

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de
Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/..../2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Cycles limites d'une classe d'équations différentielles du cinquième ordre

Option : Commande optimale et système dynamique

Par : Latreche Fatiha

Encadré par : Dr. Sellami Nabil

M.C.A U. GUELMA

Devant le jury :

Président : Dr. Khemis Rabah

M.C.A U. SKIKDA

Examineur : Dr. Bedrani Yassine

M.C.B U. SKIKDA

Année 2023 – 2024

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail

*A l'homme de ma vie, source de ma joie et de mon bonheur à celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir à mon cher père **El Mahfoud** ta présence à mes côtés est toujours la source de ma force.*

*A celle qui m'a mis sur le chemin de la vie à celle dont la supplication ne m'a pas quitté à chaque pas à ma chère mère **Khamissa** source d'amour et de tendresse et mon modèle dans cette vie.*

*A mon mari **Nasr eddine***

*A mes chères soeurs **Rima, Roumaissa, Nour elhouda, Nedjema** et mon frère **Zakaria**.*

*A mes amis surtout **Fathia** et **Hayat**.*

A tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

Merci à tous.

Fatima



REMERCIEMENTS

♥ *Je remercie tout d'abord **ALLAH** qui m'a aidé et m'a donné la santé, la patience et le courage durant ces longues années d'étude et la force pour finir ce travail ♥.*

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur

***Dr.Sellami Nabil**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet.*

Mes sincères remerciements vont aux membres de jury

***Dr.Khemis Rabah** et **Dr.Bedrani Yassine** qui ont accepté de juger mon travail.*

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-mêmes afin de nous assurer une formation de qualité.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie l'existence de cycles limites d'une classe d'équations différentielles du cinquième ordre en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, où il s'agit d'équations de la forme

$$x^{(5)} - ex^{(4)} - d\ddot{x} - c\ddot{x} - b\dot{x} - ax = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, x^{(4)}, t)$$

où $a = \lambda\mu\delta$, $b = -(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta)$, $c = \lambda + \mu + \delta + \lambda\mu\delta$, $d = -(1 + \lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta)$, $e = \lambda + \mu + \delta$, et λ, μ et δ sont des paramètres réels, ε est suffisamment petit et F est une fonction de classe C^2 , 2π -périodique en t .

Abstract

We study the existence of limit cycles for a class of fifth order differential equations using first-order averaging theory, the studied equations are of the form

$$x^{(5)} - ex^{(4)} - d\ddot{x} - c\dot{x} - bx - ax = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dot{\ddot{x}}, x^{(4)}, t)$$

where $a = \lambda\mu\delta$, $b = -(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta)$, $c = \lambda + \mu + \delta + \lambda\mu\delta$, $d = -(1 + \lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta)$, $e = \lambda + \mu + \delta$, and $\lambda \mu \delta$ are real parameters, ε is sufficiently small and F is a function of class C^2 , 2π -periodic in t .

ملخص

نهتم بدراسة الحلول الدورية المعزولة لصنف من المعادلات التفاضلية من الرتبة الخامسة باستخدام نظرية المتوسط من الدرجة الأولى, من الشكل

$$x^{(5)} - ex^{(4)} - d\ddot{x} - c\dot{x} - bx - ax = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, x^4, t)$$

$$c = \delta + \lambda + \mu + \delta\lambda\mu, b = -(\lambda\mu + \delta\lambda + \delta\mu), a = \delta\lambda\mu \text{ حيث}$$

$$\delta, \lambda, \mu, e = \delta + \lambda + \mu, d = -(1 + \lambda\mu + \delta\lambda + \delta\mu)$$

و ε صغير كفاية و $F \in C^2$ دالة حقيقية غير خطية دورية ودورها T .

Table des matières

1	Notions Préliminaires	1
1.1	Système dynamique	1
1.2	Flot d'un système différentiel	2
1.3	Points d'équilibre	2
1.4	Stabilité de la solution	3
1.5	Système linéarisé	3
1.6	Solution périodique	3
1.7	Portrait de phase	3
1.8	Point d'équilibre hyperbolique	4
1.9	Nature des points d'équilibre	4
1.10	Cycle limite	8
1.11	Cycle limite hyperbolique	8
2	Théorie de moyennisation	9
2.1	Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques	9
2.2	Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques.	11
3	Cycles limites d'une classe d'équations différentielles du cinquième ordre	17
3.1	Cas 1 : $\lambda\mu\delta \neq 0$ et $\lambda \neq \mu \neq \delta$	18
3.2	Cas 2: $\delta = 0$, $\mu\lambda \neq 0$ et $\mu \neq \lambda$	24
3.3	Cas 3 : $\delta = 0$, $\mu = \lambda \neq 0$	29

3.4	Cas 4 : $\delta \neq 0, \mu = \lambda \neq 0$	33
3.5	Cas 5 : $\delta = \mu = \lambda \neq 0$	38
	Conclusion	42
	Bibliographie	42

Introduction

Les équations différentielles sont un type d'équations mathématiques qui mettent relation une ou plusieurs fonctions et leurs dérivées, utilisées pour décrire la manière dont une quantité donnée évolue dans le temps.

Elles sont apparues au 17^{ème} siècle avec le développement du calcul par Newton et Leibnitz, Newton les a utilisé pour décrire le mouvement des corps célestes et d'autres phénomènes physiques, le 18^{ème} siècle a vu de grands efforts de la part de scientifiques tels qu' Euler, qui ont introduit des méthodes pour résoudre et analyser les équations différentielles, le développement des équations différentielles ordinaires s'est poursuivi au 19^{ème} siècle avec Lagrange, Laplace et Jacobi qui ont développés des méthodes pour les résoudre, et au 20^{ème} siècle avec l'avènement des ordinateurs, des méthodes numériques de résoudre de ces équations ont été développées, permettant de résoudre des problèmes plus complexes.

L'étude de l'existence, le nombre et la stabilité des solutions périodiques est l'un des plus importants problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques.

Un cycle limite d'une EDO est une solution périodique isolée, la compréhension et l'évolution des cycles limites nécessite une étude complète des équations différentielles ordinaires où les points d'équilibre sont déterminés et leur stabilité est examinée. De nombreuses méthodes ont été développées pour rechercher des solutions périodiques des équations différentielles, parmi lesquelles la théorie de Poincaré Bendixson, qui fournit des conditions pour l'existence de cycles limites dans les systèmes bidimensionnels. En revanche, dans les

systèmes de dimensions supérieures l'étude devient plus complexe et nécessite des outils avancés tels que la théorie des perturbations.

La méthode de Moyennisation est une théorie classique introduite pour la première fois par Krylov et Bogoliubov en 1937 [3] et constitue l'une des méthodes de perturbation les plus importantes que nous utilisons actuellement pour étudier les cycles limites d'équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques.

Dans ce mémoire, on utilise la méthode de Moyennisation du premier ordre afin d'étudier les cycles limites pour une classe d'équations différentielles ordinaires du cinquième ordre. Notre mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un chapitre préliminaire qui contient des définitions et des théorèmes de base de la théorie qualitative des EDO et des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons deux types différents de la théorie de Moyennisation du premier ordre, pour chaque type on donne un théorème avec des exemples d'applications.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude des cycles limites pour une classe d'équations différentielles ordinaires du cinquième ordre en appliquant la théorie de la Moyennisation du premier ordre.

Dans ce chapitre, on va donner quelques notions générales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. Premièrement on définit le système dynamique et les notions de : flot, point d'équilibre, la linéarisation, stabilité, la nature de points d'équilibre, solution périodique, et on passe à la définition du portrait de phase et cycles limites.

1.1 Système dynamique

Un système dynamique est un phénomène qui évolue dans le temps. Cette évolution peut être déterminée par des équations différentielles ordinaires et peut être :

autonôme : si l'évolution ne dépend pas du temps.

non autonome : si l'évolution dépend du temps.

On définit un système dynamique par

Définition 1.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que:

$$-\Psi(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue.}$$

$$-\Psi(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue.}$$

$$-\Psi(0, x) = x.$$

$$-\Psi(t + s, x) = \Psi(t, \Psi(s, x)) \text{ pour } t; s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est une matrice constante, la solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$\Psi(t, x) = e^{tA}x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.2 Flot d'un système différentiel

Définition 1.2. Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des application $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$ où $\varphi(t, x_0)$, est la solution telle que $\varphi(0, x_0) = x_0$.

1.3 Points d'équilibre

Définition 1.3. Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé point critique ou point d'équilibre du système différentiel non linéaire (1.2) s'il vérifie $f(x_0) = 0$.

