



N° : DP202305MR

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université 20 août 1955-Skikda**

Faculté des Sciences

Département de Physique

## **Mémoire de Master**

**Filière : Physique**

**Spécialité : Physique des Rayonnements**

### **Thème**

---

**Modèle standard cosmologique avec expansion accélérée de l'univers  
en présence de l'énergie et la matière noire**

---

**Présenté par :**

**Bahria Ikhlas**

**Soutenu le : 02/07/2023 devant le jury composé de :**

K. Khounfais	Pr.	Université de Skikda	Président
F. Khelili	Dr.	Université de Skikda	Rapporteur
M.S.LEBIOD	Dr.	Université de Skikda	Examineur

**Année Universitaire : 2022/2023**

## *Remerciements*

*Je remercie*

*Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience Pour terminer ce modeste travail.*

*Mes remerciements les plus sincères à mon encadreur monsieur le professeur Khelili Farid d'avoir accepté d'encadrer ce travail. Je le remercie pour sa compréhension, ses encouragements*

*Et ses orientations accordés tout au long de ce travail. Qu'il trouve*

*ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Mes remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté et qui vont évaluer la qualité de mon modeste travail. Qu'ils trouvent ici, en mon nom, ma reconnaissance la plus sincère.*

*Je remercie également tous mes enseignants de la post-graduation.*

*Et enfin Je présente mes vifs remerciements à tous ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

## *DEDICACES*

*Que ce travail témoigne nos respects:*

***A nos parents:** Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de notre étude.*

*Aucune dédicace ne pourrait exprimer notre respect, notre considération et nos profonds sentiments envers eux.*

*On prit le bon Dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de nous. A nos sœurs et nos frères.*

***A tous nos professeurs:** Leur générosité et leur soutien nous*

*oblige de leurs témoigner notre profond respect et notre loyale*

*considération.*

***A tous nos amis et collègues:** Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.*

## Listes des figures

Figure 3.1 : La variation du facteur d'échelle $a$ en fonction du temps $t$ .....	44
Figure 3.1 : La variation du facteur d'échelle $a$ en fonction du temps $t$ pour les trois types d'univers .....	48
Figure 3.3 : Le facteur d'expansion en fonction du temps $t$ .....	62
Figure 3.3 : La variation du paramètre de décélération $q$ en fonction du temps .....	63

# المخلص

صاغ ألبرت أينشتاين أهم نظرية في الفيزياء الحديثة ألا وهي نظريه النسبية العامة ، والتي تقوم على مبدا التكافؤ والقصور الذاتي .وهذا ما يترجم رياضيا علاقات المجال الجاذبية وهندسة الزمكان .حيث تصف معادلات النسبية العامة كيف تتسبب المادة والطاقة في انحناء الزمن .وكيف يؤثر هذا الانحناء على حركة المادة والطاقة .ومن هذه المعادلات يمكننا ايضا التنبؤ بسلوك الاجسام في مجالات جاذبية قوية، مثل مدارات الكواكب والنجوم، وانحناء الضوء اثناء مرورها بالاجسام الضخمة، وسلوك الثقوب السوداء. وجد فريدمان حلول لمعادلات النسبية، والتي ساعدت هايل لايجاد معدل توسع الكون " ثابت هايل " الذي قاسه اول مره سنة 1929 وهو يعتبر مقدارا اساسيا لاختبار النظريات الكونية. في عام 1998 أشارت دراسات الانزياح الأحمر الحديثة للمستعرات الأعظمية البعيدة إلى أن الكون قد دخل مؤخرًا في مرحلة من التوسع المتسارع . هذه الاكتشافات جعلت الفيزيائيون يضعون احتمال وجود شكل جديد من المادة، او بالاحرار طاقة، تعمل كمضاد للجاذبية .وهذا ما يعرف بالطاقة المظلمة" الثابت الكوني."

نموذج  $\Lambda$ CDM هو انجح نموذج كوني، يوضح هذا النموذج ان الكون يتكون حاليا من قطاع مظلم كبير، يفترض انه يتكون من % 69 طاقة مظلمة و% 26 مادة مظلمة و % 5 من الباريونات والاشعاع وانحناء الفضاء لا يكاد يذكر، لذلك نحن نعلم % 5 من مكونات الكون فقط.

كلمات مفتاحية : النسبية العامة، الزمكان، التوسع المتسارع، الطاقة المظلمة، المادة المظلمة، جوهر المجال القياسي.

---

# Abstract

---

Albert Einstein formulated the most important theory in modern physics, the theory of general relativity, which is based on the principle of equivalence and inertia. This is what translates mathematically the relations between gravitational field and the geometry of space-time. The equations of general relativity describe how matter and energy cause time to bend. And how this curvature affects the movement of matter and energy. From these equations, we can also predict the behavior of objects in strong gravitational fields, such as the orbits of planets and stars, the curvature of light as they pass through massive objects, and the behavior of black holes. Friedmann found solutions to the equations of relativity, which helped Hubble to find the expansion rate of the universe, the "Hubble constant", which he measured for the first time in 1929. It is considered a basic quantity for testing cosmological theories. In 1998, two independent collaborations, the Supernova Cosmology Project, provided convincing evidence of the accelerating expansion of the universe. These discoveries made physicists raise the possibility of a new form of matter, or free energy, acting as anti-gravity. This is known as dark energy "cosmological constant". The  $\Lambda$ CDM model that is the most successful cosmic model. This model shows that the universe is currently made up of a large dark strip, presumably made up of 69% of dark energy and 26% dark matter, and 5% of baryons, radiation, and the curvature of space are negligible, so we only know about 5% of the components of the universe.

**Keywords** : General relativity, Cosmological constant, Dark energy, Dark matter,  $\Lambda$ CDM model, The accelerated expansion of the universe.

---

## Résumé

---

Albert Einstein a formulé la théorie la plus importante de la physique moderne, la théorie générale de la relativité, qui est basée sur le principe d'équivalence et d'inertie. C'est ce qui traduit mathématiquement les relations entre champ gravitationnel et la géométrie de l'espace-temps. Les équations de la relativité générale décrivent comment la matière et l'énergie provoquent la déformation de l'espace-temps. Comment cette courbure affecte-t-elle le mouvement de la matière et de l'énergie. À partir de ces équation, nous pouvons également prédire le comportement des objets dans de forts champs gravitationnels, tels que les orbites des planètes et des étoiles, la courbure de la lumière lorsqu'elle traverse des objets massifs et le comportement des trous noirs. Friedman a trouvé des solutions aux équations de la relativité, qui ont aidé Hubble à trouver le taux d'expansion de l'univers, la "constante de Hubble", qu'il a mesurée pour la première fois en 1929. Elle est considérée comme une quantité de base pour tester les théories cosmologiques. En 1998 deux collaborations indépendantes, le Great Supernova Cosmology Project, ont fourni des preuves convaincantes de l'accélération de l'expansion de l'univers. Ces découvertes ont permis aux physiciens d'évoquer la possibilité d'une nouvelle forme de matière, ou plutôt d'énergie, agissant comme antigravité. C'est ce qu'on appelle l'énergie noire "la constante cosmologique". Le modèle CDM est le modèle mondial le plus performant. Ce modèle montre que l'univers se compose actuellement d'un grand secteur sombre, on suppose qu'il se compose de 69% d'énergie noire, 26% de matière noire, 5% de baryons, de rayonnement, et la courbure de l'espace est négligeable, nous ne connaissons donc que 5% des composants de l'univers.

**Mots clés** : Relativité générale, constante cosmologique, énergie noire, matière noire, modèle  $\Lambda$ CDM, l'expansion accélérée de l'univers.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les bases mathématique de la relativité générale :</b>	<b>7</b>
1.1	Les transformations de Lorentz : . . . . .	7
1.2	Les quatrivecteurs . . . . .	9
1.3	Le temps propre . . . . .	11
1.4	Exemples de quatrivecteurs . . . . .	12
1.5	Les tenseurs . . . . .	13
1.6	La Dérivée covariante . . . . .	14
1.7	Tenseur de courdure de Riemann . . . . .	15
1.8	Le tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	16
1.9	La courbure métrique . . . . .	17
1.10	Le principe d'équivalence et l'équation des géodésiques : . . . . .	18
1.11	Les équations d'Einstein . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Relativité générale et système solaire</b>	<b>22</b>
2.1	Métrique de Schwarzschild . . . . .	22
2.2	Mouvement dans un potentiel central . . . . .	24
2.3	Géodésiques dans la géométrie de Schwarzschild . . . . .	26
2.4	La précession du périhélie de Mercure . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Modèles cosmologiques avec énergie noire</b>	<b>31</b>
3.1	L'espace temps de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	31
3.1.1	Metrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	31
3.2	Décalage spectral cosmologique vers le rouge et la loi de Hubble . . . . .	33
3.3	Les équations de Friedmann avec constante cosmologique . . . . .	35

---

3.3.1	Equations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique . . . .	35
3.3.2	Densité critique et paramètres de densité . . . . .	40
3.4	Modèles cosmologiques de Friedmann-Lemaître . . . . .	42
3.4.1	Univers dominé par la matière . . . . .	42
3.4.2	Univers dominé par les rayonnements . . . . .	49
3.4.3	Univers plat dominé par le rayonnement et la matière . . . . .	55
3.5	Le modèle Lambda-CDM . . . . .	60

# Introduction générale

La théorie relativiste de la gravitation d'Einstein, la relativité générale, est l'une des conceptions les plus belles et les plus révolutionnaires de la science moderne, avec la théorie quantique, la relativité générale est l'un des deux développements les plus profonds de la physique du XXe siècle [13]. La théorie générale de la relativité d'Einstein est une belle œuvre d'art qui relie les champs gravitationnels à la géométrie de l'espace et du temps et fournit ainsi un schéma dans lequel notre univers peut être discuté [26]. Toutes les expériences et observations astrophysiques ont fermement confirmé la validité de ses fondements. L'idée séminale d'Einstein, basée sur le principe d'équivalence, selon laquelle l'interaction gravitationnelle peut être interprétée en termes de courbure de l'espace-temps a radicalement changé notre vision de l'Univers [25].

Certaines prédictions de la relativité générale diffèrent sensiblement de celles de la physique classique, notamment concernant le passage du temps, la géométrie de l'espace, le mouvement des corps en chute libre et la propagation de la lumière. Des exemples de telles différences comprennent la dilatation du temps gravitationnel, la lentille gravitationnelle, le décalage vers le rouge gravitationnel de la lumière et le retard gravitationnel. Les prédictions de la relativité générale ont été confirmées dans toutes les observations et expériences à ce jour. La théorie d'Einstein propose l'existence de trous noirs — régions de l'espace dans lesquelles l'espace et le temps sont déformés de telle manière que rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper — comme un état final pour les étoiles massives. La courbure de la lumière par la gravité peut conduire au phénomène de lentille gravitationnelle, où plusieurs images du même objet astronomique distant sont visibles dans le ciel. La relativité générale prédit également

l'existence d'ondes gravitationnelles, qui ont été mesurées récemment par LIGO et NASA/ESA Laser Interferometer Space Antenna, GPS : Global Positioning System. De plus, la relativité générale est à la base des modèles cosmologiques actuels d'un univers en constante expansion [27].

Le GPS, ou Global Positioning System, est probablement l'application la plus connue de la relativité d'Einstein. Le GPS utilise une constellation de 32 satellites couvrant la totalité de la surface du globe. Le système de positionnement global (GPS) est le système mondial de navigation par satellite le plus célèbre. Il consiste en une constellation de satellites en orbite à une altitude d'environ 20200 km du sol et avec une vitesse orbitale d'environ 14 000 km/h. Avec un récepteur GPS typique, on peut déterminer rapidement sa position sur Terre avec une précision de 5 à 10 m. Si on ne tenait pas compte du décalage temporel dû à la relativité, l'erreur de positionnement serait de 10km par jour ! Ce qui serait complètement inutile. Si on combine l'effet du mouvement orbital des satellites GPS avec l'effet du champ gravitationnel de la Terre, on trouve qu'après 24 h, la différence entre l'heure de l'horloge du récepteur GPS et celle des horloges des satellites GPS est de  $-38\mu s$ . Étant donné que la communication entre les satellites GPS et le récepteur GPS se fait par des signaux électromagnétiques se déplaçant à la vitesse de la lumière, une erreur de  $38\mu s$  équivaut à une erreur de  $10km$  en position spatiale, ce qui rendrait les systèmes de navigation GPS dans les voitures et les smartphones complètement inutiles. Si on ne tenait pas compte de ce décalage temporel dû à la relativité, l'erreur de positionnement serait de 10km par jour. Le nombre d'applications du GPS a été étonnant, le positionnement et la synchronisation précis, autres que pour la navigation militaire, incluent la synchronisation des nœuds de lignes électriques pour la détection des défauts, les communications, la navigation en profondeur, les tests de physique fondamentale, les mesures sur les pulsars, les tests des théories de la gravité, le suivi des véhicules, la recherche et le sauvetage, l'arpentage, la cartographie et la navigation des avions commerciaux, pour n'en nommer que quelques-uns [28], [29], [30].

Einstein a publié la théorie "générale" de la relativité, qui est une théorie sur la gravité, pour décrire la force de gravitation dans le cadre de la relativité restreinte. En effet la relativité restreinte exclue les forces qui agissent instantanément à distance (comme la gravité en mécanique de Newton), puisque la notion de simultanéité n'existe plus en absolu, mais dépend

de l'observateur. Il fallait donc trouver une formulation cohérente de la gravitation relativiste. Cette théorie est plus fondamentale que la théorie restreinte de la relativité, c'est une théorie de l'espace et du temps, et elle ne se contente pas de décrire, elle explique la gravité. Remarquons que le problème ne se posait pas pour les forces électromagnétiques qui étaient les autres forces connues à l'époque, car les équations de Maxwell (1885) possédaient déjà une formulation relativiste naturelle, ou le champ électromagnétique transporte la force entre deux charges, à la vitesse  $c$  et non de façon instantanée. Le concept développé dans la relativité générale est que l'espace-temps peut avoir une courbure. Cette courbure est créée par la présence de la matière [14]. La gravité est la distorsion de la structure de l'espace-temps causée par la présence de matière et d'énergie, tandis que les chemins suivis par la matière et l'énergie dans l'espace-temps sont régis par la structure de l'espace-temps. Cette grande boucle de rétroaction est décrite par les équations de champ d'Einstein [15]. Cette propriété a conduit Einstein à formuler le principe d'équivalence, qui postule que les lois de la physique sont identiques dans un référentiel qui subit une accélération constante et dans un référentiel au repos dans un champ gravitationnel uniforme, et encore qu'un champ gravitationnel peut être localement effacé par une accélération. Ce lien entre accélération et champ gravitationnel prend tout son sens en relativité générale, où l'espace, et même l'espace-temps, devient courbe. Dans la limite non relativiste, cette courbure fait apparaître un terme additionnel dans l'expression de l'accélération  $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{Newton} + \nabla\phi_g$ . Ainsi, à la particule newtonienne subissant une force gravitationnelle se substitue l'idée d'une particule libre se déplaçant dans un espace-temps déformé. En relativité générale, le champ gravitationnel s'identifie à la géométrie de l'espace-temps, qui devient élastique. Au-delà de cette équivalence entre champ gravitationnel et géométrie, le deuxième aspect de la relativité générale est le lien entre déformation de la géométrie et contenu en matière, incarné par les équations d'Einstein. Ces équations, obtenues par Einstein en 1915, généralisent au cadre relativiste l'équation de Poisson newtonienne  $\Delta\phi_g = 4\pi G\rho_m$ . Elles expriment, de façon intrinsèque, que la déformation de l'espace-temps est plus grande que la matière, ou énergie, est concentrée [16].

La quantité fondamentale en relativité restreinte est effectivement l'intervalle  $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ . Son invariance par changement de référentiel d'inertie est le cœur de la théorie. C'est ce qui traduit mathématiquement toute la structure de la relativité restreinte

et permet de voir émerger immédiatement les effets de dilatation du temps ou contraction des longueurs. Puisque l'intervalle encode la géométrie, la modification de sa forme signifie une modification géométrique. Le cadre conceptuel de la relativité générale est ici planté [16]. La cosmologie est l'étude de l'univers dans son ensemble, y compris son origine, sa nature, son évolution et son destin éventuel. Elle a des racines anciennes dans la philosophie et la religion, mais la cosmologie scientifique moderne date de 1917, lorsqu'Einstein a utilisé pour la première fois la relativité générale pour formuler un modèle mathématique de l'Univers. Les considérations sur l'énergie noire sont importantes dans la cosmologie moderne. On sait peu de choses sur sa source mais on pense actuellement qu'elle représente environ 70% de toute l'énergie de l'Univers. De nombreux scientifiques pensent qu'il s'agit de l'énergie du vide, et donc d'une propriété de l'espace vide, mais cette interprétation n'est certainement pas solidement établie [41]. L'évolution et la composition de l'Univers sont deux caractéristiques apparemment indépendantes et pourtant intrinsèquement liées. La première nous apprend que l'Univers est en expansion à un rythme variable, la seconde qu'il est constitué majoritairement de composantes non lumineuses et de nature inconnue, baptisées « matière noire » et « énergie noire ». Afin d'apporter de nouvelles pierres à l'édifice cosmologique, les chercheurs s'attachent à mieux comprendre comment évolue l'expansion de notre Univers au moyen d'expériences de plus en plus ambitieuses [18]. L'expansion de notre Univers était connue depuis 1929, lorsque l'astronome Edwin Hubble constata que les galaxies s'éloignent toutes les unes des autres. Sous l'effet attractif de la gravité, cette expansion de l'espace semblait ne pouvoir que ralentir. Cette conviction est brusquement ébranlée en 1998, quand deux équipes indépendantes étudient des supernovae lointaines précisément dans le but de mesurer ce ralentissement et démontrent, sans ambiguïté, que l'expansion de notre Univers allait au contraire en s'accélération, les observations de supernovae ont toutefois indiqué une accélération et non une décélération de cette expansion, impliquant une révision en profondeur de notre compréhension du cosmos. [18]. Les observations des Supernovae de type Ia ont révélé que l'expansion de l'Univers s'accélère à des époques tardives. Dans le modèle cosmologique standard, il existe une composante matière-énergie inconnue qui contribue à environ 70 % de la densité critique, et ce fluide est décrit comme une composante lisse à pression négative. Bien que les astronomes connaissent l'effet de ce fluide, il n'y a pas d'idée claire sur

la façon de le détecter, principalement parce que c'est un composant lisse, dilué dans tout l'Univers et le paramètre de l'équation d'état aujourd'hui est très probablement  $\varpi = -1$ . Différents modèles ont été proposés ces dernières années pour expliquer la nature de cette composante : la constante cosmologique  $\Lambda$  qui rend compte de l'énergie quantique du vide, les champs Quintessence, etc... Le paradigme actuel dans le modèle standard est le modèle  $\Lambda$ CDM, qui a seulement quelques paramètres libres, bien contraints avec les observations actuelles. Néanmoins, la nature de la constante cosmologique  $\Lambda$  est encore inexpliquée. [19] Le modèle  $\Lambda$ CDM montre que l'univers se compose actuellement d'un grand secteur sombre, on suppose qu'il se compose de 69% d'énergie noire, 26% de matière noire, 5% de baryons, de rayonnement, et la courbure de l'espace est négligeable, nous ne connaissons donc que 5% des composants de l'univers.

