

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955 SKIKDA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE



Thèse

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Science

Spécialité : **Automatique**

Par

Mr Metallaoui Smain

Thème

Contribution à la Stabilité et la Commande Temps-Réel Sous des Contraintes de Communication.

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

Président :	Mr Zennir Youcef	Professeur, U. Skikda
Rapporteur :	Mr Ahmida Zahir	Professeur, U. Skikda
Examineur :	Mr Lashab Mohamed	Professeur, U. Oum El Bouaghi
Examineur :	Mr Khettab Khatir	MCA, U. M'sila
Examineur :	Mr Bensafia Yassine	MCA, U. Bouira
Examineur :	Mr Guechi El hadi	MCA, U. Skikda

Remerciements

Ainsi qu'il est d'usage de remercier Dieu tout puissant et miséricordieux qui par sa grâce, nous avons pu aboutir à l'accomplissement de ce mémoire.

Avant tout, je me fait un grand plaisir d'exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur le Pr. Z. Ahmida à l'Université de Skikda, qui ma permis d'entreprendre cette recherche.

J'exprime ma reconnaissance au Pr. Y. Zennir à l'Université de Skikda pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je remercie énormément le Pr. Med. Lashab à l'Université d'Oum El Bouaghi, le Dr. Y. Bensafia à l'Université de Bouira, le Dr. El H. guechi à l'Université de Skikda ainsi que le Dr. K. Khettab à l'Université de M'sila pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu manifester à l'égard de ce travail, en acceptant d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Finalement, j'adresse tout ma gratitude encore à Dieu et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail même par un mot d'encouragement ou un conseil utile parmi mes collègues enseignants à l'Université de Skikda.

Sommaire

Sommaire	I
Résumé	V
1 Introduction	
1.1 Introduction Générale	1
2 Les Systèmes de Commande en réseaux : Etat de l'art	
2.1 Aperçu sur les Réseaux de Communication Industriels	11
2.1 Introduction	11
2.1.2 Architecture et exigences des réseaux de contrôle industriels	13
2.1.3 Modèle de Communication : le modèle d'interconnexion des systèmes ouverts (OSI)	17
a. La couche physique	19
b. La couche liaison de données	20
c. La couche réseau	21
d. La couche transport	23
e. La couche session	24
f. La couche présentation	26
g. La couche application	27
2.1.4 Réseaux industriels et bus de terrain	29
a. Réseaux industriels	29
b. Bus de terrain	30
1. Modèle à couches	31
2. Modèle OSI	32
2.2 Les Systèmes de Commande en réseaux (SCR)	34
2.2.1 Introduction	34
2.2.2 Bref historique sur les SCR	36
2.2.3 Catégorisation des SCR	37
2.2.4 Éléments constitutifs d'un SCR	40
2.2.5 Défis et Problématiques des SCR	42
a. Stabilité du système de commande et compensation des retards	43
b. Ordonnancement et allocation de la bande passante	44
c. Sécurité du réseau	45
3 Stabilisation des SCR sous les contraintes de communication - cas des systèmes continus	
3.1 Introduction	48
3.2 Les systèmes linéaires retardés	50
3.3 Généralités et notion de stabilité	50
a. Etude de la stabilité par la deuxième méthode de Lyapunov	51
b. Stabilité asymptotique	52

Sommaire

c. Fonction de Lyapunov	52
d. Les conditions de la stabilité de Lyapunov des systèmes à retard	53
3.3.1 Théorème sur la stabilité des SCRs	55
3.3.2 Stabilité indépendante du retard	55
3.3.3 La stabilité dépendante du retard	58
3.3.4 Stabilité dépendante du retard et synthèse d'une commande par retour d'état	65
3.4 Simulations et analyse de la stabilité du pendule inversé et du système dynamique d'un satellite à temps retardé.	70
3.4.1 Introduction	70
3.4.2 Etude du pendule sans l'influence de retard causé par un réseau	71
3.4.3 Modèle mathématique	72
3.4.4 Réponse libre du pendule à état initial donné	76
3.4.5 Conception d'un correcteur régulateur par la méthode du placement de pôles	77
3.4.6 Application	80
3.4.7 Analyse de la stabilité du pendule inversé commandé à travers un réseau	84
3.4.8 Conditions de la stabilité asymptotique de retard	87
3.4.9 Réponse du pendule inversé à la condition initiale	88
3.5 Etude d'un système dynamique de satellite à retards	89
3.5.1 Application de la formule d'Ackermann	90
3.5.2 Analyse de la stabilité du système commandé à travers un réseau	93
3.5.3 Conditions de la stabilité asymptotique dépendante du retard	95
3.5.4 Conclusion	96
4 Stabilisation des SCR sous les contraintes de communication - cas des systèmes discret	
4.1 Introduction	97
4.1.1 Processus de Markov	97
a. Systèmes de communication	98
b. Systèmes de contrôle en réseau	98
c. Systèmes de contrôle en réseau avec retard Markovien	99
4.1.2 Chaîne de MARKOV	101
4.1.3 Modélisation du retard de communication par les chaînes de Markov	102
4.1.4 Conclusion	122
4.2 Stabilisation d'un système SCR discret par retour d'état	122
4.2 Introduction	122
4.2.1 Formulation du problème de contrôle	126
4.2.2 Résultats principaux	130
4.2.3 Simulation et résultats expérimentaux	143

Sommaire

4.3 Conclusion	149
5 Conclusion Générale	150
Annexe1	152
A. Les inégalités matricielles linéaires, LMI	152
B. Complément de Schur	153
Bibliographie	154

Table des figures

Table des figures

2.1 Architecture a trois niveaux d'un réseau de contrôle industriel	14
2.2 Modèle d'interconnexion OSI-ISO	18
2.3 Structure générale d'une trame de données	20
2.4 Transport des données de bout en bou	23
2.5 Position de la couche de session dans le modelé OSI	25
2.6 Protocole d'acheminement des données	26
2.7 Protocole de transfert hypertexte	28
2.8 Exemple d'un réseau TCP / IP, Industriel Ethernet Profinet et Profibus	30
2.9 Modèle OSI à 3 couches	30
2.10 Couche de mémé niveau	31
2.11 Pile de protocole	32
2.12 Classification des bus de terrain selon la fonction	33
2.2.1 Structure-type d'un système de commande en réseau (Réseau partagé)	35
2.2.2 Transfert de données dans une structure hiérarchique	38
2.2.3 Transfert de données dans une structure directe	38
2.2.4 Illustration d'une commande par téléportation à distance d'un robot mobile	41
2.2.5 Structure d'un SCR intégrant les délais induits par le réseau	44
2.2.6 Types d'attaques malveillantes sur un SCR	46
3.3.1 Schéma d'un SCR avec retard de transmission dans le sens capteur contrôleur	50
3.3.2 Système de contrôle en boucle fermée avec retards	54
3.4.1 Structure linéaire du pendule inversé	71
3.4.2 Structure du pendule inversé	73
3.4.3 Réponse du pendule en boucle ouverte	77
3.4.4 La commande par un gain de rétroaction du pendule inversé	82

Table des figures

3.4.5 Réponse et stabilisation du pendule inversé par commande de retour d'état et positionnement des pôles	83
3.4.6 Réponse du système commandé par un gain de rétroaction	83
3.4.7 Influence du réseau sur notre système	84
3.4.8 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.001s$	85
3.4.9 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.04s$	85
3.4.10 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.05s$	86
3.4.11 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.06s$	86
3.5.1 Structure linéaire d'un angle lacet du satellite	90
3.5.2 Réponse du système commandé par un gain de rétroaction	92
3.5.3 Réponse de la commande $u(t)$	92
3.5.4 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.1s$	93
3.5.5 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.45s$	94
3.5.6 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0$	94
3.5.7 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.65s$	95
4.1.1 Schéma d'un SCR avec délai de retard	202
4.2.1 Configuration schématique d'un SCR	123
4.2.2 Structure du système de contrôle en réseau	127
4.2.3 Système de chariot du pendule inversé	144
4.2.4 Retard Markovien S-C	146
4.2.5 Retard Markovien τ_k^{ca}	146
4.2.6 Réponses de la position et de la vitesse du chariot $y(t)$	147
4.2.7 Réponses de la position et la vitesse angulaire du pendule $\theta(t)$	147
4.2.8 Stabilisation du signal de commande d'une entrée de moteur à courant-continu	148

Notations et Acronymes

T :	Transposée de la matrice
\mathbb{R}^n :	Espace euclidien de dimension n
$\mathbb{E}[\cdot]$:	Attente mathématique
K, P, Q_v, Z_v :	Matrices
$\mathcal{U}_d, \mathcal{V}_d, \mathcal{W}_d, \Psi_{1,2,3,4}$:	Matrices
$[T^{ca}], [T^{ca}]$:	Matrices de probabilité de transition
\mathcal{M}, \mathcal{N} :	Ensemble temporel des chaînes de Markov
τ_k^{sc} :	Temporisation du capteur au contrôleur
τ_k^{ca} :	Temporisation du contrôleur à l'actionneur
$I, 0$:	Matrice d'identité et la matrice zéro.
K :	Gain de control
λ_{min}, ρ_{ij} :	Valeurs propres minimales
\bar{u} :	Signal de commande
$\tau(t)$:	Retard variable induit
$diag\{\dots\}$	Matrice diagonal
LMI :	Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Enequality)
IMOM :	Entrée multiple sortie multiple
TCP :	Transfer Control Protocol
UDP :	User Datagram Protocol
CAN :	Control Area Network
LAN :	Local Area Network
WAN :	Wide Area Network

Résumé

Résumé – Les problèmes de modélisation des systèmes dynamiques dans de nombreux processus, tel-que les systèmes de contrôle en réseau (NCS) sont très complexes. Les modèles peuvent contenir des sous-systèmes avec différents paramètres, qui apparaissent lors de l'utilisation d'un réseau (NCS), tels que le délai de retard, la bande passante limitée, etc. Contrôler ces types de système à délai de retard multiple est un défi en raison de la complexité mathématique. Ce mémoire considère la conception d'un contrôleur de stabilisation à retour d'état pour un système de commande en réseau avec des retards de communication aléatoires. Les retards du capteur au contrôleur (S-C) et du contrôleur à l'actionneur sont modélisés par deux chaînes de Markov indépendantes. Les retards aléatoires induits par le réseau sont modélisés sous la forme d'une chaîne de Markov et le système en boucle fermée qui en résulte est transformé en un système linéaire à sauts de Markov (MJLS). L'accent est mis sur la conception d'un contrôleur intégrant pleinement l'effet du délai C-A. Le système en boucle fermée qui en résulte est décrit par un nouveau système linéaire à sauts markovien à temps discret avec modèle de retards de Markov. Ensuite, en appliquant un type de fonction stochastique de Lyapunov, des conditions suffisantes sur la stabilisabilité stochastique et l'existence d'un contrôleur sont dérivées en termes d'inégalités matricielle linéaire couplées (LMI). L'efficacité de la méthode proposée est illustrée par des exemples. Les résultats de la simulation démontrent l'applicabilité et l'efficacité des résultats théoriques obtenus.

Mots-clés : **Systèmes linéaires de sauts markoviens à temps discrets ; Chaînes de Markov; systèmes de contrôle en réseau; retards aléatoires; inégalité matricielle linéaire; stabilité stochastique.**

Abstract

Abstract – The modeling issues in dynamical systems in many processes, networked control systems (NCS) are very complex. The models may contain subsystems with different parameters, which arise when using a network in an NCS such as time delay, limited bandwidth, and so on. Controlling these types of multiple time delay system is challenging, due to mathematical complexity. This paper considers the design of a stabilizing state-feedback controller for a networked control system with random communication delays. Sensor-to-controller (S-C) and controller-to-actuator delays are modeled by two independent Markov chains. Network-induced random delays are modeled as a Markov chain, and the resulting closed-loop system is transformed into a Markovian jump linear system (MJLS). The focus is on the design of a controller that fully incorporates the effect of the C-A delay. The resulting closed-loop system is described by a new discrete-time Markovian jump linear system with Markov delays model. Then, by applying a type of stochastic Lyapunov functional, sufficient conditions on the stochastic stabilizability and the existence of controller are derived in terms of coupled linear matrix inequalities (LMIs). The efficacy of the proposed method is shown through illustrative examples. Simulation results demonstrate the applicability and the effectiveness of the obtained theoretical results.

Keywords: Discrete-time Markovian jump linear systems; Markov chains; networked control systems; random delays; linear matrix inequality; stochastic stability.

Chapitre 1

Introduction Générale

Introduction

Aujourd'hui tout organisme industriel, administratif ou de service, possède un ou plusieurs systèmes de communication informatique qui véhiculent les échanges d'information entre les différents départements et qui sont nécessaires à ses opérations et son fonctionnement. Ces systèmes sont organisés en réseaux qu'on peut définir comme des ensembles d'équipement et de supports de transmission dont la fonction principale est le transfert de l'information. Indéniablement, la deuxième moitié du vingtième siècle a vu un développement fulgurant des technologies de l'information et de la communication (**TIC**) où le volume et la diversité des informations se font de plus en plus grands. Dans les années soixante-dix et quatre-vingt, la transmission des informations se faisait à travers les réseaux téléphoniques pour la transmission de la voix, ou des réseaux spécialisés pour la transmission des données sur des distances courtes ou longues. C'est ainsi qu'il est apparu le réseau **ARPANET**, créé aux USA à la fin des années soixante par l'agence américaine **DARPA** (*Defense Advanced Research Projects Agency*). *L'ARPANET était un projet dont l'objectif principale et de développer les échanges d'information entre les universités américaines pour expérimenter les techniques de transmission des données numériques sous forme de paquets d'information et aussi, conduire des recherches sur les protocoles de communication. Plus tard, au milieu des années 1970 d'autres types de réseaux voient le jour ce qui pose la nécessité de faciliter l'interconnexion inter-réseaux. Ce développement poussa vers l'émergence de deux protocoles de communication : le TCP (transport control protocol) et l'IP (Internet protocol). Ces deux protocoles devinrent la base du réseau INTERNET actuel qui fut développé à partir de l'ARPANET dès le début des années 1980.*

A présent les progrès des techniques des réseaux de communication et leur intégration dans les systèmes de contrôle des plateformes industrielles constituent une source de thématiques de recherche en plein expansion. Cet essor est étroitement lié au développement spectaculaire des techniques de commande par automates programmables industriels (**APIs**) reliés aux capteurs et actionneurs et qui constituent les systèmes industriels complexes qu'on trouve dans les domaines de la production manufacturière ou dans des procédés chimiques ou mécaniques ou énergétiques (contrôle/commande distribué de réseaux de transport ou

d'énergie par exemple), ou encore les applications embarquées dans les domaines de l'automobile, l'aéronautique, ou les transports ferroviaires et maritimes [1], [2], [3], [4]. On peut également citer le développement des systèmes télé opérés tels que les drones ou toutes sortes de véhicules et de robots commandés à distance en échangeant l'information à travers des canaux de communication [5-8].

Donc, Les systèmes de commande par réseaux (**SCRs**) sont des systèmes distribués communiquant à travers des réseaux (filaire ou sans fil) par la transmission et l'échange des données et de l'information, ils se composent de capteurs pour la mesure des paramètres physiques, de contrôleur(s) pour estimer et calculer les décisions et générer les signaux de commande et d'actionneur(s) pour transformer ces commandes en actions directement appliquées sur les processus commandés. L'introduction des réseaux de communication dans la chaîne de commande a contribué à l'apparition du concept de commande à distance d'un système à travers un canal de communication, dont la boucle de rétroaction est fermée sur le réseau. Finalement, avec l'avènement de l'internet, les réseaux industriels se décloisonnent progressivement pour offrir de nouvelles fonctionnalités (télé-opération, e-maintenance, ...) en plus des fonctions de commande et de régulation des procédés industriels. Cette ouverture des réseaux peut rendre difficile la maîtrise du flux que véhicule le réseau industriel qui doit garantir une qualité de service (**Qds**) requise par l'application ainsi qu'une qualité de la commande (**Qdc** : Qualité de contrôle). Ces contraintes sont inhérentes à la nature physique du canal de communication traduite par ce qu'on appelle retard (délais) de communication ou latence du réseau d'une part, et au limites des protocoles de communication qui peuvent induire des pertes quantitatives dans le flux des paquets de données transmises d'autre part. Ces problèmes doivent être pris en compte dans la conception de la boucle de régulation du système asservis pour garantir la qualité et la sécurité du système de commande car les effets du retard et des pertes des données peuvent être néfastes sur les performances du système mesurées en termes de stabilité, de qualité et de sécurité [9] [10] [11] [12].

Durant les trois dernières décennies, une quantité formidable de recherches et de productions scientifiques ont été consacrées à l'étude, la modélisation et la conception des lois de commande pour les systèmes de commande en réseaux (**SCRs**) en tenant compte des contraintes essentielles introduites par le réseau et dégradant la performance du système de commande, à savoir le retard de communication et les pertes de paquets d'information. Il est donc nécessaire d'évaluer les caractéristiques du réseau pour qu'elles soient prises en compte

dont la conception des lois de commande de façon à garantir le fonctionnement du système de commande selon des critères de stabilité et de performance [13] [14] [15].

Par rapport aux boucles de commande traditionnelles (systèmes de commande point à point), l'insertion d'un réseau dans une boucle de commande peut provoquer une série de problèmes qui détérioreront les performances du système, voire déstabiliser le système. Les différents niveaux d'imperfections induites par le réseau comprennent les éléments suivants :

1. Retards ou délais induits par le réseau ;
2. Pertes des paquets et désordre ;
3. Intervalles de transmission/d'échantillonnage de paquets variant dans le temps ;
4. Concurrence de plusieurs nœuds (éléments) demandant l'accès au réseau ;
5. Quantification des données ;
6. Asynchronisme d'horloge entre les nœuds locaux et distants;
7. Sécurité et sûreté du réseau.

Les études sur ces problématiques et imperfections induites par le réseau ont été menées à la fois par les communautés des automaticiens et des spécialistes en communication, et diverses méthodologies ont été proposées sur la façon de faire face à ces imperfections. Alors que l'élimination de ces imperfections ne peut être séparée des améliorations nécessaires à l'infrastructure de communication elle-même (équipement hardware et logiciel ou software), le développement des théories et des approches de commande appropriées dans le cas des **SCRs** pour surmonter ces imperfections est d'une grande nécessité et d'une grande importance.

En fait, les imperfections induites par le réseau énumérées ci-dessus peuvent être considérées comme des contraintes dans l'analyse et la conception des **SCRs**. Dans ce qui suit, nous focaliserons nos sur l'analyse du retard/délais induit par le réseau et nous présenterons ses impacts sur la performance du système NCS ainsi que les principales méthodologies proposées dans la littérature pour les traiter.

Retards induits par le réseau, modélisation et stratégies de commande

Dans un SCR, on distingue essentiellement trois types de délais ou retards [16] :

1. Le délai de communication entre le capteur et le contrôleur.
2. Les délais de traitement et de calcul au niveau du contrôleur ou du capteur.
3. Le délai de communication entre le contrôleur et l'actionneur.

Les délais de communication *capteur-contrôleur* et *contrôleur-actionneur* comportent les temps nécessaires aux traitements numériques des signaux capteurs et contrôleurs ajoutés aux délais d'accès au réseau, c'est-à-dire les temps passés en file d'attente par les paquets de données numériques avant d'être envoyés, en plus du délai de transmission via le support réseau. Le délai de traitement et de calcul au niveau du contrôleur dépend de la performance et des capacités de calcul et de mémoire disponibles au niveau de l'unité numérique de commande. Généralement, dans les NCS, le retard de traitement/calcul est négligeable par rapport aux retards induits par le réseau à cause de la distance de transmission et de la congestion du trafic sur le réseau. En effet, la distance de transmission est un facteur évident, des distances plus longues entraînent un temps de transmission plus long. Le délai ou retard total dans la boucle de commande tient compte du temps à partir duquel le signal de mesure émanant du capteur est échantillonné jusqu'à l'instant de l'application du signal de commande à l'actionneur. Ce délai total ou délai de commande est la somme des trois délais indiqués ci-dessus.

Comme le montrent les études sur les systèmes retardés traditionnels, le retard entraînera de mauvaises performances ou même une instabilité du système en boucle fermée. Différentes manières de modéliser les retards dans les SCRs conduisent à différents résultats d'analyse et de synthèse qui peuvent être nécessaires dans différents scénarios dans la pratique. Par conséquent, au stade de la conception des architectures, des stratégies de contrôle et des protocoles réseau des SCRs, les retards induits par le réseau doivent être concrètement caractérisés en fonction des scénarios pratiques. Les types des retards peuvent être résumés et classés en trois paires :

1. Retard constant ou variable dans le temps ;
2. Retards déterministes versus stochastiques ;
3. Retard inférieur à un intervalle d'échantillonnage et autre.

De telles classifications peuvent être justifiées dans diverses applications utilisant différents réseaux. Par exemple, l'hypothèse d'un retard constant est acceptée dans le cas du protocole **CAN** (Controller Area Network). Cependant, de plus en plus de protocoles réseau (comme **Ethernet**) ne peuvent pas assurer un délai constant. Ainsi, les études faisant face à des retards variant dans le temps sont plus fréquentes, même si l'intervalle d'échantillonnage dans les usines ou procédés contrôlés est plus grand que le retard introduit par le réseau. Pour les retards variant dans le temps, deux situations peuvent être trouvées dans la littérature, à

savoir, la variation non déterministe ou la variation stochastique. Dans le premier cas, la variation des retards n'est pas connue a priori mais la valeur instantanée est disponible en temps réel pour les concepteurs du système SCR. Dans le cas d'un retard stochastique, la variation des retards est associée à certaines descriptions statistiques qui tiennent compte de la corrélation entre le retard courant et les précédents. En ce qui concerne la troisième classification, il convient de noter que bien que les techniques de réseau soient de plus en plus perfectionnées et mises à jour, il est encore très probable que certaines SCRs présentent des retards supérieurs à la période d'échantillonnage, ce qui est le cas pour les SCRs construits via des réseaux soumis à des charges élevées. Les références [13],[16], [17] et [18], donnent plus de détails sur les sources des retards induits par le réseau et leurs différentes classifications.