1.4 Stabilité de la solution

Définition 1.4. Une solution $\phi(t)$ du système (1.2) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si pour toute solution $x(t)$ de (1.2) vérifiant $x(t_0) = x_0$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

De plus si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$$

alors la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

1.5 Système linéarisé

Définition 1.5. On appelle système linéarisé de (1.2) au voisinage du point d'équilibre x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right), 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.4)$$

1.6 Solution périodique

Définition 1.6. On appelle solution périodique toute solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (1.2) telle qu'il existe un nombre T vérifiant $\varphi(t + T) = \varphi(t)$. Une solution périodique de (1.2) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

1.7 Portrait de phase

Définition 1.7. Soit le système différentiel.

$$\begin{cases} \dot{x} = G(x, y) \\ \dot{y} = H(x, y) \end{cases} \quad (1.5)$$

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase, en particulier pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.5) sont représentées dans le plan par des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète ainsi que ces points critiques représente le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.8 Point d'équilibre hyperbolique

Définition 1.8. Un point d'équilibre x_0 de (1.2) est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne de f au voisinage de x_0 ont des parties réelles non nulle.

1.9 Nature des points d'équilibre

On considère le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \tag{1.6}$$

où A est une matrice constante inversible d'ordre 2.

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas suivants selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

1) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable (voir Figure 1.1).

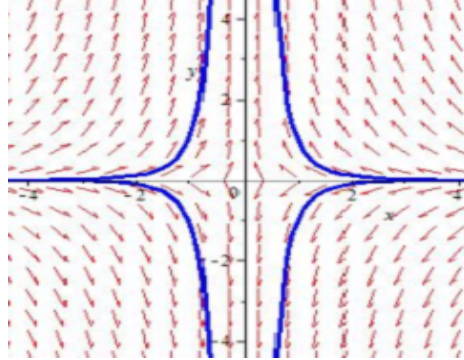


Figure 1.1. Selle (instable)

2) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe, on a trois cas:

(a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point $x = x_0$ est un noeud stable (voir Figure 1.2).

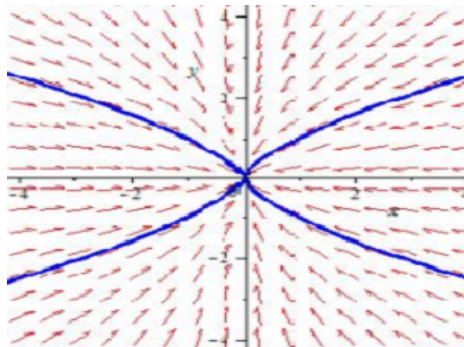


Figure 1.2. Noeud (stable)

(b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point $x = x_0$ est un noeud instable (voir Figure 1.3)

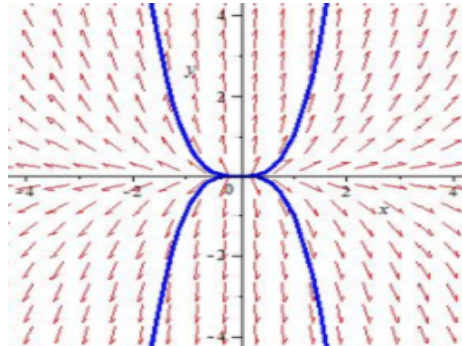


Figure 1.3. Noeud (instable)

(c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$, et instable si $\lambda > 0$, (voir Figure 1.4 et Figure 1.5).

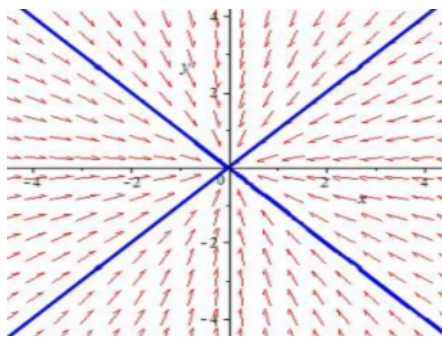


Figure 1.4. Noeud propre
(stable)

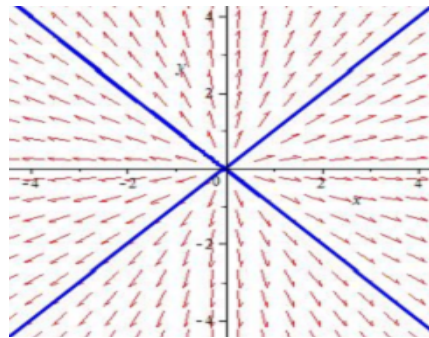


Figure 1.5. Noeud propre
(instable)

3) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées c'est-à-dire $\forall \lambda_j = \overline{\lambda_2}$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ avec $Re(\lambda_j) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est instable si $Re(\lambda_j) > 0$ et

asymptotiquement stable si $Re(\lambda_j) < 0$.(voir Figure 1.6 et Figure 1.7).

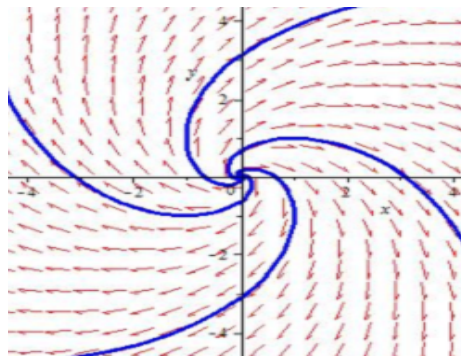


Figure 1.6. Foyer (instable)

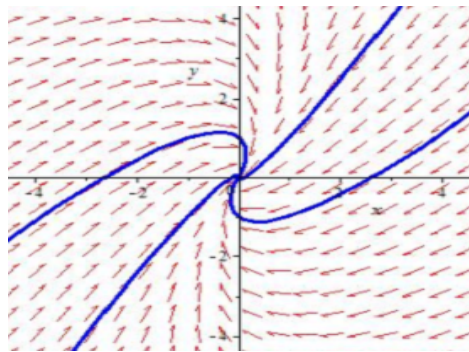


Figure 1.7. Foyer
(asymptotiquement stable)

4) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) = 0$, alors le point $x = x_0$ est un centre, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable. (voir Figure 1.8).

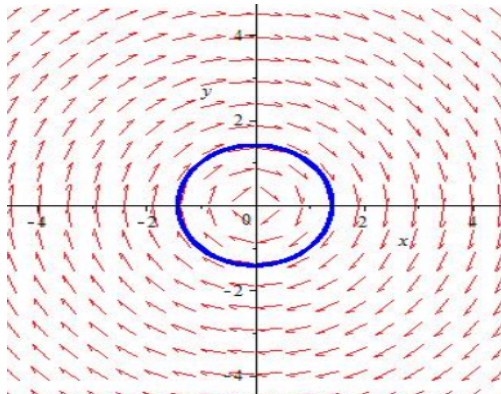


Figure 1.8. Centre

1.10 Cycle limite

Définition 1.10. Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

1.11 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.11. Supposons que le système (1.5) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période $T > 0$, et soit

$$S = \int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt. \quad (1.7)$$

On dit que l'orbite périodique est un cycle limite hyperbolique si $S \neq 0$. De plus si $S > 0$ (respectivement $S < 0$), alors le cycle limite est instable (respectivement stable).

Dans ce chapitre, on présente une introduction de la théorie de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques d'une équation différentielle ordinaire ou d'un système différentiel.

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.1)$$

Avec $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, \mathbb{D} un domaine bornée et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, \mathbf{x}(t))$ et $R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon)$ sont T -périodiques en t_0 , Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f^0(\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.2)$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \mathbf{y}) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

Théorème 2.1. *Considérons le système (2.1) et supposons que les fonctions vectorielles $F, R, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, \infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, on suppose que F et R sont T -périodiques en t avec T indépendante de ε .*

(i) *Si $q \in D$ est un point singulier du système moyenné (2.2) telle que*

$$\det(D_x f^0(q)) \neq 0. \quad (2.4)$$

Alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow q$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(ii) *Si le point singulier $y = q$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que q quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Preuve : Voir Verhulst [10].

Exemple 2.1. Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(x^2 + 2x - 1)\dot{x}$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(x^2 + 2x - 1)y \end{cases} \quad (2.5)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 2r \cos \theta - 1) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta (r \cos \theta + 2) - \sin^2 \theta \end{cases}$$

où d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 2r \cos \theta - 1)$$

De (2.3) on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 2r \cos \theta - 1) d\theta = \frac{1}{2}r \left(1 - \frac{1}{4}r^2\right).$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est $r = 2$. Comme $\left(\frac{df^0(2)}{dr}\right) = -1$ d'après le **Théorème** 2.1, il suit que le système (2.5) pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon $r = 2$ du système non perturbé (2.5) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $\left(\frac{df^0(2)}{dr}\right) = -1 < 0$, ce cycle limite est stable.

2.2 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques.

On considère le problème de la bifurcation des solutions T -périodiques d'un système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon). \quad (2.6)$$

Avec ε suffisamment petit.

Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 , T -périodiques par rapport à la première variable et Ω est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que le système non perturbé (2.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) \quad (2.7)$$

a une sous variété de solutions périodiques de dimension k . Soit $\mathbf{x}(t, z)$ une solution du système (2.7) telle que $\mathbf{x}(0, z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (2.7) le long d'une solution périodique $\mathbf{x}(t, z)$ est

$$\dot{\mathbf{y}} = D_x F_0(t, \mathbf{x}(t, z))\mathbf{y}. \quad (2.8)$$

Dans la suite on note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.8) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées.

i.e. $\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$

Théorème 2.2. Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que

(i) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$ et que pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution

$\mathbf{x}(t, z_\alpha)$ de (2.7) est T -périodique.

(ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$ il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.8) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimensions $k \times (n - k)$ et dans le bas coin droit une matrice $\Delta_\alpha((n - k) \times (n - k))$ avec $\det \Delta_\alpha \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(\mathbf{x}(t, z_\alpha), t) dt \right). \quad (2.9)$$

S'il existe $a \in V$ telle que $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha}(a)\right) \neq 0$, alors il existe une solution

T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.6) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve : Voir Malkin [6] et Roseau [7] et voir Buica, Francoise, Llibre [1].

Corollaire 2.1 On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $V \subset \Omega$ telle que pour chaque $z \in \bar{V}$, la solution $\mathbf{x}(t, z)$ est T -périodique et on considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t, z) F_1(\mathbf{x}(t, z), t) dt \quad (2.10)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det\left(\frac{d\mathcal{F}}{dz}(a)\right) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow z$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.3 On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 - 1) \quad (2.11)$$

Si $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, l'équation (2.11) peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 - 1) = x - y + z + \varepsilon F(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2.12)$$

2.2. Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques.

L'origine est l'unique point d'équilibre du système (2.12) lorsque $\varepsilon = 0$, la partie linéaire du système (2.12) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $i, -i$ et 1 . Avec la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^t = B(x, y, z)^t$, on transforme le système (2.12) en un autre système dont sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (2.12) avec $\varepsilon = 0$, c-à-d $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^t = J(X, Y, Z)^t$, où J est la forme de Jordan réelle de la matrice A donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - y \\ Y = -y + z \\ Z = x + z \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{X-Y+Z}{2} \\ y = \frac{-X-Y+Z}{2} \\ z = \frac{-X+Y+Z}{2} \end{cases}$$

Le nouveau système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t) \end{cases} \quad (2.13)$$

où

$$\tilde{F}(X, Y, Z, t) = F\left(\frac{X - Y + Z}{2}, \frac{-X - Y + Z}{2}, \frac{-X + Y + Z}{2}, t\right)$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système (2.13) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}$$

Avec les notations introduites dans le Théorème 2.2. le système (2.13) est similaire au système (2.6) avec

$$\mathbf{x} = (X, Y, Z), \quad F_0(\mathbf{x}, t) = (Y, X, Z), \quad F_1(\mathbf{x}, t) = (0, \tilde{F}, \tilde{F}) \text{ et } F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (2.13) telle que $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0)$.

Le système (2.13) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y) qui est un plan invariant par le flot du système non perturbé, et les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

telles que

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t, \quad Z(t) = 0 \quad (2.14)$$

Notons que ces solutions sont 2π -périodiques.

Pour notre système le V et le α du Théorème 2.2 sont

$$V = \{ (X, Y) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho \} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V.$$

2.2. Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques.

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (2.13) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (2.14) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\pi}) \neq 0$. Alors toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes $(\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha))$ de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée dans (2.9), on a trouve

$$\mathcal{F}_1(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sin t \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt \quad (2.15)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t F \left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, \frac{-X(t) - Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t \right) dt.$$

$$\mathcal{F}_2(\alpha) = \int_0^{2\pi} \cos t \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt \quad (2.16)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t F \left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, \frac{-X(t) - Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t \right) dt.$$

où $X(t)$ et $Y(t)$ sont données par (2.14). On pose $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$ et on intègre (2.15) et (2.16) on obtient

$$\begin{cases} f_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8}(X_0^2 + X_0 Y_0 + Y_0^2) - \frac{1}{2} \\ f_2(X_0, Y_0) = -\frac{1}{16}(X_0 - Y_0)(X_0 + Y_0) \end{cases}$$

2.2. Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques.

Si $f_1(X_0, Y_0) = f_2(X_0, Y_0) = 0$, on trouve quatre solutions $(X_{01}^*, Y_{01}^*) = (2, -2)$, $(X_{02}^*, Y_{02}^*) = (-2, 2)$, $(X_{03}^*, Y_{03}^*) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $(X_{04}^*, Y_{04}^*) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ On a

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_{01}, Y_{01})=(2, -2)} = \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_{02}, Y_{02})=(-2, 2)} = \frac{-1}{8} \neq 0$$

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_{03}, Y_{03})=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} = \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_{04}, Y_{04})=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe quatre solutions 2π -périodiques de l'équation différentielle (2.11) telle que

$$x_1(0, \varepsilon) \rightarrow 2 \quad , \quad \dot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad , \quad \ddot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow -2.$$

$$x_2(0, \varepsilon) \rightarrow -2 \quad , \quad \dot{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad , \quad \ddot{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow 2.$$

$$x_3(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad , \quad \dot{x}_3(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \ddot{x}_3(0, \varepsilon) \rightarrow 0.$$

$$x_4(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad , \quad \dot{x}_4(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \ddot{x}_4(0, \varepsilon) \rightarrow 0.$$

$$\text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Cycles limites d'une classe d'équations différentielles du cinquième ordre

Dans ce chapitre nous utiliserons la théorie de la moyennisation pour étudier les cycles limites de la classe suivante d'équations différentielles ordinaires du cinquième ordre.

$$x^{(5)} - ex^{(4)} - d\ddot{x} - c\dot{x} - bx - ax = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}}, x^{(4)}, t) \quad (3.1)$$

où $a = \lambda\mu\delta$, $b = -(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta)$, $c = \lambda + \mu + \delta + \lambda\mu\delta$, $d = -(1 + \lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta)$, $e = \lambda + \mu + \delta$, et λ, μ et δ sont des paramètres réels, ε est suffisamment petit et $F \in C^2$ est une fonction 2π -périodique en la variable t .

Si $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, $u = \ddot{\dot{x}}$, et $v = x^{(4)}$, l'équation (3.1) peut s'écrire comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = u \\ \dot{u} = v \\ \dot{v} = ax + by + cz + du + ev + \varepsilon F(x, y, z, u, v, t) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

L'origine est l'unique point singulier du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$. Afin d'appliquer le théorème 2.2, nous allons effectuer un changement linéaire de variables $(X, Y, Z, U, V)^T = B(x, y, z, u, v)^T$ tel que dans les nouvelles variables (X, Y, Z, U, V) , le système (3.2) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan.

On distingue cinq cas suivant les valeurs des paramètres λ , μ et δ :

Cas 1 : $\lambda\mu\delta \neq 0$ et $\lambda \neq \mu \neq \delta$

Cas 2 : $\delta = 0$, $\mu\lambda \neq 0$ et $\mu \neq \lambda$

Cas 3 : $\delta = 0$, $\mu = \lambda \neq 0$

Cas 4 : $\delta \neq 0$, $\mu = \lambda \neq 0$

Cas 5 : $\delta = \mu = \lambda \neq 0$

3.1 Cas 1 : $\lambda\mu\delta \neq 0$ et $\lambda \neq \mu \neq \delta$

Dans ce cas, la forme normale de Jordan réelle de la matrice A est la suivante

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

donc la partie linéaire du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ a l'espace $(X, Y, 0, 0, 0)$ rempli par les orbites périodiques

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Sauf son origine. La dimension de la variété des orbites périodiques est donc 2.

