

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Titre

L'ESTIMATION DE LA DENSITÉ SPECTRALE D'UN  
CHAMP ALÉATOIRE PAR LA MÉTHODE  
D'ONDELETTES

Option : AN-EDP

Par :

*SAADI Sara*

Encadré par : KIMOUCHE Karima

M .C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : LALLOUCHE Abdallah

M.C.B U. SKIKDA

Examinatrice: TILBI Djahida

M.C.B U. SKIKDA

Examineur: ZIBOUCHE Ouassila

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022

## *Remerciements*

*Louange à ALLAH qui nous a guidé à ceci, nous n'aurions pas été guidés, si ALLAH ne nous avait pas guidé.*

*Tous mes remerciements s'adressent tous d'abord à tout puissant ALLAH, d'avoir guidé mes pas vers le chemin de savoir.*

*Je tiens à remercier, toutes personnes ayant participés de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire de master.*

*En particulier ; mon encadreur, Maître de Conférence Mlle KIMOUCHE Karima, pour ses précieuses orientations, ainsi que pour ses critiques constructives, en effet les idées exprimées ici, sont pour l'essentiel le fruit de nos discussions.*

*Mes vifs remerciements vont au Maître de Conférence Mr LALLOUCHE Abdallah qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance, et au Mr TILBI Djahida d'avoir m'accorder une partie de leurs temps pour examiner ce travail.*

*Je tiens à remercier vivement, l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques à l'université de skikda, en particulier ceux qu'ont faits parties du staff d'encadrement au cours de l'année théorique.*

*Mes remerciements vont aussi, à mes collègues de promotion de la graduation.*

*Enfin, je tiens à exprimer mon immense gratitude et dédie ce modeste travail :*

*À ma chère mère qui a été toujours à côté de moi par ses nobles invocations et sa patience.*

*À mon cher père qui a attendu avec patience les fruits de ses bonnes éducations.*

*À mon marie, qui a été toujours à mes côtés, avec son soutien et sa patience.*

*À toute ma famille, mes proches et mes amis.*

## Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'estimation de la densité spectrale d'un champ aléatoire à l'aide de la méthode d'ondelettes. Nous avons défini les notions de base de la variable aléatoire et le processus stochastique, puis nous avons donné un bref sur la transformée en ondelettes (continue et discrète). Ensuite, nous avons étudié les champs aléatoires et l'analyse multirésolution. Enfin, nous avons considéré les aspects théoriques de la densité spectrale par la méthode des ondelettes pour les champs aléatoires, nous avons aussi obtenu les versions empiriques des coefficients d'ondelettes.

### Mot clé:

- Champs aléatoires
- Transformée en ondelette
- Analyse Multirésolution
- Densité spectrale

## ملخص

في هذا العمل ، قمنا بدراسة تقدير الكثافة الطيفية لحقل عشوائي باستخدام طريقة الموجات. حيث حددنا المفاهيم الأساسية للمتغير العشوائي والعملية العشوائية ، ثم قدمنا نبذة مختصرة عن التحويل المويجي (المستمر والمنفصل). ثم درسنا الحقول العشوائية وتحليل متعدد الحلقات. أخيرًا ، قمنا بدراسة الجوانب النظرية للكثافة الطيفية بطريقة الموجات للحقول العشوائية ، كما حصلنا على الإصدارات التجريبية لمعاملات الموجات.

### كلمة مفتاحية:

- حقول عشوائية
- تحويل الموجات
- تحليل متعدد الحلقات
- الكثافة الطيفية

## **Abstract**

In this work, we studied the estimation of the spectral density of a random field using the wavelet method. We defined the basic notions of the random variable and the stochastic process, we gave a brief on the wavelet transform (continuous and discrete). Then, we studied random fields and multiresolution analysis. Finally, we considered the theoretical aspects of the spectral density by the wavelet method for random fields, we also obtained the empirical versions of the wavelet coefficients.

### **Keyword:**

- Random field
- Wavelet transform
- Multiresolution analysis
- Spectral density

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
<b>1 Variables aléatoires et processus stochastique</b>	<b>1</b>
1.1 Variable aléatoire . . . . .	1
1.1.1 Loi de probabilité, Fonction de répartition . . . . .	1
1.1.2 L'espérance et la variance . . . . .	3
1.1.3 Loi Normale (Gaussienne) : $N(m, \sigma^2)$ . . . . .	4
1.2 Processus stochastique . . . . .	4
1.2.1 Stationnarité . . . . .	5
1.2.2 Les moments . . . . .	5
1.2.3 La densité spectrale . . . . .	6
<b>2 La transformée en ondelettes</b>	<b>7</b>
2.1 Historique . . . . .	7
2.2 La transformée en ondelettes . . . . .	8
2.3 Les types de transformées en ondelettes . . . . .	9
2.3.1 La transformée en ondelettes continue . . . . .	10
2.3.2 La transformée en ondelettes discrète . . . . .	10
2.4 Quelques familles de la transformé en ondelettes . . . . .	11
<b>3 Les champs aléatoires</b>	<b>16</b>
3.1 Analyse Multirésolution dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	16
3.2 Les Champs aléatoires . . . . .	21
3.3 Représentation en ondelettes de champs aléatoires discrets . . . . .	23

<b>4</b>	<b>L'estimation non linéaire de la densité spectrale d'un champ aléatoire</b>	<b>25</b>
4.1	Cumulant des coefficients d'ondelettes empiriques . . . . .	25
4.2	Normalité asymptotique des coefficients d'ondelettes empiriques . . . . .	27
4.3	Dérivation des schémas de seuillage . . . . .	29

# Introduction

La méthode en ondelettes est un outil mathématique s'ajoute aux méthodes classiques d'analyse du signal. Il sont issues de l'intuition d'un ingénieur en géophysique, J. Morlet, dans les années 1980. Sous l'impulsion de personnalités scientifiques telles que le physicien A. Grossman ou le mathématicien Y. Meyer. Il met l'accent sur les caractéristiques importantes du signal et semble en outre correspondre à des réalités physiques du traitement des signaux acoustiques.

Au cours de ces dernières années, les méthodes par ondelettes sont préconisées comme une alternative aux méthodes de Fourier pour l'analyse des signaux non linéaires et non stationnaires. Pour cela, les ondelettes se sont imposées comme des outils fondamentaux de l'analyse harmonique moderne.

L'estimation de la densité spectrale pour les champs aléatoires à une très longue histoire. Elle à occupé une place importante dans le domaine de traitement du signal et traitement d'image. Elle à prouvé leur utilité dans le filtrage linéaire et la théorie de prédiction en communication.

Dans ce mémoire, nous considérons des estimateurs non linéaires de la densité spectrale d'un champ aléatoire par la méthodes en ondelettes, nous obtenons des coefficients d'ondelettes empiriques de la densité spectrale qui sont ensuite traités par la même méthode de Neumann, nous avons aussi énoncé la normalité asymptotique. Nous avons également montré que l'ondelette à seuil d'optimalité atteint le taux de convergence minimax dans une grande échelle de la classe de lissage de Besov.

Compte tenu de cet objectif, nous avons opté pour le plan de travail suivant :

**Le premier chapitre** est consacré aux rappels sur les notions de base concernant la variable aléatoire et le processus stochastiques.

**Dans le deuxième chapitre** on introduit les principales notions et propriétés de la transformée de Fourier ainsi que celles de la transformée en ondelettes. Certains exemples des ondelettes sont aussi est évoqués dans ce chapitre.

**Le troisième chapitre** décrira les champs aléatoires qui est fournit par l'analyse Multirésolution

dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Le dernier chapitre** est porté sur l'estimation non linéaire de la densité spectrale par la méthodes en ondelettes, on à étudiée les cumulant des coefficients d'ondelettes empiriques et la dérivation des schémas de seuillage, aussi le choix de seuil adaptatif.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion.

# Chapitre 1

## Variables aléatoires et processus stochastique

### 1.1 Variable aléatoire

On considère un ensemble  $\Omega$  muni d'une probabilité  $P$ .

**Définition 1** Une variable aléatoire  $X$  est une fonction définie sur l'ensemble fondamental  $\Omega$  qui associe une valeur à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée dans  $\mathbb{R}$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit :  $X$  une variable aléatoire discrète quand elle ne prend que des valeurs discrètes .

**Exemple 1** On jette deux dés distincts et on s'intéresse au plus grand chiffre. On note  $X$  cette variable aléatoire, elle est définie par

$$\begin{aligned} X & : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\} \\ (\omega_1, \omega_2) & \rightarrow \max(w_1, w_2). \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs possibles de  $X$  est  $\{1, 2, \dots, 6\}$ .

#### 1.1.1 Loi de probabilité, Fonction de répartition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de connaître les chances d'apparition des différentes valeurs de cette variable. On se place sur l'espace de probabilité  $(\Omega, P)$ .

## La loi de probabilité d'une variable aléatoire

**Définition 2** la loi d'une variable aléatoire discrète  $X$  est la liste de toutes les valeurs différentes que peut prendre  $X$  avec les probabilités qui leur sont associées. La loi de  $X$  est définie par :

$$\begin{aligned} F_X &: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow P(X \leq x). \end{aligned}$$

où  $F_x$  la fonction de répartition de la variable  $X$ . La loi de  $X$  est en générale notée  $\mathcal{L}(X)$  ou  $\mathcal{L}oi(X)$ .

**Remarque 1** Si les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même fonction de répartition  $F_X = F_Y$ , on dit qu'elles ont la même loi.

**Propriétés :** Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$  alors :

1.  $F$  est une fonction croissante à valeur dans  $[0, 1]$ .
2.  $F$  continue à droite et admet une limite à gauche en tout point  $x$  égale à  $P[X < x]$  (c'est à dire n'est pas forcément continue).
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
4. Si  $a \leq b$ ,  $P(a \leq x \leq b) = P(X < b) - P(X < a) = F_x(b) - F_x(a)$ .

Pour une variable aléatoire discrète, la fonction de répartition est une fonction escalier, avec un saut en chaque valeur  $k$  de  $X(\Omega)$  et la hauteur de ces sauts est la probabilité  $P(X = k)$

**Proposition 1** - La fonction de répartition d'une variable discrète est constante par morceaux. Si  $X$  est une variable discrète à valeurs dans  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  avec  $x_1 < \dots < x_n \dots$ , on a pour  $x \in \mathbb{R}$

$$F_x(x) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i) \text{ avec } k \text{ tel que } x_k \leq x < x_{k+1}.$$

**Proposition 2** Si  $X$  est à valeurs discrètes dans  $\{x_1, \dots, x_n\}$  (ou  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ), la loi de  $X$  est entièrement caractérisée par  $\{P(X = x_i) : i \geq 1\}$ .

## La fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue

**Définition 3** Une variable aléatoire  $X$  possède une densité si sa fonction de répartition  $F_X$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , la dérivée notée  $f$  est appelé densité de probabilité de la

variable aléatoire  $X$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

où  $f$  une fonction intégrable satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$ ,
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ .

**Proposition 3** Soit  $F_X$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue  $X$  alors :

- $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable en tout point où  $f$  est continue et alors  $F_X' = f$ .
- $F_X$  est croissante à valeurs dans  $[0, 1]$ .
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$ .