L'objectif de ce mémoire consiste, d'une part, à introduire les notions essentielles de la relativité générale et ses prédictions dans le système solaire, où les champs gravitationnels sont faibles et lentement variables, et d'autre part, de voir comment la présence de l'énergie noire peut expliquer l'expansion accélérée actuelle de notre univers.

# Chapitre 1

## Les bases mathématique de la relativité générale :

### 1.1 Les transformations de Lorentz :

Au début du vingtième siècle deux grandes théories physique expliquent la quasi-totalité des phénomènes naturels avec une grande précision. La mécanique de Galilée-Newton obtient d'immenses succès en dynamique céleste ; alors que l'électrodynamique de Maxwell opère une des plus belle unification de la physique en expliquant avec un même système d'équations les lois de l'électricité, du magnétisme et de l'optique [23]. Les notions newtoniennes d'espace absolu et de temps absolu sont en contradiction avec les lois régissant les phénomènes électromagnétiques, comme démontré à la fin du XIXesiècle, soit par expérimentation (expérience de Michelson & Morley), soit par raisonnement direct à partir des équations de Maxwell (Lorentz, Poincaré, Einstein) [5]. L'expérience de Michelson et Morley contribua à démontrer que la vitesse de la lumière est dans le vide une constante, notée  $c$ , indépendante du mouvement de sa source. Sa vitesse ne s'additionne pas à celle de sa source contrairement à ce qu'exigerait la relativité galiléenne [1]. La conclusion surprenante à laquelle conduisit l'expérience de Michelson et Morley fut, parmi d'autres idées, à la base de la théorie de la relativité restreinte. Cependant, cette idée difficilement acceptable devait être testée à l'aide d'autres procédés expérimentaux, ce que firent de nombreux chercheurs au cours du xx e siècle. Tous arrivèrent à la même conclusion pour des expériences réalisées à l'échelle du laboratoire : la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de sa source [1]. La relativité restreinte est l'aboutissement des travaux exceptionnellement riches de mathématiciens et physiciens de

la seconde moitié du XIX e siècle, et plus particulièrement de Hendrik Lorentz (1853 - 1928) et Henri Poincaré (1854 - 1912). Ils furent relayés par Albert Einstein (1879 - 1955) dont l'histoire de la relativité retint surtout le nom [1]. En relativité restreinte, on postule que l'espace-temps est homogène et isotrope, c'est-à-dire qu'il a les mêmes propriétés en chaque point de l'espace et à n'importe quel instant et que toutes les directions dans l'espace sont physiquement équivalentes [1]. Cette théorie, la relativité restreinte, est basée sur deux postulats extrêmement simples. Einstein a fait deux postulats fondamentaux qui lui permettent de construire toute la relativité restreinte [1].

□ Postulat 1 : Les lois de la physique gardent la même forme par rapport à tout référentiel galiléen ; dans tout référentiel galiléen, l'espace est homogène et isotrope et le temps homogène.

□ Postulat 2 : La vitesse de la lumière  $c = 299792458 m.s^{-1}$  est la même dans tout référentiel galiléen et est la vitesse limite pouvant être atteinte par un corps.

Partant des seuls postulats énoncés précédemment : propriétés de l'espace-temps et principe de relativité, nous allons établir à présent les formules fondamentales de la relativité restreinte formant ce qu'on appelle habituellement la transformation de Lorentz [1]. Pour repérer la position d'un corps, en mécanique classique, on utilise un système de coordonnées spatiales. En relativité, on a besoin d'une horloge marquant le temps adjointe à chaque système de coordonnées, et on appelle système de référence, ou référentiel, un tel système de coordonnées muni d'une horloge [1]. On peut considérer que l'espace et le temps forment ensemble un ensemble plus grand appelé espace-temps, décrit par quatre coordonnées  $(ct, x, y, z)$  et que ce nouvel espace possède, lui, un caractère absolu [5]. En dérivant les équations de transformation compatibles avec les postulats de la théorie restreinte de la relativité, on a supposé que l'espace est homogène, c'est-à-dire que tous les points de l'espace et du temps sont équivalents. Cela signifie que la séparation entre les points de l'espace-temps doit rester invariante sous les translations, ce qui implique que les relations entre les coordonnées des différents repères inertiels doivent être linéaires [11]. Considérons deux référentiels inertiels  $R$  et  $R'$ , dont les axes coïncident au temps  $t = t' = 0$ , et  $R'$  se déplace avec la vitesse  $v$  le long de l'axe des  $x$  par rapport à  $R$ . On suppose que l'axe des  $y$  est perpendiculaire à l'axe  $x$  car sinon les inclinaisons de l'axe  $y$  positif et négatif par rapport à l'axe  $x$  seraient différentes, violant la

symétrie de rotation autour de la direction de la vitesse relative. On suppose également que les axes  $y$  et  $z$  sont orthogonaux entre eux dans l'un ou l'autre des référentiels. Enfin, puisque les longueurs de deux tiges, qui sont au repos dans les référentiels  $R$  et  $R'$  respectivement, et qui sont perpendiculaires à la l'axe des abscisses, peuvent être comparés lorsqu'ils se croisent [11], on doit avoir

$$y' = y \quad ; \quad z' = z$$

pour que les relations entre  $R$  et  $R'$  soient réciproques pour la transformation de l'abscisse, on note que l'origine de  $R'$  se déplace avec la vitesse  $v$  par rapport au repère  $R$  ce qui implique que

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Compte tenu de la possibilité que le temps ne soit pas une variable universelle, on doit avoir

$$t' = \gamma(t - \beta x) \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

pour la transformation de la coordonnée de temps [11]. La transformation de vitesse dite loi d'addition de vitesse est donnée par :

$$V = \frac{V' + v}{1 + V'v/c^2} \tag{1.1}$$

Ce sont les fameuses équations de Lorentz. Pour les obtenir, la racine positive a été choisie, de sorte que  $v = 0$  implique  $x' = x, t' = t$ . On note aussi que pour petit  $\frac{v}{c}$  et  $x \ll ct$ , on obtient les transformations galiléennes [11]

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1.2}$$

## 1.2 Les quatrivecteurs

La caractéristique déterminante qui distingue les quatrivecteurs des autres objets à quatre composants est la façon dont ils se comportent sous une transformation de Lorentz. Supposons qu'il s'agisse d'une fonction scalaire de  $x^0, x^1, x^2$  et  $x^3$  qui est invariante sous les transformations de Lorentz, donc  $\phi' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Considérons le

comportement de la dérivée  $\partial\phi/\partial x^0$ , que nous noterons  $A_0$ . Sous la transformation usuelle de Lorentz du référentiel  $S$  au référentiel  $S'$ , la fonction  $A_0$  deviendra une nouvelle fonction  $A'_0$ , dont la forme peut être déterminée à l'aide de la règle de différenciation partielle. Vous pouvez voir que sous une transformation de Lorentz, la règle de transformation suivante pour les quatre quantités  $A_\mu$  [21]

$$A'_0 = \gamma(V)(A_0 + VA_1) \quad ; \quad A'_1 = \gamma(V)(A_1 + VA_0) \quad ; \quad A'_2 = A_2 \quad ; \quad A'_3 = A_3 \quad (1.3)$$

où les coordonnées  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  sont définies par

$$A_0 = ct \quad ; \quad A_1 = x \quad ; \quad A_2 = y \quad ; \quad A_3 = z \quad (1.4)$$

alors nous pouvons écrire la règle de transformation pour l'entité à quatre composants  $[A_\mu]$  en termes de matrices ou de composants [21]

$$A'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu A_\nu \quad ; \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

où  $(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu$  représente la matrice inverse de la transformation de Lorentz [21]

$$[(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu] \equiv \begin{pmatrix} \gamma(V) & \gamma(v)V & 0 & 0 \\ \gamma(v)V & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Tout vecteurs  $A$  de composantes  $(A^0, A^1, A^2, A^3)$  qui se transforment de la même manière que le quadrivecteur de position  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \quad ; \quad A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \quad ; \quad A'^2 = A^2 \quad ; \quad A'^3 = A^3$$

on l'appelle un 4-vecteur contrevariant. Le produit scalaire de deux quadrivecteurs  $A$  et  $B$  est défini par :

$$A.B = A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 - A^0B^0$$

Sa norme est le produit du vecteur par lui-même :

$$\|A\|^2 = A.A = (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^0)^2$$

Le produit scalaire est invariant relativiste (sous les transformations de lorentz ). On peut également réécrire le produit scalaire comme

$$A.B = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$$

où  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  est appelé le tenseur métrique. Les composantes  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  définies par  $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ ,

$$A_0 = g_{0\mu}A^\mu = -A^0; \quad A_k = g_{k\mu}A^\mu = A^k; \quad k = 1, 2, 3.$$

sont appelées les composantes covariantes du 4-vecteur  $A$ . L'intervalle  $ds^2$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \quad (1.7)$$

s'écrit simplement

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = dx^\mu dx_\mu \quad (1.8)$$

On peut facilement montrer que l'intervalle  $ds^2$  est un invariant relativiste [21]

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = ds^2 \quad (1.9)$$

### 1.3 Le temps propre

Le temps propre d'un objet en mouvement est simplement le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel de l'objet. Dans le référentiel inertiel  $S'$  qui se déplace avec l'objet à un instant donné, la différentielle de temps propre coïncide avec  $dt'$ . Cependant, l'objet peut en général être accéléré de sorte que le référentiel  $S'$  n'est pas le même à tous les instants. Quel que soit le référentiel dans lequel on observe l'objet, la différentielle de temps propre peut toujours être exprimée comme suit [5]

$$d\tau = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{dt^2 - dr^2} = dt \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 - v^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (1.10)$$

On sait que  $-c^2 d\tau^2 = (dx)^2 - c^2 dt^2$ . Si on note  $v = dx/dt$ , alors cette équation donne [20]

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad (1.11)$$

## 1.4 Exemples de quadrivecteurs

**Quadrivitesse** : Considérons un objet se déplaçant à une vitesse instantanée  $v(t)$ . On définit sa quadrivitesse  $V^\mu$  comme [5]

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.12)$$

La différentielle  $d\tau$  est invariante, alors que  $dx^\mu$  se transforme comme les coordonnées ; donc  $u^\mu$  est un vecteur. En fonction de la vitesse  $V$ , les composantes explicites sont [5]

$$u^\mu = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau} \right) = (c\gamma, \gamma v) \quad (1.13)$$

Le carré de la norme  $\|u\|^2$  du 4-vecteur  $u^\mu$  est

$$\|u\|^2 = u \cdot u = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^0)^2 = -c^2 \quad (1.14)$$

**Quadrivitesse** la quadri-accélération de la particule est définie par [22]

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad (1.15)$$

La quadri-accélération est donc orthogonale à la quadri-vitesse [22]

$$a \cdot u = g_{\mu\nu} a^\mu u^\nu \quad (1.16)$$

**Quadrivecteur énergie-impulsion  $p^\mu$**  : A partir de  $m$  et de la 4-vitesse  $u^\mu$  de la particule, on forme le vecteur quadri-impulsion (ou 4-impulsion) suivant [22]

$$p^\mu = m u^\mu = (\gamma m c, \gamma m v) \quad (1.17)$$

Le carré de la norme  $\|p\|^2$  du 4-vecteur  $p^\mu$  est

$$\|p\|^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2 u \cdot u = -m^2 c^2 \quad (1.18)$$

d'où

$$\|p\|^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2 = -c^2 m^2 \quad (1.19)$$

ou bien

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.20)$$

A partir des relations

$$p = \gamma m v \quad ; \quad E = \gamma m c^2 \quad (1.21)$$

nous obtenons la relation suivante  $p = \frac{E}{c^2} v$  entre l'énergie, l'impulsion, et la vitesse d'une particule libre.

## 1.5 Les tenseurs

Un tenseur contrevariant de second rang  $A^{\mu\nu}$  se transformant comme le produit de deux 4-vecteurs contrevariants

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\sigma}} A^{\lambda\sigma} \quad (1.22)$$

Un tenseur covariant de second rang  $A_{\mu\nu}$  se transformant comme le produit de deux 4-vecteurs covariants

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} A_{\lambda\sigma} \quad (1.23)$$

Un tenseur mixte de second rang  $A^{\mu}_{\lambda}$  se transformant comme le produit de deux 4-vecteurs contrevariants et covariants

$$A'^{\mu}_{\lambda} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\lambda'}} A^{\nu}_{\sigma} \quad (1.24)$$

D'une manière générale il existe des tenseurs avec des indices covariants (en bas) et des indices contravariants (en haut) de telle sorte que [32],[31],[34]

$$T'^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \cdots \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \cdots T^{\sigma\cdots}_{\rho\cdots} \quad (1.25)$$

### Algèbre des tenseurs [22]

1. Combinaison linéaire de tenseurs de mêmes variances, par exemple  $T^{\mu\nu}_{\rho} = aR^{\mu\nu}_{\rho} + bS^{\mu\nu}_{\rho}$
2. Transposition d'indices de même variances,  $T^{\mu\nu\rho}_{\sigma} = R^{\nu\mu\rho}_{\sigma}$
3. Multiplication tensorielle de tenseurs de variances quelconques,  $T^{\mu\rho\sigma}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} S^{\rho\sigma}$
4. Contraction d'indices de variances différentes,  $T^{\mu}_{\nu} = R^{\mu\rho}_{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\nu} R^{\mu\rho}_{\rho}$

La contraction d'indice est en fait une multiplication avec le tenseur de Kronecker.

5. Abaissement et élévation d'indices à l'aide du tenseur métrique,  $T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma}T^{\sigma\nu}$  et  $T_\mu^\nu = g^{\nu\rho}T_{\rho\mu}$

## 1.6 La Dérivée covariante

La dérivée par rapport à  $x^\nu$  vecteur covariant  $V_\mu$  s'écrit  $V_{\mu,\nu}$ , elle se transforme par un changement de coordonnées comme [38],[39]

$$V'_{\mu,\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V_\alpha \right) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \quad (1.26)$$

$V_{\mu,\nu}$  n'est donc pas un tenseur. On peut définir un tenseur covariant, noté  $V_{\mu;\nu}$  ou bien  $D_\nu V_\mu$ , à partir de  $V_{\mu,\nu}$  par

$$D_\nu V_\mu = V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta V_\beta \quad (1.27)$$

cette quantité se transforme selon la loi

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V_{\lambda;\sigma} \quad (1.28)$$

C'est une quantité covariante, appelée « dérivée covariante ». En relativité générale la notion de dérivées partielles sera généralisée et remplacée par la notion de dérivée covariante. La dérivée covariante d'un 4-vecteur contrevariant  $A^\mu$  est définie par

$$D_\nu A^\mu = A^{\mu}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\lambda \quad (1.29)$$

où  $A^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$  et  $A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ . De cette définition on peut voir que la dérivée covariante d'un 4-vecteur donne un tenseur second rang

$$A^{\mu'}_{;\lambda} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} A^{\nu}_{;\sigma} \quad (1.30)$$

La dérivée covariante a la propriété suivante

$$(A^\mu B_\nu)_{;\lambda} = A^{\mu}_{;\lambda} B_\nu + A^\mu B_{\nu;\lambda} \quad (1.31)$$

Cette propriété nous permet de définir la dérivée covariante d'un tenseur  $A^{\alpha\beta\dots}_{\dots\lambda\sigma}$  comme la dérivée covariante du produit des 4-vecteurs contrevariants et covariants [38],[39]

$$A^{\alpha\beta\dots}_{\dots\lambda\sigma;\nu} = A^{\alpha\beta\dots}_{\dots\lambda\sigma;\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha A^{\rho\beta\dots}_{\dots\lambda\sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^\beta A^{\alpha\rho\dots}_{\dots\lambda\sigma} + \dots - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho A^{\alpha\beta\dots}_{\dots\rho\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho A^{\alpha\beta\dots}_{\dots\lambda\rho} - \dots \quad (1.32)$$

La dérivée covariante  $DV^\mu$  se comporte comme un vecteur contravariant puisque [24]

$$DV^\mu = (V_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma) dx^\nu \quad (1.33)$$

La dérivée covariante  $DV_\mu$  se comporte comme un vecteur covariante puisque [24]

$$DV_\mu = (V_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V_\sigma) dx^\nu \quad (1.34)$$

La quantité  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ , qu'on appelle symbole de Christoffel, les symboles de Christoffel sont symétriques,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  [24]. On obtient donc la forme suivant du symbole de Christoffel [24]

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (1.35)$$

On obtient donc la relation fondamentale entre le tenseur métrique et le symbole de Christoffel [24]

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right] \quad (1.36)$$

La dérivée covariante s'écrit :

$$A_{\mu\nu;\lambda} = A_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho A_{\mu\rho} \quad (1.37)$$

## 1.7 Tenseur de courdure de Riemann

Nous avons montré que la différence des dérivées covariantes d'un vecteur donnait le rotationnel de ce vecteur. La dérivée seconde covariante de ce vecteur est : [24]

$$\begin{aligned} V_{\mu;\nu;k} &= \frac{\partial V_{\mu;\nu}}{\partial x^k} - \Gamma_{\nu k}^\lambda V_{\mu;\lambda} - \Gamma_{\mu k}^\lambda V_{\lambda;\nu} \\ &= \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\nu \partial x^k} - \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^k} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - V_\lambda \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} - \Gamma_{\nu k}^\lambda \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu k}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V_\sigma - \Gamma_{\mu k}^\lambda \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu k}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma V_\sigma \end{aligned} \quad (1.38)$$

Il apparaît donc une quantité  $R_{\mu\nu k}^\sigma$  combinaison linéaire des dérivées premières et des symboles de Christoffel qui est identiquement nulle dans un espace plat. On l'appelle tenseur de courbure de Riemann-Christoffel [24]

$$R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (1.40)$$

On contracte le tenseur de Riemann avec le tenseur métrique pour obtenir un tenseur complètement covariant [24]

$$R_{\lambda\mu\nu k} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu k}^{\sigma} \quad (1.41)$$

Il s'exprime avec les dérivées secondes du tenseur métrique et les symboles de Christoffel [24]

$$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + g_{\eta\sigma} \left[ \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu k}^{\sigma} - \Gamma_{k\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \right] \quad (1.42)$$

De cette dernière équation on tire des propriétés algébriques pour  $R$  :

[1] Symétrie :  $R_{\lambda\mu\nu k} = R_{\nu k\lambda\mu}$

[2] Un tenseur antisymétrique vérifiant les propriétés :  $R_{\lambda\mu\nu k} = -R_{\mu\lambda\nu k} = -R_{\lambda\mu k\nu} = R_{\mu\lambda k\nu}$

[3] L'antisymétrie :  $R_{\lambda\mu\nu k} + R_{\lambda k\mu\nu} + R_{\lambda\nu k\mu} = 0$ .