Différents retards, associés à des installations spécifiques, nécessitent différentes stratégies de commande pour les SCRs. Dans leur étude exhaustive sur les SCRs couvrant la période allant de 1990 jusqu'à 2003, Tipsuwan et Chow [19] mettent en revue les méthodologies typiques utilisées dans la littérature pendant cette période et résument les différentes techniques de modélisation, d'analyse et de synthèse des SCRs. Les auteurs commencent par citer l'approche du modèle d'état augmenté pour le cas discret déterministe, ensuite ils présentent la méthodologie de mise en file d'attente (queuing methodology) pour la compensation du retard basée sur un prédicteur probabiliste avant de présenter la technique de commande optimale stochastique (Linear Quadratic Gaussian, LQG) pour la prise en charge des délais à variations aléatoires ainsi que l'approche de la commande robuste pour la conception d'un contrôleur dans le domaine fréquentiel. L'article de Hespanha et *al.* [14] complète ce travail, en se concentrant sur les avancées réalisées entre 2002 à 2007, telles que la modélisation des SCRs par des équations différentielles retardées (Delayed Differential Equations - DDE), l'approche des systèmes commutés, les problèmes de l'estimation de l'état et de l'analyse et la synthèse des contrôleurs en tenant compte des limitations imposées par l'utilisation des canaux de communication pour connecter les éléments des SCRs. Ces limitations sont considérées en termes de débit de paquets, d'échantillonnage, de retard du réseau et de pertes de paquets. Les auteurs ont considéré une variété d'hypothèses sur les effets du réseau, ce qui a conduit à des modèles en boucle fermée représentés, entre autres, par des systèmes linéaires à sauts markoviens (Markovian Jump Linear Systems - MJLS). De nombreux résultats présentés reposent sur des techniques basées sur la théorie de stabilité de Lyapunov et fournissent des conditions suffisantes pour la stabilité du SCR. Ces conditions se

traduisent généralement par des inégalités matricielles linéaires (LMIs). Le papier publié en 2013 par Zhang et al [20] considère les avancées rapportées depuis 2007 et propose une classification des méthodologies de traitement des retards variables dans le temps en deux cadres : **(a)** le cadre de la robustesse, et **(b)** le cadre de l'adaptation. Dans la première approche, l'objectif de la conception du système de commande est de garantir sa robustesse en présence des délais variables dans le temps en modélisant le SCR comme un système retardé traditionnel. Dans ce modèle, le retard peut être considéré soit dans le chemin direct (capteur-contrôleur) ou dans le chemin de retour (contrôleur-actionneur) uniquement, soit regrouper les retards dans les deux chemins en un seul retard comme fréquemment pratiqué dans la littérature. Les étapes suivantes de l'approche consistent à construire une fonctionnelle de Lyapunov–Krasovskii appropriée et à en déduire les conditions de stabilité du système de commande, ses performances ainsi que la conception du contrôleur en fonction du problème à traiter. Les lignes de base de cette approche sont les mêmes que celles utilisées pour les systèmes retardés conventionnels. Il est important de noter que dans ces traitements, les informations d'horodatage existant dans les paquets d'information ne sont pas utilisées et la conception du contrôleur est indépendante des valeurs des délais. Un exemple type de cette méthode est illustré par la référence [21]. Toujours dans le cadre de la robustesse, d'autres méthodes appliquent les modèles flous où les règles floues sont basées sur la taille des retards induits par le réseau. Par conséquent, si la conception prend en compte tous les retards possibles dans un ensemble fini donné, alors les contrôleurs conçus seront robustes aux variations des retards quelle que soit la taille du retard réel. Un travail typique à cet égard peut être consulté dans [22].

En réalité, trois attributs essentiels cités ci-dessous peuvent être identifiés pour distinguer les SCRs par rapport aux systèmes retardés conventionnels.

1. Le premier attribut distinctif des SCRs est que les données sur les réseaux sont transmises en paquets, qui sont capables de contenir une grande quantité de données telle qu'une séquence de contrôle commande.
2. Une autre différence entre les SCRs et les systèmes à retard conventionnels est la technique d'horodatage des premiers. Cette technique permet au site récepteur de savoir exactement la durée que prend la transmission d'un paquet à travers le réseau.

3. La troisième caractéristique concerne la dotation du site de l'actionneur par une intelligence de calcul et de sélection raisonnable, c'est-à-dire que l'actionneur peut être supposé intelligent.

Tenir compte de ces différences peut déboucher sur un autre cadre pour le traitement des retards variables dans le temps : c'est le cadre de l'adaptation aux retards qui sera abordé dans ce qui suit avec deux approches distinctes.

La première approche consiste à modéliser un NCS comme un système commuté stochastique avec un gain du contrôleur dépendant de la taille des retards. Dans cette approche, l'actionneur intelligent reçoit un ensemble de gains du contrôleur et en sélectionne un en fonction de la taille du retard actuelle. Les premiers travaux qui utilisent l'approche des systèmes commutés stochastiques incluent [23] de Xiao et al, où un système en boucle fermée augmentée est établi en considérant tous les retards dans un ensemble borné, et le système résultant est un système linéaire à saut de Markov (Markov Jump Linear System ou MJLS). Zhang et al. [24] étendent l'idée et utilisent deux chaînes de Markov pour modéliser les retards dans le chemin direct (capteur-contrôleur) et dans le chemin de retour (contrôleur-actionneur), respectivement. En plus de la description stochastique des variations de retard, les hypothèses que les probabilités de transition soient partiellement inconnues et que les variations des retards temporels dépendent de l'état ou du temps peuvent, également, être prises en considération dans le cadre de cette méthodologie [25]. Comme deuxième approche typique dans le cadre de l'adaptation aux retards, la commande prédictive joue un rôle important et devient de plus en plus populaire dans les SCRs. Il est connu que la commande prédictive basé sur un modèle, le contrôleur génère un nombre fini de signaux de commandes futures s'étalant sur un horizon fini en plus de la commande actuelle. Ainsi, pour les SCRs utilisant l'approche de la commande prédictive, une partie de la séquence de commande reçue au niveau de l'actionneur intelligent sera appliquée au système, en fonction du délai de transmission et via des logiques de mise en mémoire tampon et de sélection appropriées. L'idée remonte à [26] pour la télé opération des systèmes non linéaires contraints. C'est aussi la base des configurations SCRs les plus récentes pour les systèmes linéaires invariants comme décrits dans [27]. Bien que le cadre d'adaptation aux retards prenne pleinement en compte les attributs spécifiques des SCRs, ce qui peut réduire le conservatisme dans l'analyse et la conception du système de commande, le cadre de

robustesse est plus approprié à certains cas, par exemple, lorsque les délais sont peu variables ou lorsque la taille des paquets est compressée pour économiser la bande passante.

Les enquêtes les plus récentes sur les développements des SCRs abordent d'autres problématiques telles que la prise en charge des défauts capteurs ou actionneurs, les contraintes de sécurité des réseaux en face des attaques cyber-physiques ou encore les SCRs à topologie dynamique [28], [29], [30].

Formulation de la problématique et contribution de la thèse

Les avancées technologiques dans les domaines des communications et des réseaux ont poussé les automaticiens à s'intéresser aux problématiques et défis **théoriques et pratiques** que pose l'insertion d'un canal de communication dans une boucle de commande. Ceci a contribué à l'apparition et au développement d'un axe de recherche devenu très actif au cours des deux dernières décennies, à savoir : ***Les systèmes de commande par réseaux (SCRs) ou networked control systems-NCS*** (en Anglais).

Ce domaine de recherche résulte de la synergie entre les systèmes de commande numériques d'une part, les réseaux et les systèmes de communications d'autre part. En effet, depuis plus de trois décennies déjà, des réseaux de communication divers (**CAN, MODBUS, ETHERNET, FIELDBUS**, etc. ...) sont introduits sur des plateformes industrielles comme supports de transmission de données pour des applications de commande temps réel.

En particulier, l'installation de plusieurs ***Automates Programmables Industriels*** (APIs) en des points éparpillés sur un même site rend nécessaire leur synchronisation et coordination par un échange de données (communication entre APIs) à travers des ***réseaux locaux câblés et selon des protocoles de communication spécialisés***.

La caractéristique principale des systèmes de commande par réseaux SCRs est définie par le mode d'échange d'information (**consignes, signaux de sorties, signaux de commande ...**) entre les différents éléments du système de commande (**capteurs, contrôleur, actionneurs, ...**). L'information étant transmise à travers un **réseau/canal de communication**, ce qui donne aux systèmes SCRs des avantages tels que la réduction des liaisons câblées ainsi que la facilité de diagnostic et de maintenance. Cependant, l'insertion d'un réseau de communication dans une boucle de commande introduit des complications et des challenges théoriques et pratiques pour l'analyse et la conception d'un système **SCR performant, stable et fiable**.

En effet, dans un système **SCR**, les outils conventionnels de la théorie de la commande deviennent insuffisants, sinon obsolètes, si l'on ne tient pas compte de :

La latence (retard induit) des communications capteurs-contrôleur (contrôleur-actionneurs) d'une part, et des **pertes (et de l'ordonnancement) des paquets de données** dues aux phénomènes physiques intrinsèques à la transmission de l'information numérique à travers un canal de communication, d'autre part.

Les travaux de cette thèse sont consacrés aux problèmes liés aux délais induits par la latence de la communication sur les signaux **capteurs-contrôleur et/ou contrôleur-actionneurs**. Ce phénomène de délai ou de retard de communication a un effet de détérioration des performances et de déstabilisation du système de commande et est, de ce fait, une contrainte supplémentaire à prendre en considération dans la modélisation et la conception de la stratégie de commande d'un système SCR.

L'application des outils d'analyse et de synthèse de loi de commande pour le calcul du gain de la commande **K**, est effectué avec des techniques de résolutions **LMI** (Linear Matrix Inequality) afin de stabiliser le système à commander en présence des retards qui perturbent le système. L'analyse et la stabilité de ces systèmes peuvent être menées à l'aide des de la théorie de stabilité de **Lyapunov**, la modélisation par les systèmes retardés et, l'application des chaînes de **Markov** pour la description des retards stochastiques. Il s'agit, donc, principalement de :

1. Analyser le comportement de stabilité des systèmes linéaires retardés. Particulièrement sous l'effet d'un retard variable dans le temps.
2. Calculer des lois de commande stabilisante garantissant certaines caractéristiques telles que les bornes admissibles du retard, la performance en stabilité ...etc.
3. Simulation de quelques **SCRs** pour démontrer les performances des techniques de commande proposées.

Présentation du mémoire de thèse

Le mémoire est structuré en quatre chapitres et une conclusion générale, comme suit :
Le **premier chapitre** est une introduction générale aux Systèmes de Commande par Réseaux SCRs avec description de la problématique de la thèse et des objectifs du travail de recherche.
Le **deuxième chapitre** présente l'historique des systèmes de commande par réseaux **SCRs** avec une description des architectures et les différentes contraintes de communication

induites qui affectent les performances et la stabilité des systèmes commandés à travers les réseaux de communication.

Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude détaillée de la stabilité des systèmes retardés continus. L'étude présente les fondements de la théorie de stabilité des systèmes retardés basés sur la **théorie de stabilité de Lyapunov** ainsi que l'application de la technique des Inégalités Linéaires Matricielles (Linear Matrix Inequalities – **LMIs**) comme outil d'analyse de la stabilité. Le chapitre présente des simulations qui confirment les effets déstabilisateurs du retard dans la boucle de commande.

Le **quatrième chapitre** est consacré aux systèmes retardés discrets avec variation stochastique du retard représenté par des modèles Markoviens. La théorie des systèmes retardés discrets avec retard Markovien est appliquée à un système de commande par retour d'état Multi-Modale. La synthèse d'une loi de commande stabilisante par retour d'état repose sur une modélisation améliorée et précise du retard induit par le canal de communication dans la boucle de commande en appliquant les techniques **LMI**. Des résultats de simulation sont présentés pour appuyer et confirmer les performances de la technique proposée

Pour finir, nous présenterons les conclusions qui s'imposent quant aux résultats obtenus ainsi que les perspectives de développement pour des travaux futures.

Chapitre 2

Les Systèmes de Commande en réseaux : Etat de l'art

2.1 Aperçu sur les Réseaux de Communication Industriels

2.1.1. Introduction

Un réseau de communication, dans sa forme la plus simple, est un ensemble d'installations et d'équipements qui fournit un service : le transfert d'informations entre des utilisateurs situés en différents points géographiquement éparpillés. L'exemple le plus connu d'un réseau de communication est le réseau téléphonique, qui fournit un service téléphonique, le transfert bidirectionnel de signaux vocaux entre les personnes. D'autres exemples de réseaux comprennent les réseaux informatiques, la télévision, réseaux de diffusion, réseaux cellulaires et Internet.

En générale, les réseaux de communication fournissent un service tout comme d'autres services publics omniprésents tels que l'approvisionnement en eau ou les systèmes d'alimentation en électricité. D'autre part, les réseaux de communication présentent une grande souplesse d'utilisation et sont devenus des infrastructures essentielles dans toute société et fournissent une interconnectivité flexible qui permet la circulation de l'information dans toutes ses formes vocale, vidéo, messagerie ou autres opérations bancaires électroniques.

La capacité des réseaux de communication modernes à transférer des données à des vitesses extrêmement élevées permet aux utilisateurs de collecter des informations en gros volumes presque instantanément et, à l'aide d'ordinateurs, d'accomplir des traitements et des actions à distance et en temps réel. Ces deux capacités uniques constituent la base de nombreux services basés sur les réseaux. Par exemple, Internet fournit actuellement les services de communication qui permettent aux ordinateurs et aux serveurs de fournir des services précieux tels que le courrier électronique, la messagerie instantanée, le streaming audio et vidéo, la recherche et la récupération d'informations et diverses formes de commerce électronique.

Parmi les applications des réseaux de communication, on trouve les implémentations des équipements de communication dans les plateformes industrielles. En général, l'industrie peut être divisée en deux catégories : L'industrie de transformation et le secteur manufacturier. Dans l'industrie de transformation se trouvent des processus impliquant des

flux continues ou discontinues de matériaux et dont les opérations sont souvent soumises à des exigences de sécurité strictes (par exemple, la production d'électricité, les fours à ciment, la production pétrochimique), tandis que l'industrie manufacturière est concernée par la production d'objets discrets. Atteindre le débit maximal des biens produits est, normalement, un aspect très important dans ces secteurs industriels. Pratiquement, les systèmes industriels ont dû être innovés pour améliorer le suivi de la production et le contrôle de la qualité tout en maintenant les coûts d'exploitation aussi bas que possible. Cette innovation s'est opérée au cours des dernières décennies grâce aux progrès des technologies de l'information et de la communication qui permettent aux systèmes industriels de répondre à ces besoins. L'innovation a conduit à réduire considérablement les travaux manuels qui sont, aujourd'hui, remplacés par des machines automatisées plus rapides et plus fiables telles que les robots ou autres systèmes électromécaniques qu'on trouve dans la plupart des opérations de l'industrie manufacturière. L'introduction d'un nombre élevé d'unités automatisées dans les usines nécessitait une méthode efficace pour les connecter entre elles, communiquer entre elles et transférer les différentes données de supervision aux techniciens et ingénieurs dans le centre de contrôle-commande. Cela avait conduit à l'introduction des réseaux de communication dans les secteurs industriels.

Dans leur structure fonctionnelle, les réseaux industriels sont composés de trois composants de contrôle majeurs qui comprennent les Automates Programmables Industriels ou APIs (PLC : Programmable Logic Controllers), le système de contrôle, de supervision et l'acquisition de données (SCADA : Supervisory Control and Data Acquisition) et les systèmes de contrôle distribués (DCS : Distributed Control Systems) [31, 32]. Les APIs ne sont rien d'autre que des ordinateurs numériques conçus pour fonctionner dans des environnements industriels sévères. De tels systèmes basés sur des microprocesseurs reçoivent, comme entrées, des signaux de mesure à partir des capteurs installés en différents points de l'unité de production, puis génèrent à leurs sorties des signaux de commande envoyés aux actionneurs ou des signaux de données mises à la disposition des opérateurs humains à travers l'Interfaces Homme-Machine ou IHM (HMI : Human-Machine Interfaces). Les automates permettent de piloter l'ensemble du processus de fabrication tout en garantissant la qualité de service requise (QoS : Quality of Service) et les fonctions de contrôle de grande précision. Les systèmes SCADA sont principalement utilisés pour la mise en œuvre du système de surveillance et de contrôle d'un équipement ou d'une usine dans plusieurs industries telles que les centrales électriques, le raffinage du pétrole et du gaz, les

stations de traitement des eaux, etc. Dans ce système, les mesures sont effectuées au niveau du processus, sur la plateforme de l'usine, par un nombre de capteurs distants et les données sont ensuite transférées vers l'ordinateur central du SCADA afin que des informations complètes sur le processus ou sur l'opération de fabrication puissent être mises à disposition de l'opérateur humain à distance et en temps réel. Ce système permet l'affichage des données reçues sur les IHM et renvoie les actions de contrôle nécessaires aux actionneurs distants situés sur la plateforme de l'usine. Le DCS se compose d'un grand nombre de contrôleurs et régulateurs locaux installés dans diverses zones et connectés via un réseau de communication à haut débit. Dans un système de commande DCS, l'acquisition de données et les fonctions de commande sont assurées par un certain nombre de contrôleurs DCS qui sont des unités à microprocesseur fonctionnellement et géographiquement répartis sur toute la surface de l'usine.

Ces trois éléments (API, SCADA et DCS) sont connectés aux différents instruments et autres équipements de l'usine et communiquent par un réseau de communication puissant et efficace appelé réseau industriel. Dans ces réseaux industriels, les données ou les signaux de commande sont transmis soit par des supports câblés, soit par des supports sans fil. Les câbles utilisés pour la transmission filaire de données comprennent les paires torsadées, les câbles coaxiaux ou les fibres optiques. Alors que les réseaux sans fil industriels utilisent les ondes radio pour transmettre des données et les signaux de commande.

2.1.2. Architecture et exigences des réseaux de contrôle industriels

Généralement, les réseaux de contrôle industriels sont construits selon une topologie hiérarchique comme illustré à la Fig. 2.1 comprenant trois niveaux de base : le niveau information, le niveau commande et le niveau instruments et dispositifs [33]. Chaque niveau a des exigences uniques qui affectent le réseau utilisé pour ce niveau particulier.

Le niveau instruments et dispositifs comprend des appareils de terrain tels que les capteurs et les actionneurs agissant sur le processus ou sur les machines. La tâche de ce niveau est de transférer les informations entre ces instruments et les éléments de commande du processus tels que les automates. Le transfert d'informations peut être numérique, analogique ou hybride. Tous les instruments se connectent à un seul câble. Le câble comporte généralement des conducteurs pour l'alimentation, le signal de l'appareil et un blindage. Il existe de nombreux autres réseaux de communication au niveau du terrain qui sont caractérisés par différents facteurs tels que le temps de réponse, la taille des messages, etc.

Les messages sont généralement petits par rapport aux autres réseaux. En raison des exigences déterministes et de répétabilité, les messages peuvent être hiérarchisés afin que les informations les plus critiques soient transmises en priorité [34]. De nos jours, la technologie de bus de terrain (Fieldbus) est le réseau de communication le plus sophistiqué utilisé au niveau du terrain (plateforme industrielle ou manufacturière) car elle facilite le contrôle

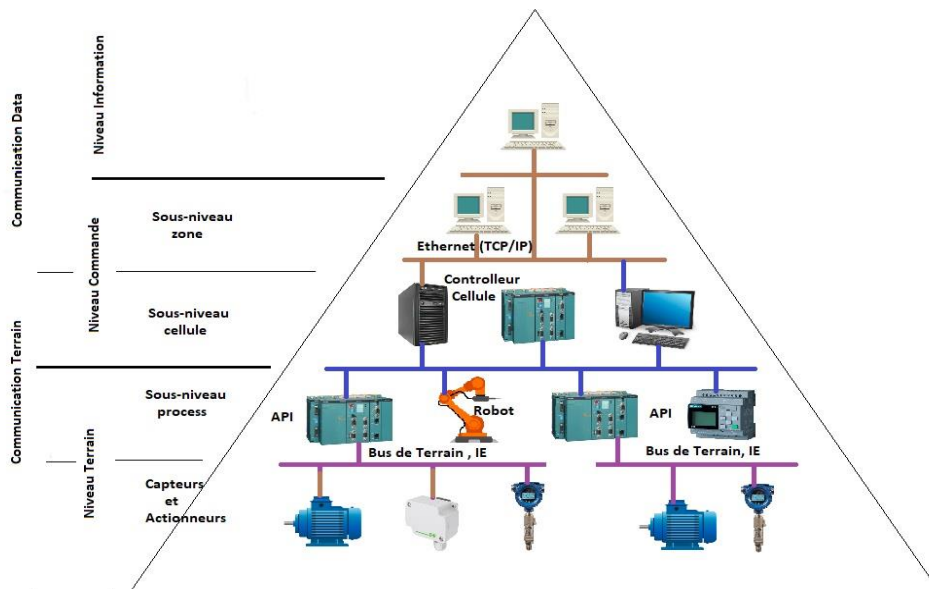


Figure 2.1 Architecture a trois niveaux d'un réseau de contrôle industriel

distribué entre divers dispositifs de terrain intelligents d'une part et les contrôleurs, d'autre part. Ces réseaux utilisent la technique accès multiple avec écoute de la porteuse, détection des collisions et arbitrage de la priorité (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection and Arbitration Message Priority protocol*, *CSMA/CD AMP*) pour répondre aux exigences opérationnelles et fonctionnelles.