### 1.1.2 L'espérance et la variance

**Définition 4** L'espérance d'une variable aléatoire  $X$ , notée  $E[X]$  est la moyenne de ses valeurs, pondérées par leurs probabilités.

1. Si  $X$  est discrète,  $E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ .
2. Si  $X$  est continue de densité  $f_X$ ,  $E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x) dx$ .

**Définition 5** Soit  $X$  une variable aléatoire. La variance de  $X$  est l'espérance des carrés des écarts de  $X$  à sa moyenne, notée  $Var(X)$ , est définie par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] \geq 0.$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance  $\sigma(X) = \sqrt{Var(x)}$ . Lorsqu'une variable  $X$  vérifie  $Var(X) = 1$ , on dit que la variable est réduite.

La variance s'écrit aussi  $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$ .

#### Propriétés :

Pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ayant une variance, et toute constante  $a$  et  $b$ .

1.  $Var(X) = 0$  ssi  $X$  est constante.
2.  $Var(aX) = a^2Var(X)$
3.  $Var(X + b) = Var(X)$ .

## Corrélation de deux variables aléatoires

**Définition 6** Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. réelles intégrables. La covariance de  $X$  et  $Y$ , ou coefficient de corrélation, est définie par

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Lorsque  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , on dit que  $X$  et  $Y$  sont non corrélées.

### 1.1.3 Loi Normale (Gaussienne) : $N(m, \sigma^2)$

La loi Normale est une loi centrale dans la théorie des probabilités. C'est une loi de probabilité absolument continue. Cette loi est déterminée par ces paramètres statistique  $(m, \sigma^2)$  avec  $m, \sigma$  deux réels tel  $\sigma > 0$ . On dit que la variable aléatoire continue suit la loi normale de paramètre  $m$  et  $\sigma$  lorsqu'elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

#### Propriétés de la loi normale

- La fonction densité de probabilité est proche vers zéros quand  $x$  est tend de  $\pm\infty$ .
- La fonction de densité de probabilité est centrée à la moyenne, et maximal quand  $x = m$ .
- la loi normale est dite centrée réduite si  $m = 0$  et  $\sigma = 1$ .
- $E(X) = m$  et  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .

## 1.2 Processus stochastique

**Définition 7** un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indexées par un paramètres  $t$  appartenant à un espace métrique appelé ensemble d'indices  $Q$ .

$$X(t, \omega) = \{X(t), t \in Q\}.$$

Si l'ensemble des indices  $Q$  est dénombrable (fini où infini) nous dirons que le processus est à temps discret. Dans le cas contraire, il sera dit à temps continu.

### 1.2.1 Stationnarité

**Définition 8** Si pour tout  $s \geq 0$  et pour tout  $t_1, t_2, \dots, t_n$  les vecteurs aléatoires  $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}'$  et  $\{X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s}\}'$  ont même loi de probabilité, on dit que un processus aléatoire  $\{X_t, t \geq 0\}$  est stationnaire.

**Définition 9 (Stationnarité stricte)** Un processus aléatoire est stationnaire au sens strict d'ordre  $N$  si ses caractéristiques probabilistes sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, \dots, t_2) = F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau), \forall \tau \in T$$

**Définition 10 (Stationnarité au second ordre)** un processus stochastique est stationnaire du second ordre si le caractère de stationnarité n'est vérifié que jusqu'aux moments d'ordre 2 :

- $m_x(t) = m_X = C, \forall t;$
- $\Gamma_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \Gamma_x(t_2 - t_1)$  : la fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence  $\tau = t_2 - t_1$ .

**Remarque 2** Notons que la stationnarité au sens strict implique la stationnarité d'ordre 2.

### 1.2.2 Les moments

**Définition 11** soit  $K \in \mathbb{N}$  et  $X$  une variable aléatoire discrète ou continue avec fonction de densité  $f$ , telle que  $E[|X|^k] < +\infty$ . Le moment d'ordre  $K \in X$  est le nombre  $E[X^k]$ .

- a) Le premier moment de  $X$  est  $E[X]$ .
- b) Le deuxième moment de  $X$  est  $E[X^2] = \text{Var}(X) + (E[X])^2$ .
- c) Le moment d'ordre  $k$  de  $X$  n'est bien défini que si  $E[|X|^k] < +\infty$ . Dans ce cas, pour  $0 \leq l \leq k$ ,  $E[|X|^l]$  est aussi fini.

#### Propriétés :

- Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles, on a alors :  $m_1(X + Y) = m_1(X) + m_1(Y)$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a en outre :  $m_2(X + Y) = m_2(X) + m_2(Y)$  et  $m_3(X + Y) = m_3(X) + m_3(Y)$ .

### 1.2.3 La densité spectrale

**Définition 12** est un outil mathématique permettant de représenter les différentes composantes spectrales d'un signal et d'en effectuer l'analyse harmonique. Elle est utilisée en particulier en physique, en ingénierie et en traitement du signal. La densité spectrale est définie comme suit :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) e^{-i\lambda j}$$

où  $i = \sqrt{-1}$ .

**Remarque 3** Remarquez que, puisque  $\gamma(j) = \gamma(-j)$ , il s'ensuit que la densité spectrale est à valeur réelle.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left( \gamma(0) + \sum_{j=-\infty}^{-1} \gamma(j) e^{-i\lambda j} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j) e^{-i\lambda j} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \gamma(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(-j) e^{i\lambda j} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j) e^{-i\lambda j} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \gamma(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j) (e^{i\lambda j} + e^{-i\lambda j}) \right) \end{aligned}$$

Ensuite,  $e^{i\lambda j} = \cos(\lambda j) + i \sin(\lambda j)$ ,  $e^{-i\lambda j} = \cos(\lambda j) - i \sin(\lambda j)$  et donc  $e^{i\lambda j} + e^{-i\lambda j} = 2 \cos(\lambda j)$ . D'où,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left( \gamma(0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j) \cos(\lambda j) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \cos(\lambda j). \end{aligned}$$

Puisque  $\cos(\lambda j) = \cos(\lambda j)$ , la densité spectrale est symétrique autour de zéro. De plus, comme  $\cos$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ , la plage de valeurs de la densité spectrale est déterminée par les valeurs de  $f(\lambda)$  pour  $0 \leq \lambda \leq \pi$ .

# Chapitre 2

## La transformée en ondelettes

### 2.1 Historique

Les transformations linéaires ont toujours joué un très grand rôle dans le traitement du signal, parmi elles, la plus anciennement étudiée est la transformation de Fourier (1822). Cette transformation permet d'explorer la composition fréquentielle du signal. Très tôt dans l'histoire du traitement du signal, il s'est avéré que la décomposition obtenue par Fourier n'était pas toujours la plus satisfaisante. Aux années 1940, Gabor découvrait la première forme de la représentation temps-fréquence. Sa technique consiste à découper le signal en différentes plages de longueur fixe ou fenêtre. Chaque segment du signal limité par une fenêtre est étudié séparément des autres par l'analyse de Fourier. L'ensemble de ces transformées localisées forme la transformée de Gabor du signal. L'inconvénient majeur de ce procédé est que la longueur de la fenêtre étant fixée, il n'est pas possible d'analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps sont différentes. Une autre technique d'analyse qui ne privilégie aucune échelle particulière mais qui généralise à toutes les échelles l'analyse locale des fréquences obtenues par la méthode de Gabor devient plus que nécessaire. En 1982, J. Morlet ouvre la voie conduisant à la solution en construisant l'analyse en ondelettes, fondée sur un concept quelque peu différent de celui de fréquence : le concept d'échelle. Cette procédure développée par Stéphane Mallat et systématisée par Ingrid Daubechies, porte le nom de multi-résolution et suggère une interprétation différente de l'analyse par ondelettes. Les ondelettes constituent donc un outil parmi les plus récents du traitement du signal et qui datent de quelques décennies seulement. Elles nous permettent d'effectuer une analyse robuste et mènent à de multitudes applications. Contrairement à la transformée de Fourier à court terme, la transformée en ondelettes fait appel à la notion de temps-échelle impliquant des fenêtres d'analyse de longueurs dynamiques.

## 2.2 La transformée en ondelettes

**Définition 13** La transformée en ondelettes consiste à décomposer un signal sur une base de fonctions particulières  $\psi_{a,b}$ , appelées ondelettes<sup>1</sup>. Ces ondelettes se déduisent d'une fonction générique  $\psi$  par de simple translations temporelles et par des changements d'échelles (dilatation/contraction).



FIG. 2.1 - La Transformée en ondelettes.

Cette fonction générique  $\psi$ , appelée "ondelette mère" (ou ondelette analysante). L'ondelette mère génère une famille d'ondelettes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

où  $b$  est le paramètre relatif à la translation tandis que  $a$  est relatif à la dilatation. Par conséquent, quand l'échelle  $a$  augmente, la résolution augmente. Ceci veut dire que le support de la partie non-nulle de l'ondelette mère augmente. De plus, il est habituellement supposé que la condition suivante est vérifiée :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{\|\hat{\psi}(v)\|^2}{v} dv < +\infty$$

où  $\hat{\psi}$  est la transformée de Fourier de  $\psi$ . Cette condition d'admissibilité impose pour les fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  que  $\psi(t)$  soit de moyenne nulle. On peut imposer en outre des conditions de régularité telles que des moments multiples nuls (i.e.  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0$ ), et donc des propriétés de décroissance et de convergence vers 0 à l'infini de  $\psi(t)$  et de sa transformée de Fourier.

**Théorème 1** soit la fonction  $\psi \in L^1 \cap L^2$ , on dit que  $\psi$  une ondelette-mère, si elle vérifie les conditions suivantes :

<sup>1</sup> Une ondelette est une forme d'onde qui a une valeur moyenne nulle et une durée limitée (ce qui explique le mot "ondelette" qui veut dire petit onde ou vague).

$$\text{i) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|^2} dw = k < +\infty$$

$$\text{ii) } \|\psi\| = 1.$$

On construit alors les ondelettes de base

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), b \in \mathbb{R}, a > 0,$$

et pour tout signal  $f \in L^2$  on considère la transformée en ondelettes du signal  $f$  qui est définie par  $C_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt$ , ou  $C_f(a,b)$  sont les coefficients d'ondelettes. Alors on a :

1. Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{k} \int \int_{\mathbb{R}^2} |C_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

2. La formule de reconstruction

$$f(t) = \frac{1}{k} \int \int_{\mathbb{R}^2} C_f(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

au sens suivant si

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{k} \int \int_{|a|>\varepsilon, b \in \mathbb{R}} C_f(a,b) \Psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

alors  $f_\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^2$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve.** La démonstration de ce théorème est aussi longue et technique. Nous référons le lecteur à [8].

**Exemple 2** soit la formule mathématique de l'ondelette Morlet suivante :

$$\psi(t) = e^{-\pi t^2} e^{10i\pi t}$$

On a donc

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\pi\left(\frac{t-a}{b}\right)^2} e^{10i\pi\left(\frac{t-a}{b}\right)}.$$

## 2.3 Les types de transformées en ondelettes

La transformée en ondelettes cherche une localisation temporelle du comportement fréquentiel d'un signal, qui permet un passage d'une représentation à une autre. De plus, nous pourrions dire que les ondelettes permettent aussi de mesurer les variations dans le temps des composantes fréquentielles (spectrales) d'un signal.