On obtient la dérivée covariante du tenseur de Riemann ce qui conduit à l'identité de Bianchi [24]

$$R_{\lambda\mu\nu k;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;k} + R_{\lambda\mu k\eta;\nu} = 0 \quad (1.43)$$

En contractant sur un indice le tenseur de Riemann on obtient un tenseur de Ricci deux symétrique :

$$R_{\mu k} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k} \quad (1.44)$$

## 1.8 Le tenseur d'énergie-impulsion

Ce tenseur décrit la distribution de masse-énergie et de mouvement dans l'espace-temps, il sera d'une grande importance en relativité générale. Ce tenseur noté  $T$  est une forme bilinéaire, il est défini par la propriété :  $T(\bar{u}, \cdot) = (\cdot, \bar{u})$  est la densité d'énergie-impulsion par unité de volume (tridimensionnel), si  $\bar{u}$  est la quadri-vitesse. Ainsi, si  $\hat{n}$  un vecteur arbitraire normé alors  $T(\bar{u}, \hat{n})$  renvoie la "densité d'impulsion" dans la direction  $\hat{n}$  et  $T(\bar{u}, \bar{u})$  est la densité de masse-énergie. Si la matière est modélisée comme un "fluide parfait" ce qui se fait souvent quand on considère la distribution de matière à des échelles astronomiques (nuage de gaz, intérieur des étoiles), de densité  $\rho$  et de pression  $p$  alors on a [23]

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho) u_{\alpha} u_{\beta} + p g_{\alpha\beta} \quad (1.45)$$

On a en effet :

$$T_{\beta}^{\alpha} u^{\beta} = ((\rho + p) u^{\alpha} u_{\beta} + p \delta_{\beta}^{\alpha}) u^{\beta} = -(\rho + p) u^{\alpha} + p u^{\alpha} = -\rho u^{\alpha} \quad (1.46)$$

et aussi  $T_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = \rho$ . Les quantités représentées par ce tenseur se conservent comme la charge en électrodynamique, la forme de l'équation de conservation de  $T$  est la même que dans les cas usuels, elle provient toujours du théorème de Gauss [23]

$$\operatorname{div} T = 0 \quad (1.47)$$

Mais ici la divergence est, soit classique si on est en relativité restreinte où l'espace-temps est plat, soit "covariante" si l'espace-temps est courbé [23]

$$\nabla_{\alpha} T_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad (1.48)$$

Cette loi sera importante en relativité générale [23].

## 1.9 La courbure métrique

Un espace est dit avoir une "métrique géométrique" si on possède un moyen de mesurer l'intervalle  $ds^2$  séparant deux points infiniment voisins. On appellera vecteur un segment de droite orienté séparant deux points infiniment voisins [24]

$$ds^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} = dx^{\mu} \vec{e}_{\mu} \cdot dx^{\nu} \vec{e}_{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.49)$$

Les coefficients  $g_{\mu\nu}$  qui définissent la métrique de l'espace sont les composantes covariantes d'un tenseur de rang deux. En effet,  $ds^2$  étant un invariant d'après [24]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = ds^{2'} \quad (1.50)$$

Un espace est courbe s'il n'existe aucun système de coordonnées pouvant le sous-tendre dans lequel la métrique sera plate. A petite échelle n'importe quelle géométrie apparaît comme plate sauf en certains points pathologiques. On dit que les coordonnées en un point  $P$  de l'espace sont localement plates si en ce point [24]

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.51)$$

et

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (1.52)$$

L'intervalle entre deux évènements de cet espace-temps s'écrit en différentiant l'équation précédente [24]

$$ds^2 = dr^2 - dt^2 \quad (1.53)$$

La propriété fondamentale de la transformation de Lorentz est de vérifier la relation entre éléments de matrice [24]

$$\Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\beta}^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.54)$$

On obtient en particulier pour  $\alpha = \beta = 0$  :

$$\Lambda_0^{\alpha'} \Lambda_0^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'} = -1 \quad (1.55)$$

On rappelle d'autre part la transformation :

$$dx^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} dx^{\mu} \quad (1.56)$$

On dit que l'intervalle est du genre  $\left\{ \begin{array}{l} \text{espace si } ds^2 > 0 \\ \text{lumière si } ds^2 = 0 \\ \text{temps si } ds^2 < 0 \end{array} \right.$

## 1.10 Le principe d'équivalence et l'équation des géodésiques :

Le principe d'équivalence fut en substance découvert par Galilée, sa fameuse expérience du haut de la tour de Pise est une première démonstration de l'égalité qui surprendra des générations de physiciens entre la "masse inerte" et la "masse pesante". Cette expérience a été mainte fois refaite depuis, dans des tubes sous vide et cette égalité confirmée avec une grande précision. C'est ce lien entre inertie et gravitation qui constitue la clef des équations de la relativité générale. Ce qui a guidé Einstein est une expérience de pensée un peu analogue à celle de Galilée. Supposons que nous soyons dans un ascenseur au dernier étage d'un très haut building, si soudain l'ascenseur se met à tomber, pendant la phase de chute libre nous allons flotter comme si nous étions en apesanteur et aucune des expériences physiques que nous pourrions effectuer dans l'ascenseur ne pourra trahir la présence d'un champ gravitationnel.

Donc localement, on a annulé les effets de la pesanteur, localement car si on fait des mesures sur une plus grande échelle le champs gravitationnel réel varie dans l'espace alors que la force d'inertie reste constante. Ainsi localement on a construit un référentiel galiléen. On en vient ainsi à une autre formulation du principe d'équivalence : En tout point de l'espace temps il est possible de choisir un système de coordonnées "localement inertiel" qui soit tel que dans une région suffisamment petite les lois de la nature prennent la même forme que dans un référentiel Galiléen [23].

Une géodesique dans un espace plat le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. En relativité générale, dans un espace courbe, le chemin le plus court entre deux points est une géodésique. D'après le principe d'équivalence il existe un système de coordonnées  $\xi^\alpha$  dans lequel la particule se meut comme une particule libre [24]

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.57)$$

avec

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (1.58)$$

Considérons maintenant un autre système de coordonnées curvilignes lié au précédent par le fait que  $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$  [24]

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.59)$$

On multiplie par  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ , nous obtenons l'équation de géodésique

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.60)$$

On reconnaît le symbole de Christoffel dans  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ .

## 1.11 Les équations d'Einstein

Les équations de champ pour la gravitation vont inévitablement être plus compliquées que celles de l'électromagnétisme. Les équations de Maxwell sont linéaires parce que le champ électromagnétique ne porte pas lui-même de charge, alors que les champs gravitationnels transportent de l'énergie et de la quantité de mouvement et doivent donc contribuer à leur

propre source. Autrement dit, les équations du champ gravitationnel devront être des équations aux dérivées partielles non linéaires, la non linéarité représentant l'effet de la gravitation sur elle-même [4]. Nous pourrions donc nous attendre à ce que les équations de champ de la théorie impliquent le tenseur de Riemann. Le fait que les équations du champ de vide newtonien impliquent  $T_a^a = 0$  suggère que nous pourrions considérer une contraction du tenseur de Riemann. Il n'y a qu'une seule contraction significative, à savoir le tenseur de Ricci. On arrive ainsi aux équations  $R_{ab} = 0$ , la nullité du tenseur de Ricci est équivalente à la nullité du tenseur d'Einstein, de sorte qu'on peut écrire  $R_{ab} = 0$  sous la forme alternative  $G_{ab} = 0$ , les équations  $R_{ab} = 0$  ou  $G_{ab} = 0$  sont les équations qui, selon la proposition d'Einstein, devraient servir d'équations du champ du vide de la relativité générale. Nous indiquons brièvement ci-dessous pourquoi  $G_{ab}$  est la forme la plus naturelle lorsque nous essayons de généraliser l'équation de Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$  afin d'inclure les sources de matière pour le champ gravitationnel [6].

Rappelons tout d'abord que dans un champ statique faible produit par une densité de masse  $\rho$  non relativiste, la composante temps-temps du tenseur métrique est approximativement donnée par [4]

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\Phi) \quad (1.61)$$

où  $\Phi$  est le potentiel newtonien, déterminé par l'équation de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

où  $G$  est la constante de Newton. De plus, la densité d'énergie  $T_{00}$  pour la matière non relativiste est égale à sa densité de masse

$$T_{00} \simeq \rho$$

En combinant ce qui précède, nous avons alors [4]

$$\nabla^2 g_{00} = -2\nabla^2\Phi = -8\pi GT_{00}$$

Il résulte donc du Principe d'Equivalence que les équations qui régissent les champs gravitationnels de force arbitraire doivent prendre la forme [4]

$$G_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}$$

Passons en revue ce que nous savons du côté gauche de l'équation de champ [4]

A) Par définition,  $G_{\mu\nu}$  est un tenseur.

B) Par hypothèse,  $G_{\mu\nu}$  n'est constitué que de termes avec  $N = 2$  dérivées de la métrique ; c'est-à-dire que  $G_{\mu\nu}$  ne contient que des termes qui sont soit linéaires dans les dérivées secondes, soit quadratiques dans les dérivées premières de la métrique.

C) Puisque  $T_{\mu\nu}$  est symétrique,  $G_{\mu\nu}$  l'est aussi.

D) Puisque  $T_{\mu\nu}$  est conservé il en est de même gouvernant  $G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ .

E) Pour un champ stationnaire faible produit par de la matière non relativiste, la composante 00 de  $G_{\mu\nu}$  doit se réduire à  $\nabla^2 g_{00}$ , donc dans cette limite  $G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}$ .

Ces propriétés sont tout ce dont nous aurons besoin pour trouver  $G_{\mu\nu}$ . Le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  donne les équations de champ comme :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

l'équations d'Einstein peut s'écrire d'une autre manière

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\alpha}^{\alpha})$$

Dans un espace vide  $T_{\mu\nu} = 0$  ; ce qui entraîne  $R_{\mu\nu} = 0$ .

# Chapitre 2

## Relativité générale et système solaire

### 2.1 Métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est une solution à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide  $R = 0$ , telle qu'elle s'appliquerait à l'extérieur d'une masse sphérique et non rotative où la densité de masse est présumée suffisamment petite. La métrique de Schwarzschild est l'une des rares solutions exactes de l'équation d'Einstein, et est sans aucun doute la plus importante. Il y a des effets faibles mais mesurables qui se produisent dans l'espace-temps de Schwarzschild, et de telles mesures constituent une partie cruciale de la mesure dans laquelle la RG a été testée quantitativement [7].

Ayant défini l'espace-temps statique, un espace-temps à symétrie sphérique est celui dont la métrique reste invariante sous les rotations. Nous devons donc construire la métrique à partir d'invariants rotationnels, en coordonnées sphériques, les invariants sont  $r^2$ ,  $rdr$ ,  $dr^2$  et  $r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ . Avec ces substitutions [7]

$$ds^2 = -F(r) (dx^0)^2 + [D(r)r^2 + C(r)] dr^2 + C(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.1)$$

Si on redéfinit maintenant le coordonnée radial  $r \rightarrow r\sqrt{C(r)}$ , on peut écrire la métrique de Schwarzschild sous la forme [7]

$$ds^2 = -a(r) dt^2 + b(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.2)$$

Les fonctions  $a(r)$  et  $b(r)$  doivent être déterminées en résolvant les équations de champ.

Comme  $g_{\alpha\beta}$ , est diagonale, le tenseur métrique a les composants non nuls [4]

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

La matrice inverse  $g^{\alpha\beta}$ , est donnée par

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -a^{-1}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Si  $a = b = 1$  on récupère la métrique de Lorentz en coordonnées sphériques. La tâche est de trouver les fonctions  $a$  et  $b$  telles que  $R = 0$ . Pour obtenir le tenseur de Ricci, nous avons besoin des symboles de Christoffel [7]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

Les composantes non nulles sont [4]

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{b'(r)}{2b(r)} ; \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{b(r)} \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{b(r)} ; \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{a'(r)}{2b(r)} \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \cot \theta \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{a'(r)}{2a(r)} \quad (2.10)$$

Le tenseur de Ricci  $R_{\rho\nu}$  est donné par

$$R_{\rho\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} \Gamma_{\mu\rho}^{\beta} \quad (2.11)$$

nous trouvons à partir de calculs directs que  $R_{\rho\nu} = 0$  pour  $\rho \neq \nu$ . Pour les termes diagonaux, on trouve [7]

$$R_{rr} = -\frac{a''}{2a} + \frac{1}{4} \frac{a'}{a} \left( \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \right) + \frac{1}{r} \frac{b'}{b} \quad (2.12)$$

$$R_{tt} = \frac{a''}{2b} - \frac{1}{4} \frac{a'}{b} \left( \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \right) + \frac{1}{r} \frac{a'}{b} \quad (2.13)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{r}{2b} \left( -\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{1}{b} \quad (2.14)$$

Nous cherchons des solutions de l'équation du vide d'Einstein,  $R_{\mu\nu} = 0$

$$R_{rr} = R_{tt} = R_{\theta\theta} = 0 \quad (2.15)$$

Nous avons trois équations différentielles non linéaires couplées du second ordre pour deux fonctions,  $a(r)$  et  $b(r)$ . Le terme  $bR_{tt}/a + R_{rr}$  nous conduit à  $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 0$ . Cette équation est équivalente à  $\frac{d(ab)}{dr} = 0$ , ce qui implique que  $ab = \lambda = \text{constante}$ . Les constantes sont déterminées par l'exigence que lorsque  $r \rightarrow \infty$  nous récupérons la métrique de Lorentz. Une métrique ayant cette propriété est dite asymptotiquement plate. Nous exigeons que  $a(r) \rightarrow 1$  et  $b(r) \rightarrow 1$  comme  $r \rightarrow \infty$ , forçant  $\lambda = 1$ ,  $b(r) = (a(r))^{-1}$ . Pour une perturbation faible et statique sur la métrique de l'espace-temps, nous avons trouvé précédemment

$$g_{00} \approx - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) = -a(r)$$

$M$  est la masse en dehors de laquelle la forme métrique. La quantité  $r_s = 2GM$  est le rayon de Schwarzschild. La métrique de Schwarzschild pour l'espace-temps vide extérieur à une masse sphérique  $M$  est [7]

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.16)$$

## 2.2 Mouvement dans un potentiel central

Considérons une particule de masse  $m$  soumise à une seule force centrale, décrite par le potentiel  $\mathbf{V}(r)$ . Soient  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires dans le plan du mouvement. Dans ces coordonnées polaires, le lagrangien est [12]

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - \mathbf{V}(r) \quad (2.17)$$

Appliquons les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Les équations de mouvement obtenues en faisant varier  $r$  et  $\theta$  sont [12]

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \mathbf{V}'(r) ; \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (2.18)$$

Puisque  $mr^2\dot{\theta}$  ne change pas dans le temps, notons sa valeur constante par

$$L \equiv mr^2\dot{\theta} \quad (2.19)$$

En utilisant  $\dot{\theta} = L/(mr^2)$ , on peut éliminer  $\dot{\theta}$ , le résultat est

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \mathbf{V}'(r) \quad (2.20)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \mathbf{V}(r) \right\} = 0 \quad (2.21)$$

Multiplier par  $\dot{r}$  et intégrer par rapport au temps donne [12]

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \quad (2.22)$$

où  $E$  est une constante d'intégration.  $E$  est simplement l'énergie, ce qui peut être vu en notant que cette équation aurait également pu être obtenue en utilisant simplement  $L \equiv mr^2\dot{\theta}$  pour éliminer  $\dot{\theta}$  dans l'équation d'énergie,  $(m/2) (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$ . La valeur de  $\dot{r}$  à tout point se trouve à partir de l'équation (2.22) par

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} \quad (2.23)$$

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2m}{L^2} V(r) \quad (2.24)$$

L'énergie potentielle gravitationnelle du système est

$$\mathbf{V}(r) = -\frac{\alpha}{r} ; \quad \alpha = GMm \quad (2.25)$$

l'équation (2.24) devient

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r} + \frac{2m\alpha}{L^2} \quad (2.26)$$

En utilisant  $\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} = -\frac{(\frac{dr}{d\theta})}{r^2}$ , et en laissant  $y \equiv 1/r$  pour plus de commodité,  $(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta})^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r} + \frac{2m\alpha}{L^2}$ , devient

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -y^2 + \frac{2\alpha m}{L^2}y + \frac{2mE}{L^2} \quad (2.27)$$

ou

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -\left(y - \frac{m\alpha}{L^2}\right) + \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 \quad (2.28)$$

En définissant  $z \equiv y - \frac{m\alpha}{L^2}$  par commodité, on a

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) = -z^2 + \beta^2 \quad (2.29)$$

ou  $\beta \equiv \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right) \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$ , à ce stade, nous pouvons simplement regarder cette équation et observer que

$$z = \beta \cos(\theta - \theta_0) \quad (2.30)$$

Il est d'usage de sélectionner les axes de manière à ce que  $\theta_0 = 0$ . En rappelant notre définition

$z \equiv \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2}$  et aussi la définition de  $\beta$ , on a

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad ; \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (2.31)$$

## 2.3 Géodésiques dans la géométrie de Schwarzschild

Les équations des géodésiques sont données par

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0 \quad (2.32)$$

où  $p$  est un paramètre décrivant la trajectoire. Le tenseur métrique a les composantes non nulles

$$g_{tt} = -a(r) \quad ; \quad g_{rr} = b(r) \quad ; \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad ; \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (2.33)$$

où les fonctions  $a(r)$  et  $b(r)$  sont données par

$$a(r) = b^{-1}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (2.34)$$

Le champ étant isotrope, on peut considérer que l'orbite de notre particule est confinée au plan équatorial, c'est-à-dire,  $\theta = \pi/2$ . Nous avons besoin des symboles de Christoffel non nuls [4]

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= \frac{b'}{2b} \quad ; \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{a'}{2b} \quad ; \quad \Gamma_{tr}^t = \frac{a'}{2a} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \quad ; \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{b}\end{aligned}$$

Les équations des géodésiques sont données par

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{b'}{2b} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{b} \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{a'}{2b} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2\varphi}{db^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dp} \ln \left( r^2 \frac{d\varphi}{dp} \right) = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2t}{dp^2} + \frac{a'}{a} \frac{dr}{dp} \frac{dt}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dp} \left( \ln \left( a \frac{dt}{dp} \right) \right) = 0 \quad (2.37)$$

Cela donne deux constantes du mouvement. L'un d'eux sera immédiatement absorbé dans la définition de  $p$ , on choisit de normaliser  $p$  pour que la solution de (2.37) soit

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{a(r)} \quad (2.38)$$

Comme  $a(r)$  est proche de l'unité,  $p$  est presque égal au temps-coordonné  $t$ . L'autre constante est obtenue à partir de (2.36), et joue le rôle d'un moment cinétique par unité de masse [4]

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = L = cst. \quad (2.39)$$

L'équation restante du mouvement est

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{b'(r)}{2b(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{L^2}{r^3 b(r)} + \frac{a'(r)}{2b(r)a^2(r)} = 0 \quad (2.40)$$

En multipliant cette équation par  $2b(r)\frac{dr}{dp}$ , on peut l'écrire sous la forme [4]

$$\frac{d}{dp} \left\{ b(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{a(r)} \right\} = 0 \quad (2.41)$$

et notre dernière constante du mouvement est donc

$$b(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{a(r)} = -E \quad (\text{constant}) \quad (2.42)$$

Le temps propre  $\tau$  est donné par

$$d\tau^2 = E dp^2 \quad (2.43)$$

On voit que  $E > 0$  pour les particules de massives et  $E = 0$  pour les photons [4]. Dans le cas des corps massifs nous pouvons choisir  $dp = d\tau$ , donc  $E = 1$  pour les corps massifs. Le paramètre  $p$  peut être éliminé en utilisant  $dp = a dt$  dans les équations (2.39), (2.41), et (2.43); nous avons donc

$$\frac{b}{a^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{a} = -E \quad (2.44)$$

Pour obtenir une équation pour  $(dr/d\varphi)$  on multiplie par  $\left( \frac{dt}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r^4}{a^2 L^2}$ , qui donne

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{L^2} \left( \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{a} + E \right) a = 0 \quad (2.45)$$

L'équation (2.45) peut être écrite comme

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - 2GMu^3 - \frac{1}{L^2} + \frac{E}{L^2} (1 - 2GMu) = 0 \quad (2.46)$$

où  $u = 1/r$ . En dérivant cette équation par rapport à  $\varphi$ , on obtient l'équation de l'orbite

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{\lambda} + 3GMu^2 \quad ; \quad \lambda = \frac{L^2}{GM} \quad (2.47)$$

pour les particules massives et

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3GMu^2 \quad (2.48)$$

pour les photons [4].