Ces réseaux utilisent la technique accès multiple avec écoute de la porteuse, détection des collisions et arbitrage de la priorité (*Carrier Sense Multiple Access with Collision* Le niveau de commande implique la mise en réseau des machines et des zones de travail. C'est le niveau où le système de contrôle, de supervision et l'acquisition de données (SCADA) est mis en œuvre. Si une usine d'assemblage automobile est prise comme exemple, c'est à ce niveau du réseau que les systèmes de commande recevront des informations sur le modèle et les options qui doivent être incluses sur un véhicule afin que les contrôleurs puissent exécuter les programmes appropriés pour monter le véhicule correctement. Des données telles que les temps de cycle, les températures, les pressions, les volumes, etc. sont également collectées à

ce niveau [35]. Les tâches de ce niveau comprennent la configuration des dispositifs d'automatisation, le chargement des données de programme et des données de variables de processus, la supervision du contrôle, l'affichage des données de variables sur les IHM, l'archivage historique, etc. Le niveau de commande du réseau doit répondre aux exigences prédéfinies telles qu'un temps de réponse court et qui soit caractérisé par son déterminisme et sa répétabilité, des trames de données courtes, une synchronisation des machines et des process en plus d'une utilisation adéquate des données critiques. Le déterminisme est la capacité de prédire avec précision quand les données seront livrées, et la répétabilité est la capacité de garantir que les temps de transmission sont cohérents et non affectés par les périphériques connectés au réseau. En raison des contraintes déterministes et de répétabilité, le protocole de contrôle d'accès au bus par CSMA/CD dans le réseau Ethernet traditionnel est inadéquat, de sorte qu'un type différent d'accès au réseau est requis. Les réseaux locaux (Local Area Networks, LAN) sont largement utilisés comme réseaux de communication à ce niveau de commande pour obtenir les caractéristiques souhaitées. Le protocole Ethernet avec TCP/IP est principalement utilisé comme réseau dans le niveau de commande pour connecter les unités de contrôle aux ordinateurs. De plus, ce réseau agit comme un bus de contrôle pour coordonner et synchroniser les différentes unités de contrôle. Certains bus de terrain sont également utilisés à ce niveau comme bus de commande tels que PROFIBUS et ControlNet. Dans de tels réseaux, le protocole CTDMA (Concurrent Time Domain Multiple Access) est utilisé sur la base d'un algorithme de tranche de temps qui régule la possibilité de transmission de chaque nœud dans un intervalle temporel de disponibilité du réseau. L'ajustement de la durée d'un intervalle du réseau donne un temps cohérent et prévisible pour la transmission des données [35].

Le niveau informationnel est le niveau supérieur du système industriel qui collecte les informations du niveau inférieur, c'est-à-dire le niveau de commande. Ce niveau traite de gros volumes de données qui ne sont pas utilisées en permanence et ne présentent pas un caractère critique et urgent pour les opérations. Dans le niveau informationnel, les WAN Ethernet (Wide Area Network) sont couramment utilisés comme réseaux pour la planification d'usine et l'échange d'informations de gestion. Parfois, ces réseaux peuvent se connecter à d'autres réseaux industriels.

Les réseaux de contrôle industriels fonctionnent selon deux paradigmes différents : déclenchement temporel et déclenchement événementiel [35]. Dans les applications à déclenchement temporel, les systèmes fonctionnent périodiquement et sont synchronisés par

une horloge système. Les applications se déclenchent dès le début de la période de l'horloge (ou après un certain décalage par rapport au début), échantillonnent leurs entrées et exécutent un algorithme qui prend comme arguments (données de calcul) les entrées échantillonnées et les points de consigne reçues des ordinateurs situés plus haut dans la hiérarchie. Les résultats des calculs sont envoyés aux sorties pour exploitation. Les entrées et les sorties correspondent aux capteurs et actionneurs situés au niveau le plus bas de la hiérarchie. Aux niveaux supérieurs, les entrées sont les rapports d'état et de fin d'exécution du niveau inférieur suivant. Les sorties sont des points de consigne ou des commandes transmises au niveau inférieur. Les applications d'acquisition et de distribution sont des cas particuliers. Les applications d'acquisition n'ont pas de sorties vers le processus ; les sorties générées suite aux exécutions des algorithmes sont stockées en interne. Les applications de distribution n'ont aucune entrée et exécutent les algorithmes en se basant sur des informations stockées.

Dans les applications à déclenchement événementiel, le système est activé lors de l'apparition d'événements spécifiques. Un événement peut être l'arrivée d'un message avec une nouvelle commande ou un état de fin d'exécution d'une tâche ou la détection d'un changement d'une entrée. Lorsqu'un événement est détecté, l'application lance l'exécution d'un algorithme pour déterminer la réponse appropriée. La réponse est ensuite envoyée sous forme d'événement à une autre application localement ou à distance.

Le temps écoulé entre la génération de l'événement d'entrée et la réception de la réponse correspondante doit être borné. Sa valeur fait partie des exigences sur la performance de l'application et aussi du système de communication si les événements sont transmis à travers un réseau. En outre, les applications doivent être en mesure d'évaluer un certain ordre dans les occurrences d'événements.

Ce n'est généralement pas un problème lorsque l'événement est détecté et traité sur le même ordinateur. Cela devient un problème lorsque les événements sont détectés à différents endroits reliés par un réseau qui peut introduire un certain retard dans la transmission.

Étant donné que de grandes quantités de données peuvent être transmises via ces réseaux de contrôle et que les trames de données auront tendance à être plus longues, les débits de transmission de données doivent être plus rapides. Cependant, puisqu'ils peuvent être utilisés pour transmettre des données critiques entre les contrôleurs, les réseaux de contrôle doivent également être déterministes et répondre aux besoins des applications temps réel. Le déterminisme dans le contexte d'un réseau de communication est défini comme suit : elle

existe une limite supérieure spécifiée pour le délai entre la détection d'un élément de données et sa livraison au dispositif de commande. Le temps réel dans ce contexte est défini comme « suffisamment rapide pour atteindre les objectifs de l'application » et est mesuré en tant que temps de latence. Le déterminisme et la latence sont des exigences distinctes mais complémentaires. Le déterminisme et une latence spécifique sont nécessaires pour réaliser la synchronisation. En générale, le déterminisme est obtenu en empêchant les collisions de messages et en limitant la longueur maximale des messages. Une faible latence est obtenue en utilisant des médias à haut débit et en minimisant le nombre de fois qu'un signal doit être rediffusé, comme dans un réseau maillé.

L'utilisation d'un protocole réseau standard tel que le (TCP/IP) sur un réseau Ethernet présente un avantage d'installation et d'implémentation à moindre coût. En sélectionnant simplement un câblage Ethernet standard et en utilisant des commutateurs Ethernet en duplex, un réseau de contrôle basé sur cette technologie de base peut garantir qu'il n'y aura pas de collisions de réseau, ce qui rend ces réseaux déterministes. L'utilisation d'une vitesse élevée telle que 100 ou 1000 Mbps avec une longueur de paquet Ethernet standard maximale de 1500 octets permet d'obtenir une faible latence.

Cependant, des calculs s'imposent pour une bonne exploitation du réseau. Par exemple, si une application devait transférer un message Ethernet de taille maximale (1500 octets) à 100 Mbps, le réseau serait bloqué pendant un temps maximum d'environ 150 μ s. Normalement, ce retard est parfaitement acceptable pour les besoins de commande de processus et d'automatisation dans une usine, mais elle peut ne pas l'être pour le contrôle d'un système robotique rapide.

2.1.3. Modèle de Communication : le modèle d'interconnexion des systèmes ouverts (OSI)

Dans le domaine des communications, des modèles de différents types sont utilisés pour expliquer les aspects fonctionnels, les opérations des circuits de communication ou les techniques de conception des systèmes de communication. Dans cette sous-section, Nous examinerons le modèle d'interconnexion des systèmes ouverts (Open Systems Interconnection -OSI- model) de l'Organisation internationale de normalisation (International Organization for Standardization, ISO), qui est un modèle de la fonctionnalité requise pour communiquer d'un utilisateur final à un autre. Il est important de noter l'importance de ce modèle pour comprendre les communications de données ainsi que les protocoles et les normes qui leur

sont liés. Le modèle d'interconnexion des systèmes ouverts (OSI) est une disposition conceptuelle et logique qui définit 'la communication réseau utilisée par les systèmes ouverts à l'interconnexion et à la communication avec d'autres systèmes'.

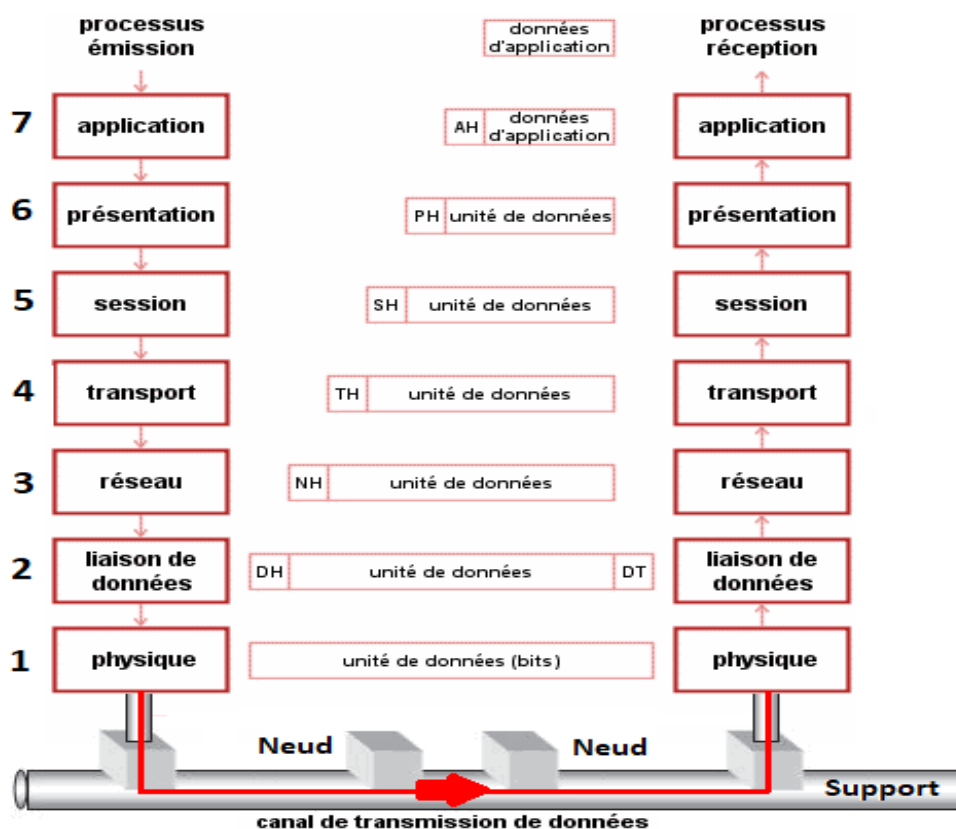


Figure 2.2 Modèle d'interconnexion OSI-ISO

La première question qui s'impose est : Comment les données binaires organisées en groupes d'uns (1s) et de zéros (0s), sont-ils transmis d'un utilisateur final à un autre ? En réalité, Il ne suffit pas que les données soient organisées ; il doit y avoir un système pour dispatcher ces données d'un endroit à un autre.

Ce système comprend des règles qui indiquent qui a accès au support et quand cet accès est permis (accès au support), qui effectue la détection des erreurs de paquets (trames de données), qui compte les paquets, qui effectue le routage, qui est responsable de la communication d'un utilisateur final à un autre utilisateur final, qui suit et surveille les variations de flux dans le trafic des données, qui est responsable de garantir la compatibilité

avec les stations distantes, et qui joue le rôle d'interface avec le programme utilisateur. Toutes ces fonctions doivent être exécutées lors de la communication d'un utilisateur final à un autre.

Le modèle OSI décrit ces fonctions, et précise généralement l'ordre dans lequel elles interviennent lors de la transmission. Le modèle OSI est complexe et la compréhension de ses fonctions est cruciale pour comprendre les communications de donnée.

Le modèle OSI n'est pas une définition du matériel de communication, mais c'est un ensemble de couches fonctionnelles. Le modèle OSI comporte sept couches (voir figure 2.2). Il ne donne pas les spécifications d'un modem, d'un support de communication, d'un nœud d'accès au support ou d'une des normes physiques telles que les connecteurs, le câble coaxial, etc. Au contraire, le modèle OSI permet aux normes existantes qui répondent à ses exigences fonctionnelles de s'adapter.

En générale, dans le modèle OSI la ligne de démarcation entre les communications de données et le traitement des données se trouve à la frontière entre les couches Transport et Session. Cependant, de nombreux systèmes intègrent ces deux zones fonctionnelles et il est assez difficile de définir la limite entre les fonctions de communication et de traitement des données. Donc, les couches basses (1, 2, 3 et 4) sont nécessaires à l'acheminement des informations entre les extrémités concernées et dépendent du support physique. Les couches hautes (5, 6 et 7) sont responsables du traitement de l'information relative à la gestion des échanges entre systèmes informatiques.

a. La couche physique

La couche physique fournit les moyens réels de connexion au support, qu'il s'agisse d'un câble en cuivre, d'un câble en fibre ou d'un support sans fil. Parmi les exemples de la couche physique, on trouve les standards EIA/TIA 232, EIA/TIA 485 ou la carte d'interface réseau LAN (Network Interface Card -NIC), qui fournit une terminaison de ligne et/ou une adaptation d'impédance ainsi qu'une synchronisation des données. La fonction principale de la couche physique est la transmission fiable des bits sur un canal de communication. Cette couche doit garantir la parfaite transmission des données (un bit 1 envoyé doit bien être reçu comme bit valant 1, de même pour un bit 0). Concrètement, la couche physique est responsable de la normalisation des caractéristiques électriques (Un bit 0 est représenté par une tension entre 5 V and 15 V, un bit 1 est représenté par une tension entre -5 V and -15 V. A la réception, une tension entre 3 V et 15 V représente un 0 logique et une tension entre -3

V and -15 V représente un 1 logique), des caractéristiques mécaniques (forme des connecteurs, de la topologie...), des caractéristiques fonctionnelles des circuits de données ainsi que des procédures d'établissement, de maintien et de libération du circuit de données. L'unité d'information typique de cette couche est le bit, représenté par une certaine différence de potentiel.

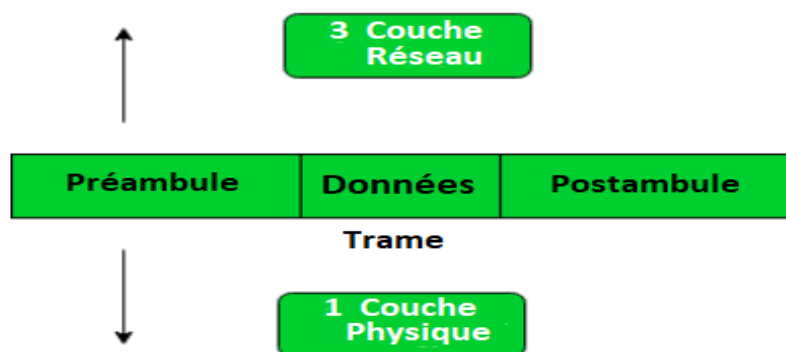


Figure 2.3 Structure générale d'une trame de données

b. La couche liaison de données

Lors du processus d'émission, la couche liaison de données prends les paquets de la couche réseau et les encapsule dans des trames (blocs d'informations) de structure définie par le protocole de communication utilisé. Dans le coté réception, la couche de liaison capte les bits provenant de la couche physique et les assemble en trames. Dans les deux directions, émission ou réception, la couche liaison doit assurer un flux de données "sans erreur". La figure 2.3 indique une structure générale simplifiée d'une trame qui est l'unité de données dans la couche liaison. Une trame est constituée d'un en-tête ou préambule (*Data Header, DH*), des données à transmettre, et d'un postambule (*Data Trailer, DT*).

Dans le détail et selon le protocole de communication de la couche liaison de données (protocole Ethernet, protocole point à point ou Point-to-Point Protocol PPP, protocole mode de transfert asynchrone ou Asynchrones Transfer Mode ATM), le format de la trame de données contient plusieurs champs en plus du champ central réservé à la l'information binaire utile. Comme l'indique la figure 2.4, la trame commence par une séquence de bits qui marque le début de la trame. On distingue aussi les champs des adresses destination et source qui peuvent-être, par exemple, les adresses MAC (Media Access Control) des dispositifs connectés au réseau à travers leurs cartes d'interface (Network Interface Card, NIC).

Chaque NIC est muni dans sa mémoire ROM d'un code MAC unique qui l'identifie globalement. Le champ appelé *type* contient une information qui indique le protocole exact de la couche supérieure à la couche liaison, à savoir la couche réseau. Parmi les types de protocoles de la couche réseau, on peut citer : ipv4 (Internet Protocol Version 4), ipv6 (Internet Protocol

Le champ détection erreur appelée aussi Séquence Control Trame (Frame Check Sequence – FCS) contient une valeur de contrôle de redondance cyclique (Cyclic Redundancy Check CRC). Lorsqu'un périphérique source assemble une trame, il effectue un calcul de contrôle de redondance cyclique (CRC) sur les champs de la trame, à l'aide d'un algorithme prédéterminé. Le périphérique source stocke la valeur dans ce champ et la transmet dans le cadre de la trame. Lorsque la trame est reçue par l'équipement destinataire, celui-ci effectue à nouveau un test CRC en utilisant le même algorithme. Si la valeur CRC calculée sur le périphérique de destination ne correspond pas à la valeur du champ FCS (Frame Check Sequence), le périphérique de destination rejettera la trame, en considérant qu'elle a été corrompue par des erreurs de transmission. Enfin, la trame se termine par une séquence spécifique de bits qui indique la fin de la trame.

c. La couche réseau

La couche réseau ou la couche 3 du modèle OSI fonctionne pour la transmission de données d'un hôte situé dans un réseau vers un autre hôte situé dans un autre réseau différent. En d'autres termes, la couche réseau assure la liaison inter-réseaux. Pour accomplir ce transport de bout en bout, la couche 3 utilise quatre processus de base :

1. Adressage
2. Encapsulation
3. Routage
4. Décapsulation

1. Adressage

Tout d'abord, la couche réseau doit fournir un mécanisme d'adressage de ces dispositifs finaux. Si des données individuelles doivent être dirigées vers un appareil final, celui-ci doit avoir une adresse unique. Dans un réseau IPv4, lorsque cette adresse est ajoutée à un appareil, celui-ci est appelé hôte [36].

2. Encapsulation

Deuxièmement, la couche réseau doit assurer l'encapsulation. Non seulement les appareils doivent être identifiés par une adresse, mais les éléments individuels - les PDU (Protocol Data Unit) de la couche réseau - doivent également contenir ces adresses. Pendant le processus d'encapsulation, la couche 3 reçoit la PDU de couche 4 et ajoute un en-tête ou une étiquette de couche 3 pour créer la PDU de couche 3. Lorsque nous nous référons à la couche réseau, nous appelons ce PDU un paquet. Lorsqu'un paquet est créé, l'en-tête doit contenir, entre autres informations, l'adresse de l'hôte auquel il est envoyé. Cette adresse est appelée adresse de destination. L'en-tête de couche 3 contient également l'adresse de l'hôte d'origine. Cette adresse est appelée l'adresse source. Une fois que la couche réseau a terminé son processus d'encapsulation, le paquet est envoyé à la couche liaison de données pour être préparé pour le transport sur le support [37].

3. Routage

Ensuite, la couche réseau doit fournir des services pour diriger ces paquets vers leur hôte de destination. Les hôtes source et de destination ne sont pas toujours connectés au même réseau. En fait, le paquet peut avoir à traverser de nombreux réseaux différents. En cours de route, chaque paquet doit être guidé à travers le réseau pour atteindre sa destination finale. Les périphériques intermédiaires qui connectent les réseaux sont appelés routeurs. Le rôle du routeur est de sélectionner les chemins et de diriger les paquets vers leur destination. Ce processus est appelé routage. Pendant le routage à travers un inter-réseau, le paquet peut traverser de nombreux dispositifs intermédiaires. Chaque route empruntée par un paquet pour atteindre le périphérique suivant est appelée un saut. Lorsque le paquet est transmis, son contenu (le PDU de transport) reste intact jusqu'à ce que l'hôte de destination soit atteint [38].

4. Décapsulation

Enfin, le paquet arrive à l'hôte de destination et est traité au niveau de la couche 3. L'hôte examine l'adresse de destination pour vérifier que le paquet était adressé à ce périphérique. Si l'adresse est correcte, le paquet est dés encapsulé par la couche réseau et la PDU de couche 4 contenue dans le paquet est transmise au service approprié au niveau de la couche transport. Contrairement à la couche transport (couche 4 OSI), qui gère le transport des données entre les processus exécutés sur chaque hôte final, les protocoles de la couche réseau spécifient la structure et le traitement des paquets utilisés pour transporter les données d'un hôte à un autre

hôte. Le fonctionnement sans tenir compte des données d'application transportées dans chaque paquet permet à la couche réseau de transporter des paquets pour plusieurs types de communications entre plusieurs hôtes [38].

d. la couche transport

La couche transport assure la segmentation des données et le contrôle nécessaire pour réassembler ces éléments dans les différents flux de communication. Ses principales responsabilités pour y parvenir sont les suivantes : le suivi de la communication individuelle entre les applications sur les sources de destination, la segmentation des données, la gestion de chaque élément, le réassemblage des segments en flux de données d'application et l'identification des différentes applications. Chacune de ces applications communiquera avec une ou plusieurs applications sur des hôtes distants. Il est de la responsabilité de la couche transport de maintenir les multiples flux de communication entre ces applications.

