assure alors que $\underline{x}[e]$ est une solution S-asympmtotiquement ω -periodique de (\mathcal{F}, e) pour tous $e \in \mathcal{V}$ et c'est la conclusion (ii) du notre théorème.
- c/ $\{(x, e) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : \Phi(x, e) = 0\} = \{(\underline{x}[e], e) : e \in \mathcal{V}\}$ et donc la conclusion (iii) du notre Théorème.

Ainsi notre Théorème est prouvés.

Bibliographie

- [1] J. Blot, S. Boudjema, *Small almost periodic and almost automorphic oscillations in forced Liénard equation*, J. Abstr. Differ. Equ. Appl, **1**(2010), no. 1, 1-11.
- [2] J. Blot, S. Boudjema, P. Cieutat, *Several kinds of oscillations in forced Liénard equations*, Boundary value problems. 2013, 2013 :66.
- [3] J. Blot, S. Boudjema, P. Cieutat, *Dependence results for S -asymptotically periodic solutions of evolution equations*, Nonlinear Studies, 20(2013), no.3, 295-307.
- [4] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata, *S -asymptotically ω -periodic functions and applications to evolution equations*, Afr. Diaspora J. Math.12(2) (2011), 113-121.
- [5] I.Boussaada, A.Raouf Chouikha, *On the existence of periodic solution of perturbed generalized Liénard equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006, no 140, pp 110.
- [6] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1977.
- [7] C. Cuevas, M. Pierri, A. Sepulveda, *Weighted S -asymptotically ω -Periodic Solutions of a Class of Fractional differential equations*, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Difference Equations, Vol 2011, Article ID 584874, 13 pages.
- [8] C. Cuevas, J.C. de Souza, *S -asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Applied Mathematics Letters, Vol.22 (2009) 865-870.
- [9] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic press, New York, 1974.
- [10] H.R. Henriquez, M.Pierri, P.Táboas, *On S -asymptotically ω -periodic functions on Banach spaces and applications*, J. Math. Anal. appl. 343 (2008), 1119-1130.
- [11] H.R. Henriquez, M.Pierri, P.Táboas, *Existence of S -asymptotically ω -periodic solutions for abstract neutral equations*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 78(2008), 365-382.

- [12] S. Nicola, M. Pierri, *A note on S -asymptotically ω -periodic functions*, *Nonlinear Analysis, Real World Applications*, 10 (2009), 2937-2938.
- [13] C. Lizama, G. M. N'Guérékata, *Bounded mild solutions for semilinear integro-differential equations in Banach spaces*, *Integral Equations Operator Theory*. **68**(2010), 207-227.