## 2.4 La précession du périhélie de Mercure

La précession du périhélie de Mercure est un phénomène orbital provoqué par le lent changement d'orientation du grand axe de l'orbite de Mercure. En conséquence, le périhélie n'a pas de position fixe dans l'espace par rapport au soleil mais il se déplace progressivement en tournant autour du soleil et donc l'orbite ne se ferme pas [8]. Dans le cas des corps massifs,  $E = 1$ , l'équation de l'orbite est donnée par (2.47)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{\lambda} + 3GMu^2 \quad ; \quad \lambda = \frac{L^2}{GM} \quad (2.49)$$

Dans le cas newtonien, le dernier terme en serait absent

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{\lambda} \quad (2.50)$$

La solution est donnée par

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \varphi) \quad (2.51)$$

Traitez le terme relativiste général comme une petite perturbation [9]. En remplaçant l'équation de  $u$  dans le côté droit de l'équation suivant

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3(GM)^3}{L^4} (1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi) \quad (2.52)$$

Le côté droit n'implique pas  $u$ , il s'agit donc d'une équation linéaire, la solution générale est donnée en résolvant le côté gauche pour les termes individuels du côté droit, la solution approximative est alors [9]

$$u \approx \frac{GM}{L^2} \left( 1 + e \cos \varphi + \frac{3(GM)^2}{L^2} e \varphi \sin \varphi \right) \quad (2.53)$$

et donc peut s'écrire

$$u \approx \frac{GM}{L^2} \left( 1 + e \cos \left( 1 - \frac{3(GM)^2}{L^2} \right) \varphi \right)$$

cette équation montre que  $u$  (et donc  $r$ ) est une fonction périodique de  $\varphi$  de période  $2\pi \left( 1 - \frac{3G^2M^2}{L^2} \right)^{-1} > 2\pi$  [9]. Ainsi, si nous prenons  $\varphi = 0$  comme étant, disons, le périhélie,  $r$  ne revient pas à la valeur du périhélie tant que le corps n'a pas parcouru plus de  $2\pi$  en azimut. En effet, l'emplacement du périhélie précède, d'une quantité [9]

$$\Delta\varphi = 2\pi \left( 1 - \frac{3G^2M^2}{L^2} \right)^{-1} - 2\pi \approx 2\pi \left( 1 + \frac{3G^2M^2}{L^2} \right) - 2\pi = \left( \frac{6\pi G^2M^2}{L^2} \right) \quad (2.54)$$

Pour un potentiel Képlérien,  $L$  est lié au demi-grand axe par [9]

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2.55)$$

donc on peut écrire  $\Delta\varphi$  comme

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)} \quad (2.56)$$

Cet effet est la fameuse précession du périhélie. Pour Mercure il faut prendre  $L = 55.3 \times 10^6 km$ , et bien sûr  $GM = 1.475 km$ , donc donne  $\Delta\varphi = 0.1038''$  par tour. Puisque Mercure

fait 415 tours par siècle, la prédiction de la relativité générale est que  $\Delta\varphi = 43.03''$  par siècle. Heureusement il existe des observations précises de Mercure remontant à 1765. Ces données ont été réanalysées par clémences en 1943; il trouve  $\Delta\varphi = 43.11 \pm 0.45''$  par siècle, confirmant essentiellement la valeur antérieure de Newcomb, et en excellent accord avec la relativité générale [4]. La position au périhélie de Mercure avance d'environ 5600 secondes d'arc par siècle; dont la plupart proviennent de la précession des équinoxes et des perturbations causées par l'interaction gravitationnelle avec d'autres planètes du système solaire. La mécanique classique peut expliquer presque toute cette avance de 5600 secondes d'arc sauf 43 secondes d'arc par siècle. Les calculs basés sur la relativité générale peuvent prédire avec précision cette procession supplémentaire et donc presque toutes les 43 secondes d'arc restantes peuvent être expliquées par la relativité générale. Dans ce contexte, il convient de noter que la formule de la relativité générale qui prédit correctement la précession supplémentaire du périhélie de Mercure a été dérivée plus tôt à la fin 19<sup>th</sup> siècle par un maître d'école allemand appelé Gerber en utilisant une approche classique et par conséquent, la relativité générale n'est pas la première ou la seule théorie qui pourrait expliquer cette avance supplémentaire de 43 secondes d'arc [8]. Les valeurs de pression au périhélie observées ont été corrigées des perturbations purement Newtoniques des orbites. La perturbation de l'orbite de Mercure par d'autres planètes contribue à une précession de  $\approx 500$  secondes d'arc par siècle. De plus, la précession équinoxiale des coordonnées célestes utilisées dans les observations planétaires donne une avance apparente de  $\approx 5000$  secondes d'arc par siècle. L'accord entre les valeurs observées et prédites est aussi bon que prévu. Alors que les précessions relativistes du périhélie dans le système solaire sont très petite, la précession peut être assez grand dans le cas de systèmes d'étoiles binaires proche. Pour un système constitué de deux naines blanches ou de deux étoiles à neutrons de masse  $1M$  séparées par une distance de  $10^{11}cm$ , donne une avance du périastre de  $3 \times 10^{-5}$  radian par tour. En un an, un tel système parcourt  $10^3$  tours, et donc la précession du périastre s'élève à plusieurs degrés par an. Le pulsar binaire *PSR1913 + 16*, est un exemple d'un tel système stellaire binaire proche, avec une grande précession périastronique de  $4,2^\circ$  par an [10].

# Chapitre 3

## Modèles cosmologiques avec énergie noire

### 3.1 L'espace temps de Friedmann-Robertson-Walker

#### 3.1.1 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La cosmologie standard, qui essaye de décrire l'Univers que l'on observe, est basée sur un nombre limité des faits observationnels :

1. L'Univers est en expansion ;
2. L'Univers aujourd'hui a une température isotrope de l'ordre de 2,7 K ;
3. La distribution de température dans le ciel présente une petite anisotropie de l'ordre de  $T \sim 10^{-5}$  ;
4. La matière baryonique est composée, en gros, de 75% d'hydrogène et 25% d'hélium ;
5. Il existe des structures locales dans l'Univers sous forme de galaxies, amas de galaxies, amas d'amas de galaxies, régions vides, la grande paroi, etc.

La densité dans le cas d'une agglomération de matière peut atteindre 100 fois la valeur de la densité moyenne de l'Univers. Il y a un autre résultat, assez récent, venant des observations des supernovas type Ia, qui indique que l'Univers se trouve dans une phase d'expansion accélérée [35]. La cosmologie est l'étude de l'univers entier en tant que système physique : quel est son contenu en matière et énergie ? Comment ce contenu est-il organisé ? Quelle est son histoire ? Comment évoluera-t-il à l'avenir ? A l'échelle cosmique, la seule interaction pertinente entre les galaxies est la gravitation ; toutes les galaxies accélèrent sous leur gravité mutuelle. Ainsi, l'étude de la cosmologie dépend de manière cruciale de notre compréhens-

sion de l'interaction gravitationnelle. Par conséquent, le cadre approprié pour la cosmologie est la relativité générale. La solution de l'équation d'Einstein décrit l'univers entier parce qu'elle décrit tout l'espace-temps [36]. Le principe cosmologique dit qu'à un temps cosmique fixe, lorsqu'il est observé à des échelles suffisamment grandes, l'Univers semble être à la fois homogène (pas de lieux préférés) et isotrope (pas de directions préférées) [37]. La symétrie sphérique limite la métrique à la forme

$$ds^2 = -b(r) dt^2 + R(t) \{ \lambda(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} \quad (3.1)$$

avec seulement deux fonctions scalaires  $b(r)$ ,  $\lambda(r)$  et un facteur d'échelle global  $R(t)$ . Parce que le temps de coordonnées est le temps propre des éléments fluides, nous devons avoir  $b(r) = 1$ . Il est également utile de définir un facteur d'échelle sans dimension

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$$

normalisé à l'époque actuelle par  $a(t_0) = 1$ , où  $R_0 = R(t_0)$  est appelé le rayon de l'univers à l'époque actuelle [36]. Nous pouvons redimensionner  $r \rightarrow \sqrt{R_0}r$  de tel sorte que

$$ds^2 = -b(r) dt^2 + a(t) \{ \lambda(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} \quad (3.2)$$

Le paramètre d'échelle  $a(t)$  décrira l'expansion ou la contraction uniforme de la métrique spatiale [37]. Les composantes des symboles de Christoffel  $\Gamma_{jn}^k$ , avec  $k, j, n = r, \theta, \varphi$ , sont données par

$$\Gamma_{km}^r = \begin{pmatrix} \frac{\lambda'(r)}{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{\lambda(r)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r \sin^2 \theta}{\lambda(r)} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{km}^\theta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} ; \quad \Gamma_{km}^\varphi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r \cot \theta \\ 1 & r \cot \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Le tenseur de Ricci  $R_{km}$  [38, 39]

$$R_{km} = \partial_j \Gamma_{km}^j - \partial_m \Gamma_{kj}^j + \Gamma_{nj}^j \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^j \Gamma_{kj}^n$$

est donné par

$$R_{km} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda'}{r\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & C(r) & 0 \\ 0 & 0 & C(r) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où  $C(r) = \left(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{r\lambda'}{2\lambda^2}\right)$ . La courbure scalaire  $R$  pour l'espace 3-dimensionnel est donnée

$$R = -\frac{2}{a^2 r^2} \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\lambda} \right) - 1 \right) \quad (3.6)$$

L'homogénéité implique que la courbure scalaire  ${}^3R$  doit être une constante, d'où

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\lambda} \right) = 1 + Cr^2 \quad (3.7)$$

L'intégration de cette équation nous donne la solution

$$\lambda = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (3.8)$$

Cela conduit à la métrique

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (3.9)$$

Dans le cas où  $k \neq 0$ , nous pouvons redimensionner  $r$  de tel sorte que  $k = +1$  ou  $k = -1$ . Les univers de Friedmann, avec  $k = -1, 0$  et  $1$  sont appelés 'ouvert', 'plat' et 'fermé', respectivement. Cette métrique décrit un univers qui est spatialement homogène et isotrope à chaque instant du temps, elle est appelée la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [38, 40, 39, 41, 42].

## 3.2 Décalage spectral cosmologique vers le rouge et la loi de Hubble

Considérons une onde électromagnétique provenant d'une galaxie située à  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  et voyageant vers un observateur situé à  $(r = 0, \theta_1, \varphi_1)$ . Comme l'univers est en expansion, les distances entre les galaxies augmentent aussi avec l'expansion de l'univers. De ce fait, la longueur d'onde d'un photon émis par une galaxie augmente à mesure que le photon se déplace vers un observateur. Le signal lumineux se déplacera le long d'une géodésique nulle,  $ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)dr^2}{1-kr^2} = 0$ . L'équation du mouvement d'une crête d'onde est alors donnée par [38, 39]

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = -\frac{dt}{a(t)} \quad (3.10)$$

Si une crête de l'onde laisse la galaxie au moment  $t_1$ , et arrive à l'observateur au moment  $t_0$ , et la deuxième crête de l'onde quitte la galaxie au moment  $t_1 + \delta t_1$ , elle arrivera à l'observateur au moment  $t_0 + \delta t_0$ , de sorte que

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.11)$$

d'où la relation

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \quad (3.12)$$

Les intervalles  $\delta t_0$  et  $\delta t_1$  sont donc liés par la relation

$$\delta t_1 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \delta t_0 \quad (3.13)$$

La fréquence  $\nu_0$  observée et la fréquence  $\nu_1$  émise par la source sont liées par la relation

$$\nu_0 = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} \nu_1 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \nu_1 \quad (3.14)$$

Le décalage spectral  $z$  est défini comme étant l'augmentation de la longueur d'onde fractionnaire, il est donné par

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (3.15)$$

Si  $z > 0$  alors  $\lambda_0 > \lambda_1$ , on a un décalage vers le rouge; si  $z < 0$  alors  $\lambda_0 < \lambda_1$  et on a un décalage vers le bleu [38, 39]. L'observation du décalage vers le rouge par Edwin Hubble dans les années 1920 est l'une des grandes avancées de la cosmologie. Hubble a découvert empiriquement que les raies spectrales des galaxies sont décalées vers le rouge et le décalage spectral  $z \simeq H_0 d$  est proportionnel à la distance  $d$  entre nous et la galaxie. Si ce redshift est interprété comme un effet Doppler,  $z = \Delta\lambda/\lambda_0 = v$ , alors les galaxies s'éloignent rapidement de nous selon la loi  $v = H_0 d$ , où  $H_0$  est une constante appelée la constante de Hubble [38, 39, 44]. La valeur de  $H_0$  est (Ade et al. [43]) [40]

$$H_0 = 67.74 \pm 0.46 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Un développement de Taylor du facteur d'échelle  $a(t)$  nous donne

$$a(t) = a(t_0) \left[ 1 - (t_0 - t) H_0 - \frac{1}{2} (t_0 - t)^2 q_0 H_0^2 + \dots \right] \quad (3.16)$$

où  $q(t)$  est le paramètre de décélération

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t) a(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (3.17)$$

et  $q_0 = q(t_0)$  est le paramètre de décélération actuel.

### 3.3 Les équations de Friedmann avec constante cosmologique

#### 3.3.1 Equations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique

L'action de la gravitation est donnée par l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_{\text{E.H}} [g_{\alpha\beta}] = \int R \sqrt{|g|} d^4x \quad (3.18)$$

où  $R$  est la courbure scalaire de Ricci. Les équations d'Euler-Lagrange issues du lagrangien d'Einstein-Hilbert  $L_{\text{E.H}} = R\sqrt{|g|}$  donnent en effet lieu au tenseur d'Einstein  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$  et les équations d'Einstein du vide

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.19)$$

Il est vraiment remarquable qu'un lagrangien aussi simple soit capable d'expliquer pratiquement tous les phénomènes gravitationnels, astrophysiques et cosmologiques connus [33]. Si l'on veut inclure la constante cosmologique  $\Lambda$ , alors l'action est modifiée pour

$$S_{\text{E.H}} [g_{\alpha\beta}] = \int (R - 2\Lambda) \sqrt{|g|} d^4x$$

En effet, le seul effet de l'inclusion de la constante cosmologique  $\Lambda$  est de remplacer  $R \rightarrow R - 2\Lambda$  dans les équations d'Einstein, de sorte que

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} \rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

ce qui donne lieu à l'équation d'Einstein modifiée [33]

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\Lambda g_{\alpha\beta}$$

Afin d'obtenir les équations d'Einstein dans le vide, nous devons décider quel devrait être le lagrangien de la matière. Maintenant, il y a un choix évident pour cela. Si nous avons de la matière, alors en plus des équations d'Einstein, nous voulons également les équations de mouvement pour les champs de matière. Par conséquent, nous devrions ajouter à l'action d'Einstein-Hilbert l'action standard de la matière à couplage minimal

$$S_{\text{mat}} [\varphi, g_{\alpha\beta}] = \int \mathcal{L}_m (\varphi, \partial_\mu \varphi, g_{\alpha\beta}, \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \sqrt{|g|} d^4x \quad (3.20)$$

$\varphi$  représentant tout type de champ de matière (scalaire, vectoriel, tenseur, . . . ), obtenu par covariantisation appropriée de l'action de matière correspondante dans l'espace de Minkowski via le principe de couplage minimal [33]. Par conséquent, l'action gravité-matière complète pour la relativité générale est donnée par l'action d'Einstein-Hilbert

$$S[\varphi, g_{\alpha\beta}] = S_{\text{E.H}}[g_{\alpha\beta}] + \kappa S_{\text{mat}}[\varphi, g_{\alpha\beta}] = \int (R + \kappa \mathcal{L}_m) \sqrt{|g|} d^4x \quad (3.21)$$

où  $\kappa = 8\pi G$  [33]. L'équation de champ résultant de cette action dans l'approche métrique et dont la variation se fait par rapport à la métrique  $g_{\alpha\beta}$ , est donnée par les équations d'Einstein [33]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta} \quad (3.22)$$

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'espace-temps décrite par le tenseur d'Einstein  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$  aux champs de matière décrits par le tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\alpha\beta}$ . Ce sont les équations qui remplacent l'équation de Poisson newtonienne pour le potentiel gravitationnel [33]. Une autre manière courante d'écrire les équations d'Einstein est obtenue en prenant la trace de (3.22), ce qui donne

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = 8\pi Gg^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$$

Comme  $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = 4$  et  $g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = R$  est la courbure scalaire, alors

$$R - 2R = 8\pi GT \quad ; \quad \text{où } T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = T_{\alpha}^{\alpha}$$

et le remplacer dans (3.22) pour obtenir [33].