On distingue principalement deux types de transformées en ondelettes :

### 2.3.1 La transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelette continue permet d'analyser le comportement local d'un signal en réduisant progressivement le paramètre d'échelle. Cette procédure de zoom est un outil puissant pour détecter et caractériser les irrégularités d'un signal.

La transformée en ondelettes continue utilise des translations et des dilatations de la fonction ondelette mère durant tous l'intervalle du temps de manière continue. La transformée en ondelettes continue est donnée par :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{b}} \Psi \left( \frac{t-a}{b} \right)$$

Cette transformation est en théorie infiniment redondante puisque l'ondelette est tradatée de manière continue, cependant il existe des méthodes pour diminuer cette redondance l'une de ces méthodes consiste en l'emploi de la transformée en ondelettes discrète.

### 2.3.2 La transformée en ondelettes discrète

Le facteur d'échelle  $a$  et le paramètre de translation  $b$  sont des réels, on peut les faire varier continument, la transformation en ondelette est continue et donc redondante ; c'est-à-dire que l'on obtient plus de coefficient d'ondelette qu'il n'en est nécessaire pour décrire le signal de manière complète. Le pavage temps-fréquence obtenu suggère une méthode de discrétisation exponentielle pour les échelles et pour le temps. c'est important de souligner que c'est la transformée qui est discrète et non pas l'ondelette qui reste une fonction continue.

En 1985, Meyer découvrit que si on choisissait des opérateurs de dilatation et de translation dyadiques, on obtiendrait une représentation non redondante de l'information. La nouvelle fonction analysante est :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j(x - 2^{-j}k))$$

où  $\psi$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  appelée ondelette mère, et  $j, k$  l'indice de position.  $\psi_{j,k}$  est donc déduit de  $\psi$  par une transformation d'échelle et une translation.

Dans la définition, le facteur  $2^{\frac{j}{2}}$  est introduit pour que la norme  $L^2(\mathbb{R})$  de  $\psi_{j,k}$  soit la même pour tous les  $j$  et les  $k$ . En effet,

$$\|\psi_{j,k}\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\psi\|_2$$

les fonctions  $\psi_{j,k}$  sont obtenues de  $\psi$  par une normalisation, une dilatation ainsi qu'une translation.

De façon plus précise, la fonction  $\psi_{j,k}$  est tradatée de  $2^{-j}k$  unités, elle est dilatée verticalement d'un facteur  $2^{\frac{j}{2}}$  et horizontalement d'un facteur  $2^{-j}$  par rapport à la fonction  $\psi$ .

La découverte en 1985 des bases orthonormées d'ondelettes fût un tournant décisif dans la théorie des ondelettes. Y. Meyer montre qu'il existe des familles d'ondelettes dénombrables  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  formant des bases orthonormées de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Puisque  $L^2(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert, la transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par :  $f \rightarrow \langle f, \psi_{j,k} \rangle$   $j, k \in \mathbb{Z}$ , avec la formule de reconstruction :

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t).$$

la formule de plancherel :

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2.$$

En 1910, Alfred Haar est le premier à décrire une base orthonormale complète de  $L^2(\mathbb{R})$ . C'est ce que nous appelons aujourd'hui les ondelettes de Haar. L'ondelette mère est définie par

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 2** *Le système  $\{H_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Les ondelettes mères sont souvent construites à partir d'une analyse multirésolution. Nous étudierons donc cette dernière, car elle donne un cadre naturel pour comprendre les bases de  $L^2(\mathbb{R})$  qui forment des ondelettes mères. Les idées de l'analyse multirésolution qui ont été énoncées en 1986 par Mallat et Meyer, permet de décomposer des signaux mono ou multidimensionnels sur une base (orthonormée) de fonctions d'échelle et sur une base (orthonormée) de fonctions ondelette.

## 2.4 Quelques familles de la transformé en ondelettes

Il existe une infinité de fonctions d'ondelettes parce que toute fonction oscillante localisée est une ondelette mère possible. Toutefois, elles ne possèdent pas toutes des propriétés intéressantes. Aussi, de nombreux spécialistes des ondelettes ont construit des familles d'ondelettes possédant certaines propriétés remarquables Parmi les familles d'ondelettes, les ondelettes de Haar sont les plus simples, mais elles ne sont pas bien localisées. Ingrid Daubechies a construit des ondelettes à support compact qui permettent d'utiliser des filtres de taille finie. Les différentes familles d'ondelettes sont utilisées selon leurs propriétés en fonction du problème à résoudre.

## Ondelette de Haar

L'ondelette de Haar est générée par une fonction d'échelle  $\phi$  défini par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction d'ondelette  $\psi$  de Haar associée à cette fonction d'échelle est définie par

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1),$$

ou encore

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

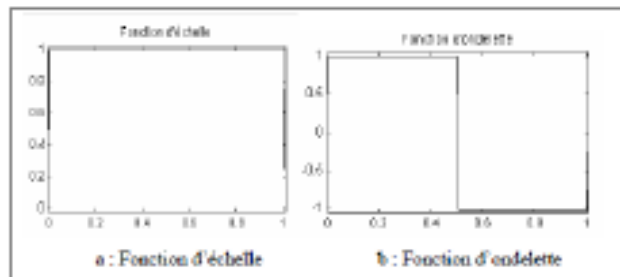


FIG 2.2 - La fonction d'échelle et la fonction d'ondelette de Haar.

Les ondelettes de Haar un système orthonormé dans  $\mathbb{R}$ . Ce sont des fonctions discontinues, utilisées souvent pour détecter les transitions dans un signal.

## Ondelette de Meyer

L'ondelette de Meyer a une transformée de Fourier à support compact. aussi infiniment dérivable. Cette ondelette se construit en considérant une fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est paire,  $C^\infty$ , telle que

$$\widehat{\phi}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < \frac{2\pi}{3}, \\ 0 & \text{si } |f| < \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

et qui vérifie les propriétés nécessaires pour décrire une fonction d'échelle. Contrairement à la précédente, cette ondelette est très régulière. Malheureusement, son support est lui aussi infini.

### Ondelettes de Daubechies

Les ondelettes de Daubechies ( $dbN$ ) sont des ondelettes de support minimal pour un nombre de moments nuls donnés. Autrement dit, elles dépendent d'un paramètre  $N$  fixé. Elles ont alors  $N$  moments nuls et sont à support dans  $[-N + 1, N]$ . Cette ondelette est obtenue de façon constructive, à partir des filtres  $h_0$  et  $h_1$ . Elle est aussi fortement asymétrique.

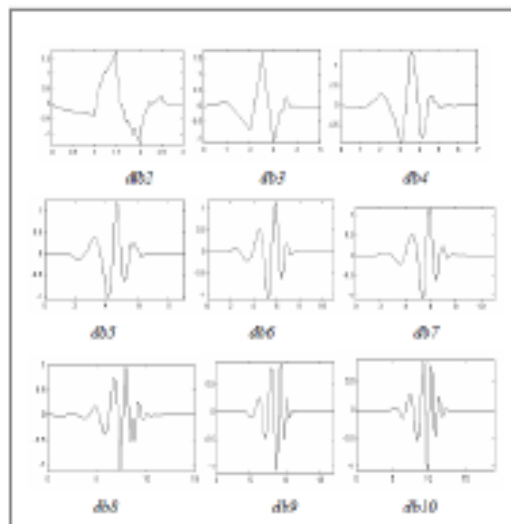


FIG 2.3 - Les ondelettes de Daubechies.

### Ondelettes de Symlets

Les symlets ( $symN$ ) constituent une famille d'ondelettes presque symétrique, proposée par I. Daubechies en modifiant la construction des  $dbN$ . A part la symétrie, les autres propriétés des deux familles sont similaires. Les symlets d'ordre 2 à 8 ( $sym1$  est simplement l'ondelette de Haar) sont

présentées dans la figure (Fig.2.4) [4].

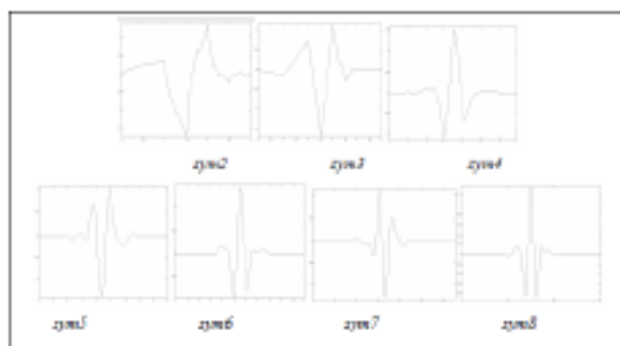


FIG. 2.4 - Les ondelettes de Symlets.

### Ondelettes de Coiflets

Construite par I. Daubechies sur la demande de R. Coifman [4], les coiflets (*coifN*) constituent une famille d'ondelettes possédant une propriété inhabituelle. Non seulement, comme pour les deux familles précédentes, l'ondelette  $\psi$  associée à *coifN* à  $2N$  moments nuls.

Les deux fonctions  $\psi$  et  $j$  ont un support de longueur  $6N - 1$ . Les coiflets d'ordre 1 à 5 sont représentés à la figure (2.5)

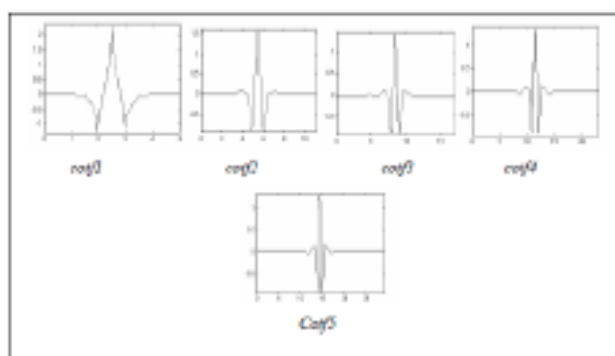


FIG. 2.5 - Les ondelettes de Coiflets.

**Remarque 4** *Dans la littérature il existe plusieurs types d'ondelette. Le critère de choix de la meilleure ondelette reste un problème à déterminer. Malheureusement, il n'y a pas d'ondelette qui soit meilleure que les autres, tout dépend de l'application. Dans certains cas, l'ondelette la plus simple (Haar) sera optimale. Pour d'autres applications, ce sera le pire des choix possibles.*

# Chapitre 3

## Les champs aléatoires

### 3.1 Analyse Multirésolution dans $\mathbb{R}^2$

L'analyse multirésolution dans  $\mathbb{R}^2$  fournit un cadre efficace pour la décomposition de champs aléatoires. Récemment, une attention considérable a été accordée aux propriétés de la transformée en ondelettes et des représentations orthonormées en ondelettes de champs aléatoires (voir Antoine et al. (2004))

**Définition 14** *On appelle analyse multirésolution (AMR) de  $L^2(\mathbb{R})$  une suite de sous-espaces vectoriels fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  (espaces d'approximation) ayant les propriétés suivantes*

1. *Croissance* :  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1}$ .
2. *Séparabilité* :  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .
3. *Densité* :  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
4. *Dilatation* :  $X(t) \in V_j \iff X(2^j t) \in V_0$

5. Il existe  $\phi \in V_0$  telle que la famille  $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base de Riesz de  $V_0$

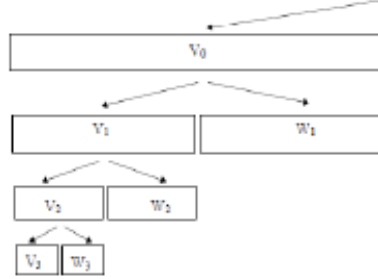


FIG. 3.1 - Schma de l'analyse multirésolution.

et l'intégrale de cette fonction est différente de zéro.