Afin d'établir le resultat principal pour le cas 1, nous avons besoin de quelques préliminaires. Définissons

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \sin t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), t) dt \\ f_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), t) dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\lambda\mu\delta - \lambda - \mu - \delta)X + (1 - \lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta)Y}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ y(t) &= \frac{(1 - \lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta)X + (\lambda + \mu + \delta - \lambda\mu\delta)Y}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ z(t) &= \frac{(\lambda + \mu + \delta - \lambda\mu\delta)X + (\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ u(t) &= \frac{(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)X + (\lambda\mu\delta - \lambda - \mu - \delta)Y}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ v(t) &= \frac{(\lambda\mu\delta - \lambda - \mu - \delta)X + (1 - \lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta)Y}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \end{aligned}$$

et

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t.$$

Nous présentons maintenant le résultat suivant pour le cas 1

Théorème 3.1. *Supposons que $\lambda\mu\delta \neq 0$ et $\lambda \neq \mu \neq \delta$. S'il existe un $(X_0^*, Y_0^*) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que pour (3.5) on a $f_1(X_0^*, Y_0^*) = f_2(X_0^*, Y_0^*) = 0$, et*

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \neq 0. \quad (3.6)$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1).

telle que

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\lambda\mu\delta - \lambda - \mu - \delta)X_0^* + (1 - \lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta)Y_0^*}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ \dot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(1 - \lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta)X_0^* + (\lambda + \mu + \delta - \lambda\mu\delta)Y_0^*}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ \ddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\lambda + \mu + \delta - \lambda\mu\delta)X_0^* + (\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y_0^*}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)}, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \\ \dddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)X_0^* + (\lambda\mu\delta - \lambda - \mu - \delta)Y_0^*}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \\ x^{(4)}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\lambda\mu\delta - \lambda - \mu - \delta)X_0^* + (1 - \lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta)Y_0^*}{(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

De plus, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$, la solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ est un cycle limite.

L'équation différentielle linéaire du cinquième ordre $x^{(5)} - ex^{(4)} - d\ddot{x} - c\ddot{x} - b\dot{x} - ax = 0$ fournit un système linéaire dans \mathbb{R}^5 ayant un centre à deux dimensions. Le théorème 3.1 réduit l'étude des cycles limites de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) bifurquant des orbites périodiques de ce centre, c'est à dire qu'il suffit d'étudier l'existence des zéros non dégénérés d'un système algébrique de deux équations avec deux inconnues, déterminés par $f_1(X_0, Y_0) = f_2(X_0, Y_0) = 0$.

Les zéros sont non dégénérés dans le sens où le jacobien du système en eux doit être non nul. L'étude des zéros de l'équation est plus facile que celle des orbites périodiques directement. Maintenant nous allons prouver le Théorème 3.1 puis étudier son application.

Preuve du Théorème 3.1. Les valeurs propres de la partie linéaire du système (3.2) à son point singulier (l'origine) sont $\pm i, \delta, \mu$ et λ . Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z, U, V)^T = B_1(x, y, z, u, v)^T$

où

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda\mu\delta & -\lambda\mu - \lambda\delta - \mu\delta & \lambda + \mu + \delta & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda\mu\delta & \lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta & -\lambda - \mu - \delta & 1 \\ \lambda\mu & -\lambda - \mu & \lambda\mu + 1 & -\lambda - \mu & 1 \\ \lambda\delta & -\lambda - \delta & \lambda\delta + 1 & -\lambda - \delta & 1 \\ -\mu\delta & \mu + \delta & -\mu\delta - 1 & \mu + \delta & -1 \end{pmatrix},$$

on transforme le système (3.2) en un autre système tel que sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$, c à d

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{Z} = \delta Z + \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{U} = \mu U + \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{V} = \lambda V + \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{où } \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) = F(x, y, z, u, v, t), \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = K_1 W_1$$

$$\text{Avec } K_1 = \frac{1}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)(\delta^2+1)(\lambda-\mu)(\lambda-\delta)(\mu-\delta)}, \text{ et}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda + \delta + \mu - \mu\lambda\delta)X \\ -(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y \\ +(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\lambda - \mu)Z - (\delta^2 + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda - \delta)U \\ -(\delta^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\mu - \delta)V \\ -(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda + \delta + \mu - \mu\lambda\delta)X \\ +(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y \\ +(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\lambda - \mu)Z\delta \\ -(\delta^2 + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda - \delta)U\mu - \lambda(\delta^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\mu - \delta)V \\ (\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda + \delta + \mu - \mu\lambda\delta)X \\ +(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y \\ +(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\lambda - \mu)Z\delta^2 \\ -(\delta^2 + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda - \delta)U\mu^2 - \lambda^2(\delta^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\mu - \delta)V \\ (\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda + \delta + \mu - \mu\lambda\delta)X \\ -(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y \\ +(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\lambda - \mu)Z\delta^3 \\ -(\delta^2 + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda - \delta)U\mu^3 - \lambda^3(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)(\mu - \delta)V \\ -(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda + \delta + \mu - \mu\lambda\delta)X \\ -(\lambda - \mu)(\lambda - \delta)(\mu - \delta)(\lambda\mu + \lambda\delta + \mu\delta - 1)Y \\ +(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1)(\lambda - \mu)Z\delta^4 \\ -(\delta^2 + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda - \delta)U\mu^4 - \lambda^4(\mu^2 + 1)(\delta^2 + 1)(\mu - \delta)V. \end{pmatrix}$$

Le système (3.8) est similaire au système (2.6) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U, V), F_0(\mathbf{x}, t) = (-Y, X, \delta Z, \mu U, \lambda V), \\ F_1(\mathbf{x}, t) &= (0, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}), F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon)$ la solution du système (3.8) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0).$$

Le système (3.8) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y) , les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0, 0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$$

où les fonctions $X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t)$ sont données en (3.4). Notons que toutes ces orbites périodiques ont une période de 2π .

Pour le système (3.8), V et α du Théorème 2.2 sont

$$V = \{(X, Y) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (3.8) avec $\varepsilon = 0$, par rapport aux solutions périodiques (3.4) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0, 0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\lambda} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\pi\delta})(1 - e^{-2\pi\mu})(1 - e^{-2\pi\lambda}) \neq 0$ car $\delta\mu\lambda \neq 0$, donc toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée en (2.9). Il résulte facilement que $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$, où les fonctions f_1 et f_2 sont celles données en (3.5). Maintenant, le reste de la preuve du Théorème 3.1 découle directement de l'énoncé du Théorème 2.2.

Proposition 3.1. Supposons que $\delta\mu\lambda \neq 0$, $\delta \neq \mu \neq \lambda$ et que la fonction F dans le système (3.2) est $F(x, y, z, u, v, t) = (2 + \cos t)(x^2 + x^3)$. Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \ddot{\ddot{x}}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad x^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

Preuve : Notons que les fonctions $f_1(X_0, Y_0)$ et $f_2(X_0, Y_0)$ du Théorème 3.1 sont

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{4(1 + \mu^2)^2(1 + \delta^2)^2(1 + \lambda^2)^2}(\delta\mu\lambda Y_0 + \delta\lambda X_0 + \delta\mu X_0 + \mu\lambda X_0 - \delta Y_0 - \mu Y_0 - \lambda Y_0 - X_0) \\ &\quad (\delta\mu\lambda X_0 - \delta\lambda Y_0 - \delta\mu Y_0 - \mu\lambda Y_0 - \delta X_0 - \mu X_0 - \lambda X_0 + 3X_0^2 + 3Y_0^2 + Y_0) \\ f_2(X_0, Y_0) &= \frac{1}{8(1 + \mu^2)^2(1 + \delta^2)^2(1 + \lambda^2)^2} [X_0^2(3\delta^2\mu^2\lambda^2 + \delta^2\lambda^2 - 4\delta^2\mu\lambda + \delta^2\mu^2 - 4\delta\mu\lambda \\ &\quad - 4\delta\mu^2\lambda + \mu^2\lambda^2 + 3\delta^2 + 4\delta\lambda + 4\delta\mu + 4\mu\lambda + 3\lambda^2 + 3\mu^2 + 1) + Y_0^2(\delta^2\mu^2\lambda^2 \\ &\quad + 3\delta^2\lambda^2 + 4\delta^2\mu\lambda + 3\delta^2\mu^2 + 4\delta\mu\lambda^2 + 4\delta\mu^2\lambda + 3\mu^2\lambda^2 + \delta^2 - 4\delta\lambda - 4\delta\mu \\ &\quad - 4\mu\lambda + \lambda^2 + \mu^2 + 3) + X_0Y_0(-4\delta^2\mu\lambda^2 - 4\delta^2\mu^2\lambda - 4\delta\mu^2\lambda^2 + 4\delta^2\lambda \\ &\quad + 4\delta^2\mu + 4\delta\lambda^2 + 16\delta\mu\lambda + 4\delta\mu^2 + 4\mu\lambda^2 + 4\mu^2\lambda - 4\delta - 4\lambda - 4\mu) \\ &\quad + X_0^3(6\delta\mu\lambda - 6\delta - 6\lambda - 6\mu) + Y_0^3(-6\delta\lambda - 6\delta\mu - 6\mu\lambda + 6) \\ &\quad + X_0^2Y_0(-6\delta\mu - 6\lambda\mu - 6\delta\lambda + 6) + Y_0^2X_0(6\delta\mu\lambda - 6\delta - 6\mu - 6\lambda)] \end{aligned}$$

Ce système a une unique solution différente de $(0, 0)$, à savoir

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{1}{2}(-\delta\mu\lambda + \delta + \lambda + \mu), \frac{1}{2}(\delta\lambda + \delta\mu + \mu\lambda - 1) \right)$$

La déterminant (3.6) à cette solution prend la valeur

$$\frac{3}{256(1 + \mu^2)(1 + \delta^2)(1 + \lambda^2)} \neq 0$$

Enfin, (3.9) s'ensuit par substitution directe de la solution (X_0^*, Y_0^*) dans (3.7).