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi G \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right) \quad (3.23)$$

En particulier pour le vide,  $T_{\alpha\beta} = 0$  et  $T = 0$ , les équations d'Einstein sont  $R_{\alpha\beta} = 0$ , et cette condition équivaut à

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.24)$$

A priori, les équations d'Einstein constituent à 10 équations aux dérivées partielles du second ordre couplées non linéaires (en fait quasi-linéaires, car linéaires en dérivées secondes) pour la métrique  $g_{\alpha\beta}$ , qui apparaît à la fois dans le tenseur d'Einstein et dans le tenseur d'énergie de la matière  $T_{\alpha\beta}$  [33]. Pour résoudre les équations d'Einstein pour un univers homogène

et isotrope, nous avons besoin d'un tenseur d'énergie-impulsion qui soit également homogène et isotrope. Une forme générale du tenseur d'énergie-impulsion qui est compatible avec l'homogénéité et l'isotropie, est donnée [38, 40, 39, 41, 42]

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \quad (3.25)$$

où  $\rho$  est la densité et  $p$  la pression dans le système de repos instantané. Si l'on veut inclure la constante cosmologique  $\Lambda$ , alors l'action est modifiée pour

$$S[\varphi, g_{\alpha\beta}] = \int ((R - 2\Lambda) + \kappa \mathcal{L}_m) \sqrt{|g|} d^4x \quad (3.26)$$

qui donne lieu à l'équation d'Einstein modifiée en présence d'une constante cosmologique [45, 39, 40, 33]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (3.27)$$

Le terme cosmologique ressemble à une contribution supplémentaire à l'énergie et à l'impulsion,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G \left( T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{(\Lambda)} \right) \quad (3.28)$$

nous voyons que son effet est équivalent à la densité d'énergie impulsion  $T_{\alpha\beta}^{(\Lambda)} = -\rho_\Lambda g_{\alpha\beta}$ , où  $\rho_\Lambda$  est une densité d'énergie du vide  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ . Le tenseur d'énergie impulsion d'un fluide idéal

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \quad (3.29)$$

avec une densité  $\rho = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  et la pression  $p = p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  est donné par

$$T_{\alpha\beta} = (\rho_\Lambda + p_\Lambda) u_\alpha u_\beta + p_\Lambda g_{\alpha\beta} = -\rho_\Lambda g_{\alpha\beta} \quad (3.30)$$

Donc une constante cosmologique joue le même rôle qu'un gaz parfait de densité constante  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  et de pression  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ . La métrique de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2) \right\} \quad (3.31)$$

contient les fonctions libres  $a(t)$  et  $\kappa$ , décrivant l'expansion et la courbure de l'espace. Les équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (3.32)$$

donnent des équations pour  $a(t)$  et  $\kappa$ , nous permettant ainsi de voir quel type d'univers permet la relativité générale (à condition que nous ayons une expression pour le tenseur énergie-impulsion) [46]. Les composantes  $g_{\mu\nu}$  de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker sont :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 (1 - \kappa r^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Les composantes  $g^{\mu\nu}$  sont les inverses des composantes  $g_{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \kappa r^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a^2 r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(a^2 r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

Les symboles de Christoffel de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker sont données par

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (3.33)$$

Les composantes non nulles sont données par

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{\kappa r^2}{r(1 - \kappa r^2)} ; \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - \kappa r^2) ; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta ; \quad \Gamma_{0r}^r = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{rr}^t &= \frac{a\dot{a}r}{r(1 - \kappa r^2)} ; \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 ; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{t\theta}^{\theta} &= \frac{\dot{a}}{a} ; \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{t\varphi}^{\varphi} &= \frac{\dot{a}}{a} ; \quad \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \cot \theta \end{aligned}$$

Après avoir trouvé les symboles de Christoffel, les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\gamma\mu}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} \quad (3.34)$$

se trouvent facilement. Les composantes non nulles du tenseur de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  sont

$$R_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(t)(1 - \kappa r^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

où  $B(t) = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k$ . La courbure scalaire de Ricci est donnée par

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right)$$

Le tenseur d'Einstein  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$  est diagonal et il est donné par :

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 3\frac{\dot{a}^2 + \kappa}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(t)(1 - \kappa r^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

où  $C(t) = -(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa)$ . En supposant que la distribution de matière et de rayonnement est celle donnée par le tenseur d'énergie impulsion d'un fluide parfait, et en utilisant l'homogénéité de l'espace, on peut écrire

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pa^2(1 - \kappa r^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Les équations d'Einstein

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$$

se réduisent aux équations

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.37)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi G p \quad (3.38)$$

Ces équations sont appelées les équations de Friedmann. Ces deux équations différentielles déterminent l'évolution temporelle du facteur d'échelle  $a$ . En éliminant  $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$  à partir de la première équation (3.37), nous obtenons l'équation [45, 39, 40, 33]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.39)$$

Avec une équation d'état  $p = p(\rho)$ , ces équations (3.37) – (3.38) suffisent pour déterminer les fonctions inconnues  $a$ ,  $p$  et  $\rho$ . Il existe une condition de compatibilité liant ces deux dernières équations.

### 3.3.2 Densité critique et paramètres de densité

En Dérivant (3.37) et remplaçant (pour  $\ddot{a}$ ) dans (3.38), on obtient une équation qui exprime la conservation de l'énergie

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (3.40)$$

Supposons que le fluide parfait obéit à l'équation d'état barotrope de la forme  $p = w\rho$ , où  $w$  est une constante, la solution de cette équation est

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(w+1)}$$

où  $\rho_0 = \rho(t_0)$  est la densité d'énergie du fluide à l'heure actuelle  $t_0$ . Pour un fluide constitué par la matière,  $w = 0$ , la radiation,  $w = \frac{1}{3}$ , et l'énergie sombre,  $w = -1$ , respectivement. Dans un modèle cosmologique général, l'univers est constitué de la matière du rayonnement et l'énergie sombre, donc la densité totale  $\rho$  de masse est la somme de ces contributions

$$\rho = \rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{r,0} a^{-4} + \rho_{\Lambda,0} \quad (3.41)$$

où  $\rho_{m,0}$ ,  $\rho_{r,0}$  et  $\rho_{\Lambda,0}$  sont les densités d'énergie actuelles de la poussière, du rayonnement et de l'énergie du vide invariante. L'équation (3.37) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho - \rho_{\text{crit.}}) \quad (3.42)$$

où  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  est le paramètre de Hubble et  $\rho_{\text{crit.}} = \frac{3H^2}{8\pi G} - \frac{\Lambda}{8\pi G}$ , d'où il résulte que  $k = +1$  si  $\rho > \rho_{\text{crit.}}$  et  $k = -1$  si  $\rho < \rho_{\text{crit.}}$ . La densité  $\rho_{\text{crit.}}$  est donc une densité critique pour le gaz galactique, déterminant si l'univers est fermé (de volume fini) ou ouvert (de volume infini). La valeur actuelle de la densité critique est [38, 40, 39, 41, 42]

$$\rho_{\text{cr};0} = 1.878h^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} = 8.5 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3} \quad ; \quad h = 0.674$$

En effectuant des mesures précises des fluctuations du fond diffus cosmologique, WMAP est capable de mesurer les paramètres de base du modèle du Big Bang, notamment la densité et la composition de l'univers. WMAP mesure la densité relative de la matière baryonique et non baryonique avec une précision supérieure à quelques pour cent de la densité globale. Il est également capable de déterminer certaines des propriétés de la matière non baryonique :

les interactions de la matière non baryonique avec elle-même, sa masse et ses interactions avec la matière ordinaire affectent toutes les détails du spectre de fluctuation du fond diffus cosmologique. WMAP a déterminé que l'univers est plat, d'où il s'ensuit que la densité d'énergie moyenne dans l'univers est égale à la densité critique (avec une marge d'erreur de 0,5%). Cela équivaut à une masse volumique de  $9,9 \times 10^{-30}$  g/cm<sup>3</sup>, ce qui équivaut à seulement 5.9 protons par mètre cube. De cette densité totale, nous savons que la répartition est :

□ 4.6 % d'atomes. Plus de 95% de la densité d'énergie dans l'univers est sous une forme qui n'a jamais été directement détectée en laboratoire ! La densité réelle des atomes équivaut à environ 1 proton par 4 mètres cubes.

□ 24 % de matière noire froide. La matière noire est susceptible d'être composée d'une ou plusieurs espèces de particules subatomiques qui interagissent très faiblement avec la matière ordinaire. Les physiciens des particules ont de nombreux candidats plausibles pour la matière noire, et de nouvelles expériences sur les accélérateurs de particules apporteront probablement de nouvelles connaissances dans les années à venir.

□ 71.4 % d'énergie noire. Les premières observations d'énergie noire dans l'univers remontent aux années 1980, lorsque les astronomes tentaient de comprendre comment se formaient les amas de galaxies. Leurs tentatives pour expliquer la distribution observée des galaxies ont été améliorées si l'énergie noire était présente, mais les preuves étaient très incertaines. Dans les années 1990, les observations de supernova ont été utilisées pour retracer l'histoire de l'expansion de l'univers (sur des périodes relativement récentes) et la grande surprise a été que l'expansion semblait s'accélérer plutôt que de ralentir ! On craignait que les données de la supernova soient mal interprétées, mais le résultat a tenu jusqu'à ce jour. En 2003, les premiers résultats du WMAP sont sortis indiquant que l'univers était plat et que la matière noire ne représentait que 24% de la densité nécessaire pour produire un univers plat. Si 71.4% de la densité d'énergie dans l'univers est sous forme d'énergie noire, qui a un effet gravitationnel répulsif, c'est juste ce qu'il faut pour expliquer à la fois la planéité de l'univers et l'expansion accélérée observée. Ainsi, l'énergie noire explique de nombreuses observations cosmologiques [47].

Paramètres de densité. Des paramètres utiles, appelés paramètres de densité, pour discuter

des contributions à la densité d'énergie de la matière dans l'Univers, sont

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m \quad ; \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r \quad ; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}} = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

Avec ces définitions, l'éq.(??) devient

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1 \quad (3.43)$$

d'où il résulte que  $k = +1$ , l'espace est fermé, si  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1$ ,  $k = 0$ , l'espace est plat, si  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$  et  $k = -1$ , l'espace est ouvert, si  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1$ . Des estimations récentes des contributions baryonique et matière (matière noire et matière lumineuse) sont  $\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} \simeq 1$ ,  $\Omega_{k,0} \simeq 0$ , À partir des dernières données Planck (Ade et al. 2016) nous savons que [40]

$$\Omega_{m,0} \simeq 0.30 \quad ; \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.69 \quad ; \quad \Omega_{r,0} \simeq 0.0897 \times 10^{-3} \quad ; \quad \Omega_{k,0} = 0.0008$$

notre univers est donc proche d'être spatialement plat  $k = 0$ . On conclut que aujourd'hui, 69% de notre univers est constitué de constante cosmologique, 26% de CDM et 5% de baryons. Si au lieu des densités, nous utilisons les paramètres de densité  $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$  et  $\Omega_k = -\frac{k}{H^2 a^2}$ , l'équation de Friedmann (??) prend la forme suivante

$$\dot{a}^2 = (\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + \Omega_{k,0}) H_0^2 \quad (3.44)$$

avec

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0} \quad ; \quad \Omega_{r,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r,0} \quad ; \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad ; \quad \Omega_{k,0} = -\frac{k}{H_0^2}$$

L'équation de Friedmann (3.44) peut être réécrite sous la forme [40, 39, 41, 42, 45]

$$H_0 t = \int_0^a (\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + \Omega_{k,0})^{-1/2} da \quad (3.45)$$

## 3.4 Modèles cosmologiques de Friedmann-Lemaître

### 3.4.1 Univers dominé par la matière

Un Univers dominé par la matière non relativiste avec une pression négligeable  $p \approx 0$ . Un fluide sans pression est appelé poussière. La densité d'énergie de la matière non relativiste est donnée par l'équation de conservation de l'énergie[49, 48]

$$\dot{\rho}_m + 3\rho_m \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (3.46)$$

Pour les particules non relativistes, on a  $p_m = 0$ . La solution de cette équation est  $\rho_m(t) = \rho_{m,0}a^{-3}$ , où  $\rho_{m,0} = \rho_m(t_0)$  est la densité d'énergie du fluide à l'heure actuelle  $t_0$ . Dans une ère dominée par la matière, nous devons résoudre l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m = \frac{8\pi G}{3}\rho_{m,0}a^{-3} \quad (3.47)$$

où  $k$  prend ses trois valeurs possibles  $k = 0, +1, -1$ , séparément. L'équation de Friedmann (3.39)

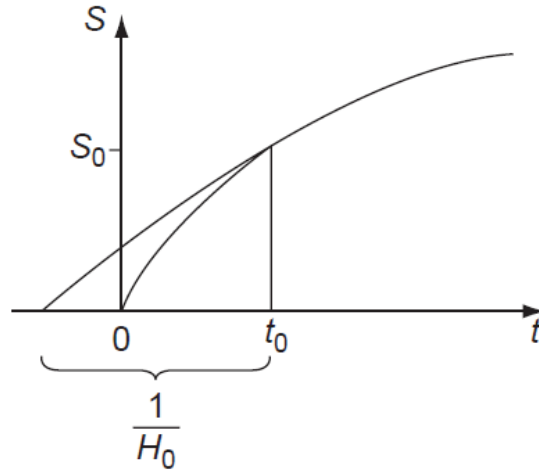
$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a \quad (3.48)$$

montre que  $a$  est toujours négatif, donc  $\dot{a}$  diminue toujours dans le temps – l'Univers s'étendait plus vite dans le passé qu'il ne l'est maintenant. Un univers en expansion signifie que  $a$  était plus petit dans le passé qu'il ne l'est maintenant, et il a dû y avoir un temps où il était de zéro [46]. Ce fut la singularité initiale qui marqua la naissance de notre Univers. En posant  $t = 0$  lorsque  $a(0) = 0$  et en notant, comme précédemment, l'âge actuel de l'Univers par  $t_0$  on voit, en consultant la Fig. 10.11, que puisque la pente de la tangente en  $t = t_0$  est  $\dot{a}(t_0)$  alors l'ordonnée à l'origine sur l'axe des temps est  $H_0^{-1}$ , qui doit être supérieure à l'âge de l'Univers  $t_0$ , on a alors [46]

$$t_0 \leq H_0^{-1}$$

comme limite supérieure. Ceci est cohérent avec des estimations indépendantes de l'âge de la Terre (environ  $4.5 \times 10^9$  ans) et de l'un des plus anciens amas de galaxies brillantes  $t_0 = 13.4 \times 10^9$  ans. D'après (3.47), si  $k = 0, -1$ ,  $\dot{a}^2$  n'est jamais nul, donc l'Univers s'étend indéfiniment. Si  $k = +1$ , cependant, l'expansion s'arrêtera ( $\dot{a} = 0$ ) lorsque  $a^2\rho_m$  atteindra la valeur  $\frac{3}{8\pi G}$  [46]. Ensuite, puisque  $\ddot{a} < 0$ ,  $\dot{a}$  deviendra négatif et l'Univers commencera à se contracter. Ces scénarios alternatifs sont présentés dans la figure (3.1). Le destin de l'Univers

dépend donc de  $k$ , le signe de la courbure spatiale [46].



**Figure 3.1** La variation du facteur d'échelle  $a$  en fonction de temps

Univers plat dominé par la matière : Pour  $k = 0$ , l'équation de Friedmann (3.47) prend la forme suivante

$$a \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0} \quad (3.49)$$

Les variables séparent

$$a^{1/2} da = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0}} dt \quad (3.50)$$

et l'intégration donne

$$a(t) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0}} t \right)^{2/3} = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} \quad (3.51)$$

à nouveau prenant  $t = 0$  lorsque  $a = 0$ , où  $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0}}$  est la constante de Hubble  $H_0$  au moment  $t_0$ . Cette solution est illustrée dans la figure (3.1). L'âge de l'univers  $t_0$  est donné par  $t_0 = \frac{2}{3H_0}$ . La vitesse d'expansion est donné par

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3} \left( \frac{3H_0}{2} \right)^{2/3} t^{-1/3} = \frac{2}{3} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-1/3} ; \quad \dot{a}(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$$

La densité d'énergie du fluide et le paramètre Hubble évoluent selon les lois

$$\rho_m(t) = \frac{4\rho_{m,0}}{9H_0^2} t^{-2} ; \quad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3t}$$

Ainsi  $a \rightarrow 0$  alors que  $\dot{a} \rightarrow +\infty$  et  $\rho_m \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . La vitesse d'expansion de l'univers est infinie lorsque nous approchons du temps initial  $t = 0$ . Ce point initial est appelé le Big Bang [48]. Le paramètre de décélération est positif [40, 50, 51]

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{2}$$

Univers fermé dominé par la matière : Pour un Univers fermé dominé par la matière, on a  $k = +1$ , l'équation de Friedmann (3.47)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m = \Omega_{m,0} H_0^2 a^{-3} \quad (3.52)$$

prend la forme suivante

$$a\dot{a}^2 = \Omega_{m,0} H_0^2 - a \quad (3.53)$$

Changer la variable dépendante de  $a$  en  $\eta$  par la transformation [52]

$$a = \alpha \Omega_{m,0} H_0^2 (1 - \cos(\eta))$$

on a  $\dot{a} = \alpha \Omega_{m,0} H_0^2 \sin(\eta) \dot{\eta}$  et l'équation (3.53) conduit à l'équation suivante

$$(\Omega_{m,0} H_0^2) (1 - \cos(\eta)) \dot{\eta} = \sqrt{\frac{(1 - \alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cos(\eta)\right)}{\alpha^3 (1 + \cos(\eta))}} \quad (3.54)$$

Pour  $\frac{\alpha}{1 - \alpha} = 1$ , or  $\alpha = 1/2$ , cette équation prend la forme suivante

$$(1 - \cos(\eta)) \dot{\eta} = \frac{2}{\Omega_{m,0} H_0^2} \quad (3.55)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$\eta - \sin(\eta) = \frac{2t}{\Omega_{m,0} H_0^2} \quad (3.56)$$

à nouveau prenant  $t = 0$  lorsque  $\eta = 0$ . Les équations

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega_{m,0} H_0^2}{2} (1 - \cos(\eta)) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega_{m,0} H_0^2}{2} (\eta - \sin(\eta)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

déterminent  $a$  en fonction de  $t$ , ces équations sont les équations paramétriques bien connues pour un cycloïde, cette courbe est illustrée dans la figure (3.1). Notre conclusion est que

l'univers fini s'étendra d'une singularité  $a = 0$ ,  $t = 0$  à un rayon maximum  $a_{\max} = \frac{1}{2}\Omega_{m,0}H_0^2$  lorsque  $\eta_{\max} = \pi$ ,  $t_{\max} = \frac{\pi}{2}\Omega_{m,0}H_0^2$ , et se contractera ensuite à l'état singulier à  $\eta_{\text{end}} = 2\pi$ ,  $t_{\text{end}} = \pi\Omega_{m,0}H_0^2$ . L'âge de l'univers est donné par

$$t_0 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \left( \cos^{-1} \left( \frac{2 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) - 2 \frac{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}{\Omega_{m,0}} \right)$$