**Remarque 5** La condition de dilatation (i.e.5) nous montre que nous sommes en présence que d'un seul espace, disons  $V_0$ . Tous les autres espaces  $V_j$  sont un changement d'échelle de l'espace  $V_0$  et nous pouvons les voir comme une résolution différente de  $V_0$ .

**Définition 15** Pour tout  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , une fonction  $\Phi(\mathbf{x}) \in V_0$  qui satisfait

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, x_2) = \sum h_{kl} 2\Phi(2x_1 - k, 2x_2 - l),$$

où

$$\Phi(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) \quad (3.1)$$

et  $h_{kl} = h_k h_l$ , Puisque  $\phi(x_1)$  et  $\phi(x_2)$  satisfont l'équation d'échelle  $\phi(x_i) = \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} h_{k_i} \sqrt{2} \phi(2x_i - k_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Si  $\{\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$  est un système orthonormé, alors  $\Phi$  est appelée une fonction d'échelle orthonormale, et les fonctions d'ondelettes sont données par

$$\begin{aligned} \Psi^{(h)}(x_1, x_2) &= \phi(x_1)\psi(x_2), \\ \Psi^{(v)}(x_1, x_2) &= \psi(x_1)\phi(x_2), \\ \Psi^{(d)}(x_1, x_2) &= \psi(x_1)\psi(x_2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

La généralisation de l'équation d'ondelettes unidimensionnelle conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\Psi^{(h)}(x_1, x_2) &= \sum g_{kl}^{(h)} 2\Phi(2x_1 - k; 2x_2 - l), \\ \Psi^{(v)}(x_1, x_2) &= \sum g_{kl}^{(v)} 2\Phi(2x_1 - k; 2x_2 - l), \\ \Psi^{(d)}(x_1, x_2) &= \sum g_{kl}^{(d)} 2\Phi(2x_1 - k; 2x_2 - l)\end{aligned}$$

où  $g_{kl}^{(h)} = h_k g_l$ ,  $g_{kl}^{(v)} = g_k h_l$ ,  $g_{kl}^{(d)} = g_k g_l$ .

**Remarque 6** Dans la littérature sur les ondelettes, peut rencontrer une indexation de la multirésolution des sous-espaces, ce qui est l'inverse de celui de la définition ??

$$.. \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset .. \quad (3.5)$$

Cette convention (les deux présentent des avantages et des inconvénients), parfois appelée convention «Daubechies», par opposition à la convention «Mallat» dans(3.5), est presque également souvent utilisée. Cependant, la famille  $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}(t) = 2^j \phi(2^j t_1 - k_1, 2^j t_2 - k_2), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$  est une base de  $V_j$  selon l'indexation de Mallats, tandis que  $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}(t) = 2^{-j} \phi(2^{-j} t_1 - k_1, 2^{-j} t_2 - k_2), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$  est une base de  $V_j$  selon indexation de Daubechies.

L'approximation d'une fonction  $X(\mathbf{t})$  sur un sous-espace  $V_j$ , est donnée en termes de fonctions d'échelle comme

$$\hat{X}_j(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) \quad (3.6)$$

où  $\alpha_{j,\mathbf{k}}$  est le coefficient d'échelle à la résolution  $j$  et à la translation  $\mathbf{k}$  et

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = 2^j \Phi(2^j t_1 - k_1, 2^j t_2 - k_2) \quad (3.7)$$

Par conséquent, une fonction  $X(t) \in L^2(\mathbb{R})$  peut être représentée par un ensemble de fonctions d'échelle orthogonale comme

$$X(t) = \lim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}).$$

**Définition 16** le sous-espace d'ondelettes  $W_j$  Pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$  est défini par

$$W_j = \overline{\text{span}} \{\Psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}.$$

Puisque  $\{V_{j,j \in \mathbb{Z}}\}$  sont les sous-espaces de nidification, nous pouvons représenter les sous-espaces  $V_{j-1}$  comme une somme directe de sous-espaces grossièrement approximés  $V_j$  et de ses sous-espaces complémentaires orthogonaux  $W_j$ , comme suit  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ .

Cela montre que la projection d'une fonction  $X(\mathbf{t})$  sur les sous-espaces  $W_j$  donne les informations détaillées perdues lors de l'approximation de la fonction sur les sous-espaces  $V_j$ . Une base orthonormale peut maintenant être construite pour les sous-espaces  $W_j$ . Une collection de toutes ces fonctions de base pour les sous-espaces  $\{W_j, j \in \mathbb{Z}^2\}$  forme une nouvelle base orthogonale pour  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Ainsi, la même approximation en termes de fonction de base de  $W_j$  est donnée par

$$\widehat{X}_j(\mathbf{t}) = \sum_{u=1}^3 \sum_{j=-\infty}^l \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}),$$

où  $\beta_{j,\mathbf{k},u}$  est le coefficient d'ondelette à la résolution  $j$  et à la translation  $\mathbf{k}$  et

$$\Psi_{j,\mathbf{k},u}(t) = 2^j \Psi_u(2^j t_1 - k_1, 2^j t_2, k_2), \text{ pour tout } u \in \{1, 2, 3\} \quad (3.8)$$

Toute fonction intégrable carrée  $X(\mathbf{t}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , elle peut être écrite en termes de fonctions d'échelle et d'ondelettes comme suit d'ondelettes comme

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) + \sum_{u=1}^3 \sum_{j=-\infty}^l \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}), \quad (3.9)$$

et les coefficients  $\{\alpha_{j,\mathbf{k}}\}$  et  $\{\beta_{j,\mathbf{k},u}\}$  sont les séquences qui décrivent le signal alors que les fonctions de base sont fixes.

**Remarque 7** *Les fonctions de base peuvent être orthonormées ou simplement linéairement indépendantes. Lorsque ceux-ci sont orthonormés, ils s'inscrivent dans un cadre général multirésolution. En d'autres termes, l'analyse multirésolution fournit une méthode pour construire un ensemble de fonctions orthonormées qui forment base de l'espace  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et satisfait les propriétés d'une fonction d'ondelette. Dans cette analyse des fonctions sont approximées à différentes résolutions pour donner des versions lissées d'une fonction. L'incrément les informations perdues lors de l'approximation d'une fonction à différentes résolutions inférieures peuvent être des études utilisant coefficient d'ondelettes.*

D'après la convention de Daubechies, nous pouvons exprimer n'importe quelle fonction  $\Phi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{t})$  dans les sous-espaces  $V_j$  comme une combinaison linéaire des fonctions de base  $\{\Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}); \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$  de

$V_{j-1}$  comme

$$\Phi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}} \Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}), \quad (3.10)$$

où  $h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}} = \int \Phi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \Phi_{j-1,\mathbf{k}}^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$  et  $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{k}} = 1$ . Pour une base d'ondelettes du support compact,  $\{h_{\mathbf{k}}\}$  est de longueur finie  $|N|$  (i.e.  $h_{\mathbf{k}}$  est différent de zéro dans l'intervalle  $\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{N} - \mathbf{1}$  et zéro en de hors de l'intervalle).

Depuis  $W_j$  est également un sous-espace de  $V_{j-1}$  nous pouvons exprimer n'importe quelle fonction  $\Psi_{j,\mathbf{n},u}(\mathbf{t})$  dans les sous-espaces  $W_j$  en tant que combinaison linéaire des fonctions de base  $\{\Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}); \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$  de  $V_{j-1}$  comme

$$\Psi_{j,\mathbf{n},u}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^{(u)} \Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}), \quad u = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

où  $g_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^{(u)} = \int \Psi_{j,\mathbf{n},u}(\mathbf{t}) \Phi_{j-1,\mathbf{k}}^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ ,  $u = 1, \dots, 3$ . De nombreux choix de  $h_{\mathbf{k}}$  et  $g_{\mathbf{k}}^{(u)}$  existent qui satisfont (3.10) et (3.11). Un de ces choix consiste à choisir des coefficients  $\{g_{\mathbf{k}}^{(u)}, u = 1, 2, 3\}$  tel que  $g_{k_i} = (-1)^{k_i} h_{1-k_i}$ .

La relation entre les coefficients qui donne les informations sur version lissée (coefficient d'échelle) et détaillée (coefficient d'ondelette) d'une fonction à différentes résolutions peut être obtenue en permutant les conjugués de (3.10) et (3.11) avec  $X(\mathbf{t})$  et intégrant par rapport à  $\mathbf{t}$ . Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\mathbf{n}} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^* \alpha_{j-1,\mathbf{k}} \\ \beta_{j,\mathbf{n},u} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^{(u)*} \alpha_{j-1,\mathbf{k}} \text{ pour } u = 1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donc

$$\alpha_{j,\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{n}-2\mathbf{k}} \alpha_{j+1,\mathbf{k}} + \sum_{u=1}^3 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{n}-2\mathbf{k}}^{(u)} \beta_{j+1,\mathbf{k},u}$$

L'équation (3.12) indique que tous les coefficients d'échelle et d'ondelettes à la résolution  $(j, j+1; j+2; \dots)$  peuvent être obtenu à partir d'un ensemble de coefficients  $\{h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}\}$  qui décrivent la base des ondelettes et l'ensemble initiale de  $\{\alpha_{j-1,\mathbf{k}}; \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ .

### 3.2 Les Champs aléatoires

Les champs aléatoires ont trouvé de nombreuses applications dans divers domaines tels que le traitement d'images (voir par exemple Jain (1981)), l'océanographie (voir Sylvester (1974)), la géologie (voir Harbaugh et Preston (1968)), la foresterie (voir Matern (1960)), la turbulence (voir Mandelbort (1975)) et la géomorphologie (voir Mandelbort (1975)). Dans la section précédente, une fonction  $X(t)$  est supposée être un élément de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Dans le cas de champs aléatoires, tous peuvent ne pas avoir de chemins d'échantillonnage sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Cependant, si  $X(t, \epsilon)$  est une fonction mesurable définie sur  $\mathbb{R}^2 \times \Lambda$  ( $\Lambda$  est l'espace échantillon) est satisfait  $\int E \{X^2(t, \epsilon)\} dt < \infty$ , alors  $X(t, \epsilon) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  de probabilité 1 en  $\Lambda$ .