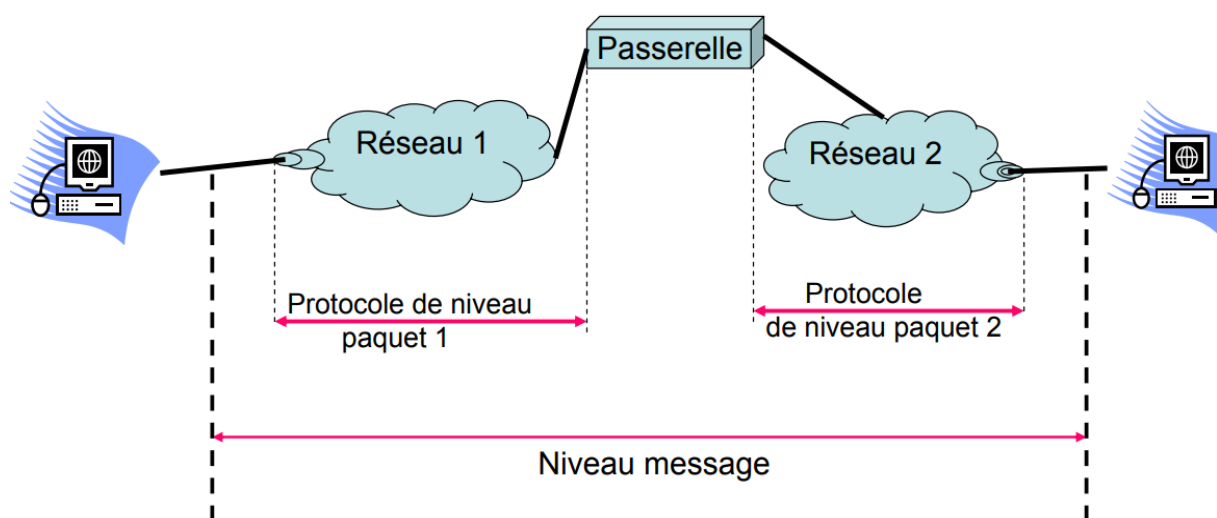


Figure 2.4 Transport des données de bout en bout

1. Segmentation des données

Comme chaque application crée un flux de données à envoyer à une application distante, ces données doivent être préparées pour être envoyées sur le support en morceaux gérables. Les protocoles de la couche Transport décrivent les services qui segmentent ces données

depuis la couche Application. Cela inclut l'encapsulation requise sur chaque élément de données. Chaque élément de données d'application nécessite l'ajout d'en-têtes au niveau de la couche transport pour indiquer à quelle communication il est associé.

2. Réassemblage des segments

Au niveau de l'hôte de réception, chaque élément de données peut être dirigé vers l'application appropriée. De plus, ces éléments de données individuels doivent également être reconstruits en un flux de données complet utile à la couche application. Les protocoles au niveau de la couche transport décrivent la manière dont les informations d'en-tête de la couche transport sont utilisées pour réassembler les éléments de données en flux à transmettre à la couche application.

3. Identification des applications

Afin de transmettre les flux de données aux applications appropriées, la couche transport doit identifier l'application cible. Pour ce faire, la couche transport attribue à une application un identifiant. Les protocoles TCP/IP appellent cet identifiant un numéro de port. Chaque processus logiciel qui doit accéder au réseau se voit attribuer un numéro de port unique dans cet hôte. Ce numéro de port est utilisé dans l'en-tête de la couche transport pour indiquer à quelle application cette donnée est associée. La couche Transport est le lien entre la couche Application et la couche inférieure qui sont responsables de la transmission du réseau. Cette couche accepte les données de différentes conversations et les transmet aux couches inférieures sous forme d'éléments gérables qui peuvent éventuellement être multiplexés sur le support. Les applications n'ont pas besoin de connaître les détails opérationnels du réseau utilisé. Les applications génèrent des données qui sont envoyées d'une application à une autre, quel que soit le type d'hôte de destination, le type de support sur lequel les données doivent transiter, le chemin emprunté par les données, l'encombrement d'un lien ou la taille du réseau. De plus, les couches inférieures ne savent pas que plusieurs applications envoient des données sur le réseau. Leur responsabilité est de transmettre les données à l'appareil approprié. La couche Transport trie ensuite ces pièces avant de les livrer à l'application appropriée [39].

e. la couche session

Comme le nom de la couche session l'indique, les fonctions de cette couche créent et maintiennent des dialogues entre les applications source et destination. La couche Session

gère l'échange d'informations pour initier des dialogues, les maintenir actifs et redémarrer des sessions interrompues ou inactives pendant une longue période. La plupart des applications, telles que les navigateurs Web ou les clients de messagerie, intègrent les fonctionnalités des couches OSI 5, 6 et 7. Les protocoles ISO OSI de la couche application TCP/IP les plus connus sont ceux qui permettent l'échange d'informations utilisateur. Ces protocoles spécifient le format et les informations de contrôle nécessaires pour de nombreuses fonctions de communication Internet courantes. Parmi ces protocoles TCP/IP figurent :

- Le protocole DNS (Domain Name Service Protocol) est utilisé pour résoudre les nom Internet en adresses IP.
- Le protocole HTTP (Hypertext Transfer Protocol) est utilisé pour transférer les fichiers qui composent les pages Web du World Wide Web.
- Le protocole SMTP (Simple Mail Transfer Protocol) est utilisé pour le transfert des messages électroniques et des pièces jointes.
- Telnet, un protocole d'émulation de terminal, est utilisé pour fournir un accès à distance Aux serveurs et aux périphériques réseau.
- Le protocole de transfert de fichiers (FTP) est utilisé pour le transfert de fichiers interactif entre les systèmes [39].

Couche OSI	ISO	Microsoft /IBM	TCP/IP	SNA	Netware
7 Application	FTAM, VT, MHS, X500	VFS, WINS, SMB, X500	FTP, SMTP, TELNET, NFS, HTTP	CICS, TSO, CICS, DB2	NCP, RIP, SAP, ECHO
6 Présentation	ASN.1				
5 Session	Protocole de session	NetBIOS, NetBEUI	TCP/UDP	Contrôle de flux de données (LU6.2)	
4 Transport	Transport Protocol: TP0 à TP4			Contrôle de transmission VTAM	IPX/SPX
3 Réseau	CLNP LNCP	IP/ICMP	Network Control Path (NCP)		
2 Liaison de données	HDLC	Ethernet, Token Ring, SLIP, PPP, RAS	Ethernet, Token Ring, SLIP, PPP	SDLC	Ethernet, Token Ring, SLIP, PPP, RAS
1 Physique	X21	RS232 (modem) 10BaseT	RS232 (modem) 10BaseT	Physique IBM (Physical)	RS232 (modem) V21, 10BaseT

Figure 2.5 position de la couche de session dans le modèle OSI

f. la couche présentation

La couche présentation est la 6^{ème} du modèle OSI. Elle est chargée du codage des données applicatives. Les couches 1 à 5 transportent des octets bruts sans se préoccuper de leur signification. Mais ce qui doit être transporté en pratique, c'est du texte, des nombres et parfois des structures de données arbitrairement complexes. Un protocole d'acheminement des données d'un expéditeur jusqu'à un ou plusieurs destinataires par exemple doit transporter un graphe représentant au moins partiellement la topologie du réseau. Le rôle de la couche présentation est donc de convertir les données applicatives manipulées par les programmes en chaînes d'octets.

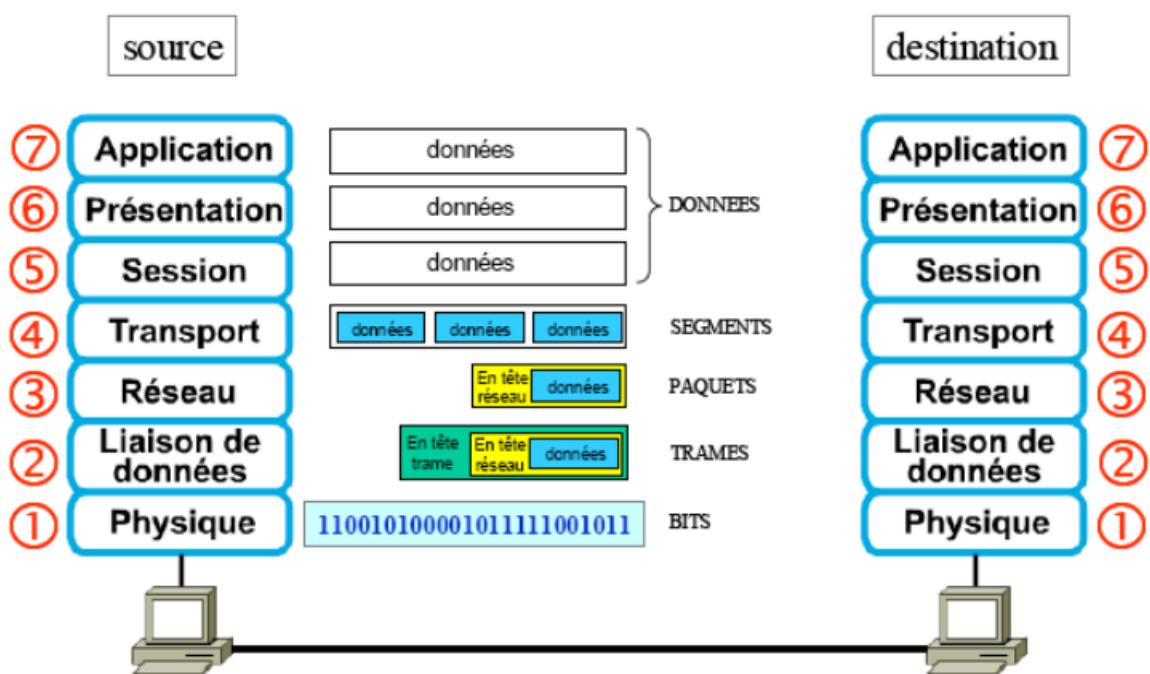


Figure 2.6 Protocole d'acheminement des données

Rôle primaire de la couche présentation

- Conversion de code caractère (par exemple ASCII/EBCDIC)
- Conversion de données (par exemple CR - CR/LF)
- Compression des données
- Chiffrement et déchiffrement pour la transmission et la réception des données.

La couche de présentation, étant la 6^{ème} couche du modèle OSI, exécute plusieurs types de fonctions, qui sont le formatage de la couche de présentation et cryptage des données à envoyer sur le réseau. Cette couche veille à ce que les données soient envoyées de manière à ce que le destinataire comprenne les informations (données) et soit en mesure d'utiliser les données de manière efficace et efficiente et de la livraison des informations pour le traitement ou l'affichage. Cette couche gère les structures de données abstraites et autorise les structures de données de haut niveau (par exemple, les enregistrements bancaires), qui doivent être définies ou échangées. Cette couche effectue le cryptage à l'émetteur et le décryptage au récepteur, elle réalise la compression des données pour réduire la bande passante des données à transmettre (l'objectif premier de la compression des données est de réduire le nombre de bits à transmettre).

La couche présentation est responsable de l'interopérabilité (capacité des ordinateurs à échanger et utiliser des informations) entre les méthodes de codage, car différents ordinateurs utilisent différentes méthodes de codage et traite essentiellement de la partie présentation des données et effectue la compression des données (réduction du nombre de bits lors de la transmission), ce qui en retour améliore le débit des données.

g. La couche application

La couche d'application se situe au niveau de la couche 7, le sommet du modèle de communication Open Systems Interconnection (OSI). Il garantit qu'une application peut communiquer efficacement avec d'autres applications sur différents systèmes et réseaux informatiques. La couche d'application est utilisée par les logiciels de l'utilisateur final tels que les navigateurs Web et les clients de messagerie. Il fournit des protocoles qui permettent aux logiciels d'envoyer et de recevoir des informations et de présenter des données significatives aux utilisateurs.

Il existe de nombreux protocoles de couche application et de nouveaux protocoles sont constamment développés. La couche application ISO OSI, couche sept, est la couche supérieure des modèles OSI et TCP/IP. C'est la couche qui fournit l'interface entre les applications que nous utilisons pour communiquer et le réseau sous-jacent sur lequel nos messages sont transmis [40].

Quelques exemples de protocoles d'application sont le protocole de transfert hypertexte (HTTP), le protocole de transfert de fichiers (FTP), le protocole de bureau de poste (POP), le protocole de transfert de courrier simple (SMTP) et le système de noms de domaine (DNS) [40].

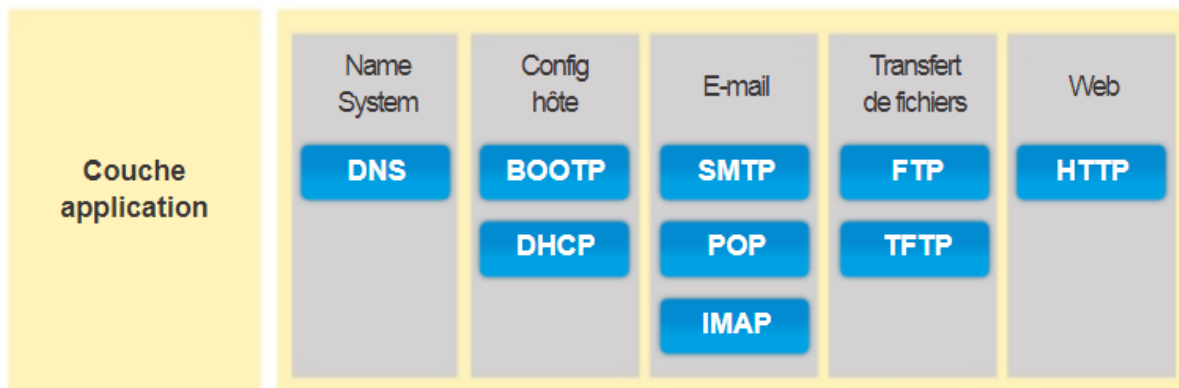


Figure 2.7 Protocol de transfert hypertexte

- DNS (Domain Name Système /Service), traduit des noms de domaines (par exemple, SISCO.COM) en adresse IP
- BOOTP (Protocole Bootstrap), permet à une station de travail sans disque de découvrir sa propre adresse IP
- DHCP, Le protocole DHCP remplace le protocole BOOTP
- SMTP (Simple Mail Transfer Protocol), permet aux clients d'envoyer un e-mail à un serveur de messagerie, permet aux serveurs d'envoyer un e-mail à d'autres serveurs.
- POP3 (Post office Protocol Version3), permet aux clients de récupérer des e-mails sur un serveur de messagerie, télécharge les e-mails du serveur de messagerie sur le bureau.
- IMAP (internet Message Access Protocol), permet aux clients d'accéder aux e-mails stockés sur un serveur de messagerie et la conservation des messages sur le serveur.
- FTP (File Transfer Protocol), définit les règles qui permettent à l'utilisateur d'un hôte d'accéder à des fichiers sur un autre hôte du réseau, protocole d'acheminement des données fiable.
- TFTP (Trivial File Transfer Protocol), protocole de transfert de fichiers simple et sans connexion, protocole d'acheminement de fichiers au mieux et sans accusé de réception
- HTTP (Hypertext Transfer Protocol), ensemble de règles permettant d'échanger du texte, et fichiers multimédia.

2.1.4. Réseaux industriels et bus de terrain

a. Réseau industriels

On appelle réseau un ensemble de moyens qui permettent la communication entre des processus d'application ou tâches répartis sur des matériels de tout type. Cet ensemble est constitué d'au moins un support de transmission pour l'acheminement des signaux, et de protocoles de communication selon une architecture donnée.

Les réseaux industriels comprennent un large éventail de technologies telles que Industrial Ethernet (telles que EtherCAT, Profinet, Ethernet/IP, CC-Link IE, Modbus-TCP, PowerLink, Sercos III, OPC-UA) et Fieldbus (telles que Profibus, Modbus RTU/ASCII, DeviceNet, CANopen, IO-Link) [41], [42].

Dans l'automatisation industrielle, les API, le SCADA et le DCS sont trois moyens importants de contrôler les choses. Il existe des instruments de terrain, des appareils de terrain intelligents, des PC de contrôle de supervision, des contrôleurs d'E/S distribués et des systèmes IHM. Pour se connecter et se parler, ces appareils ont besoin d'un réseau ou d'un plan de communication solide et efficace. Ils relient les appareils de terrain, les contrôleurs et les PC afin que les données et les signaux de contrôle puissent être envoyés via des câbles ou sans fil. Le bus de terrain est un autre réseau de zone de contrôle local utilisé dans les systèmes industriels complexes avec beaucoup d'automatisation. Liaison numérique entre les contrôleurs et les capteurs, actionneurs et transducteurs intelligents pouvant aller dans les deux sens. Profibus et Foundation Field Bus sont deux technologies Fieldbus utilisées dans l'automatisation des processus.

Les appareils de terrain industriels et les modules d'E/S peuvent être reliés par une variété de réseaux de communication. En fonction des protocoles utilisés, il existe de nombreux types de réseaux de communication en jeu. L'Ethernet industriel est l'utilisation d'Ethernet dans un environnement industriel avec des protocoles tels que Ethernet/IP, Profinet, Modbus-TCP, EtherCAT, PowerLink, OPC-UA, CC-Link IE, etc., qui offrent un déterminisme et un contrôle en temps réel. Au fur et à mesure que la technologie numérique a progressé, les technologies de communication telles que Fieldbus ont pris le contrôle du domaine de l'automatisation. En effet, il permet de parler à plusieurs appareils à la fois, ce qui permet d'économiser de l'argent, utilise moins de ressources et entraîne beaucoup moins de travail. Voici un aperçu de certains réseaux de communication industriels importants que les systèmes de contrôle utilisent aujourd'hui [43].

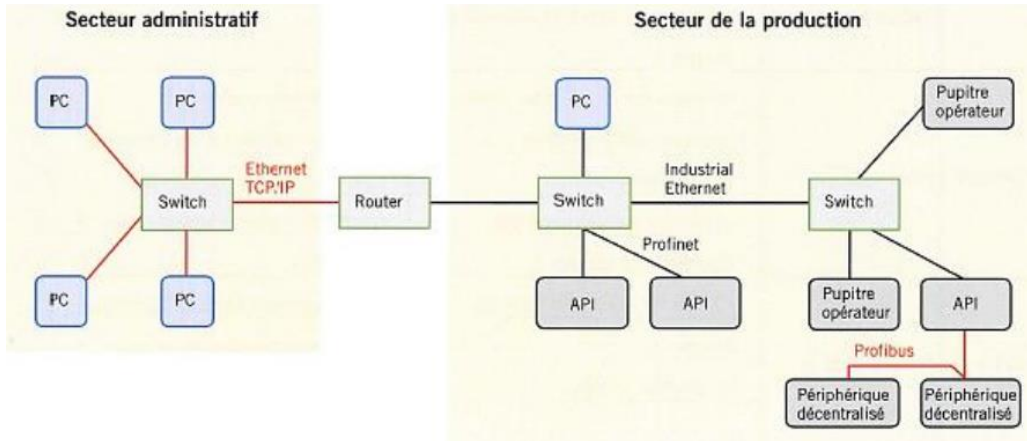


Figure 2.8 Exemple d'un reseau TCP / IP, Industriel Ethernet Profinet et Profibus

b. Bus de terrain

Un bus de terrain est basé sur la restriction du modèle OSI à 3 couches :

1. Couche Application
2. Couche Liaison
3. Couche Physique

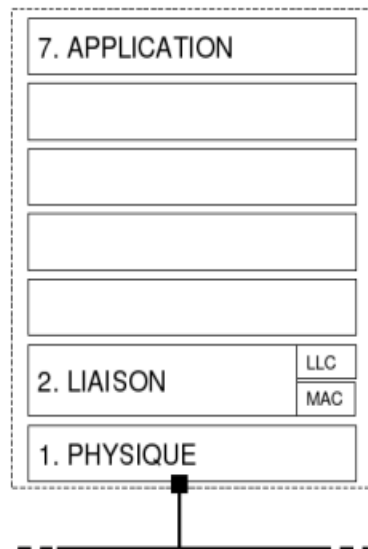


Figure 2.9 Modèle OSI à 3 couche

C'est un réseau bidirectionnel, sériel, multi branche (multi drop), reliant différents types d'équipements : E/S déportées, Capteur / Actionneur, Automate programmable (API), CNC, Calculateur, PC Industriel, [44].

Un bus de terrain est donc un système de communication entre plusieurs ensembles communiquant dans une zone géographique limitée (capteurs, calculateurs, automates, deux actionneurs, ...), et possède types de model.

1. Model à couche

Le Un protocole est le langage commun (règles de dialogue) que doivent connaître et utiliser deux couches homologues (couche de même niveau) pour dialoguer. Le modèle OSI est une base de référence pour identifier et séparer les différentes fonctions d'un système de communication basé sur une structure en couches. Chaque couche (matérielle, logicielle) assure un ensemble de fonctions spécifiques. Chaque couche utilise les services de la couche immédiatement inférieure pour rendre à son tour un service à la couche immédiatement supérieure.