Le paramètre de Hubble est donné par

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}} \frac{2 \sin \eta}{\alpha (1 - \cos(\eta))^2}$$

Le paramètre de décélération est toujours positif

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{1 + \cos(\eta)}$$

Pour déterminer  $a$  en fonction de  $t$ , on part de l'équation de Friedmann (3.45)

$$H_0 t = \int_0^a (\Omega_{m,0} x^{-1} - (\Omega_{m,0} - 1))^{-1/2} dx = \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \int_0^{\frac{\Omega_{m,0}-1}{\Omega_{m,0}} a} \frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{1-u}} \quad (3.58)$$

Changer la variable dépendante de  $u$  en  $\eta$  par la transformation  $u = (1 - \cos \eta) / 2 = \sin^2 \frac{\eta}{2}$ , conduit à l'équation

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \int_0^{2 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}-1}{\Omega_{m,0}}} a \right)} \frac{1 - \cos(\eta)}{2} d\eta \quad (3.59)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$t = \frac{\Omega_{m,0}}{H_0 (\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \left[ \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}}} a \right) - \frac{1}{2} \sin \left( 2 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}}} a \right) \right) \right] \quad (3.60)$$

En utilisant l'identité  $\sin(2 \sin^{-1}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$ , cette solution peut être réécrite sous forme

$$t = \frac{\Omega_{m,0}}{H_0 (\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \left[ \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}}} a \right) - \sqrt{\frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}}} a \sqrt{1 - \frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}}} a \right] \quad (3.61)$$

Univers ouvert dominé par la matière : Pour un Univers ouvert dominé par la matière, on a  $k = -1$ , l'équation de Friedmann (3.47)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m = \Omega_{m,0} H_0^2 a^{-3} \quad (3.62)$$

prend la forme suivante

$$a\dot{a}^2 = \Omega_{m,0}H_0^2 + a \quad (3.63)$$

Changer la variable dépendante de  $a$  en  $\eta$  par la transformation [52]

$$a = \alpha\Omega_{m,0}H_0^2 (\cosh(\eta) - 1)$$

on a  $\dot{a} = \alpha\Omega_{m,0}H_0^2 \sinh(\eta) \dot{\eta}$  et l'équation (3.53) conduit à l'équation

$$(\Omega_{m,0}H_0^2) (\cosh(\eta) - 1) \dot{\eta} = \sqrt{\frac{(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \cos(\eta) + 1\right)}{\alpha^3 (\cosh(\eta) + 1)}} \quad (3.64)$$

Pour  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1$ , or  $\alpha = 1/2$ , cette équation prend la forme suivante

$$(\cosh(\eta) - 1) \dot{\eta} = \frac{2}{\Omega_{m,0}H_0^2} \quad (3.65)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$\sinh(\eta) - \eta = \frac{2t}{\Omega_{m,0}H_0^2} \quad (3.66)$$

à nouveau prenant  $t = 0$  lorsque  $\eta = 0$ . Les équations

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega_{m,0}H_0^2}{2} (\cosh(\eta) - 1) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega_{m,0}H_0^2}{2} (\sinh(\eta) - \eta) \end{aligned} \quad (3.67)$$

déterminent  $a$  en fonction de  $t$ , cette courbe est illustrée dans la figure (3.1). L'âge de l'univers est donnée par

$$t_0 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m;0}}{1 - \Omega_{m;0}} \left( 2 \frac{\sqrt{1 - \Omega_{m;0}}}{\Omega_{m;0}} - \cosh^{-1} \left( \frac{2 - \Omega_{m;0}}{\Omega_{m;0}} \right) \right)$$

Le paramètre de Hubble est donné par

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\sinh \eta}{\alpha (\cosh(\eta) - 1)^2}$$

Le paramètre de décélération est toujours positif [38, 40, 39, 41, 42]

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{1 + \cosh(\eta)}$$

Pour déterminer  $a$  en fonction de  $t$ , on part de l'équation de Friedmann (3.45)

$$H_0 t = \int_0^a (\Omega_{m,0} x^{-1} + (1 - \Omega_{m,0}))^{-1/2} dx = \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} \int_0^{\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} a} \frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{1+u}} \quad (3.68)$$

Changer la variable dépendante de  $a$  en  $\eta$  par la transformation  $u = (\cosh \eta - 1)/2 = \sinh^2 \frac{\eta}{2}$ , conduit à l'équation

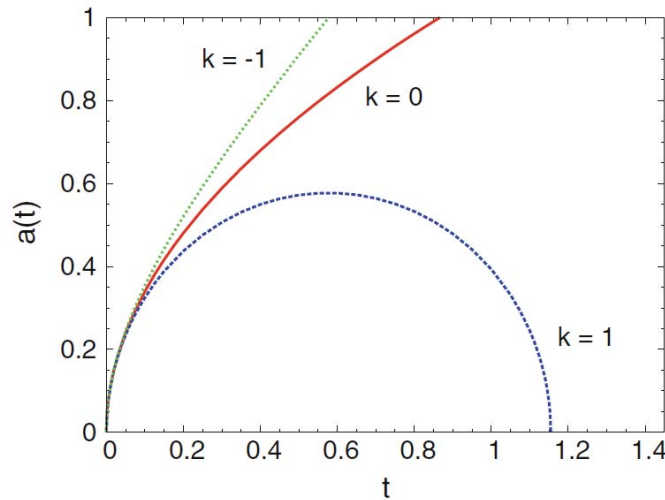
$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} \int_0^{2 \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a \right)} \frac{\cosh(\eta) - 1}{2} d\eta \quad (3.69)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$t = \frac{\Omega_{m,0}}{H_0^{3/2} (1 - \Omega_{m,0})} \left[ \frac{1}{2} \sinh \left( 2 \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a \right) \right) - \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a \right) \right] \quad (3.70)$$

En utilisant l'identité  $\sinh(2 \sinh^{-1}(x)) = 2x\sqrt{1+x^2}$ , cette solution peut être réécrite sous forme

$$t = \frac{\Omega_{m,0}}{H_0 (\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \left[ \sqrt{\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a \sqrt{1 - \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a - \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}}} a \right) \right] \quad (3.71)$$



**Figure 3.2** La variation du facteur d'échelle  $a$  en fonction de temps  $t$  pour les trois types d'univers dominés par le rayonnement.

### 3.4.2 Univers dominé par les rayonnements

Peu après le Big Bang, notre Univers était rempli d'un gaz de particules relativistes l'équation d'état d'un tel gaz relativiste est donnée par  $\rho = p/3$  ([53]). L'univers est constitué de la matière du rayonnement et l'énergie sombre, donc la densité totale  $\rho$  de masse est la somme de ces contributions

$$\rho = \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{r,0}a^{-4} + \rho_{\Lambda,0} \quad (3.72)$$

où  $\rho_{m,0}$ ,  $\rho_{r,0}$  et  $\rho_{\Lambda,0}$  sont les densités d'énergie actuelles de la poussière, du rayonnement et de l'énergie du vide. De cette expression, nous voyons que les contributions relatives de la matière, le rayonnement et le vide à la densité totale varient avec l'évolution de l'univers. On remarque que le rayonnement domine la densité totale lorsque  $a(t)$  est petit. Notre Univers peu après le Big Bang été donc dominé par les rayonnements, la densité des rayonnements varie selon la loi  $\rho = \rho_{r,0}a^{-4}$ . On peut comprendre ce résultat intuitivement de la manière suivante : l'expansion de l'Univers dilue la densité d'un facteur  $a^{-3}$ , mais comme la radiation subit de plus un décalage vers le rouge, il y aura un autre facteur  $a^{-1}$ , qui fait que la variation de la densité est  $\rho = \rho_{r,0}a^{-4}$ . Le densité  $\rho$  devient de plus en plus grande pour des temps petits, ce qui veut dire que les particules présentes dans l'Univers deviennent de plus en plus proches. Mais par le principe d'incertitude de Heisenberg, ceci implique que leurs impulsions deviennent de plus en plus grandes. Pour  $t \rightarrow 0$ , les vitesses de particules seront de l'ordre de la vitesse de la lumière. On dira que ces particules sont ultra-relativistes ([53]).

Univers plat dominé par les rayonnements :  $k = 0$  La solution de l'équation de Friedmann (3.37)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_r = \frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}a^{-4} \quad (3.73)$$

peut être réécrite sous la forme suivante

$$a(t) = (2H_0)^{1/2} t^{1/2}$$

où  $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}}$  est le paramètre de Hubble  $H$  au temps  $t_0$ . La vitesse d'expansion est donné par

$$\dot{a}(t) = (H_0/2)^{1/2} t^{-1/2}$$

Ainsi  $a \rightarrow 0$  alors que  $\dot{a} \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . La vitesse d'expansion de l'univers est infinie lorsque nous approchons du temps initial  $t = 0$ . Ce point initial est appelé le Big Bang. Le

paramètre de Hubble  $H(t)$  est donné par

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H_0 a^{-2} \quad (3.74)$$

Le paramètre de décélération est constant et il est  $> 0$

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H(t)} \right) - 1 = \frac{2H}{H_0} a^2 - 1 = 1 > 0$$

La densité d'énergie des rayonnements évolue selon la lois

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} = \frac{3}{32\pi G} t^{-2} \quad (3.75)$$

Si l'on suppose que pendant cette phase le rayonnement est en équilibre thermique avec la matière présente, alors il possédera un spectre de corps noir et la température  $T$  sera donnée en fonction de la densité d'énergie  $\rho_r$  par la loi de Stefan

$$\rho_r = b_{\text{rad}} T^4 \quad ; \quad b_{\text{rad}} = 7.5 \times 10^{-16} \text{J.K}^{-4}.\text{m}^{-3} \quad (3.76)$$

Ainsi, l'équation (3.74) conduit à la formule suivante pour  $T$

$$T^4 = \left( \frac{3}{32\pi G b_{\text{rad}}} \right)^{1/4} t^{-1/2} = 1.52 \times 10^{10} t^{-1/2} \text{K} \quad (3.77)$$

Une seconde après le début de l'expansion, cette formule indique une température de  $1.52 \times 10^{10} \text{K}$  pour le cosmos ([52]). Lorsque la température de l'Univers est assez basse, les électrons et les protons libres se combinent pour former de l'hydrogène. C'est ce qu'on appelle la recombinaison. Lors de la formation d'un atome d'hydrogène, un photon contenant l'énergie de liaison est émis. Lorsque la plupart des électrons et des protons sont combinés, les atomes neutres interagissent que faiblement avec les photons, l'Univers devient "transparent", et les photons émis se propagent sans plus interagir, c'est le moment du découplage des photons. Ce fond de rayonnement cosmique (CMB) est encore visible aujourd'hui et contient des quantités d'informations sur l'Univers primordial. C'est en fait la "photo" la plus ancienne de l'Univers. L'existence du CMB est une conséquence de la théorie du Big-Bang. Il fut publié par Gamow en 1948, et observé par hasard en 1965 par Penzias et Wilson ([53]).

Le rayonnement CMB La découverte en 1965 par Penzias et Wilson du fond de rayonnement cosmologique diffus à  $3^\circ \text{K}$  a définitivement fait du modèle du Big Bang chaud le cadre général

de la cosmologie moderne. Ces trois dernières décennies ont été marquées par de nombreux progrès tant théoriques qu'observationnels qui n'ont fait que confirmer sa validité, et de préciser petit à petit les détails de ce scénario ([54]). Lorsque la température de l'Univers est assez basse, les électrons et les protons libres se combinent pour former de l'hydrogène. C'est ce qu'on appelle la recombinaison. Lors de la formation d'un atome d'hydrogène, un photon contenant, l'énergie de liaison est émis. Lorsque la plupart des électrons et des protons sont combinés, les atomes neutres interagissant que faiblement avec les photons, l'Univers devient "transparent", et les photons émis se propagent sans plus interagir, c'est le moment du découplage des photons. Ce fond de rayonnement cosmique (CMB) est encore visible aujourd'hui et contient des quantités d'informations sur l'Univers primordial. C'est en fait la "photo" la plus ancienne de l'Univers. L'existence du CMB est une conséquence de la théorie du Big-Bang. Il fut prédit par Gamow en 1948, et observé par hasard en 1965 par Penzias et Wilson ([53]). A l'époque de la recombinaison, l'Univers contient principalement des protons, des électrons, des atomes d'hydrogènes et des photons en équilibre thermique. Les densités thermiques  $n_p$ ,  $n_e$  et  $n_H$  de ces particules sont liées par la formule d'équilibre de Saha

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-I/T}$$

où  $I$  est l'énergie d'ionisation  $I = m_p + m_e - m_H = 13.6 \text{ eV} = 1.58 \cdot 10^5 \text{ K}$ . En utilisant la neutralité du plasma,  $n_e = n_p$ , on trouve

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-I/T}$$

$$n_e = n_p = \sqrt{n_H} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/4} e^{-I/2T}$$

On voit que si  $T \ll I$ , les densités de protons et d'électrons sont exponentiellement supprimées, il ne reste, à basse température, que des atomes d'hydrogènes. On définit arbitrairement le moment de recombinaison lorsque 90% des protons et des électrons ont été combinés en atomes d'hydrogène ([53]). Les atomes d'hydrogènes étant neutres, leurs interactions avec la lumière sont beaucoup plus faible que celle entre les protons initiaux et la lumière. A un moment donné, la lumière se propage dans l'univers sans plus interagir avec la matière baryonique, c'est le découplage des photons. le découplage des photon à lieu à une température de  $T = 3000K$  ([53]). La recombinaison a lieu à une température de  $T \simeq 3600K$ . En

dessous de  $3000K$ , les photons n'interagissent plus avec le plasma, ils découplent. L'âge de l'Univers à cette époque est de l'ordre de  $10^6$  ans, et son décalage vers le rouge de  $z = 1100$  ([53]). Après le Big Bang, notre Univers se refroidit et s'étend. Au cours de cette évolution différentes particules sortent de l'équilibre thermique. En particulier la théorie du Big Bang prédit que vers  $3000K$  les photons découplent et forment le fond de rayonnement cosmique. Ces photons fossils ont été observés par Arno Penzias et Robert Wilson en 1964 (prix Nobel, 1978). De nos jours le CMB constitue une source précieuse d'informations sur notre Univers ([53]). Le rayonnement CMB est actuellement très froid et a une densité d'énergie très faible; cependant, si nous extrapolons à des époques antérieures, à un décalage vers le rouge de plus d'environ 1000, nous constatons que la température et la densité d'énergie du rayonnement étaient suffisamment élevées pour être d'une importance critique dans l'évolution et le comportement de l'univers et de ses constituants. La température actuelle CMB est d'environ  $2.725K$ . Un résultat bien connu de la mécanique statistique et de la thermodynamique est que la densité d'énergie du rayonnement du corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de sa température, donnée par la relation de Stefan-Boltzmann comme [40],[42],[45],[39]

$$\rho_r = b_{\text{rad}} T^4 \quad ; \quad b_{\text{rad}} = 5.6 \times 10^{-16} \text{J/K}^4 \text{m}^3 \quad (3.78)$$

Mais nous savons aussi que la densité d'énergie de rayonnement est proportionnelle à la quatrième puissance inverse du facteur d'échelle, comme dans

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} \quad (3.79)$$

Cette relation et (3.78) nous disent que la température du rayonnement doit être proportionnelle à l'inverse du facteur d'échelle, ou

$$\frac{T}{T_0} = \frac{a_0}{a} \quad (3.80)$$

Le spectre CMB a été mesuré avec précision par le satellite explorateur de fond cosmique (COBE) et est en très bon accord avec la distribution de Planck,

$$dN = \frac{V}{c^3} \frac{8\pi\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (3.81)$$

à environ une partie sur  $10^5$ . Le terme recombinaison fait référence aux électrons se liant aux protons pour former des atomes d'hydrogène neutres, qui sont généralement dans un

état de haute énergie plutôt que dans l'état fondamental. Les atomes d'hydrogène neutres excités émettent alors des photons et passent à l'état fondamental ; les photons peuvent alors interagir avec d'autres atomes d'hydrogène. Le terme découplage se réfère à la production de tels photons qui interagissent par la suite peu avec l'hydrogène neutre et se propagent presque librement, souvent appelé flux libre. Ces photons constituent le CMB que nous observons aujourd'hui. La recombinaison et le découplage survenus peu de temps après sont des événements distincts mais étroitement liés. Le moment du découplage correspond donc à peu près à la température à laquelle l'hydrogène est largement ionisé. Cette température peut être estimée théoriquement et mesurée expérimentalement, et est d'environ  $T_{\text{dec}} = 3000K$  correspondant à une énergie de  $0.26eV$ . À partir de cette température et de la température actuelle du CMB, nous pouvons estimer à partir de(3.80) le facteur d'échelle à être

$$\frac{a_{\text{dec}}}{a_0} = \frac{T_0}{T_{\text{dec}}} \approx \frac{2.725}{3000} \approx \frac{1}{1.1 \times 10^3} \quad (3.82)$$

Le redshift correspondant est

$$z = \frac{a_0}{a_{\text{dec}}} - 1 \approx 1100 \quad (3.83)$$

Les photons présents lors du découplage ont été diffusés librement depuis et sont ceux que nous voyons maintenant dans le CMB ; l'événement de découplage est également appelé à juste titre la dernière diffusion. Ainsi, nous pouvons considérer le CMB comme une photo de la boule de feu du big bang décalée vers le rouge en fréquence d'un facteur d'environ 1000. [40],[42],[45],[39].