Si  $X(t)$  est un champ aléatoire de paramètre continu et  $X(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , alors on a les représentations d'ondelette et d'échelle comme

$$X(t) = \sum_{u=1}^3 \sum_{j=-\infty}^l \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}),$$

et

$$X(\mathbf{t}) = \lim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t})$$

où  $\beta_{j,\mathbf{k},u}$  et  $\alpha_{j,\mathbf{k}}$  sont des nouveaux champs aléatoires définis comme suit

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\mathbf{k}} &= \int_{\mathbb{R}^2} X(\mathbf{t}) \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \\ \beta_{j,k,u} &= \int_{\mathbb{R}^2} X(\mathbf{t}) \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Dans de nombreuses situations pratiques, il est nécessaire d'analyser les transformées en ondelettes des champs aléatoires de paramètres discrets, par exemple, dans le traitement des images numériques. Dans la suite, nous développons une procédure alternative dans laquelle un champ aléatoire continu est premièrement généré par interpolation du processus discret sous les conditions de stationnarité, la linéarité et les moments du processus discret.

Soit  $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$  sont des champs aléatoires à paramètres discrets de moyenne nulle ayant un spectre de puissance finie  $f(\lambda)$ , où  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\pi} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ , Nous construisons maintenant un nouveau champs aléatoires à paramètres continu  $(X(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2}$  comme

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} X(\mathbf{n}) \gamma(\mathbf{t} - \mathbf{n}), \quad (3.13)$$

où  $\gamma(\cdot)$  appartient à une famille de fonctions d'échelles.

**Lemme 3** Soit  $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$  un champ aléatoire discret stationnaire de moyenne nulle avec une densité spectrale  $f^d(\lambda)$ . Alors la covariance  $C^c(\mathbf{t}, \mathbf{s})$  pour des champs aléatoires satisfaisant (3.13) et ayant une densité spectrale de puissance finie  $f^c(\lambda)$  est donnée par

$$C^c(t, s) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} C^d(\mathbf{l}) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \gamma(\mathbf{t} - \mathbf{n}) \gamma^*(\mathbf{s} - \mathbf{n} - \mathbf{l}),$$

où  $C^d(\mathbf{l}) = E \{X(\mathbf{n}) X(\mathbf{l} + \mathbf{n})\}$  et

$$f^c(\lambda) = (2\pi)^2 |\Gamma(-\lambda)|^2 f^d(\lambda) \quad (3.14)$$

où  $\Gamma(\lambda)$  est la transformée de Fourier de  $\gamma(\mathbf{t})$

**Preuve.** Simple et donc omise.

**Lemme 4** Soit  $(X(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2}$  un champ aléatoire continu stationnaire satisfaisant (3.13), ayant une densité bispectrale de puissance finie  $f^c(\lambda_1, \lambda_2)$ . Alors

$$E \{X(\mathbf{t})X(\mathbf{t} + \mathbf{s})X(\mathbf{t} + \mathbf{r})\} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} E \{X(\mathbf{l})X(\mathbf{l} + \mathbf{m})X(\mathbf{l} + \mathbf{n})\} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{\pi} \int_{\pi} \Gamma(\lambda_1) \Gamma(\lambda_2) \Gamma(-\lambda_1 - \lambda_2) \times e^{i[(\mathbf{n}-\mathbf{r})\lambda_1 + (\mathbf{n}-\mathbf{r}+\mathbf{s}-\mathbf{m})\lambda_2]} d\lambda_1 d\lambda_2$$

et

$$f^c(\lambda_1, \lambda_2) = \left( \sqrt{(2\pi)^2} \right)^3 \Gamma(-\lambda_1) \Gamma(-\lambda_2) \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2) f^d(\lambda_1, \lambda_2) \quad (3.15)$$

où  $f^d(\lambda_1, \lambda_2)$  est la densité bispectrale des champs aléatoires discrets.

**Proposition 4** D'après (3.14) et (3.15), nous avons :

- $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^2}$  est stationnaire du seconde ordre lorsque  $(X(n))_{n \in \mathbb{Z}^2}$  est stationnaire du seconde ordre.
- $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^2}$  est stationnaire du troisième ordre chaque fois que  $(X(n))_{n \in \mathbb{Z}^2}$  est stationnaire du troisième ordre.
- Si  $(X(n))_{n \in \mathbb{Z}^2}$  est gaussien  $f^d(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  et donc  $f^c(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  ( La gaussianité de  $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$  implique la gaussianité de  $(X(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2}$ ).
- Si  $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$  est un champ aléatoire linéaire, alors  $(X(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2}$  est un champ aléatoire linéaire.

**Exemple 3** Soit  $\gamma(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^2 \frac{\sin(\pi.t_i)}{(\pi.t_i)}$  nous avons

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} X(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^2 \frac{\sin[\pi.(t_i.n_i)]}{[\pi.(t_i.n_i)]} \quad (3.16)$$

Pour ce choix de  $\gamma(\cdot)$ , nous observons ce qui suit

- $\Gamma(\lambda) = (2\pi)^{-1}$
- $C^c(\tau) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} C^d(\mathbf{l}) \prod_{i=1}^2 \frac{\sin[\pi \cdot (\tau_i \cdot l_i)]}{[\pi \cdot (\tau_i \cdot l_i)]}$  et donc  $f^c(\lambda) = f^d(\lambda)$ .
- $E\{X(\mathbf{t})X(\mathbf{t} + \mathbf{s})X(\mathbf{t} + \mathbf{r})\} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} E\{X(\mathbf{l})X(\mathbf{l} + \mathbf{m})X(\mathbf{l} + \mathbf{n})\} \left[ \prod_{i=1}^2 \frac{\sin \pi \cdot (r_i - n_i)}{\pi(r_i - n_i)} \right] \left[ \prod_{i=1}^2 \frac{\sin \pi \cdot (r_i - n_i + m_i - s_i)}{\pi(r_i - n_i + m_i - s_i)} \right]$  et donc  $f^c(\lambda_1, \lambda_2) = f^d(\lambda_1, \lambda_2)$ .

La relation ci-dessus montre que les fonctions de covariance des processus continus et discrets sont liées et les spectres ( densité spectrale de puissance et bispectrale ) des champs aléatoires continus et discrets sont identiques dans l'intervalle.

**Remarque 8** 1. *Puisque pour seulement  $\gamma(t) = \prod_{i=1}^2 \frac{\sin[\pi \cdot (t_i - n_i)]}{[\pi \cdot (t_i - n_i)]}$ ,  $\Gamma(\lambda) = (2\pi)^{-1}$  il est évident à partir de (3.14) et (3.15) que pour tout autre choix de la fonction d'échelle  $\gamma(t)$ , la fonction de densité spectrale et la fonction de densité bispectrale des champs aléatoires continus et discrets ne sont pas identiques, bien qu'elles préservent les deux propriétés importantes de la linéarité et de stationnarité.*

2. *Tout choix de fonction de mise à l'échelle autre que  $\gamma(t) = \prod_{i=1}^2 \frac{\sin[\pi \cdot (t_i - n_i)]}{[\pi \cdot (t_i - n_i)]}$  donne lieu à un champs aléatoire continu qui n'a pas les mêmes propriétés que celui du champs aléatoire discret étudié. Cela indique que l'utilisation du champs aléatoire discret lui-même comme ensemble initial de coefficients d'échelle pour calculer la transformée en ondelettes ni peut-être pas une procédure optimale.*

### 3.3 Représentation en ondelettes de champs aléatoires discrets

Soit  $(X(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2}$  un champ aléatoire continu construit à partir d'un champ aléatoire discret de moyenne nulle et de puissance finie, et soit  $\{\Psi_{j,\mathbf{k},u}(t), u = 1, 2, 3, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}(t); \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$  sont des bases orthonormales de multirésolution d'échelles et d'ondelettes. De plus, supposons que  $X(\mathbf{t}) \in V_0$ , alors à partir de (3.14), nous avons

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{0,\mathbf{k}} \Phi_{0,\mathbf{k}}(\mathbf{t})$$

où  $\alpha_{0,\mathbf{k}}$  désigne le coefficient d'échelle à la résolution zéro, donné par

$$\alpha_{0,\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}^2} X(\mathbf{t}) \Phi_{0,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

En substituant  $X(\mathbf{t})$  en termes de  $X(\mathbf{n})$  en utilisant (3.16), et en réorganisant, nous obtenons

$$\alpha_{0,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} X(\mathbf{n}) b_{\mathbf{k}-\mathbf{n}}, \quad (3.17)$$

où la séquence  $(b_{\mathbf{m}})$  est calculée comme suit

$$b_{\mathbf{m}} = (2\pi) \int_{\pi} \tilde{\Phi}(-\lambda) e^{i\mathbf{m} \cdot \lambda} d\lambda \quad (3.18)$$

avec  $\tilde{\Phi}(\lambda)$  indiquant la transformée de Fourier de  $\Phi(\mathbf{t})$ .

La relation donnée par (3.17) montre combien il est aisé d'analyser théoriquement un champ aléatoire discret lorsque ces processus peuvent être représentés par des expressions en forme fermée. Le champ aléatoire  $(b_{\mathbf{m}})$  peut être précalculé pour n'importe quelle transformée en ondelettes particulière et utilisé dans l'analyse des champs aléatoires discrets.

Pour les fonctions de mise à l'échelle multirésolution orthonormales,  $\tilde{\Phi}(\lambda)$  est donné par

$$\tilde{\Phi}_j(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)} \prod_{j=1}^j \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}} e^{-i2^{-j} \cdot \mathbf{m} \cdot \lambda}, \quad (3.20)$$

lorsque  $j = \infty$ ,  $\tilde{\Phi}_J(\lambda) = \tilde{\Phi}(\lambda)$ . Cependant, pour des grandes valeurs de  $J$ ,  $\tilde{\Phi}_J(\lambda) \approx \tilde{\Phi}(\lambda)$ .

# Chapitre 4

## L'estimation non linéaire de la densité spectrale d'un champ aléatoire

L'estimation de la densité d'ondelettes des séries temporelles a été bien développée théoriquement et a trouvé de nombreuses applications dans de vastes domaines des sciences appliquées. Cependant, en traitement du signal, le spectre de la densité est un outil approprié pour la description des statistiques du second ordre. Il est bien connu qu'il caractérise des signaux complètement stationnaires qui ont des distributions gaussiennes. Dans ce chapitre, nous considérons les aspects théoriques de la densité spectrale d'un champ aléatoire. En effet, nous obtenons des versions empiriques des coefficients de  $f$  qui sont traitées avec la même méthode comme Neumann (1996), et nous conduisons les estimations uniformes des cumulants des coefficients d'ondelettes. Ces résultats nous permettent de conclure à l'équivalence de risque entre tous les estimateurs monotones basés sur les coefficients empiriques. Enfin, nous avons montré que l'ondelette seuillée d'optimalité atteindre le taux de convergence minimax dans une grande échelle du classes de lissage de Besov.