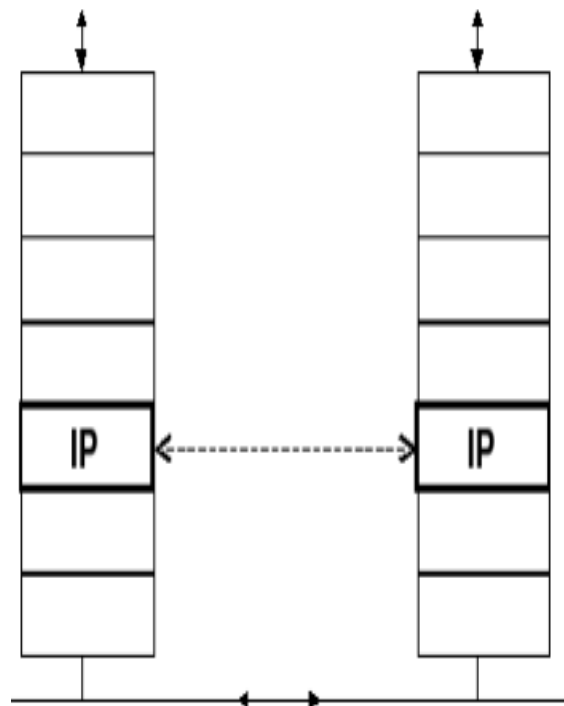


Figure 2.10 Couche de mémé niveau

2. Modèle OSI

Le modèle OSI possède 7 couches ou niveaux qui définissent les fonctions des protocoles de communication qui vont de l'interface physique à l'interface des applicatifs utilisant le réseau. En raison de son apparence, la structure est très souvent appelée pile ou pile de protocoles.

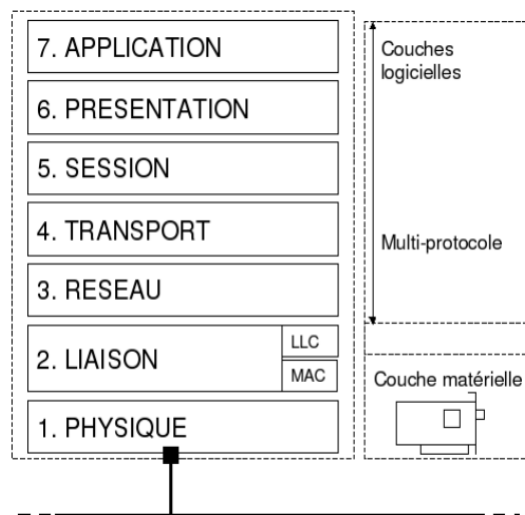


Figure 2.11 Pile de protocole

Les bus de terrain présentent des avantages tel que le Câblage simplifié - réduction des frais d'installation - conception, installation et mise en service plus rapides, maintenance simplifiée et plus efficace - accès aux informations d'état des périphériques – détection facilitée des défauts - réparations plus rapides, performances plus élevées - facilite la décentralisation de la commande - données des périphériques accessibles partout, modularité - machines plus modulaires, - flexibilité d'extension - connexions « à chaud » (hot-plug).

Ce pendant les bus de terrain présentent aussi des inconvénients parmi eux une technologie plus complexe, L'accès au bus requiert des périphériques plus sophistiqués (logique programmée), gestion des limites de performance, coûts Logistiques supplémentaires, outils spécialisés plus coûteux et plus complexes et le manque de compatibilité et de normalisation (CEI : 8 à 19 bus incompatibles dans une norme), chaque fournisseur de composants ne couvre qu'un choix restreint de bus de terrain.

L'objectif des réseaux de terrain ou bus de terrain doivent permettre La connexion de plusieurs entités d'un même système sur un même support de communication dans une zone géographique limitée (usine, atelier, automobile électronique

embarquée...), assuré le transport fiable de données sous une forme numérique d'un équipement vers un autre, l'ajout ou la suppression d'éléments au sein d'un même système (réduction ou extension du réseau) et Le respect de contraintes (notamment temps réel). Les caractéristiques principales à prendre compte sont La sûreté de fonctionnement : perte ou détérioration d'informations (détection des erreurs), pannes d'équipements (détection et recouvrement des pannes), disponibilité et coût des équipements, capacité d'interconnexion à des équipements hétérogènes Distance : réseaux de faible taille (répartition géographique des équipements limitée), Volume : quantité faible de données (notion d'évènement, variables processus, ...), les contraintes de temps (notion de temps réel, déterminisme, ...), Nombre d'équipements connectables, contraintes liées à l'environnement (température, vibrations, etc.). Généralement la classification regroupe sous le terme « bus de terrain » tous les bus de Communication industriels. On distingue néanmoins par complexité décroissante : Le bus d'usine («data bus») : réseau local industriel (RLI) permet la communication entre l'automatisme et le monde informatique souvent basé sur Ethernet, le bus de terrain («field bus» et «device bus») : interconnexion des unités de traitement et des périphériques, le bus de bas niveau (« sensor bus ») : bus capteur / actionneur.

Actuellement, il existe plusieurs spécifications différentes de réseaux de terrain (CAN, LON, Profibus-FMS/PA, WorldFip, Interbus, Profibus-DP, ASInterface, Bitbus, Arcnet, Sercos, Modbus Plus, Modbus/Jbus, Bus DIN, etc.) [45]. La figure suivante donne une classification de quelques réseaux de terrain selon la complexité de leurs équipements et le flot d'informations échangées.

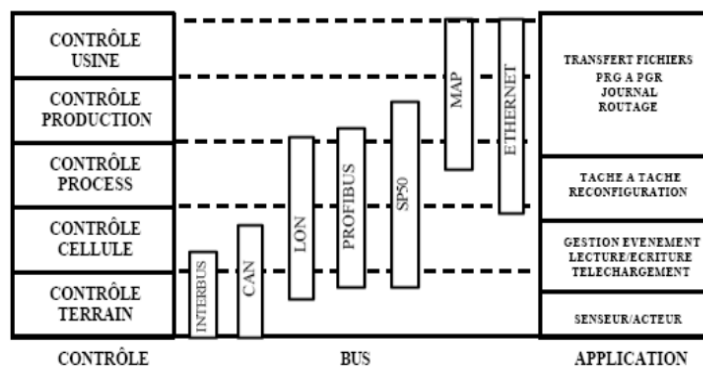


Figure 2.12 Classification des bus de terrain selon la fonction

Perspective d'OSI

Au niveau de son utilisation et implémentation, et ce malgré une mise à jour du modèle en 1994, OSI a clairement perdu la guerre face à TCP/IP. Seuls quelques grands constructeurs dominant conservent le modèle mais il est amené à disparaître d'autant plus vite qu'Internet (et donc TCP/IP) explose. Le modèle OSI restera cependant encore longtemps dans les mémoires pour plusieurs raisons. C'est d'abord l'un des premiers grands efforts en matière de normalisation du monde des réseaux. Les constructeurs ont maintenant tendance à faire avec TCP/IP, mais aussi le WAP, l'UMTS etc. ce qu'il devait faire avec OSI, à savoir proposer des normalisations dès le départ. OSI marquera aussi les mémoires pour une autre raison : même si c'est TCP/IP qui est concrètement utilisé, les gens ont tendance et utilisent OSI comme le modèle réseau de référence actuel. En fait, TCP/IP et OSI ont des structures très proches, et c'est surtout l'effort de normalisation d'OSI qui a imposé cette "confusion" générale entre les 2 modèles. On a communément tendance à considérer TCP/IP comme l'implémentation réelle d'OSI.

2.2. Les Systèmes de Commande en réseaux (SCR)

2.2.1. Introduction

Un système de contrôle ou un système de commande est un dispositif ou un ensemble de dispositifs permettant de gérer, de commander ou de réguler le comportement d'autres dispositifs ou systèmes. En ingénierie et en mathématiques, la théorie de la commande traite des divers aspects qui permettent d'étudier, de corriger ou d'influencer le comportement des systèmes dynamiques. Depuis de nombreuses années, les chercheurs automaticiens ont fourni des techniques et des stratégies de commande précises et optimales issues de la théorie classique de la commande, allant de la commande en boucle ouverte aux stratégies de contrôle sophistiquées basées sur les réseaux de neurones, la logique floue ou les algorithmes génétiques.

Le développement technologique et l'avènement des réseaux de communication ont permis l'introduction d'un nouveau paradigme basé sur le concept de la commande à distance d'un système, qui a donné naissance aux systèmes de commande en réseau (SCR). La définition d'un SCR peut être la suivante : lorsqu'un système de commande traditionnel avec rétroaction est bouclé via un canal de communication, qui peut être partagé avec d'autres nœuds en dehors du système de commande, alors ce système est appelé un SCR [46]. Un SCR peut

également être défini comme un système de commande à rétroaction dans lequel les boucles de commande sont fermées via un réseau de communication en temps réel.

La caractéristique déterminante d'un SCR est que les informations (entrée de référence, sortie du système commandé, entrée de commande, etc.) sont échangées à l'aide d'un réseau de communication entre les différents composants du système de commande (capteurs, contrôleurs, actionneurs, etc., voir Fig. 2.2.1).

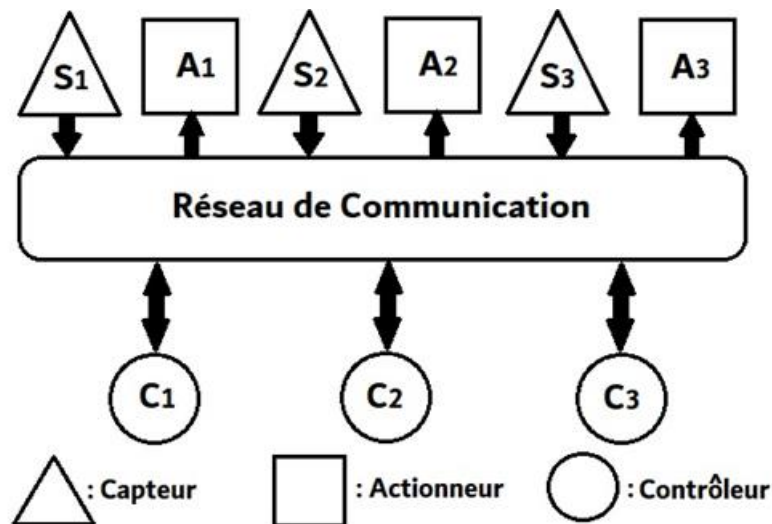


Figure 2.2.1 Structure-type d'un système de commande en réseau
(Réseau partagé)

Les systèmes de commande en réseaux présentent des avantages indéniables ainsi de mise en réseau de données sont largement utilisées dans les applications qu'un large spectre d'applications. En effet, depuis de nombreuses années, les technologies de la commande industrielle. Ces applications incluent les industries manufacturières, l'industrie automobile, les industries chimiques ou pétrochimiques, etc.

La connexion des composants du système de commande dans ces applications, tels que les capteurs, les contrôleurs et les actionneurs, via un réseau de communication peut réduire efficacement la complexité des systèmes avec une meilleure optimisation des investissements et de l'allocation des ressources. De plus, les contrôleurs connectés au réseau permettent un partage efficace des données. Il est, alors, plus facile de fusionner les informations globales pour prendre des décisions intelligentes dans la gestion d'une installation industrielle occupant un espace géographique étendu. L'architecture SCR permet l'élimination des câblages inutiles ainsi que de rendre plus facile la reconfiguration du système en ajoutant plus

de capteurs, d'actionneurs et de contrôleurs à moindre frais et sans modifications structurelles importantes de l'ensemble du système. Plus important encore, les SCR permettent la connexion entre le cyberspace à l'espace physique, ce qui facilite d'avantage l'exécution à distance des tâches. Ces systèmes sont de plus en plus réalisables aujourd'hui et ont de nombreuses applications potentielles [47], [48], y compris les explorations spatiales, l'exploration terrestre, l'automatisation des usines, le diagnostic et le dépannage à distance, l'exécution des tâches dans les environnements dangereux, la télé-robotique et télé-opération, pour ne citer que quelques-uns.

2.2.2. Bref historique sur les SCR

L'avènement d'Internet, un réseau planétaire, a constitué une base pour l'apparition de millions de petits réseaux nationaux, universitaires, commerciaux, industriels et gouvernementaux, qui, ensemble, transportent des informations et des services, tels que le courrier électronique, le transfert de fichiers, les pages Web interconnectées et d'autres documents ou applications accessibles sur *la toile*. Au cours des dernières années, il y a également eu une augmentation considérable du déploiement des systèmes sans fil, ce qui a encouragé d'avantage le développement et la recherche dans le domaine des SCR distribués. Alors que le concept SCR commençait à se développer en raison de son potentiel dans diverses applications, il a également posé de nombreux défis aux chercheurs pour la réalisation d'un système de commande fiable et efficace à travers les réseaux de communication. Ainsi, le domaine SCR a fait l'objet de recherches pendant les trois dernières décennies et a donné lieu à de nombreuses thématiques importantes de recherche. Une grande partie de la littérature produite dans le domaine des SCR se concentre sur la modélisation des SCR et les stratégies de commande qui leur sont adaptés [49], [50], [51], [52], [53]. Un autre axe de recherche important concernant les SCR est l'étude de la structure du réseau nécessaire pour jouer le rôle d'un canal de communication fiable et sécurisé avec une bande passante suffisante, ainsi que le développement de protocoles de communication de données adéquats pour les systèmes de commande [49], [54], [55]. La collecte d'informations en temps réel sur un réseau à l'aide de capteurs distribués et le traitement efficace des données des capteurs sont des domaines de recherche importants qui complètent les travaux directement dédiés aux SCR. Ainsi, le paradigme SCR n'a pas seulement ouvert des perspectives sur un domaine de recherche multidisciplinaire combinant les réseaux informatiques, la communication, le traitement du signal, la robotique, les technologies de l'information et la théorie de la commande, mais il a poussé également les chercheurs à explorer les voies menant à la

création d'un système unique rassemblant tous ces éléments et fonctionnant efficacement, en harmonie, sur un réseau de communication [56].

2.2.3. Catégorisation des SCR

La catégorisation des systèmes de commande en réseau peut s'effectuer selon des points de vue différents : le premier est basé sur *la structure* matérielle du système, le deuxième prend en considération les *contraintes temporelles* de l'application de commande elle-même, tandis que le troisième est concerné par le degré d'implication du *facteur humain* dans l'opération du système.

Du point de vue de la *structure*, les deux principaux types de systèmes de commande qui utilisent des réseaux de communication sont :

- (a) les systèmes de commande à réseau partagé et,
- (b) les systèmes de commande à distance.

L'utilisation de ressources *réseau partagées* pour transférer les mesures, des capteurs aux contrôleurs et les signaux de commande générés par les contrôleurs vers les actionneurs, peut réduire considérablement la complexité des connexions. Cette méthode, comme le montre la figure 2.2.1, est systématique et structurée et offre plus de flexibilité dans l'installation et facilite la maintenance et le dépannage. De plus, les réseaux permettent la communication entre différentes boucles de commande. Cette fonctionnalité est extrêmement utile lorsqu'une boucle de commande doit échanger des informations avec d'autres boucles de commande pour effectuer des commandes sophistiqués, tels que prise en charge des défauts dans la stratégie de commande. De telles structures de commande basées sur les réseaux ont été appliquées aux automobiles et aux installations industrielles.

D'autre part, *un système de commande à distance* peut être considéré comme un système commandé par un contrôleur éloigné géographiquement. Ceci est parfois appelé commande par télé-opération. Les systèmes d'acquisition de données à distance et les systèmes de surveillance à distance peuvent également être inclus dans cette classe de systèmes. L'endroit d'installation du contrôleur central est généralement appelé "*site local*", tandis que l'endroit où se trouve le système sous commande est appelé "*site distant*".

Il existe deux approches générales pour concevoir un SCR à distance. La première approche consiste à avoir plusieurs sous-systèmes formant une *structure hiérarchique*, dans laquelle chacun des sous-systèmes contient un capteur, un actionneur et un contrôleur dédié au sous-système, comme le montre la figure 2.2.2. Ces composants du système sont rattachés à la même centrale de commande à travers le réseau. Dans ce cas, le contrôleur d'un sous-

Le système reçoit une consigne du contrôleur central C_M . Le sous-système est conçu pour satisfaire lui-même cette consigne. Les données du capteur ou le signal d'état sont retransmis via le réseau au contrôleur central.

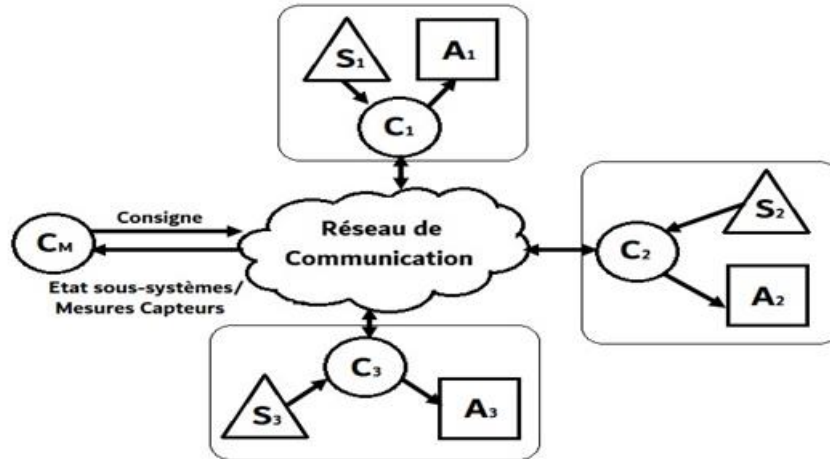


Figure 2.2.2 Transfert de données dans une structure hiérarchique

La deuxième approche de la commande en réseau est la *structure directe*, comme le montre la figure 2.2.3. Cette structure comporte un capteur et un actionneur d'une boucle de régulation attachés à une installation ou un procédé et connectés directement à un réseau, tandis que le contrôleur est situé à l'autre bout du réseau de communication.

Les structures hiérarchiques et directes ont leurs propres avantages et inconvénients et de nombreux systèmes de commande en réseau sont une combinaison hybride des deux structures [57], [58], [59].



Figure 2.2.3 Transfert de données dans une structure directe

D'autre part, selon le point de vue de la contrainte temporelle, les applications de commande en réseau peuvent être divisées en deux catégories :

- (a) les applications critiques/sensibles au temps (délais/retard) et,
- (b) les applications insensibles aux délais.

Dans les applications sensibles au retard, le temps est critique, c'est-à-dire que si le temps de retard dépasse une limite tolérable spécifiée, l'installation ou le dispositif peut être endommagé ou produire des performances médiocres et non acceptables. Un exemple des applications sensibles aux retards sont la télé-opération via des réseaux pour les opérations de lutte contre les incendies, les opérations sous-marines, la manutention des produits nucléaires ou autres produits dangereux. Pour les applications insensibles aux délais ce sont généralement des tâches ou des programmes qui s'exécutent en temps réel mais dont les délais ne sont pas critiques.

Pour le classement des SCR en fonction de l'implication et de l'interférence du facteur humain dans la boucle de commande, on peut distinguer :

- (a) Systèmes *téléopérés* avec opérateur humain,
- (b) *Télé-opération* sans intervention humaine,

Dans le cas des Systèmes téléopérés avec opérateur humain, un opérateur humain commande à distance les actionneurs (robots, bras, véhicules sans pilote) situés à différents emplacements géographiques. Le retour vers l'opérateur est principalement visuel (vidéo ou image en temps réel). La précision et l'exactitude du fonctionnement du système dépendent des compétences de l'opérateur, du retard temporel dans la boucle de rétroaction et de la distorsion des signaux [60]. Il existe diverses applications pour de tels systèmes comme les laboratoires virtuels distribués, les systèmes de chirurgie à distance [61], la robotique de terrain, etc. Les problèmes liés à ces systèmes peuvent provenir de la précision de la perception humaine, du retour de force vers l'opérateur, du retard induit par le réseau, de la prédiction de la commande, de l'ergonomie, la sécurité, la portabilité du système, etc. Pour de meilleures performances, il existe de nombreux outils technologiques qui sont développés pour garantir un retour d'information précis vers les opérateurs tels que la réalité virtuelle (VR), les télévisions interactives, l'environnement de visualisation 3D, etc. [62], [63].

Dans les systèmes de télé-opération sans intervention humaine, l'intelligence du facteur humain est remplacée par une "*intelligence machine*" intégrée à l'intérieur des modules du contrôleur. Dans ces systèmes, les données du capteur et les données de rétroaction de l'actionneur sont directement transmises au contrôleur via le réseau ou elles sont traitées a

l'aide de l'intelligence intégrée pour générer les décisions appropriées sous forme de signaux de commande appliqués aux actionneurs. Dans ce cas, on peut également parler de systèmes de commande autonomes en réseau où le contrôleur de surveillance n'est pas un être humain mais une machine dotée d'une intelligence artificielle. De tels systèmes ne dépendent donc pas de la perception humaine et ne nécessitent pas d'opérateurs qualifiés ou formés. Cependant, le développement d'algorithmes intelligents et efficaces de traitement des données pour la commande de supervision est très important. Les contrôleurs de supervision peuvent utiliser des techniques telles que l'apprentissage automatique, les réseaux de neurones et les algorithmes d'intelligence artificielle pour prendre des décisions de fonctionnement intelligentes. Ils existent, également des systèmes téléopérés hybrides où l'opérateur humain est assisté par des contrôleurs et des actionneurs dotés d'une intelligence distribuée pour augmenter l'efficacité des opérations sur le réseau.

2.2.4. Éléments constitutifs d'un SCR

Quelle que soient les caractéristiques d'un SCR, la catégorie à laquelle il appartient ou les modalités utilisées pour connecter et configurer le matériel et les ressources logiciels nécessaires pour doter le système de commande en réseau de certaines capacités, les éléments constitutifs d'un SCR et sa configuration doivent répondre à des exigences fonctionnelles de base afin d'accomplir pleinement les tâches prédéfinies. Les fonctions de base dans un SCR sont :

- (a) L'acquisition de l'information (capteurs),
- (b) La commande des actionneurs (contrôleurs),
- (c) La communication et,
- (d) Les actionneurs.