Univers fermé et ouvert dominés par les rayonnements :  $k = \pm 1$  L'équation de Friedmann (3.47)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_r = \Omega_{r;0} H_0^2 a^{-4} \quad (3.84)$$

peut être réécrite sous la forme suivante

$$\dot{b}^2 + 4kb = 4\Omega_{r;0} H_0^2 ; \quad b = a^2 \quad (3.85)$$

Changer la variable dépendante de  $b$  en  $\varrho$  par la transformation  $\varrho = b - k\Omega_{r;0} H_0^2$ , nous obtenons

$$\dot{\varrho}^2 + 4k\varrho = 0 \quad (3.86)$$

La différenciation de cette équation conduit à l'équation

$$\ddot{\varrho} + 2k = 0 \quad (3.87)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$\dot{\varrho} = -2kt + A \quad ; \quad \varrho = -kt^2 + At + B \quad (3.88)$$

La substitution des équations (3.88) dans l'équation (3.86) donne maintenant

$$B = -\frac{1}{4k}A^2 = -\frac{k}{4}A^2 \quad ; \quad \varrho = -kt^2 + At - \frac{k}{4}A^2$$

La solution générale  $a(t)$  devient

$$a^2(t) = k\Omega_{r;0}H_0^2 - kt^2 + At - \frac{k}{4}A^2$$

Utilisant les conditions initiales  $a(0) = 0$  et  $\dot{a}(0) > 0$ , on trouve  $A = 2\sqrt{\Omega_{r;0}}H_0$ , d'où la forme suivante pour le facteur d'échelle  $a(t)$

$$a(t) = \sqrt{(2t_{\max} - kt)t} \quad ; \quad t_{\max} = \sqrt{\Omega_{r;0}}H_0$$

La vitesse d'expansion de l'univers est

$$\dot{a}(t) = \frac{t_{\max} - kt}{\sqrt{(2t_{\max} - kt)t}} \quad (3.89)$$

Ainsi le facteur d'échelle  $a(0) = 0$  alors lorsque  $t = 0$ , la vitesse d'expansion de l'univers  $\dot{a}(t) \rightarrow +\infty$  est infinie lorsque  $t \rightarrow 0$ . Ce point initial, où  $t = 0$ , est appelé le Big Bang. Pour un Univers fermé dominé par les rayonnements, on a  $k = +1$ , d'où

$$a(t) = \sqrt{(2t_{\max} - t)t} \quad ; \quad \dot{a}(t) = \frac{t_{\max} - t}{\sqrt{(2t_{\max} - t)t}}$$

l'expansion de l'univers cesse au temps  $t = t_{\max}$ , et commence ensuite à se contracter, l'univers finira ses jours dans un Big Crunch au temps  $t = 2t_{\max}$ . L'instant présent  $t_0$  est défini en posant  $a(t)$  égale à 1 dans l'équation (??),

$$t^2 - 2\sqrt{\Omega_{r;0}}H_0t + 1 = 0 \quad (3.90)$$

L'âge de l'univers  $t_0$  est donné par la condition  $a(t_0) = 1$ , d'où

$$t_0^2 - 2t_{\max}t_0 + 1 = 0 \quad ; \quad t_0 = \sqrt{t_{\max}^2 - 1} + t_{\max} \quad (3.91)$$

Le paramètre de Hubble  $H(t)$  et le paramètre de décélération sont donnés par [45, 39, 40]

$$H(t) = \frac{t_{\max} - t}{(2t_{\max} - t)t} ; \quad q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{t_{\max}^2}{(t_{\max} - t)^2} > 0 \quad (3.92)$$

Ainsi le paramètre de décélération est toujours positif. Pour un Univers ouvert dominé par les rayonnements, on a  $k = -1$ , d'où

$$a(t) = \sqrt{(2t_{\max} + t)t} ; \quad \dot{a}(t) = \frac{t_{\max} + t}{\sqrt{(2t_{\max} + t)t}}$$

L'expansion de l'univers continue sans cesse. L'âge de l'univers  $t_0$  est donné par

$$t_0^2 + 2t_{\max}t_0 - 1 = 0 ; \quad t_0 = \sqrt{t_{\max}^2 + 1} - t_{\max} \quad (3.93)$$

Le paramètre de Hubble est donné par

$$H = \frac{t_{\max} + t}{(2t_{\max} + t)t} \quad (3.94)$$

Le paramètre de décélération est toujours positif

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{t_{\max}^2}{(t_{\max} + t)^2} > 0$$

### 3.4.3 Univers plat dominé par le rayonnement et la matière

Pour un Univers plat, dominé par la matière et les rayonnements,  $k = 0$ , la densité totale de masse  $\rho$  est la somme des contributions de la densité de la matière  $\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$  et de la densité des rayonnements  $\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4}$

$$\rho = \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{r,0}a^{-4} \quad (3.95)$$

où  $\rho_{m,0}$  et  $\rho_{r,0}$  sont les densités d'énergie actuelles de la poussière et du rayonnement. Le facteur d'échelle d'équivalence  $a_{\text{eq}}$ , c'est-à-dire le facteur d'échelle évalué au moment  $t_{\text{eq}}$  où les densités de poussière et de rayonnement étaient égales  $\rho_{m,0}a_{\text{eq}}^{-3} = \rho_{r,0}a_{\text{eq}}^{-4}$ , est donné par

$$a_{\text{eq}} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \quad (3.96)$$

Pour un Univers plat dominé par le rayonnement et la matière,  $k = 0$ , on a  $\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} = 1$ , d'où

$$a_{\text{eq}} = \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \quad (3.97)$$

Au moment d'équivalence  $t_{\text{eq}}$ , la densité d'équivalence  $\rho_{\text{eq}} = \rho(t_{\text{eq}})$  est donnée par :

$$\rho_{\text{eq}} = \rho_{\text{m},0} a_{\text{eq}}^{-3} + \rho_{\text{r},0} a_{\text{eq}}^{-4} = 2\rho_{\text{m},0} a_{\text{eq}}^{-3} = 2\rho_{\text{r},0} a_{\text{eq}}^{-4} \quad (3.98)$$

donc la densité totale peut s'écrire de la manière suivante [40, 39, 55, 44]

$$\rho = \rho_{\text{m},0} a^{-3} + \rho_{\text{r},0} a^{-4} = \frac{1}{2} \rho_{\text{eq}} \left( \frac{a_{\text{eq}}^3}{a^3} + \frac{a_{\text{eq}}^4}{a^4} \right) \quad (3.99)$$

Les équations de Friedmann (3.37) – (3.39), pour un Univers plat dominé par le rayonnement et la matière,  $k = 0$ , prennent la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{4\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} \left( \frac{a_{\text{eq}}^3}{a} + \frac{a_{\text{eq}}^4}{a^2} \right) \\ \ddot{a} &= -\frac{2\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} \left( \frac{a_{\text{eq}}^3}{a^2} + 2\frac{a_{\text{eq}}^4}{a^3} \right) \end{aligned}$$

Changer la variable dépendante de  $t$  en  $\eta$  par la transformation

$$a d\eta = dt \quad ; \quad \eta - \eta_0 = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}$$

conduit à l'équation

$$\dot{a} = \frac{a'}{a} \quad ; \quad \ddot{a} = \frac{a''}{a^2} - \frac{(a')^2}{a^3}$$

l'apostrophe désigne la dérivation par rapport au temps conforme  $\eta$ . Les équations de Friedmann (3.37) – (3.39) peuvent être réécrites sous la forme suivante

$$a'^2 = \frac{4\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} (a_{\text{eq}}^3 a + a_{\text{eq}}^4) \quad (3.100)$$

$$a'' = \frac{2\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} a_{\text{eq}}^3 \quad (3.101)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$a' = \frac{2\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} a_{\text{eq}}^3 \eta + A \quad ; \quad a(\eta) = \frac{\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} a_{\text{eq}}^3 \eta^2 + A\eta + B \quad (3.102)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires. La substitution des équations (3.102) dans l'équation (3.100) donne maintenant

$$A^2 = \frac{4\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} a_{\text{eq}}^3 B + \frac{4\pi G \rho_{\text{eq}}}{3} a_{\text{eq}}^4$$

Utilisant les conditions initiales  $a(0) = 0$  et  $\dot{a}(0) > 0$ , on trouve  $A = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_{\text{eq}}}{3}} a_{\text{eq}}^2$ , d'où la forme suivante pour le facteur d'échelle  $a(\eta)$

$$a(\eta) = \varrho_{\text{eq}}^2 a_{\text{eq}} \left( \eta^2 + \frac{2}{\varrho_{\text{eq}}} \eta \right) ; \quad \varrho_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{\pi G \rho_{\text{eq}}}{3}} a_{\text{eq}}$$

La variable de temps  $t(\eta)$  en fonction du temps conforme  $\eta$  est donnée par la transformation

$$t(\eta) = \int_0^\eta a(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \int_0^\eta \varrho_{\text{eq}}^2 a_{\text{eq}} \left( \bar{\eta}^2 + \frac{2}{\varrho_{\text{eq}}} \bar{\eta} \right) d\bar{\eta}$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme [40]

$$t(\eta) = \varrho_{\text{eq}}^2 a_{\text{eq}} \left( \frac{1}{3} \eta^3 + \frac{1}{\varrho_{\text{eq}}} \eta^2 \right)$$

avec la condition initiale  $t(0) = 0$ . Le moment  $t_{\text{eq}}$  de l'égalité entre la matière et le rayonnement est donné par :

$$t_{\text{eq}} = \varrho_{\text{eq}}^2 a_{\text{eq}} \left( \frac{1}{3} \eta_{\text{eq}}^3 + \frac{1}{\varrho_{\text{eq}}} \eta_{\text{eq}}^2 \right)$$

où  $\eta_{\text{eq}}$  est le temps conforme à l'équivalence qui est solution de cette équation quadratique :

$$\varrho_{\text{eq}}^2 \eta_{\text{eq}}^2 + 2\varrho_{\text{eq}} \eta_{\text{eq}} - 1 = 0$$

Le temps conforme  $\eta_{\text{eq}}$  à l'équivalence est donc donné par [40]

$$\eta_{\text{eq}} = (\sqrt{2} - 1) \varrho_{\text{eq}}^{-1} ; \quad \varrho_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{\pi G \rho_{\text{eq}}}{3}} a_{\text{eq}}$$

Comme

$$\Omega_{\text{m},0} = 1 - \Omega_{\text{r},0} ; \quad a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{\text{r},0}}{1 - \Omega_{\text{r},0}} ; \quad \rho_{\text{eq}} = \frac{3\Omega_{\text{r},0} H_0^2}{4\pi G} \left( \frac{1 - \Omega_{\text{r},0}}{\Omega_{\text{r},0}} \right)^4 \quad (3.103)$$

alors le temps conforme  $\eta_{\text{eq}}$  à l'équivalence est donné par

$$\eta_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{H_0} \frac{2\sqrt{\Omega_{\text{r},0}}}{1 - \Omega_{\text{r},0}} ; \quad \varrho_{\text{eq}} = \frac{H_0}{2} \frac{1 - \Omega_{\text{r},0}}{\sqrt{\Omega_{\text{r},0}}}$$

Le moment  $t_{\text{eq}}$  de l'égalité entre la matière et le rayonnement est donné par :

$$t_{\text{eq}} = \frac{1}{3} a_{\text{eq}} (2 - \sqrt{2}) \varrho_{\text{eq}}^{-1} = \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\Omega_{\text{r},0}^{3/2}}{H_0 (1 - \Omega_{\text{r},0})^2}$$

A partir des dernières données Planck ( Ade et coll. 2016) nous savons que [40]

$$H_0^{-1} \simeq 1.4 \times 10^{10} \text{ years} ; \quad \Omega_{r,0} \simeq 8.97 \times 10^{-5}$$

le moment de l'égalité entre la matière et le rayonnement est donc

$$t_{\text{eq}} \approx 3.32 \times 10^{-6} H_0^{-1} \simeq 46480 \text{ years}$$

Ceci est suffisamment court pour justifier notre ignorance des effets des rayonnements lors du calcul de l'âge de l'univers. Pour déterminer  $a$  en fonction de  $t$ , on part de l'équation de Friedmann (3.45)

$$H_0 t = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{m,0} x^{-1} + \Omega_{r,0} x^{-2}}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{x + a_{\text{eq}}}} \quad (3.104)$$

La substitution  $a_{\text{eq}} y = x$  nous permet de réécrire l'intégrale (??) sous la forme

$$t = \frac{a_{\text{eq}}^{3/2}}{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}}} \int_0^{a/a_{\text{eq}}} \frac{y}{\sqrt{y+1}} dy \quad (3.105)$$

L'intégration conduit à la solution

$$t = \frac{2}{3H_0 \sqrt{1 - \Omega_{r,0}}} \left\{ (a - 2a_{\text{eq}}) \sqrt{a + a_{\text{eq}}} + 2a_{\text{eq}}^{3/2} \right\} \quad (3.106)$$

Pour  $a \ll a_{\text{eq}}$ , l'univers est bien décrit par un modèle plat dominé par le rayonnement

$$t \approx \frac{1}{6H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}}} a^2 ; \quad a(t) \approx \left( 6H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} t \right)^{1/2} ; \quad a \ll a_{\text{eq}} \quad (3.107)$$

Dans la limite  $a \gg a_{\text{eq}}$ , le résultat approximatif pour  $a(t)$  devient [40, 42, 45]

$$t \approx \frac{2}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} a^{3/2} ; \quad a(t) \approx \left( \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} t \right)^{2/3} ; \quad a \gg a_{\text{eq}} \quad (3.108)$$

La densité d'énergie du rayonnement du corps noir est donnée par la relation de Stefan-Boltzmann

$$\rho_r = b_{\text{rad}} T^4 ; \quad b_{\text{rad}} = 5.6 \times 10^{-16} \text{ J/K}^4 \text{ m}^3 \quad (3.109)$$

En outre la densité d'énergie de rayonnement est proportionnelle à  $a^{-4}$

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} \quad (3.110)$$

De cette relation et (3.78) nous obtenons

$$\frac{T}{T_0} = \frac{a_0}{a} \quad (3.111)$$

Le moment du découplage correspond donc à peu près à la température à laquelle l'hydrogène est largement ionisé. Cette température peut être estimée théoriquement et mesurée expérimentalement, et est d'environ  $T_{\text{dec}} = 3000 \text{ K}$ . À partir de cette température et de la température actuelle  $T_0 = 2.725 \text{ K}$  du CMB, nous obtenons

$$\frac{a_{\text{dec}}}{a_0} = \frac{T_0}{T_{\text{dec}}} \approx \frac{2.725}{3000} \approx \frac{1}{1.1 \times 10^3} \quad (3.112)$$

L'équation (??) nous permet de calculer le temps de découplage  $t_{\text{dec}}$ . En utilisant les valeurs des paramètres  $\Omega_{\text{m},0}$ ,  $H_0^{-1}$  et  $a_{\text{eq}}$

$$\Omega_{\text{m},0} \simeq 0.30 \quad ; \quad H_0^{-1} \simeq 1.4 \times 10^{10} \text{ year} \quad ; \quad a_{\text{eq}} \approx 1.27 \times 10^{-4}$$

on trouve pour le temps de découplage

$$t_{\text{dec}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \left\{ (a_{\text{dec}} - 2a_{\text{eq}}) \sqrt{a_{\text{dec}} + a_{\text{eq}}} + 2a_{\text{eq}}^{3/2} \right\} \quad (3.113)$$

$$t_{\text{dec}} \approx \frac{1.6}{H_0\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \times 10^{-5} \approx 4.1 \times 10^5 \quad (3.114)$$

Une analyse plus détaillée donne environ  $3.8 \times 10^5$  ans (Peebles 1968; Smoot 2006). Le temps d'égalité entre la matière et le rayonnement est  $t_{\text{eq}} \approx 0.14230 \times 10^5$  ans. Ainsi, le temps d'égalité est antérieur au temps de découplage  $t_{\text{dec}} \approx 4.1 \times 10^5$ . Le paramètre de Hubble est donné par [45],[40]

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\eta} = \frac{2\gamma a_{\text{eq}}(\gamma\eta + 1)}{[a_{\text{eq}}(\gamma\eta + 1)^2 - a_{\text{eq}}]^2}$$

Le paramètre de décélération est donné par

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{1 + \cos(\eta)}$$

### 3.5 Le modèle Lambda-CDM

Le modèle cosmologique le plus réussi est appelé Lambda-CDM ou  $\Lambda$ CDM, il est composé de la matière et la constante cosmologique  $\Lambda$ . Pour un Univers plat,  $k = 0$ , dominé par

la matière et d'une constante cosmologique  $\Lambda$ , la densité totale de masse  $\rho$  est la somme des contributions de la densité de la matière  $\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$  et de la densité de la constante cosmologique  $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}$

$$\rho = \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{\Lambda,0} \quad (3.115)$$

où  $\rho_{m,0}$  et  $\rho_{\Lambda,0}$  sont les densités d'énergie actuelles de la matière et de la constante cosmologique. Le facteur d'échelle d'équivalence  $a_{\text{eq}}$ , c'est-à-dire le facteur d'échelle évalué au moment  $t_{\text{eq}}$  où les densités de la matière et de la constante cosmologique étaient égales  $\rho_{m,0}a_{\text{eq}}^{-3} = \rho_{\Lambda,0}$ , est donné par

$$a_{\text{eq}} = \left( \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \quad (3.116)$$

Pour un Univers plat,  $k = 0$ , dominé par la matière et d'une constante cosmologique  $\Lambda$ , on a  $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ , d'où

$$a_{\text{eq}} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3} \quad (3.117)$$

Au moment d'équivalence  $t_{\text{eq}}$ , la densité d'équivalence  $\rho_{\text{eq}} = \rho(t_{\text{eq}})$  est donnée par :

$$\rho_{\text{eq}} = \rho_{m,0}a_{\text{eq}}^{-3} + \rho_{\Lambda,0} = 2\rho_{m,0}a_{\text{eq}}^{-3} = 2\rho_{\Lambda,0} \quad (3.118)$$

donc la densité totale peut s'écrire de la manière suivante [40, 39, 55, 44]

$$\rho = \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{\Lambda,0} = \frac{1}{2}\rho_{\text{eq}} \left( \frac{a_{\text{eq}}^3}{a^3} + 1 \right) \quad (3.119)$$

Les équations de Friedmann (3.37) – (3.39), pour un Univers plat dominé par la matière et d'une constante cosmologique  $\Lambda$ , prennent la forme suivante

$$\dot{a}^2 = \frac{4\pi G\rho_{\text{eq}}}{3} \left( \frac{a_{\text{eq}}^3}{a} + a^2 \right) \quad (3.120)$$

$$\ddot{a} = -\frac{2\pi G\rho_{\text{eq}}}{3} \left( \frac{a_{\text{eq}}^3}{a^3} - 2 \right) a \quad (3.121)$$

Changer la variable dépendante de  $a$  en  $\eta = a_{\text{eq}}^{-3/2}a^{3/2}$ , conduit à l'équation

$$\dot{\eta}^2 = \frac{9}{4}a_{\text{eq}}^{-3}a\dot{a}^2 = 3\pi G\rho_{\text{eq}}(1 + \eta^2)$$

Cela s'intègre immédiatement à la forme

$$\frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \sqrt{3\pi G\rho_{\text{eq}}} dt \quad (3.122)$$

L'intégration, avec la condition  $\eta(0) = 0$  donne [40],[56]

$$\eta(t) = \sinh\left(\sqrt{3\pi G\rho_{\text{eq}}}t\right) \quad (3.123)$$

$$a(t) = a_{\text{eq}} \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{3\pi G\rho_{\text{eq}}}t\right) = \left(\frac{\Omega_{\text{m},0}}{1 - \Omega_{\text{m},0}}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0t\right) \quad (3.124)$$