### 4.1 Cumulant des coefficients d'ondelettes empiriques

Soit  $(X(t))_{t \in \mathbb{Z}^2}$  un champ aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^2} C(\mathbf{h}) e^{-i\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega}}, \quad (4.1)$$

et considérons une base d'ondelettes orthonormées de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  associée à les fonctions d'échelle et d'ondelette suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) &= 2^j \Phi(2^j t_1 - k_1, 2^j t_2 - k_2), \\ \tilde{\Psi}_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}) &= 2^j \Psi_u(2^j t_1 - k_1, 2^j t_2 - k_2), \text{ pour } u \in \{1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'avec  $\Lambda_j = \{1, \dots, 2^j\}^2$ ,

$$\Phi_{j,k}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^{-1} \tilde{\Phi}_{j,\mathbf{k}}((2\pi)^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{n}),$$

et

$$\Psi_{j,k,u}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} (2\pi)^{-1} \tilde{\Psi}_{j,\mathbf{k},u}((2\pi)^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{n}),$$

est une base orthonormée de  $\overline{L^2}(\pi_2)$  (i.e.  $\pi_2 = [-\pi \times \pi[ \times [-\pi \times \pi[$ ). pour  $f \in \overline{L^2}(\pi_2)$  nous avons la représentation

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_l} \alpha_{l,\mathbf{k}} \Phi_{l,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{u=1}^3 \sum_{j \geq l} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega}), \quad (4.2)$$

où  $\alpha_{l,\mathbf{k}} = \int_{\pi_2} f(\boldsymbol{\omega}) \Phi_{l,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$  et  $\beta_{j,\mathbf{k},u} = \int_{\pi_2} f(\boldsymbol{\omega}) \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$ .

D'après l'observation  $\{X(\mathbf{t}), \mathbf{t} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}\}$  le périodogramme éfillé

$$I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2 H_2^{(\mathbf{N})}} |d_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega})|^2, \quad (4.3)$$

où  $d_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}-1} h(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{N}}) X_{\mathbf{t}} e^{-it \cdot \boldsymbol{\omega}}$ ,  $H_2^{(\mathbf{N})} = \sum_{\mathbf{t}=\mathbf{1}}^{\mathbf{N}} h^2(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{N}})$ , est asymptotiquement sans biais pour  $f(\boldsymbol{\omega})$  sous des hypothèses assez générales (i.e. pour  $\mathbf{N} = (N, N)$  on obtient  $H_2^{(\mathbf{N})} \sim N^2 H$ ), pourtant ce n'est pas un estimateur cohérent de  $f(\mathbf{N})$  (i.e.  $I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}) \equiv 0$  if  $H_2^{(\mathbf{N})} = 0$ ). Par conséquent, il y a un certain espoir que l'on peut obtenir via des estimateurs de lissage cohérents sous certaines conditions de lissage sur  $f$ .

Sous les hypothèses suivantes, nous pouvons dériver des estimations appropriées pour le biais et la variance des coefficients empiriques définie comme

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{l,\mathbf{k}} &= \int_{\pi_2} \Phi_{l,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}, \\ \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} &= \int_{\pi_2} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega}) I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}.\end{aligned} \quad (4.4)$$

**Condition 5** La fonction conique  $h$  est à variation bornée et satisfait  $H = \int h^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} > 0$ .

**Condition 6**  $\forall k \geq 2$ , il existe  $C > 0$  et  $\gamma \geq 0$  tel que

$$\sup_{1 \leq t_1 \leq \infty} \left\{ \sum_{\mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{p-1}} |\text{cum}(X(\mathbf{t}_1), \dots, X(\mathbf{t}_{p-1}), X(\mathbf{t}_p))| \right\} \leq C^k (p!)^{\gamma+1}.$$

**Condition 7**  $f$  est de variation totale finie sur  $\pi_2$ ,  $\|f\|_\infty < D, \forall D > 0$ .

**Condition 8** -  $\Phi(\mathbf{t})$  et  $\Psi_u(\mathbf{t})$  sont dans  $C^r$ , pour tout  $r > m$ .

- $\int \Phi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1$  et  $\int \Psi_u(\mathbf{t}) |\mathbf{t}|^k d\mathbf{t} = 1$ , pour  $0 \leq k \leq r$ . (i.e.  $|\mathbf{t}| = t_1 t_2$ ).
- $C = \max \left( \left\| \tilde{\Phi} \right\|_{L^1}, \left\| \tilde{\Psi}_u \right\|_{L^1} \right)$  et  $D = \max \left( \left\| \tilde{\Phi}' \right\|_{L^1}, \left\| \tilde{\Psi}'_u \right\|_{L^1} \right)$  sont finit,  
et  $\max \left( \left\| \Phi_{j,\mathbf{k}} \right\|_\infty, \left\| \Psi_{j,\mathbf{k},u} \right\|_\infty \right) \leq A 2^{j/2}$ .

Ces hypothèses sont largement satisfaites. En particulier pour les ondelettes de Daubechies à support  $2M$ , la dernière hypothèse est satisfaite avec  $A = 2M \max \left( \left\| \tilde{\Phi} \right\|_\infty, \left\| \tilde{\Psi}_u \right\|_\infty \right)$ .

**Lemme 9** pour  $\mathbf{N} = (N, N)$ , soit  $j \geq \tau, \mathbf{k} \in \Lambda_j, u \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  défini par (5.2.4) satisfaisant les conditions 5 à 8 Alors

$$E \left\{ \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \right\} = \beta_{j,\mathbf{k},u} + O(2^{j/2+1} N^{-2} \log N),$$

$$Var \left\{ \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \right\} \leq C N^{-2} 2^{-j}, C > 0.$$

**Proposition 5** Soit  $j \geq \tau$ , tel que  $2^j \leq C N^{2(1-\alpha)}$  et  $\alpha > 0, \mathbf{k} \in \Lambda_j, u \in \{1, 2, 3\}, \mathbf{N} = (N, N), \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  définie par (4.4) satisfaisant les conditions 5 à 8. Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| Cum \left( \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \right) \right| \leq C^m (p!)^{2+2\gamma} N^{-1} (2^{j/2+1} N^{-2} \log N)^{p-2}$$

## 4.2 Normalité asymptotique des coefficients d'ondelettes empiriques

On dit qu'une fonction  $f \in L_{2(\pi_2)}$  appartient à la boule de Besov bidimensionnelle  $\mathbf{B}_{p,q}^m(M)$  si et seulement s'il existe une constante  $M_*$  (dépendant de  $M$ ), telle que le coefficient d'ondelettes associé de  $f$  satisfaite

$$2^{\tau(1/2-1/p)} \left( \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_\tau} |\alpha_{\tau,\mathbf{k}}|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{u=1}^3 \sum_{j=\tau}^{\infty} \left( 2^{j(m+1/2-1/p)} \left( \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} |\beta_{j,\mathbf{k},u}|^p \right)^{1/p} \right)^q \right)^{1/q} \leq M_* < \infty,$$

Les boules de Besov sont capables de modéliser différents types de caractéristiques de lissage dans une fonction. Pour un particulier choix des paramètres  $m, p$  et  $q$ , ils contiennent la boule de Hölder et Sobolev (voir par exemple Mallat (2009) et Meyer (1992)).

D'autre part, On a pour toute boule  $F$  dans un espace de Besov  $\mathbf{B}_{p,q}^m$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{j>J} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} \beta_{j,\mathbf{k},u}^2 \right\} = O(2^{-2J(m+1/2-1/(p \wedge 2))}), \quad (4.5)$$

si  $2^{-J} = O(N^{-4/3})$  alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{j>J} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} \beta_{j,\mathbf{k},u}^2 \right\} = O(N^{-4m/(2m+1)}),$$

nous restreignons nos considérations dans cette section au coefficient avec les indices  $(j, k)$  d'un

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{N}) = \{(j, \mathbf{k}) \mid 2^j \leq CN^{2(1-\alpha)}, \mathbf{k} \in \Lambda_j, C < \infty, 0 < \alpha \leq 1/3\}.$$

Soit  $\sigma_{j,\mathbf{k},u}^2$  la variance des coefficients  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  alors par le lemme 9 on obtient que

$$\sup_{j,\mathbf{k}} \{\sigma_{j,\mathbf{k},u}\} = O(N^{-1}), \quad (4.6)$$

et par la proposition 5

$$\left| \text{Cum}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}/\sigma_{j,\mathbf{k},u}) \right| \leq (p!)^{2+2\gamma} C^p (2N^{-\alpha} \log(N))^{p-2}, \quad (4.7)$$

est vérifiée uniformément dans  $(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}^0$  où  $\mathcal{J}^0 = \mathcal{J}^0(\mathbf{N}) = \{(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J} \mid \sigma_{j,\mathbf{k}} \geq C_0 N^{-1}\}$  pour certains constants  $C_0 > 0$ .

**Théorème 10** Soit  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  défini par (4.4) satisfaisant les conditions 5 à 8. Alors

$$\frac{P\left(\left|\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u}\right|/\sigma_{j,\mathbf{k},u} \geq x\right)}{1 - \Phi(x)} \longrightarrow 1,$$

est vérifiée uniformément dans  $(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}^0$ ,  $-\infty < x \leq \varepsilon_\gamma$ , où  $\varepsilon_\gamma = o(\varepsilon^{1/3+4\gamma})$ , et  $\varepsilon = 2N^\alpha (\log N)^{-1}$ , et  $\Phi(x)$  est la fonction de distribution cumulative de la distribution normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Preuve.** En utilisant la proposition 5 et le lemme 3.1 et le théorème 4.1 dans Neuman (1996).

Soit

$$\sigma_{\mathbf{N}} = \max \left\{ \max_{(j,k) \in \mathcal{J}} (\sigma_{j,k,u}), C_0 N^{-1} \right\},$$

et soit  $\theta_{j,\mathbf{k},u} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\mathbf{N}}^2 - \sigma_{j,\mathbf{k},u}^2)$  indépendant de  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$ . Alors le nouveau champ aléatoire  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} + \theta_{j,\mathbf{k},u}$  a la même moyenne et les mêmes cumulants d'ordre  $p$  pour  $p \geq 3$  que  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$ , alors que sa variance est égale à  $\sigma_{\mathbf{N}}^2 \approx N^{-2}$ . Par conséquent, nous pouvons dériver en complète analogie avec le théorème 10 le résultat suivant.

**Corollaire 11** *Supposons  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  définie par (4.4) satisfaisant la condition du Théorème 10. Alors*

$$\frac{P\left(\left|\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} + \theta_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u}\right|/\sigma_{j,\mathbf{k},u} \geq x\right)}{1 - \Phi(x)} \longrightarrow 1.$$

### 4.3 Dérivation des schémas de seuillage

Soit

$$\delta^{(h)}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda) = \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \mathbf{1}_{(|\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}| \geq \lambda)}, \quad (4.8)$$

$$\delta^{(s)}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda) = \text{sgn}\left(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}\right) \left(|\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}| - \lambda\right)_+, \quad (4.9)$$

où ces deux procédures non linéaires sur les coefficients empiriques sont généralement appelées dures et soft therholding, respectivement. Nous considérons comme modèles approximatifs pour notre ondelette empirique coefficients

$$\zeta_{j,\mathbf{k},u} = \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u} \varepsilon_{j,\mathbf{k},u}, \quad (4.10)$$

et

$$\bar{\zeta}_{j,\mathbf{k},u} = \beta_{j,\mathbf{k},u} + (\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}) \varepsilon_{j,\mathbf{k},u}, \quad (4.11)$$

où  $\varepsilon_{j,\mathbf{k},u} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Ensuite, nous avons le résultat de base suivant pour les coordonnées monotones estimateurs.