Comme son nom l'indique, *l'acquisition de l'information* est directement liée à l'étude et au développement des capteurs qui sert à mesurer et à quantifier les différentes variables qui décrivent l'état dynamique d'un système. A cela s'ajoute le traitement des données collectées et le traitement des signaux émanant des capteurs. Les applications potentielles des réseaux de capteurs à grande échelle dans divers domaines tels que l'agriculture de précision, la surveillance géophysique et environnementale, les soins de santé à distance et la sécurité suscite un enthousiasme croissant parmi les chercheurs [64]. Les progrès rapides du matériel de détection, des techniques de communication câblée ou sans fils et de l'informatique à faible consommation d'énergie ont entraîné une profusion de systèmes de capteurs disponibles sur le marché. Un SCR doit assurer la fonction de collection des données pertinentes à l'aide des capteurs distribués en différents points du système sous commande. Les données des capteurs

peuvent, par exemple, prendre la forme de signaux représentant des variations des températures, des pressions, des poids, des déplacements linéaires ou angulaires, des vitesses etc., ou sous forme de blocs tels que des images, des tableaux, des flux vidéo, etc. Cela soulève des questions importantes telles que : (i) Besoins en bande passante pour le transfert de données dans le réseau, (ii) Stratégies de collecte de données dans le cas d'une multitude de capteurs ou, (iii) Fiabilité, consommation d'énergie des capteurs intégrés au SCR. La fusion des capteurs et les réseaux de capteurs [65], [66] sont des domaines de recherche très vastes qui permettent d'améliorer l'acquisition de l'informations dans un réseau. Le développement des logiciels intermédiaires et des systèmes d'exploitation spécifiques pour que les nœuds de capteurs envoient efficacement les données collectées dans le réseau [67], [68], la sécurité et la fiabilité de l'information [69], l'économie de l'énergie dans les réseaux de capteurs [70] sont les principaux axes de recherche liés à l'acquisition d'informations. Les réseaux de capteurs promettent de faciliter le traitement de données à grande échelle et en temps réel dans des environnements complexes. Les données d'image sont utilisées pour des applications telles que la surveillance [64], la navigation robotique [71], le suivi de cible [72] et la télé-opération, etc. Avec les progrès dans le domaine de la vision par ordinateur et du traitement d'image, il existe de nombreux algorithmes disponibles pour traiter les images pour la reconnaissance de formes et l'extraction de caractéristiques. De nombreux systèmes et algorithmes ont été développés en utilisant des capacités de détection visuelles pour contrôler les véhicules terrestres et aériens [73], [74].

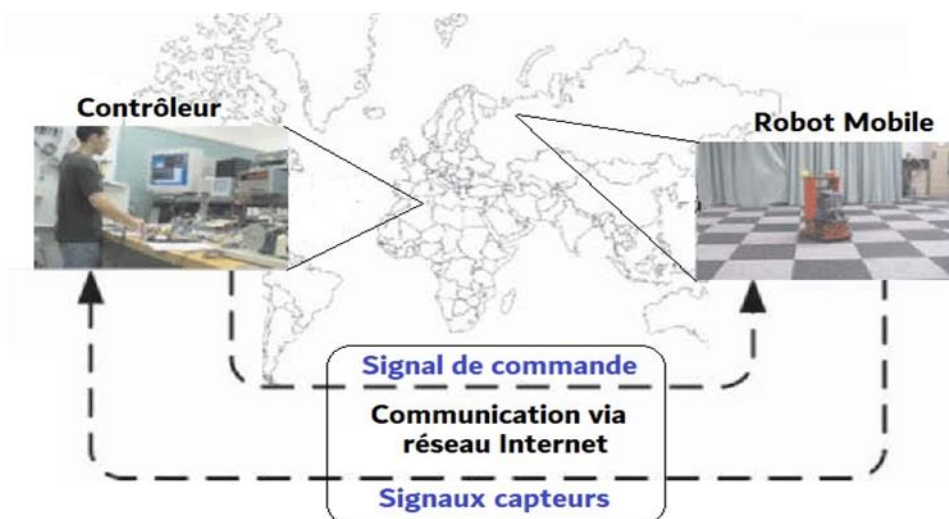


Figure 2.2.4 Illustration d'une commande par téléportation à distance d'un robot mobile

L'évolutivité ou la capacité d'évolution et d'extension est l'un des plus grands avantages d'un système commandé sur un réseau. Comme il est possible d'ajouter de nombreux capteurs connectés via le réseau à différents endroits, il est également envisageable d'avoir un ou plusieurs *actionneurs* connectés à un ou plusieurs *contrôleurs* via le réseau. Il est notable que les plus grands efforts de recherche dans le domaine des SCR sont axés sur les stratégies de commande précises, optimales et stabilisantes issues de la théorie de la commande. Ceux-ci prennent leurs racines dans la commande PID classique, la commande optimale, la commande adaptative, la commande robuste, la commande intelligente et de nombreuses autres formes avancées d'algorithmes de commande. L'application de toutes ces stratégies de commande sur un réseau devient cependant une tâche difficile.

Les différentes questions à prendre en compte et les solutions proposées pour un fonctionnement réussi et efficace d'un SCR seront abordées dans les sections suivantes de ce chapitre.

Etant l'épine dorsale du SCR, la fiabilité du *canal de communication*, sa sécurité, sa facilité d'utilisation et sa disponibilité sont au centre des préoccupations lors du choix du type de communication ou de transfert de données. Aujourd'hui, de nombreux modes de communication sont disponibles allant des lignes téléphoniques, des réseaux de téléphonie mobile, des réseaux satellites et, le réseau le plus large et le plus largement utilisé qu'est l'Internet. Effectivement, le choix du réseau dépend de l'application à servir. Internet est le choix le plus approprié et le moins coûteux pour de nombreuses applications où le système sous commande et le contrôleur sont géographiquement éloignés l'un de l'autre (comme le montre la Figure 2.2.4, où le contrôleur et le robot sous commande sont géographiquement éloignés et connectés via le réseau Internet [75], [76]. Il convient de noter que les applications sensibles telles que militaires, chirurgicales et autres applications médicales d'urgence peuvent utiliser des réseaux optiques dédiés pour assurer une vitesse rapide et une communication de données fiable et fortement sécurisée.

2.2.5 Défis et Problématiques des SCR

Après avoir passé en revue les différentes catégories, composants et applications du SCR, nous décrivons maintenant les différents défis et problèmes à prendre en compte pour un SCR fiable. Comme déjà indiqué ci-dessus, les applications SCR peuvent-être globalement classés en deux catégories principales : (1) les applications sensibles au temps où les fonctions de commande doivent-être minutieusement synchronisées dans le temps telles que les opérations militaires, spatiales et de navigation [77]; (2) Applications insensible au temps telles que le

stockage de données, la collecte de données de capteurs, le courrier électronique, etc. Cependant, la fiabilité du réseau est un facteur important pour les deux types de systèmes. Le réseau peut introduire des niveaux de service non fiables et dépendants du temps en termes, par exemple, de retards, de gigue ou de pertes. La qualité de service (QoS/Quality of Service) peut améliorer le comportement du réseau en temps réel, mais le comportement du réseau est toujours sujet aux interférences (en particulier dans les médias sans fil), aux phénomènes transitoires de routage et aux incertitudes liées au flux des données. À leur tour, les aléas du réseau peuvent compromettre la stabilité, la sécurité et les performances des éléments constitutifs du SCR [49], [51]. L'un des problèmes difficiles rencontrés dans la commande des systèmes basés sur les réseaux est lié à la latence ou le retard de transmission des signaux induit par le réseau et ses effets sur les performances du SCR. En effet, Le temps nécessaire pour lire une mesure de capteur, la transmettre à un contrôleur distant, puis calculer la commande et l'envoyer vers l'actionneur via le réseau dépend des caractéristiques du réseau telles que la topologie, les schémas de routage et les capacités de calcul. Par conséquent, les performances globales d'un SCR peuvent être affectées de manière significative par les retards du réseau. Les effets néfastes du problème de retard peuvent être, encore, aggravés par les pertes des paquets ou corruption des trames de données lors d'une transmission. En fait, les retards et les pertes de données dégradent non seulement les performances du système de commande basé sur le réseau, mais ils peuvent également le déstabiliser et compromettre sérieusement la sécurité de toute l'installation.

En générale, les défis essentiels que doit surmonter un SCR pour bien fonctionner peuvent-être résumés dans les *trois* points suivants :

a. Stabilité du système de commande et compensation des retards

Depuis de nombreuses années, les chercheurs ont proposé et testé des stratégies de commande basées sur la théorie classique de la commande et de nombreuses autres formes avancées d'algorithmes de commande. Mais ces stratégies de commande doivent être adaptées et modifiées en fonction des exigences de l'application pour qu'elles fonctionnent de manière fiable sur un réseau de communication afin de compenser les retards induits par le réseau et les imprévisibilités et incertitudes inhérentes à la nature du réseau et au processus de transmission des données. La figure. 2.2.5 affiche le modèle SCR typique avec les délais pris en compte. Les délais de prétraitement et de mise en file d'attente d'un paquet de données avant sa transmission sur le chemin directe ou le chemin de rétroaction sont dénotés $\tau_k^{wait_c}$ et

$\tau_k^{wait_s}$, respectivement. Les délais de transmission induits par le réseau sont τ_k^{ca} et τ_k^{sc} pour les chemins contrôleur-actionneur et capteur-contrôleur, respectivement. Comme il sera montré dans les chapitres suivants, l'influence du retard sur la stabilité du SCR est un facteur très important à prendre en considération. Différentes approches mathématiques, heuristiques et statistiques sont adoptées pour la compensation de retard dans un SCR. Par exemple, Yu et Yang [53] ont suggéré un modèle de commande prédictive pour surmonter les influences négatives du délai stochastique, ce qui pourrait améliorer les performances grâce à l'application de la technique d'adaptation du modèle (model matching) et à la compensation prédictive multi-étapes de la sortie. Wang et Wang [78] ont suggéré une solution de compensation de retard selon une procédure itérative d'un problème de minimisation d'une inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality, LMI), elle-même basée sur l'algorithme de linéarisation par complémentarité conique. Cette problématique de la stabilité d'un SCR en face des retards induits par le réseau sera le point focal des travaux de cette thèse.

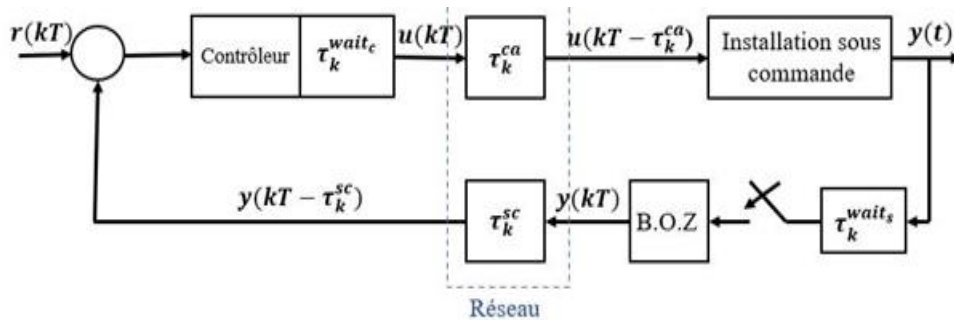


Figure 2.2.5 Structure d'un SCR intégrant les délais induits par le réseau

b. Ordonnancement et allocation de la bande passante

Alors que les SCR sont généralement des systèmes multi-capteurs et multi-actionneurs reliés aux contrôleurs à travers un réseau de communication, une attention particulière doit être accordée à la bande passante disponible et son exploitation de manière optimale et efficace. Cela soulève, en outre, le besoin de décisions prioritaires et de problèmes de planification et d'ordonnancement pour contrôler une série d'actionneurs destinés, chacun, à une série de tâches [79]. Différentes méthodes d'ordonnancement et stratégies d'allocation de bande passante ont été développées pour les SCR au cours des deux dernières décennies [80], [55]. Il existe également de nombreux outils comme la modélisation par réseaux de Petri, la programmation dynamique non linéaire, les outils de l'intelligence artificielle ou les

algorithmes génétiques développés pour l'ordonnancement des systèmes de commande en réseau. Kim et al. [81] ont formulé une méthode pour obtenir un délai maximal admissible lié à l'ordonnancement des systèmes de commande en réseau en termes d'inégalités matricielles linéaires. Dans Walsh et al. [79], le trafic réseau est modélisé comme un processus suivant une distribution de Poisson. Les auteurs présentent une comparaison entre un algorithme avec file d'attente FIFO (First-In-First-Out/Premier-Entré-Premier-Sorti) et un algorithme TOD (Try-Once-Discard) qui n'a pas de file d'attente. Dans le cas FIFO, le capteur intelligent échantillonne périodiquement la sortie et place la valeur de la mesure dans la file d'attente FIFO alors que dans le cas TOD, les données sont carrément supprimées si le réseau n'est pas disponible. Les essais effectués montrent la supériorité de la technique TOD proposée par les auteurs. Li et Chow ont proposé un ordonnancement du taux d'échantillonnage pour résoudre le problème de la fidélité du signal et conserver la transmission des données disponibles [82], [83].

c. Sécurité du réseau

Dans tout ce qui précède, il est notable l'importance du réseau de communication pour le flux des signaux de commande vers les actionneurs et des signaux de mesure vers l'unité de contrôle, ceci amène à poser la question importante de la sécurité de l'information sur le réseau.

Dans la réalité, tout support réseau, en particulier le support sans fil, est susceptible d'être facilement intercepté et d'être piraté ; il est donc extrêmement important de protéger les données transmises contre les accès non autorisés et les altérations que peuvent subir les données par des attaques menées par des agents malveillants sur le système de transmission. La sécurité du réseau comprend des éléments essentiels dans les dispositifs de sécurité qui assurent le filtrage du trafic, l'intégrité, la confidentialité et l'authentification. Par conséquent, le partage de données, la classification des données et la sécurité des données/réseaux sont de la plus haute importance dans les systèmes de commande en réseau compte tenu des applications sensibles au temps et aux données.

Trois propriétés fondamentales de l'information et des services dans les systèmes d'information et les réseaux informatiques sont mentionnés dans la littérature de la sécurité informatique [84] sous l'acronyme CID : confidentialité, intégrité et disponibilité (Confidentiality, Integrity and Availability : CIA). La confidentialité concerne la dissimulation des données, en veillant à ce qu'elles ne soient connues que des parties autorisées. L'intégrité concerne la fiabilité des données, ce qui signifie qu'il n'y a pas de

modification non autorisée des informations entre la source et la destination. La disponibilité tient compte de l'accès en temps opportun aux informations ou aux fonctionnalités du système.

La figure 2.2.6 illustre les cyber attaques qui violent chaque propriété de sécurité. Dans les trois cas, le capteur envoie le vecteur de mesure $y_k = [a \ b]^T$ au contrôleur via un réseau de communication. Il s'agit d'un message confidentiel, par conséquent, seuls le capteur et le contrôleur doivent connaître le contenu du message.

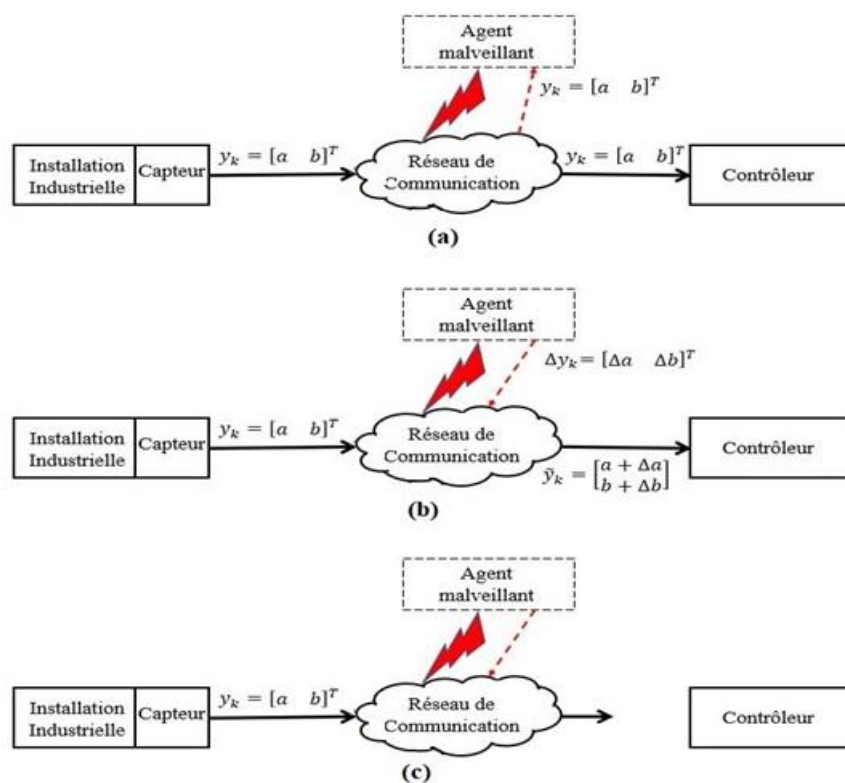


Figure 2.2.6 Types d'attaques malveillantes sur un SCR

Dans la figure 2.2_6(a), l'agent malveillant est capable d'écouter la communication, obtenant ainsi l'accès au contenu du message. Par conséquent, l'attribut de confidentialité est violé. Un autre scénario se produit sur la figure 2.2.6, où l'adversaire réussit à envoyer un faux vecteur de mesure $\tilde{y}_k = y_k + \Delta y_k$ ($\Delta y_k = [\Delta a \ \Delta b]^T$) au contrôleur, comme si c'était le capteur qui l'envoyait. Ici, l'intégrité des données est violée. Dans le dernier exemple, illustré à la figure 2.2.6, le message envoyé par le capteur est tout simplement bloqué et empêché d'atteindre le contrôleur. Dans ce cas, la disponibilité des données a été compromise. Alors que dans les systèmes informatiques, l'impact de ces cyberattaques reste dans le domaine

cybernétique, dans les systèmes de contrôle en réseau, l'impact peut avoir des conséquences désastreuses sur le côté physique des installations industrielles [85].

Dans les systèmes à réseau sans fil, plusieurs protocoles de sécurité tels que le WEP (Wired Equivalent Privacy) ou l'EAP (Extensible Authentication Protocol) sont introduits. Le WEP était un algorithme de sécurité pour les réseaux sans fil 802.11. Introduit dans le cadre de la norme originale IEEE 802.11 ratifiée en 1997, l'objectif était de fournir une confidentialité des données comparable à celle d'un réseau câblé traditionnel. L'EAP est un protocole pour les réseaux sans fil qui étend les méthodes d'authentification utilisées par le protocole point-à-point (Point-To-Point, PPP), un protocole souvent utilisé lors de la connexion d'un ordinateur à Internet. L'EAP est utilisé sur les réseaux cryptés pour fournir un moyen sécurisé pour envoyer des informations d'identification pour garantir la fonction d'authentification réseau [85]. De plus, en raison de la sécurité renforcée fournie par le protocole de sécurité IP (Internet Protocole) dans les réseaux câblés, il est également considéré comme une bonne option pour les systèmes sans fil. Cependant, très peu de recherches sont réalisées sur le compromis entre le renforcement de la sécurité et l'impact sur les performances de fonctionnement en temps réel d'un SCR [86].

Chapitre 3

Stabilisation des SCR sous les contraintes de communication Cas des systèmes continus linéaires

3.1. Introduction

Tout système réel, qu'il soit physique, biologique, chimique, astronomique, électrique, électronique, etc. fonctionne en temps continu et est régi par des équations différentielles. Comprendre le monde dans lequel nous vivons et ainsi comprendre les lois inhérentes à ses organismes, les méthodes mathématiques d'analyse, de synthèse et de conception de systèmes sont en cours de développement depuis des siècles.

Au fil du temps, ces méthodes ont encadré ce que nous appelons maintenant la « théorie des systèmes » couvrant tous les aspects de la modélisation mathématique des structures comprenant des sous-systèmes et même des composants.

Un domaine très spécifique réunit les systèmes électroniques, tels que la navigation, le positionnement, le radar, le sonar, le contrôle, la radiodiffusion, la télévision, les communications, les mesures, la télédétection, etc. avec des domaines d'applications en constante évolution, tels que l'armée, l'exploration spatiale, l'aviation, la bio-ingénierie, la cartographie, l'astronomie, la fabrication, la robotique, la médecine, la métrologie, la science, le divertissement, et cette liste n'est pas exhaustive.

Malgré une histoire relativement courte, les systèmes électroniques ont parcouru un formidable développement dès les premiers jours de la communication par téléphone et par radio jusqu'à la commande automatique (Elisha Gray et Graham Bell, années 1870), (Aleksandr Popov et Guglielmo Marconi, années 1890).

Pendant des décennies le nombre de publications n'a cessé d'augmenter intensément et un volume énorme de documents ont été publiés et associés à différents aspects de la théorie des systèmes et leurs applications. Nous mentionnons de courtes biographies des personnes les plus remarquables qui ont contribué à ce domaine.

Le chapitre suivant est consacré à l'observation et l'analyse des systèmes linéaires continus, dans le domaine temporel. Ce système est représenté avec la réponse impulsionnelle variable

dans le temps, est également représenté dans l'espace d'État ou L'outil principale est le domaine de la réponse fréquentielle.

. Aperçu bibliographique

Les systèmes de contrôle en réseau (NCS) sont souvent rencontrés en pratique pour des domaines d'applications étendus à cause de leur structure adaptée et flexible [87], [89].

Cependant, en pratique les NCS, provoque inévitablement des retards et des pertes de données en raison de l'introduction du réseau de communication [90], [91], ce qui pourrait avoir un impact négatif sur le système, y compris le déclin des performances et l'instabilité.