3.2 Cas 2: $\delta = 0$, $\mu\lambda \neq 0$ et $\mu \neq \lambda$

Maintenant, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est donnée par (3.3) avec $\delta = 0$. Par conséquent la partie linéaire du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ à l'espace $(X, Y, Z, 0, 0)$ rempli par les orbites périodiques

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

sauf l'axe Z (à savoir $\{(0, 0, Z, 0, 0)\}$) qui est rempli de points singuliers. Par conséquent, la dimension de la variété des orbites périodiques du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ est 3.

Nous définissons

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0, Z_0) &= - \int_0^{2\pi} \sin t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \\ f_2(X_0, Y_0, Z_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \\ f_3(X_0, Y_0, Z_0) &= \int_0^{2\pi} F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(-\lambda-\mu)X+(1-\lambda\mu)Y}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} + \frac{Z}{\lambda\mu} \\ y(t) &= \frac{(1-\lambda\mu)X+(\lambda+\mu)Y}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \\ z(t) &= \frac{(\lambda+\mu)X+(\lambda\mu-1)Y}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \\ u(t) &= \frac{(\lambda\mu-1)X-(\lambda+\mu)Y}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \\ v(t) &= \frac{(-\lambda-\mu)X+(1-\lambda\mu)Y}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \end{aligned}$$

et $X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t$, $Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t$, $Z(t) = Z_0$.

Le résultat principal pour le cas 2 est le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Supposons que $\delta = 0$, $\mu\lambda \neq 0$ et $\mu \neq \lambda$. S'il existe $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, Z_0^*)\}$ telle que pour les fonctions (3.11) nous avons*

$$f_1(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) = f_2(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) = f_3(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) = 0$$

et

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0)} \right)_{(X_0, Y_0, Z_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*)} \neq 0. \quad (3.12)$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit il y a une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(-\lambda-\mu)X_0^* + (1-\lambda\mu)Y_0^*}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} + \frac{Z_0^*}{\lambda\mu} \\ \dot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(1-\lambda\mu)X_0^* + (\lambda+\mu)Y_0^*}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \\ \ddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\lambda+\mu)X_0^* + (\lambda\mu-1)Y_0^*}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0. \\ \dddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\lambda\mu-1)X_0^* - (\lambda+\mu)Y_0^*}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \\ x^{(4)}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(-\lambda-\mu)X_0^* + (1-\lambda\mu)Y_0^*}{(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

De plus, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$, la solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ est un cycle limite.

Nous allons prouver le Théorème 3.2 et ensuite étudier son application.

Preuve du Théorème 3.2. Les valeurs propres de la partie linéaire du système (3.2) à son point singulier (l'origine) sont $\pm i$, 0 , μ , et λ . Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z, U, V)^T = B_2(x, y, z, u, v)^T$, où B_2 est B_1 avec $\delta = 0$, nous transformons le système (3.2) en un autre système tel que sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$, c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{Z} = \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{U} = \mu U + \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{V} = \lambda V - \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \end{cases} \quad (3.14)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z, U, V) = F(x, y, z, u, v)$ et $(x, y, z, u, v)^T = B_2^{-1}(X, Y, Z, U, V)^T$.

Le système (3.14) est similaire à (2.6) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U, V), F_0(\mathbf{x}, t) = (-Y, X, 0, \mu U, \lambda V) \\ F_1(\mathbf{x}, t) &= (0, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, -\tilde{F}) \text{ et } F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon)$ la solution du système (3.14) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0).$$

Le système (3.14) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y, Z) , les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0, 0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$$

où les fonctions $X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t)$ sont données en (3.10). Notons que toutes ces orbites périodiques ont une période 2π . Pour le système (3.14), V et α dans le Théorème 2.2 sont

$$V = \{(X, Y, Z) : 0 < X^2 + Y^2 + Z^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0, Z_0) \in V$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (3.14) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (3.10) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, Z_0, 0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\mu\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\lambda\pi} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\mu\pi})(1 - e^{-2\lambda\pi}) \neq 0$ car $\mu\lambda \neq 0$. Alors toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0, Z_0) \in V$ des trois premières composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée en (2.9). Il s'ensuit facilement que $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0, Z_0), f_2(X_0, Y_0, Z_0), f_3(X_0, Y_0, Z_0))$, où les fonctions f_1 , f_2 et f_3 sont celles données en (3.11). Maintenant, le reste de la preuve du théorème 3.2 découle directement de l'énoncé du théorème 2.2.

Proposition 3.2. Supposons que $\delta = 0$, $\mu\lambda \neq 0$ et $\mu \neq \lambda$, et que la fonction F dans le système (3.2) est $F(x, y, z, u, v, t) = (2 + \sin(t))(x^2 - 1)$, alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe deux solutions 2π -périodiques $x_1(t, \varepsilon)$ et $x_2(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$x_1(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{\sqrt{23}}{46}, \quad \dot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{7\sqrt{23}}{23}, \quad \ddot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \dddot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{7\sqrt{23}}{23}, \quad x_1^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (3.15)$$

et l'autre satisfait

$$\begin{aligned} x_2(0, \varepsilon) &\rightarrow -\frac{\sqrt{23}}{46}, \quad \dot{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{7\sqrt{23}}{23}, \quad \ddot{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ \ddot{x}_2(0, \varepsilon) &\rightarrow -\frac{7\sqrt{23}}{23}, \quad x_2^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Preuve : Notons que les fonctions $f_1(X_0, Y_0, Z_0)$, $f_2(X_0, Y_0, Z_0)$ et $f_3(X_0, Y_0, Z_0)$ du Théorème 3.2 sont

$$\begin{aligned}
 f_1(X_0, Y_0, Z_0) &= -\frac{1}{8\lambda^2\mu^2(\lambda^2+1)^2(\mu^2+1)^2}[-X_0^2(3\lambda^4\mu^4 + \lambda^4\mu^2 - 4\lambda^3\mu^3 + \lambda^2\mu^4 + 3\lambda^2\mu^2) \\
 &\quad -Y_0^2(\lambda^4\mu^4 + 3\lambda^4\mu^2 + 4\lambda^3\mu^3 + 3\lambda^2\mu^4 + \lambda^2\mu^2) \\
 &\quad -4Z_0^2(\lambda^4\mu^4 + 2\lambda^4\mu^2 + 2\lambda^2\mu^4 + \lambda^4 + 4\lambda^2\mu^2 + \mu^4 + 2\mu^2 + 2\lambda^2 + 1) \\
 &\quad +4X_0Y_0(\lambda^4\mu^3 + \lambda^3\mu^4 - \lambda^3\mu^2 - \lambda^2\mu^3) \\
 &\quad +16X_0Z_0(\lambda^4\mu^4 + \lambda^4\mu^2 - \lambda^3\mu^3 + \lambda^2\mu^4 - \lambda^3\mu + \lambda^2\mu^2 - \lambda\mu^3 - \lambda\mu) \\
 &\quad -16Y_0Z_0(\lambda^4\mu^3 + \lambda^3\mu^4 + \lambda^4\mu + \lambda^3\mu^2 + \lambda^2\mu^3 + \lambda\mu^4 + \lambda^2\mu + \lambda\mu^2) \\
 &\quad +4\lambda^2\mu^2(\lambda^4\mu^4 + 2\lambda^4\mu^2 + 2\lambda^2\mu^4 + 2\lambda^4 + 4\lambda^2\mu^2 + \mu^4 + 2\lambda^2 + 2\mu^2 + 1)] \\
 f_2(X_0, Y_0, Z_0) &= \frac{1}{4\lambda\mu(\lambda^2+1)^2(\mu^2+1)^2}[(\lambda\mu Y_0 + \lambda X_0 + \mu X_0 - Y_0)(\lambda^2\mu^2 X_0 - 8\lambda^2\mu^2 Z_0 \\
 &\quad -\lambda^2\mu Y_0 - \lambda\mu^2 Y_0 - 8\lambda^2 Z_0 - \lambda\mu X_0 - 8\mu^2 Z_0 - 8Z_0)] \\
 f_3(X_0, Y_0, Z_0) &= -\frac{1}{\lambda^2\mu^2(\lambda^2+1)(\mu^2+1)}[-\lambda^2\mu^2 X_0^2 - \lambda^2\mu^2 Y_0^2 - 2Z_0^2(\lambda^2\mu^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 1) \\
 &\quad +(\lambda^2\mu^2 - \lambda\mu)X_0Z_0 + (\lambda^2\mu - \lambda\mu^2)Y_0Z_0 + 2\lambda^2\mu^2(\lambda^2\mu^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 1)]
 \end{aligned}$$