**Théorème 12** *Soit  $\delta_{j,\mathbf{k}} = \delta_{j,\mathbf{k},\mathbf{N}}$  des fonctions monotones non décroissantes avec*

$$\delta_{j,\mathbf{k}}(y) \leq |y|, \quad (4.12)$$

et supposons que les conditions 5 à 8 sont satisfaites. Alors, pour  $0 < p' < \infty$ ,

- i)  $\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}^o} E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} = (1 + o(1)) \sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}^o} E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\zeta_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} + O(N^{-p'})$ .
- ii)  $\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \leq (2 + o(1)) \sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\bar{\zeta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} + O(N^{-p'})$ .

**Preuve.**

i) Puisque  $\delta_{j,\mathbf{k}}$  est monotone, il existe une constante  $\gamma_{j,\mathbf{k}}$  tel que

$$\begin{aligned}\delta_{j,\mathbf{k}}(y) &\geq \beta_{j,\mathbf{k},u}, \text{ if } y > \gamma_{j,\mathbf{k}}, \\ \delta_{j,\mathbf{k}}(y) &\leq \beta_{j,\mathbf{k},u}, \text{ if } y < \gamma_{j,\mathbf{k}},\end{aligned}$$

(nous supposons  $\delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) \geq \beta_{j,\mathbf{k},u}$ ) Maintenant nous nous séparons

$$\begin{aligned}E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} &= E \left\{ \mathbf{1}_{(\gamma_{j,\mathbf{k}} \leq \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} < \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &+ E \left\{ \mathbf{1}_{(\beta_{j,\mathbf{k},u} - \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma \leq \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} < \gamma_{j,\mathbf{k}})} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &+ E \left\{ \mathbf{1}_{(|\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u}| \geq \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &= R_1 + R_2 + R_3.\end{aligned}\tag{4.13}$$

D'après l'assertion du théorème 10, il existe  $C_{\mathbf{N}}^{(l)}, C_{\mathbf{N}}^{(h)}$  tendant tous les deux vers  $\mathbf{1}$  comme  $\mathbf{N} \rightarrow \infty$ , tel que

$$\left| C_{\mathbf{N}}^{(l)} \right| (1 - \Phi(x)) \leq \left( P \left( \left| \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right| / \sigma_{j,\mathbf{k},u} \geq x \right) \leq \left| C_{\mathbf{N}}^{(h)} \right| (1 - \Phi(x)), \quad \forall x \leq \varepsilon_\gamma.$$

Depuis  $|\delta_{j,\mathbf{k}}(y) - \beta_{j,\mathbf{k},u}|$  est monotone non décroissante pour  $y > \gamma_{j,\mathbf{k}}$  on obtient par intégration par partie qui

$$\begin{aligned}R_1 &= - \int \left[ \mathbf{1}_{(\gamma_{j,\mathbf{k}} \leq x < \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(x) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right] dP(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \geq x) \\ &= P(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \geq x) d \left[ \mathbf{1}_{(\gamma_{j,\mathbf{k}} \leq x < \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(x) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right] \\ &+ P(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \geq \gamma_{j,\mathbf{k}}) \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\gamma_{j,\mathbf{k}}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \\ &\leq \left| C_{\mathbf{N}}^{(h)} \right| \left\{ \int p(\zeta_{j,\mathbf{k},u} \geq x) d \left[ \mathbf{1}_{(\gamma_{j,\mathbf{k}} \leq x < \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(x) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right] \right. \\ &\quad \left. + P(\zeta_{j,\mathbf{k},u} \geq \gamma_{j,\mathbf{k}}) \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(x) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &= \left| C_{\mathbf{N}}^{(h)} \right| E \left\{ \mathbf{1}_{(\gamma_{j,\mathbf{k}} \leq \zeta_{j,\mathbf{k},u} < \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\zeta_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\},\end{aligned}\tag{4.14}$$

satisfaites uniformément dans  $(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}^o$ . Par analogie, nous obtenons

$$R_2 \leq \left| C_{\mathbf{N}}^{(h)} \right| E \left\{ \mathbf{1}_{(\gamma_{j,\mathbf{k}} \leq \zeta_{j,\mathbf{k},u} < \beta_{j,\mathbf{k},u} + \sigma_{j,\mathbf{k},u}\varepsilon_\gamma)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\zeta_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\}.$$

En utilisant la proposition 5 nous obtenons, pour  $p$  pair quelconque, que

$$\begin{aligned} E \left\{ (\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u})^p \right\} &= O \left( \sum_{r=1}^p \prod_{\substack{i_1+\dots+i_r=p \\ i_j \geq 1}} \left| cum_{i_j}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) \right| \right) \\ &= O(N^{-p}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

De plus on a , avec  $\varepsilon_\gamma = N^{2v}$  pour certains  $v > 0$

$$P \left( \left| \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right| \geq \sigma_{j,\mathbf{k},u} \varepsilon_\gamma \right) \leq C(1 - \Phi(\varepsilon_\gamma)) = O(N^{-2\mu}),$$

pour arbitraire  $\mu < \infty$  qui implique par  $\left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right| \leq \left| \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right| + 2 \left| \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|$  et l'inégalité de Cauchy-Schawrz qui

$$R_3 \leq \sqrt{P \left( \left| \tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right| \geq \sigma_{j,\mathbf{k},u} \varepsilon_\gamma \right)} \sqrt{E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{2p'} \right\}} = O(N^{-p'-2}), \quad (4.16)$$

par (4.13) et (4.14) à (4.16) nous concluons que

$$E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \leq (|C_{\mathbf{N}_1}| \vee |C_{\mathbf{N}_2}|) E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\zeta_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} + O(N^{-p'-2}).$$

Une borne inférieure peut être prouvée de manière analogue.

ii) Soit  $\theta_{j,\mathbf{k},u} \sim N(0, \sigma_{\mathbf{N}}^2 - \sigma_{j,\mathbf{k},u}^2)$  indépendant de  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  Alors

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} &= E \left\{ \mathbf{1}_{(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \geq \gamma_{j,\mathbf{k}})} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\gamma_{j,\mathbf{k}}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &\quad + E \left\{ \mathbf{1}_{(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} < \gamma_{j,\mathbf{k}})} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\gamma_{j,\mathbf{k}}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &= 2E \left\{ \mathbf{1}_{(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} \geq \gamma_{j,\mathbf{k}}, \theta_{j,\mathbf{k},u} \geq 0)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &\quad + 2E \left\{ \mathbf{1}_{(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} < \gamma_{j,\mathbf{k}}, \theta_{j,\mathbf{k},u} \geq 0)} \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\} \\ &\leq 2E \left\{ \left| \delta_{j,\mathbf{k}}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u} + \theta_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^{p'} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui donne (ii) en raison du Corollaire ??.

**Remarque 9** À partir du théorème ci-dessus, nous pouvons obtenir les propriétés de risque de l'estimation par ondelettes seuillées. Puisque les estimateurs (4.8) et (4.9) obéissent à l'hypothèse (4.12), nous pouvons immédiatement dériver grâce au théorème 10 l'équivalence de risque de nos estimateurs de densité spectrale à des estimations analogiques dans les modèles beaucoup plus simples (4.10) et (4.11).

Soit  $\delta^{(\cdot)}$  la règle du seuil-dur  $\delta^{(h)}$  définie par (4.8) soit la règle du seuil-souple  $\delta^{(s)}$  donnée par (4.9). On peut alors énoncer l'assertion suivante.

**Corollaire 13** *Soit  $\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}$  défini par (4.4) et supposons que les conditions 5 à 8 sont satisfaites. Alors, pour les seuils non aléatoires  $\lambda_{j,\mathbf{k},u}$*

- i)  $\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}^o} E \left\{ \left( \delta^{(\cdot)}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right)^2 \right\} = (1+o(1)) \sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}^o} E \left\{ \left| \delta^{(\cdot)}(\zeta_{j,\mathbf{k},u}, \lambda_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right|^2 \right\} + O(N^{-2}).$
- ii)  $\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} E \left\{ \left( \delta^{(\cdot)}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right)^2 \right\} \leq (2 + o(1)) \sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}}$

Supposons maintenant que la densité spectrale  $f(w)$  appartient à un ensemble du type suivant

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(C) = \left\{ f(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_l} \alpha_{l,\mathbf{k}} \Phi_{l,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{u=1}^3 \sum_{j \geq l} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega}) \mid \|\alpha\|_{m,p,q} \leq C \right\}, \quad (4.17)$$

où

$$\|\alpha\|_{m,p,q} = \left( \sum_{u=1}^3 \sum_{j \geq l} \left( 2^{js} \left( \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} |\beta_{j,\mathbf{k},u}|^p \right)^{1/p} \right)^q \right)^{1/q}, \quad (4.18)$$

avec  $s = m + 1/2 - 1/p$ . On sait que cette norme est essentiellement équivalente à la norme dans les deux boules de Besov dimensionnelle  $\mathbf{B}_{p,q}^m(M)$  si la base fonctionnelle  $\Phi_{l,\mathbf{k}}(w)$  et  $\Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega})$  satisfait la condition 8. De plus, on voit par la relation  $\mathbf{B}_{p,1}^m \subseteq \mathbf{W}_p^m \subseteq \mathbf{B}_{p,\infty}^m$  que la régularité classe à partir de l'échelle de deux espaces de Sobolev dimensionnels  $\mathbf{W}_p^m$  sont également couverts par nos résultats.

Soit

$$\hat{f}^o(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_l} \tilde{\alpha}_{l,\mathbf{k}} \Phi_{l,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{u=1}^3 \sum_{j \geq l} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} \delta^{(\cdot)}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda_j^o) \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega}), \quad (4.19)$$

un estimateur avec des seuils optimaux (non aléatoires)  $\lambda_j^0 = \lambda_j^0(\mathbf{N}, \mathcal{F})$  et soit

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_l} \tilde{\alpha}_{l,\mathbf{k}} \Phi_{l,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{u=1}^3 \sum_{j \geq l} \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda_j} \delta^{(\cdot)}(\tilde{\beta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda_{j,\mathbf{k},u}) \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\boldsymbol{\omega}), \quad (4.20)$$

être une estimation avec des seuils individuels, qui satisfont aux conditions minimales suivantes.

**Condition 14** *Soit  $\varphi$  désigne la densité normale standard, alors*

- i)  $\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} \left( \frac{\lambda_{j,\mathbf{k},u}}{(\sigma_{j,\mathbf{k},u} \sqrt{\sigma_{\mathbf{N}}})} + 1 \right) \varphi \left( \frac{\lambda_{j,\mathbf{k},u}}{(\sigma_{j,\mathbf{k},u} \sqrt{\sigma_{\mathbf{N}}})} \right) = O(N^{2/(2m+1)}).$

$$\text{ii) } \max_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} \{\lambda_{j,\mathbf{k},u}\} = O\left(\sqrt{\frac{2 \log N}{N^2}}\right).$$

On peut voir par Neumann (1996), que pour des estimateurs à seuils durs ou souples basés sur des observations d'après (4.11) la relation suivante est vraie :

$$E \left\{ \left( \delta^{(\cdot)}(\bar{\zeta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right)^2 \right\} \leq C \left\{ (\sigma_{j,\mathbf{k},u}^2 \vee \sigma_{\mathbf{N}}^2) \left( \frac{\lambda}{(\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}})} + 1 \right) \varphi \frac{\lambda}{(\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}})} \right. \\ \left. + \min_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} (\lambda^2, \beta_{j,\mathbf{k},u}^2) \right\}, \quad (4.21)$$

uniformément dans  $\lambda \geq 0$ .