Ainsi, les problèmes de retard et la perte des données ont attiré une attention considérable dans le domaine du contrôle [87], [88], [92], [100]. Une méthode de vecteur d'état augmenté est proposée dans [94] pour contrôler un système linéaire sur un réseau à retard périodique.

Les retards aléatoires sont discutés dans [97] via une méthodologie de contrôle stochastique optimal. Les pertes de paquets et les retards induits par le réseau ont été regroupés en un seul élément à Xiong et Lam [98] pour étudier la stabilisation des NCS à temps discret.

Pour combiner les pertes de paquets et les retards induits par le réseau en un seul article, Liu et Fridman [99] et Meng et al. [100] étudié la stabilité et la stabilisation des NCS en temps continu.

Ce mémoire considère la conception d'un contrôleur de rétroaction d'état pour la stabilité du système de contrôle en réseau avec des retards de communication aléatoires. Les retards capteur-contrôleur (S-C) et contrôleur-actionneur sont modélisés par deux chaînes de Markov indépendantes. La stabilité de ce système temporisé continu est étudiée à l'aide de la méthode de Lyapunov-Krasovskii . La condition suffisante de stabilité du système de contrôle en réseau est présentée sous la forme d'une LMI.

Les résultats sont appliqués à un système de contrôle en réseau de type Pendule inversé pour montrer la capacité de cette méthode proposée pour les systèmes de réseaux de contrôle linéaire en pratique.

3.2. Les systèmes linéaires retardés

En respect du principe de causalité et de lois de la physique, toute transmission d'information s'accompagne inévitablement d'un certain délai temporel (ou latence), inhérent au temps de propagation entre la source et la destination, ainsi tous les processus physique comportent des retards de transmission dans les chaînes d'action et/ou de mesure qui le composent. Dans certains cas, ces retards peuvent s'avérer très largement inférieurs aux constantes de temps du système (en l'occurrence : des actionneurs) qui constitue le processus, et peuvent être alors négligés. En revanche, si les retards sont du même ordre de grandeur que certaines constantes de temps, ces retards doivent alors être nécessairement pris en compte dans les analyses comportementales et/ou la conception de dispositif de contrôle/commande de tels processus.

Ainsi, l'étude des systèmes à retards a fait l'objet de nombreux travaux en automatique durant ces dernières décennies, en perspective notamment, d'accroître la compréhension des phénomènes qui régissent le comportement dynamique de tels systèmes, de développer des méthodes d'analyse de leurs propriétés (stabilité et autre), et enfin d'établir des techniques de contrôle / commande en regard de ces différentes investigations.

Ce chapitre a pour objectif de présenter un certain nombre de notions et de théorèmes fondamentaux liés aux systèmes à retard.

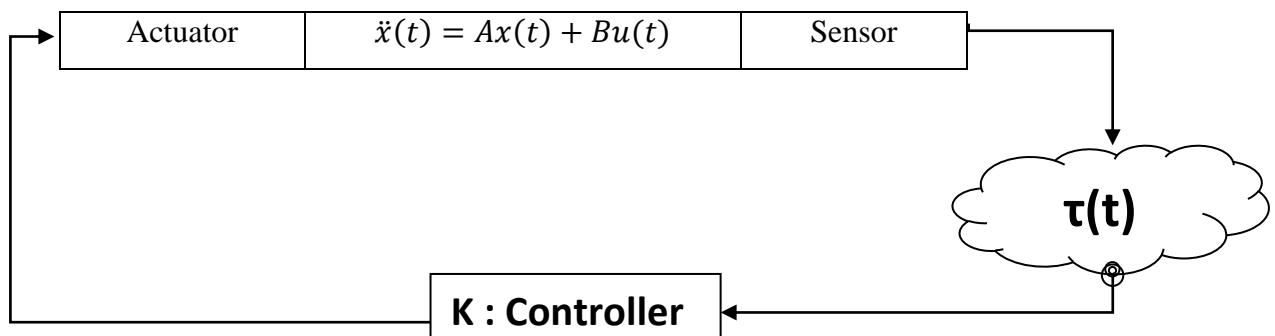


Figure 3.1 Schéma d'un SCR avec retard de transmission dans le sens capteur contrôleur

3.3. Généralités et notions de stabilités

Il est bien connu que la description mathématique (la modélisation) du comportement dynamique d'un système est une étape cruciale pour mener à bien une analyse comportementale et/ou la synthèse d'une loi de commande. Dans de très nombreux cas le

comportement des systèmes dynamiques est décrit par des équations différentielles ordinaires (EDO). En effet, l'étude des phénomènes de transport et de propagation (de matière, d'énergie ou d'information), ainsi que l'analyse de comportement de beaucoup de processus rencontrés en physique, mécanique, économie, chimie, biologie, dynamique des populations, ...etc, montre que dans la pratique nous pouvons très difficilement concevoir l'absence de retard dans un système donné, de plus, dans certains cas, même si le retard apparaît négligeable dans un système donné, de plus, dans certains cas, même si le retard apparaît négligeable dans un système en boucle ouverte, il peut être accru par une fermeture de la boucle (i. e. la mise en place d'un dispositif de contrôle/commande), à travers les voies de transmissions d'informations en provenance des capteurs, ou du temps de calcul de la commande, etc. Conscient de cette réalité, de nombreux travaux ont alors porté sur la modélisation de systèmes dynamiques sous la forme d'équations différentielles intégrant le retard, dans le but vis-à-vis, non seulement de l'état présent, mais aussi des états passés.

Le reste de ce chapitre vise à présenter certaines notions fondamentales relatives aux systèmes à retard, avec un regard porté notamment sur les principaux modèles mathématiques de tels systèmes, le type de retard considéré est le retard variable dans le temps. On traite aussi les deux approches de la stabilité qui sont : l'approche de stabilité indépendante du retard, et certaines méthodes d'analyse (de stabilité) qui en découlent.

a. Etude de la stabilité par la deuxième méthode de Lyapunov

Dans cette section, nous présentons quelques notions de base concernant la stabilité de systèmes à retard, rappelons tout d'abord que la stabilité d'un point d'équilibre d'un système avec ou sans retard, consiste toujours à observer que son évolution reste proche du point d'équilibre lorsqu'on s'en écarte d'un certain voisinage. La stabilité asymptotique, en plus de garantir la condition précédente, indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre, au bout d'un temps éventuellement infini (si on s'écarte légèrement) ; la stabilité exceptionnelle garantit, quant à elle, non seulement le caractère asymptotique mais aussi la rapidité de la convergence.

Dans le cadre des équations différentielles ordinaire, la seconde méthode de Lyapunov, appelée également méthode directe car elle ne nécessite pas la résolution des équations (la connaissance explicite des solutions) repose sur l'existence d'une fonction $V(t)$ définie positive telle que la dérivée $dv(t)/dt$ soit définie négative. Une telle méthode peut être appliquée sans modification majeurs aux systèmes à retards, ce pendant celle-ci présente,

dans le cas général, un inconvénient majeur qui est d'imposer des conditions sévères sur le système pour montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov calculée le long des trajectoires est négative (en effet, cette dérivée n'est plus fonction ordinaire, mais une fonctionnelle : elle dépend aussi de certaines valeurs passées de l'argument t), cette méthode est donc difficilement exploitable pour de nombreux cas de systèmes à retards, deux extensions de la seconde méthode de Lyapunov ont été alors développées d'un côté par Karasovski, dans le cadre des équations différentielles à retards.

b. Stabilité asymptotique

Pour un système dynamique décrit par une équation d'état de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (3.3.1)$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état du système et, $t \in R^+$ est la variable du temps.

Un état d'équilibre x_e du système de l'équation (3.3.1) serait asymptotiquement stable s'il est stable dans le sens de Lyapunov et si chaque solution commençant dans $S(\delta)$; un voisinage immédiat de x_e de rayon δ , converge vers x_e sans se départir d'un voisinage $S(\varepsilon)$, quand t augment indéfiniment. En outre, puisque la stabilité asymptotique est un concept local, établir simplement la stabilité asymptotique peut ne pas signifier que le système fonctionnera correctement.

La connaissance de la taille de la plus grande région de la stabilité asymptotique est habituellement nécessaire. Cette région s'appelle 'le domaine de l'attraction'. Si le domaine d'attraction englobe tous les points de l'espace d'état donc, l'état d'équilibre serait largement asymptotiquement stable et on parle de la stabilité asymptotique large.

En revanche, un état d'équilibre x_e serait instable si pour des nombres réels $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$, il ya toujours un état x_0 dans $S(\delta)$ tels que la trajectoire commençant à x_0 fini en dehors de $S(\varepsilon)$.

c. Fonctions de Lyapunov

- Une fonction scalaire $V(x)$ est dite définie positive dans une région Ω (qui comprend l'origine de l'espace d'état) si $V(x) > 0$ pour tous les états nul x dans la région Ω et $V(0) = 0$.
- Une fonction variable dans le temps $V(x, t)$ est dite définie positive dans une région Ω (qui comprend l'origine de l'espace d'état) si elle est minorée par une fonction

constante dans le temps définie positive, c.à.d. s'il existe une fonction définie positive $V(x)$ tel que :

$$V(x, t) > V(x), \text{ avec } V(0, t) = 0, \forall t_0$$

- Une fonction scalaire $V(x)$ serait définie négative si $-V(x)$ est définie positive.
- Une fonction scalaires $V(x)$ serait semi-définie positive si elle est positive à tous les états dans la région Ω excepté à l'origine et à certains autres états, où elle est zéro
- Une fonction scalaire $V(x)$ serait semi-définies négatives si $-V(x)$ est définie positive.
- Une fonction scalaire $V(x)$ serait indéfinie si dans la région Ω elle assume des valeurs positives et négatives quel que soit la région Ω petite.

Une classe des fonctions scalaires qui joue un rôle important dans l'analyse de stabilité basée sur la deuxième méthode de Lyapunov est la forme quadratique.

Exemple :

$$V(x) = x^t P x = [x_1 x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

Notez que x est un vecteur réel et P est une matrice symétrique réelle. La positivité de la forme quadratique $V(x)$ peut être déterminée par le critère de Sylvester, qui déclare que les conditions nécessaires sont suffisantes pour que la forme quadratique $V(x)$ soit définie positive est que tous les principaux successifs mineurs de P sont positive.

$$P_{11} > 0, \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ \bar{P}_{12} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{P}_{1n} & \bar{P}_{2n} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.3.3)$$

(Noter que $P_{ij} = P_{ji}$) . $V(x) = x^t P x$ est semi-définie positive si P est singulière et tous les principaux mineur sont non négatifs. $V(x)$ est définie négatif si $-V(x)$ est définie positive.

d. Les conditions de la stabilité de Lyapunov des systèmes à retard

Soit un système linéaire invariant dans le temps représenté dans l'espace d'état par les équations mathématiques suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{n \times r}$, $D \in R^{n \times r}$, sont des matrices réel constantes et $U \in R^r$ un vecteur d'entrée et $y(t) \in R^m$ vecteur de sortie, nous considérons dans notre étude $D=0$.

En appliquant un loi de commande par retour d'état de la forme.

$$u(t) = kx(t) \quad (3.3.5)$$

Et considérant que $x(t)$ est retardée par l'effet du réseau la commande sera :

$$u(t) = K x(t - \tau_2) \quad (3.3.6)$$

Appliquant cette loi de commande (1) sur le système :

$$\dot{x} = Ax(t) + B K X(t - \tau) \quad (3.3.7)$$

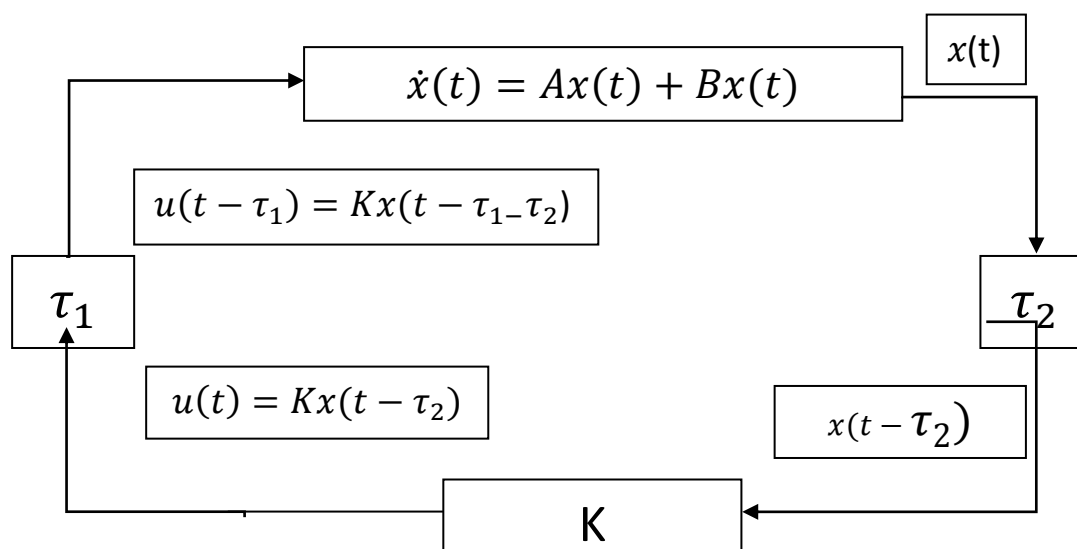


Figure 3.2 Système de contrôle en boucle fermée avec retards

Avec $\tau = \tau_1 + \tau_2$ une fonction de temps qui représente un retard variable inconnu causé par le réseau qui satisfait :

$$0 < \tau(t) < h \quad \text{et} \quad 0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \mu < 1 \quad (3.3.8)$$

Où h, μ sont des limites connues.

Puisque l'étude de la stabilité du système (3.3.7) est une étape cruciale, nous allons présenter deux critères de stabilités différents :

- Stabilité indépendante du retard.
- Stabilité dépendante du retard.

Dans ce travail nous nous intéressons à la stabilité dépendante du retard selon les théorèmes introduit par S.Magdi et E.Boukas.

3.3.1. Théorèmes sur la stabilité des SCRs

Dans cette section nous allons développer les résultats de la stabilité des systèmes à retard concernant les modèles a temps continus.

Les conditions de la stabilité des systèmes indépendants du retard et les systèmes dépendant du retard sont établies en se basant sur la 2^{ème} méthode de Lyapunov.

En effet les conditions de la stabilité des systèmes indépendants du retard et dépendant du retard sont transformés en une existence d'une matrice symétrique.

Le système linéaire à étudier est représenté par :

$$\dot{x} = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3.3.9)$$

Où : $x \in R^n$ est le states, $A \in R^{n \times n}$, $A_d \in R^{n \times n}$ sont des matrices constante et τ est un temps continu variant ayant comme facteur retardé.

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau^*, 0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \tau^+ \leq 1 \quad (3.3.10)$$

Où : τ^*, τ^+ sont connus comme des valeurs limitées. Comme la stabilité du système [101] est crucial, en premier nous développons d'abord comme résultats deux théorèmes de stabilité :

- La Stabilité indépendante et dépendante du retard

3.3.2. Stabilité indépendante du retard

Ici nous nous concentrons seulement sur la nomination du système et prenant en considération l'hypothèse suivante :

$$\lambda(A) \in C^- \quad (\lambda(A) \text{ Représente les valeurs propres de } A)$$

Théorème 1

Suivant l'hypothèse précédant, le système (3.3.9) est asymptotiquement stable indépendamment du retard s'il existe deux matrices $0 < P = P^t \in R^{n \times n}$ et $0 < Q = Q^t \in R^{n \times n}$ satisfaisant l'intégralité linéaire matricielle :

$$\begin{bmatrix} PA + A^t P + Q & PA_d \\ A_d^t P & -Q_\tau \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.11)$$

Démonstration

Introduction de la fonction $V_1(x_t)$ de Lyapunov-krasovski sous la forme (3.3.12)

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= x^t(t)P x(t) + \int_{t-\tau}^t x^t(\theta)Qx(\theta)d\theta \\ &= V_{11}(x_t) + V_{12}(x_t) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Avec $V_{11}(x_t) = x^t(t)Px(t)$ et $V_{12}(x_t) = \int_{t-\tau}^t x^t(\theta)Qx(\theta)d\theta$

Où :

$$0 < P = P^t \in R^{n \times n} \quad \text{et} \quad 0 < Q = Q^t \in R^{n \times n}.$$

On procède par le calcul de la dérivée de $V_1 = (x_t)$

$$V_1(\dot{x}_t) = \dot{V}_{11}(x_t) + V_{12}(\dot{x}_t)$$

Alors :

$$V_{11}(\dot{x}_t) = \dot{x}^t(t)P\dot{x}(t) + x^t(t)P\dot{x}(t)$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{x}^t(t) &= (Ax(t) + A_d x(t-\tau))^t \\ &= (Ax(t))^t + (A_d x(t-\tau))^t \\ &= x(t)^t A^t + x(t-\tau)^t A_d^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{11}(x_t) &= [x(t)^t A^t + x(t-\tau)^t A_d^t]x(t) + x^t(t) P [Ax(t) + A_d x(t-\tau)] \\ &= x(t)^t A^t P x(t) + x(t-\tau)^t A_d^t P x(t) + x^t(t) P Ax(t) + x^t(t) P A_d x(t-\tau) \\ &= x(t)^t [PA + A^t P]x(t) + x^t(t) P A_d x(t-\tau) + x(t-\tau)^t A_d^t P x(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour le calcul de la dérivée suivante:

$$\dot{V}_{12}(x_t) = \frac{d[\int_{t-\tau}^t x^t(\theta) Qx(\theta) d\theta]}{dt}.$$

On pose ; $G(\theta) = \int x^t(\theta) Qx(\theta) d\theta$ (3.3.14)

Donc : $\frac{dG(\theta)}{d\theta} = x^t(\theta) Qx(\theta)$

On écrit $V_{12}(x_t)$ en fonction de G :

$$\dot{V}_{12}(x_t) = \int_{t-\tau}^t \frac{dG(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_{t-\tau}^t dG(\theta)$$

D'où : $\dot{V}_{12}(x_t) = [G(\theta)]_{t-\tau}^t = G(t) - G(t - \tau)$

Alors :

$$\dot{V}_{12}(x_t) = \frac{dV_{12}(x_t)}{dt} = \frac{d[G(t) - (t - \tau)]}{dt} = \frac{dG(t)}{dt} - \frac{dG(t - \tau)}{dt}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= x^t(t)Qx(t) \\ \frac{dG(t - \tau)}{dt} &= \frac{d(t - \tau)}{dt} \times \frac{dG(t - \tau)}{d(t - \tau)} = (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau)Qx(t - \tau) \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\dot{V}_{12}(x_t) = x^t(t)Qx(t) - (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau)Qx(t - \tau)$$

A partir de $\dot{V}_{11}(x_t)$ et $\dot{V}_{12}(x_t)$, on écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= \dot{V}_{11}(x_t) + \dot{V}_{12}(x_t) \\ &= x(t)^t[PA + A^t P + Q]x(t) + x^t(t)PA_d x(t - \tau) + x(t - \tau)^t A_d^t P x(t) + x^t(t)Qx(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau)Qx(t - \tau) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= x(t)^t[PA + A^t P + Q]x(t) + x^t(t)PA_d x(t - \tau) + x(t - \tau)^t A_d^t P x(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau)Qx(t - \tau) \end{aligned}$$

Que nous pouvons manipuler et en obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= x(t)^t[PA + A^t P + Q]x(t) + x^t(t)PA_d x(t - \tau) + x(t - \tau)^t A_d^t P x(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau)Qx(t - \tau) + x^t(t)P x(t) \\ &\quad + (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau) A_d^t PA_d x(t - \tau) - x^t(t)P x(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau})x^t(t - \tau) A_d^t PA_d x(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) = & x(t)^t [PA + A^t P + Q] x(t) [x(t) + A_d x(t - \tau)]^t P [x(t) + A_d x(t - \tau)] - \\ & x^t(t) P x(t) - (1 - \dot{\tau}) x^t(t - \tau) A_d^t P A_d x(t - \tau) - x^t(t - \tau) Q_\tau x(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Maintenant, on définit le vecteur d'état augmenté $\varepsilon(t) = [x^t(t) \quad x^t(t - \tau)]^t$.

Alors, l'équation (3.15) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[x^t(t) \quad x^t(t - \tau)] \begin{bmatrix} PA + A^t P + Q & P A_d \\ -A_d^t P & -Q_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

La stabilité asymptotique au voisinage du zéro ($x(t) \rightarrow 0$) impose que $\dot{V}_1(x_t) < 0$ pour $x(t) \neq 0$, d'où la condition matricielle sous la forme d'une LMI :

$$\begin{bmatrix} PA + A^t P + Q & P A_d \\ -A_d^t P & -Q_\tau \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.17)$$

3.3.3. Stabilité dépendante du retard

Dans le but de réduire le conservatisme de la condition de stabilité, nous présentons dans ce qui suit un théorème sur la stabilité dépendante du retard. On commence par admettre l'hypothèse suivante :

$$\lambda(A + A_d) \in C^-$$

Notons que cette hypothèse correspond à la condition de la stabilité quand $\tau = 0$, par conséquent on doit démontrer les conditions pour que le système soit stable pour $\tau \geq 0$.