Ce système a deux solutions réelles différentes de $(0, 0, Z_0^*)$, qui sont

$$\begin{aligned}
 [X_0^* &= \frac{7}{23}(\lambda\mu - 1)\sqrt{23}, Y_0^* = -\frac{7}{23}(\lambda + \mu)\sqrt{23}, Z_0^* = \frac{1}{46}\sqrt{23}\lambda\mu] \\
 \text{et } [X_0^* &= -\frac{7}{23}(\lambda\mu - 1)\sqrt{23}, Y_0^* = \frac{7}{23}(\lambda + \mu)\sqrt{23}, Z_0^* = -\frac{1}{46}\sqrt{23}\lambda\mu]
 \end{aligned}$$

Le déterminant (3.12) en ces deux solutions prend la valeur

$$\frac{21\sqrt{23}}{92\lambda\mu(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \neq 0 \text{ et } -\frac{21\sqrt{23}}{92\lambda\mu(\lambda^2+1)(\mu^2+1)} \neq 0, \text{ respectivement.}$$

Enfin, (3.15) et (3.16) découlent de la substitution directe des deux solutions (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) dans (3.13).

3.3 Cas 3 : $\delta = 0, \mu = \lambda \neq 0$

Dans ce cas, la forme normale en Jordan réelle de la matrice A est

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

La partie linéaire du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ a l'espace $(X, Y, Z, 0, 0)$ remplie par les orbites périodiques (3.10) sauf l'axe Z (à savoir $\{(0, 0, Z, 0, 0)\}$) qui est remplie de points singuliers. Par conséquent, la dimension de la variété des orbites périodiques du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ est 3.

Nous définissons

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0, Z_0) &= \int_0^{2\pi} \sin t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \\ f_2(X_0, Y_0, Z_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \\ f_3(X_0, Y_0, Z_0) &= \int_0^{2\pi} F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

où

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-2\mu X - (\mu^2 - 1)Y}{(\mu^2 + 1)^2} + \frac{Z}{\mu^2} \\ y(t) &= \frac{-(\mu^2 - 1)X + 2\mu Y}{(\mu^2 + 1)^2} \\ z(t) &= \frac{2\mu X + (\mu^2 - 1)Y}{(\mu^2 + 1)^2} \\ u(t) &= \frac{(\mu^2 - 1)X - 2\mu Y}{(\mu^2 + 1)^2} \\ v(t) &= \frac{-2\mu X - (\mu^2 - 1)Y}{(\mu^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

et

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t, \quad Z(t) = Z_0.$$

Nous donnons ensuite le théorème suivant

Théorème 3.3. *Supposons que $\delta = 0$, et $\mu = \lambda \neq 0$. S'il existe $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, Z_0^*)\}$ telle que pour les fonctions (3.18) on a*

$$f_1(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) = f_2(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) = f_3(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) = 0$$

et

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0)} \right)_{(X_0, Y_0, Z_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*)} \neq 0. \quad (3.19)$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit il y a une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ à l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &= \frac{-2\mu X_0^* - (\mu^2 - 1)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2} + \frac{Z_0^*}{\mu^2} \\ \dot{x}(0, \varepsilon) &= \frac{-(\mu^2 - 1)X_0^* + 2\mu Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2} \\ \ddot{x}(0, \varepsilon) &= \frac{2\mu X_0^* + (\mu^2 - 1)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0. \\ \ddot{\dot{x}}(0, \varepsilon) &= \frac{(\mu^2 - 1)X_0^* - 2\mu Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2} \\ x^{(4)}(0, \varepsilon) &= \frac{-2\mu X_0^* - (\mu^2 - 1)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

De plus, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$, la solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ est un cycle limite.

Nous allons prouver le Théorème 3.3 et ensuite étudier son application.

Preuve du Théorème 3.3. Les valeurs propres de la partie linéaire du système (3.2) à son point singulier (l'origine) sont $\pm i$, 0 et μ . Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z, U, V)^T = B_3(x, y, z, u, v)^T$, où

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu^2 & 2\mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 & -2\mu & 1 \\ \mu^2 & -2\mu & \mu^2 + 1 & -2\mu & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu & 1 & -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

Nous transformons le système (3.2) en un autre système tel que sa partie linéaire est la forme normale réelle de Jordan de la partie linéaire du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$, c'est à

dire

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{Z} = \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{U} = \mu U + V \\ \dot{V} = \mu V + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \end{cases} \quad (3.21)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z, U, V) = F(x, y, z, u, v)$ et $(x, y, z, u, v)^T = B_3^{-1}(X, Y, Z, U, V)^T$.

Le système (3.21) est similaire à (2.6) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U, V), \quad F_0(\mathbf{x}, t) = (-Y, X, 0, \mu U + V, \mu V) \\ F_1(\mathbf{x}, t) &= (0, \tilde{F}, \tilde{F}, 0, \tilde{F}) \text{ et } F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon)$ la solution du système (3.21) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0).$$

Le système (3.21) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan $[Z=\text{constante}]$ dans l'espace (X, Y, Z) , les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0, 0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$$

où les fonctions $X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t)$ sont données en (3.10). Notons que toutes ces orbites périodiques ont une période 2π . Pour notre système, V et α dans le Théorème 2.2 sont

$$V = \{(X, Y, Z) : 0 < X^2 + Y^2 + Z^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0, Z_0) \in V$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (3.21) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (3.10) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} & t e^{\mu t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, Z_0, 0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\mu\pi} & 2\pi e^{-2\mu\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\mu\pi} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\mu\pi})^2 \neq 0$ car $\mu \neq 0$. Alors toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0, Z_0) \in V$ des trois premières composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée en (2.9). Il s'ensuit facilement que $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0, Z_0), f_2(X_0, Y_0, Z_0), f_3(X_0, Y_0, Z_0))$, où les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont celles données en (3.18). Maintenant, le reste de la preuve du Théorème 3.3 découle directement de l'énoncé du Théorème 2.2.

Proposition 3.3. Supposons que $\delta = 0, \mu = \lambda \neq 0$, et que la fonction F dans le système (3.2) est $F(x, y, z, u, v, t) = (2 + \cos(t))(x^2 - 2)$, alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe deux solutions 2π -périodiques $x_1(t, \varepsilon)$ et $x_2(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$x_1(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{13\sqrt{46}}{46}, \quad \dot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \ddot{x}_1(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{7\sqrt{46}}{23}, \quad \ddot{\ddot{x}}_1(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad x_1^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{7\sqrt{46}}{23} \quad (3.22)$$

$$x_2(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{13}{46}\sqrt{46}, \quad \dot{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \ddot{x}_2(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{7\sqrt{46}}{23}, \quad (3.23)$$

$$\ddot{\ddot{x}}_2(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad x_2^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{7\sqrt{46}}{23} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Preuve : Notons que les fonctions $f_1(X_0, Y_0, Z_0), f_2(X_0, Y_0, Z_0)$ et $f_3(X_0, Y_0, Z_0)$ du Théorème 3.3 sont

$$\begin{aligned}
 f_1(X_0, Y_0, Z_0) &= \frac{1}{4\mu^2(\mu^2 + 1)^4} [(\mu^2 X_0 - 2\mu Y_0 - X_0)(\mu^4 Y_0 - 8\mu^4 Z_0 + 2\mu^3 X_0 - \mu^2 Y_0 - 16\mu^2 Z_0 - 8Z_0)] \\
 f_2(X_0, Y_0, Z_0) &= -\frac{1}{8\mu^2(\mu^2 + 1)^4} [-X_0^2(\mu^8 + 10\mu^6 + \mu^4) - Y_0^2(3\mu^8 - 2\mu^6 + 3\mu^4) \\
 &\quad - 4Z_0^2(\mu^8 + 4\mu^6 + 6\mu^4 + 4\mu^2 + 1) + X_0 Y_0(-8\mu^7 + 8\mu^5) \\
 &\quad + 32X_0 Z_0(\mu^7 + 2\mu^5 + \mu^3) + 16Y_0 Z_0(\mu^8 + \mu^6 - \mu^4 - \mu^2) \\
 &\quad + 8\mu^4(\mu^8 + 4\mu^6 + 6\mu^4 + 4\mu^2 + 1)] \\
 f_3(X_0, Y_0, Z_0) &= -\frac{1}{\mu^2(\mu^2 + 1)^2} [-\mu^4 X_0^2 - \mu^4 Y_0^2 - (2\mu^4 + 4\mu^2 + 2)Z_0^2 \\
 &\quad + 2\mu^3 X_0 Z_0 + (\mu^4 - \mu^2)Y_0 Z_0 + 4\mu^4(\mu^4 + 2\mu^2 + 1)]
 \end{aligned}$$