À partir de la condition 14, nous avons deux schémas de seuillage particuliers définis comme

$$\lambda_{j,\mathbf{k},u} = (\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}) \sqrt{2 \log (\#\mathcal{J})}, \quad (4.22)$$

et

$$\lambda_{j,\mathbf{k},u} = (\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}) \sqrt{2 \log ((\#\mathcal{J}) / 2^l)}. \quad (4.23)$$

Maintenant, il peut être facilement démontré que les deux schémas de seuillage proposés conduisent à un taux  $(2 \log N / N^2)^{2m/(2m+1)}$  pour le risque des estimateurs  $\hat{f}$ .

**Théorème 15** *Soit  $\hat{f}, \hat{f}^0$  un estimateur avec des seuils optimaux individuels satisfaisant respectivement*

Conditions 5 à 8. Alors

**Théorème 16**

$$\text{i) } \sup_{f \in \mathcal{F}} \left( E \left\{ \left\| \hat{f}^0 - f \right\|_{L_2(\pi_2)}^2 \right\} \right) = O(N^{-4m/(2m+1)}).$$

ii) *if additionally Condition 14 is satisfied, then*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left( E \left\{ \left\| \hat{f} - f \right\|_{L_2(\pi_2)}^2 \right\} \right) = O((2 \log N / N^2)^{2m/(2m+1)}).$$

**Preuve.** A partir du corollaire 13, on montre que

$$\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} E \left\{ \left( \delta^{(\cdot)}(\bar{\zeta}_{j,\mathbf{k},u}, \lambda_{j,\mathbf{k},u}) - \beta_{j,\mathbf{k},u} \right)^2 \right\} + \sum_{(j,\mathbf{k}) \notin \mathcal{J}} \beta_{j,\mathbf{k},u}^2, \quad (4.24)$$

où  $\tilde{\zeta}_{j,\mathbf{k},u}$  est donné par (4.11).

Par (4.5), l'estimation du second terme de (4.24) est

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}} \beta_{j, \mathbf{k}, u}^2 \right\} &= O(N^{4(\alpha-1)(m+1/2-1/(p \wedge 2))}) \\ &= O(N^{-4m(2m+1)}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

De plus, par (4.21) l'estimation des premiers termes de (4.24) :

$$\begin{aligned} &\sum_{(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}} E \left\{ \left( \delta^{(\cdot)}(\bar{\zeta}_{j, \mathbf{k}, u}, \lambda_{j, \mathbf{k}, u}) - \beta_{j, \mathbf{k}, u} \right)^2 \right\} \\ &\leq C \sum_{(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}} \left\{ (\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}})^2 \left( \frac{\lambda_{j, \mathbf{k}, u}}{\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}} + 1 \right) \varphi \left( \frac{\lambda_{j, \mathbf{k}, u}}{\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}} \right) + \min(\beta_{j, \mathbf{k}, u}^2, \lambda_{j, \mathbf{k}, u}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

i) Choisissons un entier  $j_0$  tel que  $2^{j_0} \asymp N^{2/(2m+1)}$ , et soit

$$\lambda_{j, \mathbf{k}, u} = \begin{cases} 0, & \text{if } j \leq j_0, \\ (\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}) \sqrt{K(j - j_0)}, & \text{if } j > j_0, \end{cases}$$

pour tout fixe  $K > \log 4$ . Alors

$$\begin{aligned} &\sum_{(j, \mathbf{k}) \in \mathcal{J}} \left[ (\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}})^2 \left( \frac{\lambda_{j, \mathbf{k}, u}}{\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}} + 1 \right) \varphi \left( \frac{\lambda_{j, \mathbf{k}, u}}{\sigma_{j, \mathbf{k}, u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}} \right) \right] \\ &= O(2^{j_0} N^{-2}) + \sum_{j > j_0} O \left( N^{-2} 2^j \sqrt{K(j - j_0)} e^{-K(j - j_0)/2} \right) \\ &= O(N^{-4m/(2m+1)}) + O \left( N^{-4m/(2m+1)} \sum_{j > j_0} \sqrt{K(j - j_0)} 2^{(j - j_0)(1 - K/\log 4)} \right) \\ &= O(N^{-4m/(2m+1)}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec  $\tilde{p} = \min\{p, 2\}$ , on obtient par l'inégalité de Jensen

$$\left( 2^{-j} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{j, \mathbf{k}, u}|^{\tilde{p}} \right)^{1/\tilde{p}} \leq \left( 2^{-j} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{j, \mathbf{k}, u}|^p \right)^{1/p} + O(2^{-j(m+1/2)}),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \min\{\beta_{j, \mathbf{k}, u}^2, \lambda_{j, \mathbf{k}, u}^2\} &\leq \lambda_{j, \mathbf{k}, u}^{2-\tilde{p}} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{j, \mathbf{k}, u}|^{\tilde{p}} \\ &= O(N^{-(2-\tilde{p})} ((j - j_0)^{(2-\tilde{p})/2} 2^{-j(m+1/2-1/\tilde{p})\tilde{p}})) \\ &= O(N^{-4m/(2m+1)} (j - j_0)^{(2-\tilde{p})/2} 2^{-(j-j_0)(m+1/2-1/\tilde{p})\tilde{p}}), \end{aligned}$$

tenir uniformément en  $f \in F$ ,  $j > j_0$ . Donc,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{j > j_0} \sum_{\mathbf{k}} \min \{ \beta_{j,\mathbf{k},u}^2, \lambda_{j,\mathbf{k},u}^2 \} \right\} = O(N^{-4m/(2m+1)}), \quad (4.28)$$

ii) On a, d'après la condition 14 (i), que

$$\sum_{(j,\mathbf{k}) \in \mathcal{J}} \left( (\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}})^2 \left( \frac{\lambda_{j,\mathbf{k},u}}{\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}} + 1 \right) \varphi \left( \frac{\lambda_{j,\mathbf{k},u}}{\sigma_{j,\mathbf{k},u} \vee \sigma_{\mathbf{N}}} \right) \right) = O(N^{-4m/(2m+1)}). \quad (4.29)$$

Soit  $j_*$  tel que  $2^{j_*} = (N^2/2 \log N)^{1/(2m+1)}$ . Alors on obtient, de manière analogue à ce qui précède calculs, que

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq j_*} \sum_{\mathbf{k}} \min \{ \beta_{j,\mathbf{k},u}^2, \lambda_{j,\mathbf{k},u}^2 \} &= O(2^{j_*} N^{-2} 2 \log N) \\ &= O\left( (2 \log N / N^2)^{2m/(2m+1)} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j > j_*} \sum_{\mathbf{k}} \min \{ \beta_{j,\mathbf{k},u}^2, \lambda_{j,\mathbf{k},u}^2 \} &= O\left( (2 \log N / N^2)^{(2-\tilde{p})/2} \sum_{j > j_*} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{j,\mathbf{k},u}|^{\tilde{p}} \right) \\ &= O\left( (2 \log N / N^2)^{(2-\tilde{p})/2} 2^{-j_*(m+1/2-1/\tilde{p})\tilde{p}} \right) \\ &= O\left( (2 \log N / N^2)^{(2-\tilde{p})/2} 2^{j_*} (\log N / N)^{\tilde{p}/2} \right) \\ &= O\left( (2 \log N / N^2)^{2m/(2m+1)} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

# Conclusion

Ce mémoire est consacrée essentiellement à l'étude de la densité spectrale dans les champs aléatoires non linéaires, qui basé sur l'analyse en ondelettes. Nous avons établi l'estimation non linéaire de la densité spectrale par la méthode en ondelettes, et nous nous intéressons à examiner les concepts fondamentaux nécessaires à l'étude de la transformée en ondelettes et les champs aléatoires. Nous avons aussi considéré les cumulants des coefficients d'ondelettes empiriques, la dérivation des schémas de seuillage et le choix de seuil adaptatif.

## REFERENCES

- Antoine, J. P., Murenzi, R., Vanderghynst, P., Twareque Ali, S. (2004). Two dimensional wavelets and their relatives. Cambridge Press.
- Benyahia, A. (2014). Application des ondelettes à la détermination de l'espacement moyen entre diffuseurs, universite d'oran .
- Chian, C., Morettin, P. A. (1998). A wavelet analysis for time series. Nonparametric Statistics. Vol. 10. 1-46.
- Daubechies, I. (1999). The wavelet transforms time-frequency localization and signal analysis . IEEE Trans. On information theory, Vol. 36, N. 5, pp. 961-1005.
- Dijkerman, R. W., Mazumdar, R. R. (1994). Wavelet representation of stochastic processes and multiresolution stochastic models. IEEE trans. Signal Process, 1640-1652.
- Harbaugh, J. W., Preston, F. W. (1968). Fourier series analysis in geology, in : B.J.L. Berry, S.F. Marble(Eds), Spatial analysis : A Reader in statistical Geography, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Jain, A. K. (1981). Advances in mathematical models for image processing. Proc. IEEE 69. 502-528.
- Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets, Birkhauser, berlin.
- Kimouche, K. (2013). Analyse spectrale dans les champs aléatoires nonlinéaires. Thèse de doctorat. Université de constantine.
- Kimouche, K. (2020). Probabiliés (cour et exercices) ,université 20 août 1955 skikda.
- Mallat, S. (1996). Wavelet signal Processing, Academie Press.
- Mandelbrot, B. B. (1975). Stochastic models for the Eart's relief. the shape and fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72, 3825-3828.
- Mandelbrot, B. B. (1975). On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surface of scalars. J. Fluid Mech. 72, 401-417.
- Mary, E. (1993). Wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional Brownian motion. IEEE Trans. Inform. Theory, 260-264.
- Masry, E. (1998). Covariance and spectral properties of the wavelet transform and discrete wavelet coefficients of second order random fields. Signal Processing. Vol. 64. 131-143.
- Matern, B. (1960). Spatial variation. Comm. Swed. Forestry Res, Inst. 49, 1-144.
- Merah, F. (2007). Estimation de la densité spectrale d'un processus en temps continue par echantillonnage aléatoire. Constantine.
- Meyer, Y. Jaffard, S. and Rioul, O. (1987). L'analyse par ondelettes, Pour La Science, no. 119, pp. 28-37.
- Neumann. M. H. (1996). Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non Gaussian times series, Journal of Time Series Analysis. Vol. 17. 6, 601-633.

Rosenblatt, M. (1985). Stationary sequences and random fields. Birkhäuser.

Subba Rao, T., Indukumar, K. C. (1996). Spectral and wavelet methods for the analysis of nonlinear and nonstationary times series. J. Franklin Inst. Vol. 333 (B), 425-452.

Sylvester, R. (1974). Coastal Engeigneering. I : Generation, Propagation, and Influence of Waves, Developments in Geatechnical Engineering. Elsvier, New York.

Tewfik, A. H. (1992). Correlation structure of the discrete wavelet coefficient of fractional Brownian motion, IEEE Trans. Inform. Theory, 904-909.