L'âge de l'univers L'équation de Friedmann (3.44) peut être réécrite sous la forme [45, 39, 40]

$$H_0t = \int_0^a (\Omega_{\text{m},0}a^{-1} + \Omega_{\text{r},0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + \Omega_{\text{k},0})^{-1/2} da \quad (3.125)$$

D'après les dernières données de Planck [45, 40], nous savons que :

$$\Omega_{\text{k},0} = 0.0008 \pm 0.0040 \quad ; \quad \Omega_{\text{r},0} = 0.0897 \times 10^{-3}$$

$$\Omega_{\Lambda} = 0.6911 \pm 0.0062 \quad ; \quad \Omega_{\text{m},0} = 0.3089 \pm 0.0062$$

En insérant les valeurs mentionnés précédemment, on obtient [40, 57, 56]

$$t_0 \simeq \frac{0.95}{H_0} \simeq 13.73 \times 10^9 \text{ années}$$

La valeur rapportée par Ade et al. ([43]) est  $13.799 \times 10^9 \pm 0.021$  années. En négligeant le terme de rayonnement  $\Omega_{\text{r},0}a^{-2}$  et le terme de la courbure spatiale  $\Omega_{\text{k},0}$ , l'équation de Friedmann (3.45) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\Omega_{\text{m},0}^{1/2}H_0t = \int_0^a \left(1 + \frac{x^3}{a_{\text{eq}}^3}\right)^{-1/2} x^{1/2} dx \quad (3.126)$$

Changer la variable dépendante de  $a$  en  $\eta = a_{\text{eq}}^{-3/2}x^{3/2}$ , conduit à l'équation

$$t = \frac{2a_{\text{eq}}^{3/2}}{3\Omega_{\text{m},0}^{1/2}H_0} \int_0^{a_{\text{eq}}^{-3/2}a^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} d\eta = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1 - \Omega_{\text{m},0}}} \sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 - \Omega_{\text{m},0}}{\Omega_{\text{m},0}}}a^{3/2}\right) \quad (3.127)$$

L'âge de l'univers  $T = t_0$  est défini en posant  $a(t_0)$  égale à 1, ainsi de l'âge de l'univers est donné par

$$T = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1 - \Omega_{\text{m},0}}} \sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 - \Omega_{\text{m},0}}{\Omega_{\text{m},0}}}\right)$$

En utilisant la relation suivante

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

on peut réécrire l'âge de l'univers sous la forme suivante

$$T = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left( \frac{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right)$$

Pour  $H_0^{-1} \simeq 14.38 \times 10^9$  ans et  $\Omega_{m,0} \simeq 0.31$ , nous obtenons  $T \approx 13.74 \times 10^9$  year. Le facteur d'échelle  $a(t)$  est donné par [40, 50, 51, 56]

$$a(t) = 0.75 \sinh^{2/3}(1.2 t/T)$$

La courbe du facteur d'échelle  $a(t)$  en fonction du temps  $t$  est tracée dans la figure (3.2).

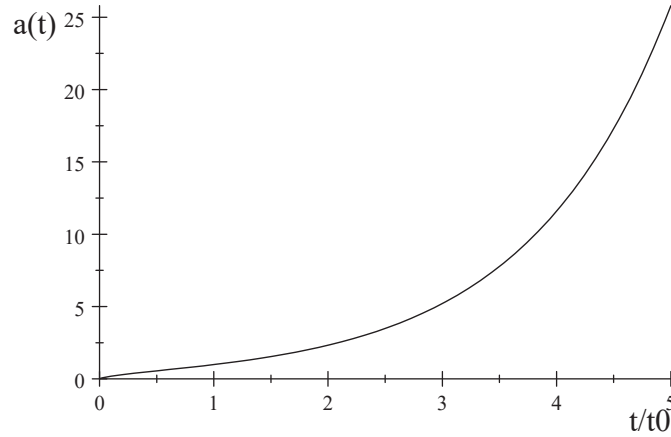


Figure 3.3 Le facteur d'expansion en fonction du temps  $t/T$

Le paramètre de décélération : Le paramètre de Hubble est donné par

$$H(t) = \sqrt{1-\Omega_{m,0}} H_0 \coth \left( \frac{3}{2} \sqrt{1-\Omega_{m,0}} H_0 t \right) \quad (3.128)$$

Le paramètre de décélération est donné par l'expression suivante

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - 3 \tanh^2 \left( \frac{3}{2} \sqrt{1-\Omega_{m,0}} H_0 t \right) \right]$$

La courbe du paramètre de décélération  $q(t)$  est tracée dans la figure (3.3). Le paramètre de décélération est positif lorsque  $t < \frac{2}{3} \frac{\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} H_0}$ , et il est négatif lorsque  $t > \frac{2}{3} \frac{\tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} H_0}$ , donc ce modèle décrit un univers en expansion accélérée pour  $t$  assez grand. En remarque que  $q = 1/2$  pour  $t \rightarrow 0$ , et  $q = -1$  pour  $t \rightarrow \infty$ , donc ce modèle décrit un univers qui commence par expansion décélérée de  $t = 0$  jusqu'au temps  $t_\Lambda$ , le temps de transition entre la phase

de décélération à la phase d'accélération, puis l'univers entre dans une phase d'expansion accélérée sans fin.

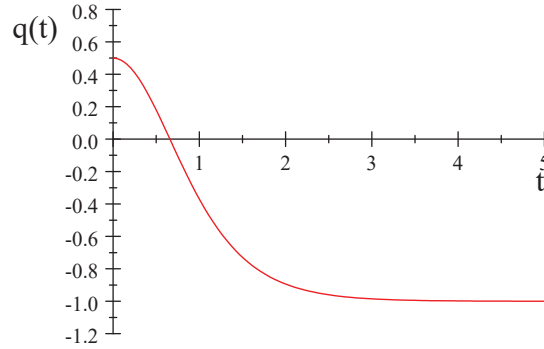


Figure 3.4 La variation du paramètre de décélération  $q$  en fonction de temps

Le temps  $t_\Lambda$  de transition entre la phase de décélération à la phase d'accélération et le décalage vers le rouge correspondant est donné par

$$t_\Lambda = \frac{2 \tanh^{-1}(1/\sqrt{3})}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} = \frac{2 \sinh^{-1}(1/\sqrt{2})}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

où nous avons utilisé la relation

$$\tanh^{-1}(x) = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et le décalage vers le rouge correspondant est donné par

$$z(t_\Lambda) = \frac{a(t_0)}{a(t_\Lambda)} - 1 = \left(2\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{1/3} - 1$$

En insérant la valeur  $\Omega_{m,0} = 0.3$ , et  $H_0^{-1} \approx 14.38\text{Gyr}$ , on trouve  $t_\Lambda \approx 7.5\text{Gyr}$  et  $z(t_1) \approx 0.67$ .

Les observations des supernovae de type Ia ont indiqué que l'univers est actuellement dans un état d'expansion accélérée, ces résultats favorisent une transition de la décélération à l'accélération pour un décalage vers le rouge autour  $z = 0.5$  [58, 56].

Temps de transition de la matière vers la domination de l'énergie noire : Le facteur d'échelle

$a_{m\Lambda} = a(t_{m\Lambda})$  auquel la densité de matière et de la densité de l'énergie sombre étaient égales

$\rho_m(t_{m\Lambda}) = \rho_\Lambda(t_{m\Lambda})$  est donné par

$$a(t_{m\Lambda}) = a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3}$$

Le temps  $t_{m\Lambda}$  de transition de la matière vers la domination de l'énergie noire est donné par l'équation (3.127)

$$t_{m\Lambda} = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a_{m\Lambda}^{3/2} \right) = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \sinh^{-1}(1) \quad (3.129)$$

En insérant la valeur  $\Omega_{\Lambda;0} = 0.7$ , et  $H_0^{-1} \approx 14.38 \text{Gyr}$ , on trouve  $t_{m\Lambda} = 9.8 \times 10^9 \text{yr}$ . En comparant le temps  $t_{\Lambda}$  de transition entre la phase de décélération à la phase d'accélération avec le temps  $t_{m\Lambda}$  de transition de la matière vers la domination de l'énergie noire

$$\frac{t_{\Lambda}}{t_{m\Lambda}} = \frac{\sinh^{-1}(1/\sqrt{2})}{\sinh^{-1}(1)} \simeq 0.75 \quad (3.130)$$

on conclut que le passage à un univers avec une expansion accélérée a eu lieu avant que l'univers devient dominé par l'énergie du vide. Le décalage vers le rouge correspondant est

$$z(t_{m\Lambda}) = \left( \frac{\Omega_{\Lambda;0}}{1-\Omega_{\Lambda;0}} \right)^{1/3} - 1 \simeq 0.33$$

# Conclusion

Le but de ce travail est d'apprendre quelques concepts de base en cosmologie, à utiliser pour expliquer et illustrer l'expansion exponentielle actuelle de l'être en plus d'une meilleure compréhension du modèle cosmologique standard où nous avons étudié les modèles cosmologiques avec le paramètre d'état constant  $\varpi$ . Les résultats obtenus par ce dernier, pour atteindre cet objectif, nous les avons résumés en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, nous avons étudié les bases mathématiques de la relativité générale comme les tenseurs, les quadri-vecteurs et la dérivée covariante. Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'équation des Géodésiques et les équations d'Einstein, nous avons étudié quelques conséquences de la relativité générale d'Einstein. En particulier, nous ne sommes intéressés aux solutions stationnaires des équations d'Einstein et leurs conséquences sur les trajectoires des particules massives et sur la lumière. Dans le troisième chapitre, nous avons étudié divers modèles cosmologiques qui expliquent l'expansion accélérée actuelle de notre univers, nous avons considéré des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état  $w$  constant et des modèles cosmologiques avec un paramètre d'état  $w$  variables, qui peuvent expliquer l'expansion accélérée actuelle de notre univers. On peut resumer les résultats les plus importants pour chaque modèle dans ce qui suit :

Univers ouvert dominé par la matière Le facteur d'échelle et le temps cosmique sont donnés par une équation paramétrique

$$a(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m;0}}{1 - \Omega_{m;0}} (\cosh(\eta) - 1) \quad ; \quad t = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m;0}}{1 - \Omega_{m;0}} (\sinh \eta - \eta)$$

L'âge de l'univers est donnée par

$$t_0 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m;0}}{1 - \Omega_{m;0}} \left( 2 \frac{\sqrt{1 - \Omega_{m;0}}}{\Omega_{m;0}} - \cosh^{-1} \left( \frac{2 - \Omega_{m;0}}{\Omega_{m;0}} \right) \right)$$

Le paramètre de décélération est toujours positif

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = \frac{1}{1 + \cosh(\eta)}$$

Univers plat dominé par le rayonnement et la matière Le facteur d'échelle est donnée par

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}} \left\{ (a - 2a_{\text{eq}}) \sqrt{a + a_{\text{eq}}} + 2a_{\text{eq}}^{3/2} \right\} \quad (3.131)$$

Le temps de découplage  $t_{\text{dec}}$  entre la matière et le rayonnement est donnée par

$$t_{\text{dec}} = \frac{2}{3} \frac{(a_{\text{dec}} - 2a_{\text{eq}}) \sqrt{a_{\text{dec}} + a_{\text{eq}}} + 2a_{\text{eq}}^{3/2}}{H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}} \approx 4.1 \times 10^5 \text{ year}$$

Le temps  $t_{\text{eq}}$  de l'égalité entre la matière et le rayonnement est donnée par

$$t_{\text{eq}} = \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{H_0\Omega_{m,0}^2} \approx 14230 \text{ years}$$

Modèle cosmologique  $\Lambda$ CDM Le facteur d'échelle  $a(t)$  est donné par

$$a(t) = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \right)$$

L'âge de l'univers  $t_0$  est donné par

$$t_0 = \frac{2}{sH_0} \frac{\tanh^{-1}(\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}})}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \approx 13.497 \times 10^9 \text{ year} \quad (3.132)$$

Le temps de transition entre la phase de décélération et la phase d'accélération est donné par

$$t_{\Lambda} = \frac{2 \tanh^{-1}(1/\sqrt{3})}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \approx 7.545 \times 10^9 \text{ year}$$

Le décalage cosmique correspondant est  $z \simeq 0.67$ . Le Temps de transition de la matière vers la domination de l'énergie noire est donné par

$$t_{m\Lambda} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0} \sinh^{-1}(1) = 9.8 \times 10^9 \text{ year} \quad (3.133)$$

Le décalage vers le rouge correspondant est  $z \simeq 0.33$ .

# Bibliographie

- [1] J.Haldik, M.Chrysos, Introduction à la relativité restreinte, Cours et exercices corrigés, Edition Dunod, (2001).
- [2] M. Dalarsson, N. Dalarsson, Tensors, Relativity, and Cosmology, Academic Press is an imprint of Elsevier, (2015).
- [3] Daniel Fleisce, A student's Guide to Vectors and Tensors, Cambridge University Press, (2011).
- [4] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Edition John Wiley and Sons, (1972).
- [5] D.Sénéchal, Relativité générale, Université de Sherbrooke, (2019).
- [6] Ray D'Inverno, James Vickers. Introducing Einstein's Relativity, Oxford University Press, (2022).
- [7] James H. Luscombe. Core Principles of Special and General Relativity, Taylor & Francis Group, (2019).
- [8] Taha Sochi. General Relativity Simplified Assessed, (2020).
- [9] Ka Chun Yu, Relativity and cosmology for undergraduates, <http://casa.colorado.edu/~kachun/3740/>, (2001).
- [10] Hans C. Ohanian Remo Ruffini. Gravitation and Spactime, Cambridge University Press, (2013).
- [11] S.H.Patil Elements of Modern physics, Springer, (2021).
- [12] D.Morin. Introductory Classical Mechanics, with Problems and Solutions, Cambridge University Press, (2008).
- [13] J.B.Hartle. Gravity, An Introduction to Einstien's General Relativity, Pearson, (2002).
- [14] F.Faure, Introduction à la Relativité Restreinte, Université Joseph Fourier, (2002).

- [15] D.McMahon, P.M.Alsing, *Relativity Demystified*, The McGraw-Hill Companies (2006).
- [16] David Langlois, *Relativité générale : Des fondements géométriques aux applications astrophysiques*, Vuibert, (2013).
- [17] Aurélien Barrau. Julien Grain. *Relativité générale.Cours et exercices corrigés*, Dunod, (2011).
- [18] N.P.Delabrouille, C.Yèche, *Changement de rythme dans l'expansion de l'Univers*, <http://dx.doi.org/10.1051/refdp/201651012>
- [19] L.A.Garcíaa,L.Castañedab, J.M.Tejeirob, *A novel early dark energy model*, *New Astronomy* 84, <https://doi.org/10.1016/j.newast.2020.101503>, (2021).
- [20] A.Romano, M.Furnani, *The Physical and Mathematical Foundations of The Theory of Relativity*, Springer, (2019).
- [21] R.J.A. Lambourne, *Relativity Gravitation and Cosmology*, Cambridge University Press, (2010).
- [22] L. Blanchet, *Introduction à la Relativité Générale, Cours*, (2009).
- [23] G. Poggiaspalla, *Tests classiques de la relativité générale*, (1999).
- [24] Edgard Elbaz, *Relativité Générale et Gravitation*. Editions Ellipses, (1986).
- [25] V.Ferrari, L.Gualtieri, P.Pani, *General relativity and Its applications*, Taylor & Francis Group CRC Press, (2021).
- [26] Poul Olesen, *General Relativity and Cosmology, Lecture notes*, (2008).
- [27] D.M.Kenguru, *General relativity and its applications*, (2013).
- [28] Cosimo Bambi. *Introduction à la relativité générale*.
- [29] Neil Ashby. *Relativité dans le système de positionnement global*, doi : 10.12942/lrr-2003-1. Epub 2003 Jan 28.
- [30] S. Durand. *Le GPS et la relativité*. <http://espace.cegepmontpetit.ca/relativite-animee/documents/GPS.pdf>, (2010).
- [31] A. Barrau, J. Grain, *relativité générale, Cours et exercices corrigés*, Edition Dunod, (2011).

- [32] R. Taillet, Notes du cours d'introduction à la relativité générale, Université de Savoie, (2013).
- [33] M.Blau, Lecture Notes on General Relativity, Bern University, Switzerland, ( 2018)
- [34] F. Bernardeau, Cosmologie, (2007).
- [35] J. Fabris Introduction à la cosmologie, Universidade Federal do Esp´irito Santo, (2004).
- [36] Ta-Pei Cheng, A College Course on Relativity and Cosmology, Oxford University, (2015).
- [37] Guidry, Modern General Relativity Black Holes Gravitational Waves and Cosmology, Cambridge University Press, (2019).
- [38] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Edition John Wiley and Sons, (1972).
- [39] M. P . Hobson, G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby, General Relativity : An Introduction For Physicists, Cambridge University Press, (2006).
- [40] O.Piattella, Lecture Notes in Cosmology, Springer, (2018).
- [41] R.J.A. Lambourne, Relativity Gravitation and Cosmology, Cambridge University Press, (2010).
- [42] N.Vittorio, Cosmology, Taylor & Francis Group CRC Press, (2018).
- [43] Ade, P.A.R., et al. : Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.* 594, A13 (2016).
- [44] B.Ryden, Introduction to Cosmology, Cambridge University Press, (2016).
- [45] R.J.Adler, General Relativity and Cosmology A First Encounter, Springer, (2021).
- [46] L.Ryder, Introduction to general relativity, Cambridge University Press, (2009).
- [47] [https ://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni\\_matter.html](https://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html)
- [48] A. Liddle, An Introduction To Modern Cosmology, (2003).
- [49] D.Wands, Friedmann Lemaître Robertson Walker Cosmology, Springer Handbook of Spacetime, Abhay Ashtekar, Vesselin Petkov (Eds.), (2014).
- [50] P.T.Chrusciel, Elements of General Relativity, Springer, (2019).
- [51] J.Steinar, Smooth manifolds and fibre bundles with applications to theoretical physics, Taylor & Francis Group, (2017).

- 
- [52] D.F.Lawden, Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology, Dover Publications, (2003).
- [53] Claude Becker, Yannis Burnier, Relativité et cosmologie II, Laboratoire de Physique des Particules et de Cosmologie, (2008).
- [54] Francis Bernardeau, Cosmologie, la formation des grandes structures de l'Univers, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9804230v1>, (1998).
- [55] T. L. Chow, Gravity, Black Holes, and the Very Early Universe : An Introduction to General Relativity and Cosmology, Springer, (2008).
- [56] O.Gron, A New standard model of the univers, Oslo College, Department of engineering, Cort Adelers gt. 30, N-0254 Oslo, Norway, (2004).
- [57] Nicola Vittorio, Cosmology, Taylor & Francis Group CRC Press, (2018).
- [58] O. Gron, S. Hervik, Einstein's General Theory of Relativity, (2007).