Ce système a deux solutions réelles différentes de $(0, 0, Z_0^*)$, qui sont

$$\begin{aligned}
 [X_0^* &= \frac{14}{23}\mu\sqrt{46}, \quad Y_0^* = \frac{7}{23}(\mu^2 - 1)\sqrt{46}, \quad Z_0^* = \frac{1}{46}\sqrt{46}\mu^2] \\
 \text{et } [X_0^* &= -\frac{14}{23}\mu\sqrt{46}, \quad Y_0^* = -\frac{7}{23}(\mu^2 - 1)\sqrt{46}, \quad Z_0^* = -\frac{1}{46}\sqrt{46}\mu^2]
 \end{aligned}$$

La déterminant (3.19) à ces deux solutions prend les valeurs

$$-\frac{21\sqrt{46}}{46\mu^2(\mu^2 + 1)^2} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{21\sqrt{46}}{46\mu^2(\mu^2 + 1)^2} \neq 0, \quad \text{respectivement.}$$

Enfin, (3.22) et (3.23) découlent de la substitution directe des deux solutions (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) dans (3.20)

3.4 Cas 4 : $\delta \neq 0, \mu = \lambda \neq 0$

Dans ce cas, la forme normale en Jordan réelle de la matrice A est

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

La partie linéaire du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ a l'espace $(X, Y, 0, 0, 0)$ remplie par les orbites périodiques (3.4) sauf son origine, donc la dimension du variété des orbites périodiques du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ est 2.

Nous définissons

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= - \int_0^{2\pi} \sin t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \\ f_2(X_0, Y_0) &= - \int_0^{2\pi} \cos t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)X + (\mu^2 + 2\delta\mu - 1)Y}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ y(t) &= \frac{(\mu^2 + 2\delta\mu - 1)X - (-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)Y}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ z(t) &= \frac{-(-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)X - (\mu^2 + 2\delta\mu - 1)Y}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ u(t) &= \frac{-(\mu^2 + 2\delta\mu - 1)X + (-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)Y}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ v(t) &= \frac{(-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)X + (\mu^2 + 2\delta\mu - 1)Y}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \end{aligned}$$

et $X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t.$

Le résultat principal pour le cas 4 est le théorème suivant

Théorème 3.4. *Supposons que $\delta \neq 0$, et $\mu = \lambda \neq 0$. S'il existe $(X_0^*, Y_0^*) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ telle que pour les fonctions (3.25) on a*

$$f_1(X_0^*, Y_0^*) = f_2(X_0^*, Y_0^*) = 0$$

et

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \neq 0. \quad (3.26)$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit il ya une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ à l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)X_0^* + (\mu^2 + 2\delta\mu - 1)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ \dot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\mu^2 + 2\delta\mu - 1)X_0^* - (-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ \ddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{-(-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)X_0^* - (\mu^2 + 2\delta\mu - 1)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)}, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \\ \ddot{\dot{x}}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{-(\mu^2 + 2\delta\mu - 1)X_0^* + (-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \\ x^{(4)}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(-\delta\mu^2 + 2\mu + \delta)X_0^* + (\mu^2 + 2\delta\mu - 1)Y_0^*}{(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

De plus, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$, la solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ est un cycle limite.

Nous allons d'abord prouver le Théorème 3.4 et ensuite étudier son application.

Preuve du Théorème 3.4. Les valeurs propres de la partie linéaire du système (3.2) à son point singulier (l'origine) sont $\pm i$, δ et μ . Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z, U, V)^T = B_4(x, y, z, u, v)^T$, où

$$B_4 = \begin{pmatrix} -\mu^2\delta & \mu^2 + 2\mu\delta & -2\mu - \delta & 1 & 0 \\ 0 & \mu^2\delta & -\mu^2 - 2\mu\delta & \delta + 2\mu & -1 \\ \mu^2 & -2\mu & \mu^2 + 1 & -2\mu & 1 \\ -\delta & 1 & -\delta & 1 & 0 \\ \mu\delta & -\mu - \delta & 1 + \mu\delta & -\mu - \delta & 1 \end{pmatrix}$$

nous transformons le système (3.2) en un autre système tel que sa partie linéaire est la forme normale de Jordan réelle de la partie linéaire du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$, c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X - \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{Z} = \delta Z + \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{U} = \mu U + V \\ \dot{V} = \mu V + \varepsilon\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \end{cases} \quad (3.28)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) = F(x, y, z, u, v, t)$ et $(x, y, z, u, v)^T = B_4^{-1}(X, Y, Z, U, V)^T$.

Le système (3.28) est similaire à (2.6) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U, V), F_0(\mathbf{x}, t) = (-Y, X, \delta Z, \mu U + V, \mu V) \\ F_1(\mathbf{x}, t) &= (0, -\tilde{F}, \tilde{F}, 0, \tilde{F}) \text{ et } F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon)$ la solution du système (3.28) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0).$$

Le système (3.28) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y) , les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0, 0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$$

où les fonctions $(X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$ sont données en (3.4). Notons que toutes ces orbites périodiques ont une période 2π . Pour notre système, V et α dans le Théorème 2.2 sont

$$V = \{(X, Y) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (3.28) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (3.4) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} & t e^{\mu t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0, 0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\delta\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\mu\pi} & 2\pi e^{-2\mu\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\mu\pi} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\delta\pi})(1 - e^{-2\mu\pi})^2 \neq 0$ car $\delta\mu \neq 0$. Alors toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée en (2.9). Il s'ensuit facilement que $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$, où les fonctions f_1 et f_2 sont celles données en (3.25). Maintenant, le reste de la preuve du Théorème 3.4 découle directement de l'énoncé du Théorème 2.2.

Proposition 3.4. Supposons que $\delta \neq 0, \mu = \lambda \neq 0$, et que la fonction F dans le système (3.2) est $F(x, y, z, u, v, t) = (2 + \cos(t))(x^2 + 3x)$, alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow -1, \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 1, \dddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, x^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow -1 \quad (3.29)$$

Preuve : Notons que les fonctions $f_1(X_0, Y_0)$ et $f_2(X_0, Y_0)$ du Théorème 3.4 sont

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{(\mu^2 + 1)^4(\delta^2 + 1)^2} [(12\delta^2\mu^4 + 24\delta^2\mu^2 - \delta\mu^2X_0 + 12\mu^4 + 2\delta\mu Y_0 \\ &\quad + \mu^2Y_0 + 12\delta^2 + \delta X_0 + 24\mu^2 + 2\mu X_0 - Y_0 + 12)(\delta\mu^2Y_0 + 2\delta\mu X_0 \\ &\quad + \mu^2X_0 - \delta Y_0 - 2\mu Y_0 - X_0)] \\ f_2(X_0, Y_0) &= \frac{1}{8(\mu^2 + 1)^4(\delta^2 + 1)^2} [-X_0^2(+3\delta^2\mu^4 - 2\delta^2\mu^2 - 8\delta\mu^3 + \mu^4 + 3\delta^2 + 8\delta\mu \\ &\quad + 10\mu^2 + 1) - Y_0^2(+\delta^2\mu^4 + 10\delta^2\mu^2 + 8\delta\mu^3 + 3\mu^4 + \delta^2 - 8\delta\mu - 2\mu^2 \\ &\quad + 3) - 24X_0(\delta^3\mu^6 - \delta^3\mu^4 + 2\delta^2\mu^5 - \delta\mu^6 + \delta^3\mu^2 + 4\delta^2\mu^3 - \delta\mu^4 + 2\mu^5 \\ &\quad + \delta^3 + 2\delta^2\mu + 2\delta\mu^2 + 4\mu^3 + \delta + 2\mu) - (2\delta^3\mu^5 + \delta^2\mu^6 + 4\delta^3\mu^3 \\ &\quad + \delta^2\mu^4 + 2\delta\mu^5 + \mu^6 + 2\delta^3\mu - \delta^2\mu^2 + 4\delta\mu^3 + \mu^4 - \delta^2 - \mu^2 + 2\delta\mu - 1)24Y_0 \\ &\quad + (2\delta^2\mu^3 + \delta\mu^4 - 2\delta^2\mu - 6\delta\mu^2 - 2\mu^3 + \delta + 2\mu)4X_0Y_0] \end{aligned}$$

Ce système a une unique solution différente de $(0, 0)$, à savoir

$$(X_0^*, Y_0^*) = ((\delta\mu^2 - \delta - 2\mu), (-2\delta\mu - \mu^2 + 1))$$

La déterminant (3.26) à cette solution prend la valeur

$$\frac{19}{16(\mu^2 + 1)^2(\delta^2 + 1)} \neq 0.$$

Enfin, (3.29) s'ensuit par substitution directe de la solution (X_0^*, Y_0^*) dans (3.27).

3.5 Cas 5 : $\delta = \mu = \lambda \neq 0$

Dans ce cas, la forme normale en Jordan réelle de la matrice A est

$$J_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

La partie linéaire du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ a l'espace $(X, Y, 0, 0, 0)$ remplie par les orbites périodiques (3.4) sauf son origine, donc la dimension de la variété des orbites périodiques du système $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{U}, \dot{V})$ est 2.

Nous définissons

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \sin t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \\ f_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t F(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t)) dt \end{aligned} \quad (3.31)$$

où

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\delta^3 - 3\delta)X + (1 - 3\delta^2)Y}{(\delta^2 + 1)^3} \\ y(t) &= \frac{(1 - 3\delta^2)X - (\delta^3 - 3\delta)Y}{(\delta^2 + 1)^3} \\ z(t) &= \frac{-(\delta^3 - 3\delta)X - (1 - 3\delta^2)Y}{(\delta^2 + 1)^3} \\ u(t) &= \frac{-(1 - 3\delta^2)X + (\delta^3 - 3\delta)Y}{(\delta^2 + 1)^3} \\ v(t) &= \frac{(\delta^3 - 3\delta)X + (1 - 3\delta^2)Y}{(\delta^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

et $X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t$, $Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t$.

Nous présentons ensuite le résultat pour le cas 5.

Théorème 3.5. Supposons que $\delta = \mu = \lambda \neq 0$. S'il existe une $(X_0^*, Y_0^*) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ telle que pour les fonctions (3.31) on a

$$f_1(X_0^*, Y_0^*) = f_2(X_0^*, Y_0^*) = 0$$

et

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \neq 0. \quad (3.32)$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit il y a une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\delta^3 - 3\delta)X_0^* + (1 - 3\delta^2)Y_0^*}{(\delta^2 + 1)^3} \\ \dot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(1 - 3\delta^2)X_0^* - (\delta^3 - 3\delta)Y_0^*}{(\delta^2 + 1)^3} \\ \ddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{-(\delta^3 - 3\delta)X_0^* - (1 - 3\delta^2)Y_0^*}{(\delta^2 + 1)^3}, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \\ \dddot{x}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{-(1 - 3\delta^2)X_0^* + (\delta^3 - 3\delta)Y_0^*}{(\delta^2 + 1)^3} \\ x^{(4)}(0, \varepsilon) &\rightarrow \frac{(\delta^3 - 3\delta)X_0^* + (1 - 3\delta^2)Y_0^*}{(\delta^2 + 1)^3} \end{aligned} \quad (3.33)$$

De plus, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$, la solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ est un cycle limite.

Nous allons d'abord prouver le Théorème 3.4 et ensuite étudier son application.

Preuve du Théorème 3.5. Les valeurs propres de la partie linéaire du système (3.2) à son point singulier (l'origine) sont $\pm i$ et δ . Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z, U, V)^T = B_5(x, y, z, u, v)^T$, où

$$B_5 = \begin{pmatrix} \delta^3 & -3\delta^2 & 3\delta & -1 & 0 \\ 0 & -\delta^3 & 3\delta^2 & -3\delta & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & -\delta & 1 & 0 \\ \delta^2 & -2\delta & 1 + \delta^2 & -2\delta & 1 \end{pmatrix}$$

nous transformons le système (3.2) en un autre système tel que sa partie linéaire est la forme normale de Jordan réelle de la partie linéaire du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$, c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \\ \dot{Z} = \delta Z + U \\ \dot{U} = \delta U + V \\ \dot{V} = \delta V + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) \end{cases} \quad (3.34)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z, U, V, t) = F(x, y, z, u, v, t)$ et $(x, y, z, u, v)^T = B_5^{-1}(X, Y, Z, U, V)^T$.

Le système (3.34) est similaire à (2.6) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U, V), \quad F_0(\mathbf{x}, t) = (-Y, X, \delta Z + U, \delta U + V, \delta V) \\ F_1(\mathbf{x}, t) &= (0, \tilde{F}, 0, 0, \tilde{F}) \text{ et } F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon)$ la solution du système (3.34) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0).$$

Le système (3.34) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y) , les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0, 0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$$

où les fonctions $(X(t), Y(t), Z(t), U(t), V(t))$ sont données en (3.4). Notons que toutes ces orbites périodiques ont une période 2π . Pour notre système, V et α dans le Théorème 2.2 sont

$$V = \{(X, Y) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (3.34) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (3.4) telle que $M(0) = I$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\delta t} & te^{\delta t} & \frac{t^2}{2}e^{\delta t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\delta t} & te^{\delta t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\delta t} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0, 0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\delta\pi} & 2\pi e^{-2\delta\pi} & -2\pi^2 e^{-2\delta\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\delta\pi} & 2\pi e^{-2\delta\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\delta\pi} \end{pmatrix}$$

On a $(1 - e^{-2\delta\pi})^3 \neq 0$ car $\delta \neq 0$. Alors toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée en (2.9). Il s'ensuit facilement que $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$, où les fonctions f_1 et f_2 sont celles données en (3.31). Maintenant, le reste de la preuve du Théorème 3.5 découle directement de l'énoncé du Théorème 2.2.

Proposition 3.5. Supposons que $\delta = \mu = \lambda \neq 0$, et que la fonction F dans le système (3.2) est $F(x, y, z, u, v, t) = (2 - \sin(t))(2x + 1)$, alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle du cinquième ordre (3.1) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{4}, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \dddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad x^{(4)}(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{4} \quad (3.35)$$

Preuve : Pour le système de cette proposition, les fonctions $f_1(X_0, Y_0)$ et $f_2(X_0, Y_0)$ du Théorème 3.5 sont

$$\begin{aligned} f_1(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{2(\mu^2 + 1)^3} [4X_0(3\mu^2 - 1)X_0 + 4Y_0(\mu^3 - 3\mu) + \mu^2(\mu^4 + 3\mu^2 + 3) + 1] \\ f_2(X_0, Y_0) &= \frac{2}{(\mu^2 + 1)^3} [(\mu^3 - 3\mu)X_0 + (1 - 3\mu^2)Y_0] \end{aligned}$$

Ce système a une unique solution différente de $(0, 0)$, à savoir

$$(X_0^*, Y_0^*) = ((\delta\mu^2 - \delta - 2\mu), (-2\delta\mu - \mu^2 + 1))$$

La déterminant (3.32) à cette solution prend la valeur

$$\frac{4}{(\mu^2 + 1)^3} \neq 0.$$

Alors, d'après le Théorème 3.5, il existe un cycle limite.

Enfin (3.35) s'ensuit par substitution directe de la solution (X_0^*, Y_0^*) dans (3.33).

Conclusion

Dans ce mémoire, on a appliqué la méthode de moyennisation du premier ordre à la recherche des cycles limites pour une classe d'équations différentielles ordinaires du cinquième ordre, On distingue cinq cas suivant les valeurs des paramètres δ , μ et λ .

La méthode de moyennisation nous a permis d'obtenir des conditions suffisantes de l'existence des cycles limites en transformant le problème de la recherche des cycles limites d'un système différentiel en un problème algébrique de la recherche des racines non dégénérées d'un système non linéaire, et donne une condition suffisante pour l'existence des cycles limites.

Cette méthode donne de bons résultats pour certaines classes d'équations différentielles ordinaires, mais elle ne donne pas toute les solutions périodiques de l'EDO.

Bibliographie

- [1] A. Buica, J. P. Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Comm. Pure. Appl. Anal.*, **6**:1 (2007), 103-111.
- [2] A. Cima, J. Llibre, and M.A Taixeira, Limit cycles of some polynomial differential system in dimension 2, 3 and 4 via averaging theory, *Applicable Analysis*, **87**(2008), 149-164.
- [3] N. M. Krylov and N. N. Bogoliubov. *Introduction to Nonlinear Mechanics* (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, 1937. *Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku*.
- [4] J. Llibre, N. Sellami, and A. Makhlouf, Limit cycles for a class of fourth order differential equations, *Applicable Analysis*, **88**:12(2009), 1617-1630.
- [5] J. Llibre, J. Yu, and X. Zhang, Limit cycles for a class of third order differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, **40**:2(2010), 581-594.
- [6] I. G. Malkin, *Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gostexizdat, Moscow, 1956. (Russian).
- [7] M. Roseau, *Vibrations Non-linéaires et Théorie de la Stabilité*, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.8, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.
- [8] J.A. Sanders, and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences, 59, Springer, New York, 1985.
- [9] N. Sellami and A. Makhlouf, Limit cycles for a class of fourth order differential equations, *Ann. of Diff Eqs*, **28**:2(2012).

- [10] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, 2nd ed, Springer, Berlin, 1996.