Théorème 2

Considérons le système (3.3.9) avec les conditions (3.3.10), satisfaisant l'hypothèse précédente. Le système est globalement asymptotique stable pour le délai τ tel que $0 \leq \tau \leq \tau^*$, si la condition suivante est vérifiée : il existe une matrice $0 < X = X^t \in R^{n \times n}$ avec deux scalaires $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$, qui satisfaisants l'inégalité matricielle LMI :

$$\begin{bmatrix} (A + A_d)X + (A + A_d)^t + \tau^*(\varepsilon + \alpha)A_d A_d^t & \tau^* X A^t & \tau^* X A_d^t \\ \tau^* A X & -(\tau^* \varepsilon)I & 0 \\ \tau^* A_d X & 0 & -(\tau^* \alpha)I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.18)$$

Démonstration

Pour les besoins de la démonstration, on commence par définir la fonctionnelle $V_2(x_t)$ de Lyapunov-Krasovskii qui prend la forme :

$$V_2(x_t) = V_{21}(x_t) + V_{22}(x_t) + V_{23}(x_t)$$

Avec :

$$V_{21}(x_t) = x^t(t)P x(t)$$

$$V_{22}(x_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t r_2 [x^t(s)A^t Ax(s)] ds. d\theta$$

$$V_{23}(x_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{t-\tau+\theta}^t r_2 [x^t(s)A^t Ax(s)] ds. d\theta \quad (3.3.19)$$

Où $0 < P = P^t \in R^{n \times n}$ et $r_1 > 0, r_2 > 0$ sont des paramètres constants.

A partie de (3.3.9), nous avons :

$$\dot{x}(s) = Ax(s) + A_d x(s - \tau)$$

En posant $s = t + \theta$, on obtient :

$$\dot{x}(t - \theta) = Ax(t - \theta) + A_d x(t + \theta - \tau)$$

Et aussi :

$$\int_{t-\tau}^0 \dot{x}(s) ds = [x(s)]_{t-\tau}^t = x(t) - x(t - \tau) \quad (3.3.20)$$

En remplaçant : $s = t + \theta, ds = d\theta$ et $\theta = s - t$

L'intégrale (3.3.20) devient : $\int_{t-\tau}^0 \dot{x}(s) ds = \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t + \theta) d\theta$

D'où :

$$\begin{aligned} x(t - \tau) &= x(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t + \theta) d\theta \\ &= x(t) - \int_{-\tau}^0 [Ax(t + \theta) + A_d x(t - \tau + \theta)] d\theta \\ &= x(t) - \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta - \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

En substituant (3.3.21) dans (3.3.9) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) \\
 &= Ax(t) + A_d [x(t) - \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta - \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta] \\
 &= (A + A_d)x(t) - A_d \left\{ \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right\} \quad (3.3.22)
 \end{aligned}$$

En dérivant $\dot{V}_2(x_t)$ le long de la solution x_t , on obtient :

$$\dot{V}_2(x_t) = \dot{V}_{21}(x_t) + \dot{V}_{22}(x_t) + \dot{V}_{23}(x_t)$$

On a:

$$\dot{V}_{21}(x_t) = \dot{x}^t(t)P x(t) + x^t(t)P \dot{x}(t) \quad (3.3.23)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^t(t) &= ((A + A_d)x(t) - A_d \left\{ \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right\})^t \\
 &\quad ((A + A_d)x(t) - A_d \left\{ \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right\})^t \\
 &= x^t(t)(A + A_d)^t - \left[\int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right] A_d^t
 \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.3.23), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{21}(x_t) &= \left[x^t(t)(A + A_d)^t - \left[\int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right] A_d^t \right] P x(t) + \\
 &\quad x^t(t)P(A + A_d)x(t) - A_d \left\{ \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{21}(x_t) &= (t)(A + A_d)^t P x(t) - \left[\int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right] A_d^t P x(t) + \\
 &\quad x^t(t)P(A + A_d)x(t) - x^t(t)P A_d \left[\int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{21}(x_t) &= x^t(t)[(A + A_d)^t P + P(A + A_d)]x(t) - \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta A_d^t P x(t) - \\
 &\quad \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta A_d^t P x(t) - x^t(t) P A_d \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) d\theta - \\
 &\quad x^t(t) P A_d \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta
 \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

On observant que :

$$\int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta = x^t(t) P A_d \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta$$

Et :

$$\int_{-\tau}^0 A x(t + \theta) d\theta A_d^t P x(t) = x^t(t) P A_d \int_{-\tau}^0 A x(t + \theta) d\theta$$

Alors (3.24) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{21}(x_t) &= x^t(t) [(A + A_d)^t P + P(A + A_d)] x(t) \\ &\quad - 2x^t(t) P A_d \int_{-\tau}^0 A_d x(t - \tau + \theta) d\theta - 2x^t(t) P A_d \int_{-\tau}^0 A x(t + \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Pour la dérivée $\dot{V}_{22}(x_t)$:

$$\dot{V}_{22}(x_t) = \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t r_1 [x^t(s) A^t A x(s)] ds$$

On pose :

$$G(s) = \int_{t+\theta}^t r_1 [x^t(s) A^t A x(s)] ds$$

D'où :

$$\frac{dG(s)}{ds} = r_1 [x^t(s) A^t A x(s)]$$

$$dG(s) = r_1 [x^t(s) A^t A x(s)] ds$$

En intégrant l'équation précédente entre les bornes $(t + \theta)$ et t :

$$\int_{t+\theta}^t dG(s) = [G(s)]_{t+\theta}^t = G(t) - G(t + \theta) = \int_{t+\theta}^t r_1 [x^t(s) A^t A x(s)] ds$$

Alors :

$$\begin{aligned} V_{22}(x_t) &= \int_{-\tau}^0 [G(t) - G(t + \theta)] d\theta \\ &= [G(t)\theta]_{-\tau}^0 - \int_{-\tau}^0 G(t + \theta) d\theta \\ &= \tau G(t) - \int_{-\tau}^0 G(t + \theta) d\theta \\ \dot{V}_{22}(x_t) &= \frac{d}{dt} \left[\tau G(t) - \int_{-\tau}^0 G(t + \theta) d\theta \right] \\ &= \tau \frac{dG(t)}{dt} - \int_{-\tau}^0 \frac{dG(t+\theta)}{dt} d\theta \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\frac{dG(t)}{dt} = r_1[x^t(t)A^tAx(t)], \quad s = t + \theta \quad \text{et} \quad ds = d\theta$$

Donc :

$$\frac{dG(t+\theta)}{dt} = \frac{dG(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dG(s)}{ds}$$

$$\frac{dG(t+\theta)}{dt} = r_1[x^t(t+\theta)A^tAx(t+\theta)]$$

Alors, on écrit :

$$\dot{V}_{22}(x_t) = \tau r_1[x^t(t)A^tAx(t)] - \int_{-\tau}^0 r_1[x^t(t+\theta)A^tAx(t+\theta)]d\theta \quad (3.3.26)$$

Enfin, nous procédons au calcul de la dérivée $\dot{V}_{22}(x_t)$

$$\dot{V}_{22}(x_t) = \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 \int_{t-\tau+\theta}^t r_2[x^t(s)A_d^tA_dx(s)]ds d\theta$$

On pose :

$$Q(s) = \int_{t-\tau+\theta}^t r_2[x^t(s)A_d^tA_dx(s)]ds$$

Et on procède de la même manière que pour le calcul de $\dot{V}_{22}(x_t)$, pour obtenir finalement :

$$\dot{V}_{23}(x_t) = \tau r_2[x^t(t)A_d^tA_dx(t)] - \int_{-\tau}^0 r_2[x^t(t-\tau+\theta)A_d^tA_dx(t-\tau+\theta)]d\theta \quad (3.3.27)$$

A partir de (3.3.25), (3.26) et (3.3.27) :

$$\dot{V}_2(x_t) = \dot{V}_{21}(x_t) + \dot{V}_{22}(x_t) + \dot{V}_{23}(x_t)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_t) = & x^t(t)[(A + A_d)^tP + P(A + A_d)]x(t) - 2x^t(t)PA_d \int_{-\tau}^0 A_dx(t - \tau\theta)d\theta - \\ & 2x^t(t)PA_d \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta)d\theta - \int_{-\tau}^0 r_1[x^t(t + \theta)A^tAx(t + \theta)]d\theta + \tau r_1[x^t(t)A^tAx(t)] + \\ & \tau r_2[x^t(t)A_d^tA_dx(t)] - \int_{-\tau}^0 r_2[x^t(t - \tau + \theta)A_d^tA_dx(t - \tau + \theta)]d\theta \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

En appliquant le lemme 1 (voir annexe 1), on écrit :

$$\begin{aligned}
& -2x^t(t)PA_d \int_{-\tau}^0 Ax(t+\theta)d\theta \int_{-\tau}^0 (-x^t(t+\theta)A^t) (A_d^t Px(t)) d\theta + \\
& \quad \int_{-\tau}^0 (x^t(t)PA_d)(-Ax(t+\theta))d\theta \\
& \leq r_1 \int_{-\tau}^0 (-x^t(t+\theta)A^t)(-Ax(t+\theta))d\theta \\
& \quad + r_1^{-1} \int_{-\tau}^0 (x^t(t)PA_d) (A_d^t Px(t)) d\theta \\
& = \tau r_1^{-1} x^t(t)PA_d A_d^t Px(t) + r_1 \int_{-\tau}^0 x^t(t+\theta)A^t Ax(t+\theta)d\theta \quad (3.3.29)
\end{aligned}$$

Aussi de la même façon en appliquant le lemme 1, on écrit :

$$\begin{aligned}
& -2x^t(t)PA_d \int_{-\tau}^0 [x^t(t-\tau+\theta)A_d^t A_d x(t-\tau+\theta)]d\theta = \\
& \int_{-\tau}^0 (-x^t(t-\tau+\theta)(A_d^t P x(t))d\theta + \int_{-\tau}^0 (x^t(t)PA_d)(-A_d x(t-\tau+\theta))d\theta \\
& -2x^t(t)PA_d \int_{-\tau}^0 [x^t(t-\tau+\theta)A_d^t A_d x(t-\tau+\theta)]d\theta \leq \\
& \quad r_2 \int_{-\tau}^0 (-x^t(t+\theta)A_d^t) (A_d^t Px(t)) d\theta \\
& = \tau r_2^{-1} x^t(t)PA_d A_d^t Px(t) + r_2 \int_{-\tau}^0 x^t(t+\theta)A_d^t A_d x(t-\tau+\theta)d\theta \quad (3.3.30)
\end{aligned}$$

En utilisant, (3.3.28), (3.3.29) et (3.3.30), on écrit :

$$\begin{aligned}
& \dot{V}_2(x_t) \leq \\
& x^t(t)[(A + A_d)^t P + P(A + A_d)]x(t) + \tau r_2 [x^t(t)A_d^t A_d x(t)] + \tau r_1 [x^t(t)A^t Ax(t)] + \\
& \tau r_2^{-1} x^t(t)PA_d A_d^t Px(t) + \\
& \tau r_1^{-1} x^t(t)PA_d A_d^t Px(t) \quad (3.3.31)
\end{aligned}$$

L'équation (3.3.31) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \dot{V}_2(x_t) \leq \\
& x^t(t)[(A + A_d)^t P + P(A + A_d)] + \tau r_1 A^t A + \tau r_2 A_d^t A_d + \tau r_1^{-1} PA_d A_d^t P + \\
& \tau r_1^{-1} PA_d A_d^t P + \tau r_2^{-1} PA_d A_d^t P]x(t) \quad (3.3.32)
\end{aligned}$$

La stabilité asymptotique au voisinage de zéro ($x(t) \rightarrow 0$) impose que $\dot{V}_2(x_t) < 0$

pour $x(t) \neq 0$, donc :

$$\{P(A + A_d) + (A + A_d)^t P + \tau r_1 A^t A + \tau r_2 A_d^t A_d + \tau r_1^{-1} P A_d A_d^t P + \tau r_2^{-1} P A_d A_d^t P\} < 0 \quad (3.3.33)$$

Posant $r_1 = \epsilon^{-1}$ et $r_2 = \alpha^{-1}$ et sachant que la borne supérieure du délai est τ^* ($0 \leq \tau \leq \tau^*$).

L'inégalité (3.3.33) devient :

$$P(A + A_d) + (A + A_d)^t P + \tau^*(\epsilon + \alpha) P A_d A_d^t P + \tau^* \epsilon^{-1} A^t A + \tau^* \alpha^{-1} A_d^t A_d < 0 \quad (3.3.34)$$

Pré-multiplier et post-multiplier par P^{-1} et en posant $X = P^{-1}$, on obtient :

$$P^{-1}[P(A + A_d) + (A + A_d)^t P + \tau^*(\epsilon + \alpha) P A_d A_d^t P + \tau^* \epsilon^{-1} A^t A + \tau^* \alpha^{-1} A_d^t A_d] P^{-1} < 0$$

$$[XP(A + A_d) + (A + A_d)^t X + \tau^*(\epsilon + \alpha) A_d A_d^t + \tau^* \epsilon^{-1} X A^t X A + \tau^* \alpha^{-1} X A_d^t A_d X] < 0 \quad (3.3.35)$$

L'inégalité (3.3.35) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[XP(A + A_d) + (A + A_d)^t X + \tau^*(\epsilon + \alpha) A_d A_d^t] + [A_d^t] \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^* \epsilon} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau^* \epsilon} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^* A X \\ \tau^* A_d X \end{bmatrix} < 0$$

En posant que :

$$\Omega_1 = [XP(A + A_d) + (A + A_d)^t X + \tau^*(\epsilon + \alpha) A_d A_d^t]$$

$$\Omega_3^t = [\tau^* X A^t \quad \tau^* X A_d^t]$$

$$\Omega_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^* \epsilon} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau^* \epsilon} I \end{bmatrix}$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \tau^* A X \\ \tau^* A_d X \end{bmatrix}$$

Alors on appliquant le théorème de Schur, l'inégalité matricielle (3.3.35) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_3^t \\ \Omega_3 & -\Omega_2 \end{bmatrix} < 0$$

Ou

$$\begin{bmatrix} XP(A + A_d) + (A + A_d)^t X + \tau^*(\varepsilon + \alpha)A_d A_d^t & \tau^* X A^t & \tau^* X A_d^t \\ \tau^* A X & -(\tau^* \varepsilon)I & 0 \\ \tau^* A_d X & 0 & -(\tau^* \varepsilon)I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.36)$$

3.3.4. Stabilité dépendante du retard et synthèse d'une commande par retour

d'état

Dans cette partie nous définissons le système d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.37)$$

Avec

$x(k) \in R^n, u(k) \in R^m, y(k) \in R^l$ qui représentent les vecteurs d'état de la commande et de la sortie, respectivement.

Les matrices $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}, C \in R^n$, sont des matrices connues.

L'état initial du système est spécifié par $x(0) = x_0$.

Le système décrit par (3.3.37) est inséré dans une boucle de commande à travers un réseau est dénoté par $\tau(t)$ et considéré variable dans le temps et satisfait les conditions :

$$0 \leq \tau(t) \leq h, \quad \dot{\tau}(t) \leq \mu \leq \infty \quad (3.3.38)$$

Avec h et μ des paramètres constants [103].

Dans la structure de cet SCR, l'objet est de calculer une loi de commande par retour d'état :

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)) \quad (3.3.39)$$

Tel que le système bouclé de la figure (3.1) soit asymptotiquement stable. En substituant la commande (3.3.39) dans (3.3.37), nous obtenons la dynamique suivante pour le système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau(t)) \\ x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.40)$$

Théorème 3

Le système (3.3.40) est asymptotiquement stable si elle existe une matrice symétrique et positive-définie P , des matrices W_1, W_2, W_3 et des matrices symétriques et positives-définie Q, R et S , tel que la LMI suivante est vrai :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ * & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ * & * & M_{33} & M_{34} \\ * & * & * & M_{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.41)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{11} &= A^t P + P A + Q + R - W_1 - W_1^t + h A^t S A, & M_{23} &= W_3 \\ \tilde{M}_{12} &= W_1^t - W_2 + P K B + h A^t S B K, & M_{24} &= W_2^t \\ \tilde{M}_{13} &= -W_3, & M_{33} &= -R \\ \tilde{M}_{14} &= W_1^t, & M_{34} &= W_3^t \\ \tilde{M}_{22} &= -(1 - \mu) Q + W_2 + W_2^t + h B^t K^t S B K, & M_{44} &= -\frac{1}{h} S \end{aligned}$$

Démonstration

Pour démontrer ce théorème nous considérons la fonction suivante de Lyapunov-Krasovski :

$$V_1(x_t) = V_{11}(x_t) + V_{12}(x_t) + V_{13}(x_t) + V_{14}(x_t)$$

Avec :

$$V_{11}(x_t) = x^t P x(t)$$

$$V_{12}(x_t) = \int_{t-\tau}^t x^t(\theta) Q x(\theta) d\theta$$

$$V_{13}(x_t) = \int_{t-h}^t x^t(\theta) R x(\theta) d\theta$$

$$V_{14}(x_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^t(\theta) S \dot{x}(\theta) ds d\theta$$

Et :

$$P > 0, Q > 0, R > 0, S > 0$$

Les dérivés de ces fonctions le long de la solution du système (3.3.40) sont donnés par :

$$\dot{V}_{11}(x_t) = x^t [PA + A^t P] x(t) + 2x^t(t) PBKx(t - \tau)$$

$$\dot{V}_{12}(x_t) = x^t(t) Qx(t) - (1 - i)x^t(t - \tau)Qx(t - \tau)$$

$$\leq x^t(t)Qx(t) - (1 - \mu)x^t(t - \tau)Qx(t - \tau)$$

$$\dot{V}_{13}(x_t) = x^t(t) Rx(t) + x^t(t - h)Rx(t - h)$$

$$\dot{V}_{14}(x_t) = hx^t(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}(s)S\dot{x}(s) ds$$

$$\leq x^t(t) h A^t SAx(t) + x^t(t)hA^tSBKx(t - \tau) + x^t(t - \tau)hB^tK^tSAx(t)$$

$$+ x^t(t - \tau)hB^tK^tSBKx(t - \tau) + \frac{1}{h} \left(\int_{t-h}^t \dot{x}(s). ds \right)^t S \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right)$$

* Noter que par la formule de Leibniz-Newton, nous avons :

$$[\psi(t, s)]^t \left[\int_{t-h}^t \dot{x}(s). ds - x(t) + x(t - \tau) \right] = 0$$

$$\left[\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds - x(t) + x(t - \tau) \right]^t [\psi(t, s)]^t = 0$$

Avec :

$$\psi(t, s) = W_1 x(t) + W_2 x(t - \tau) + W_3 x(t - h)$$

Par l'utilisation de toute cette relation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) \leq & x^t(t)M_{11}x(t) + x^t(t)M_{12}x(t - \tau) + x^t(t)M_{13} \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right) + x^t(t - \\ & \tau)M_{12}^t x(t) + x^t(t - \tau)M_{22}x(t - \tau) + x^t(t)M_{22}x(t - h) + x^t(t - \tau)M_{24} \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right) + \\ & x^t(t - h)M_{13}^t x(t) + x^t(t - h)M_{23}^t x(t - \tau) + x^t(t - h)M_{33}x(t - h) + x^t(t - \\ & h)M_{34} \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right) + \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right)^t M_{14}^t x(t) + \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right)^t M_{24}^t x(t - \tau) + \\ & \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right)^t + M_{34}^t x(t - h) + \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right)^t M_{44} \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s). ds \right) \end{aligned}$$

Ce qui peut être récrit comme suit :

$$\dot{V}_1(x_t) \leq \eta^t(t) M \eta(t)$$

Avec :

$$\eta(t) = \left[x^t(t) \quad x^t(t - \tau) \quad x^t(t - h) \quad \left(\int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) \cdot ds \right)^t \right]^t$$

la stabilité asymptotique au voisinage de zéro ($\eta(t) \rightarrow 0$) impose que $\dot{V}_1(x_t) < 0$ pour $\eta(t) \neq 0$, d'où la condition suffisance pour la stabilité de $M \leq 0$.

Maintenant l'appuie sur la conception d'un contrôleur par retour d'état de (3.3.40) qui garantit que le système en boucle fermé sera stable.

A cette fin, on utilise les résultats du théorème 3, pour présenter le théorème suivant. La raison est que la condition LMI (3.3.41) est non linéaire par rapport au gain K et aux matrices inconnues P et S . d'où la nécessité de lever cette non linéarité pour pouvoir résoudre le problème LMI.

Théorème 4

Soit un scalaire positif ε . Le système (3.3.40) est asymptotiquement stable si elle existe une matrice symétrique et positive-définie X , des matrices $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3$,

Les matrices symétriques et positives-définies $\bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}$ tel que la LMI suivante est vrai :

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{M}_{13} & \bar{M}_{14} & XA^t \\ * & \bar{M}_{22} & \bar{M}_{23} & \bar{M}_{24} & (BK)^t \\ * & * & \bar{M}_{33} & \bar{M}_{34} & 0 \\ * & * & * & \bar{M}_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\varepsilon}X \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.42)$$

$$h\bar{S} < \varepsilon X, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.3.43)$$

Avec :

$$\begin{aligned}\bar{M}_{11} &= XA^t + AX + \bar{Q} + \bar{R} - \bar{W}_1 - \bar{W}_1^t, \\ \bar{M}_{12} &= \bar{W}_1^t - \bar{W}_2 + BY, & \bar{M}_{13} &= -\bar{W}_3, & \bar{M}_{14} &= \bar{W}_1^t \\ \bar{M}_{22} &= -(1 - \mu)\bar{Q} + \bar{W}_2 + \bar{W}_2^t, & \bar{M}_{22} &= \bar{W}_3, & \bar{M}_{22} &= \bar{W}_2^t \\ \bar{M}_{33} &= -\bar{R}, & \bar{M}_{34} &= \bar{W}_3^t, & \bar{M}_{44} &= \frac{1}{h}\bar{S}\end{aligned}$$

Le gain de sans mémoire stabilisant du contrôleur est donné par $K = Y.X^{-1}$

La démonstration du théorème 4, repose sur la recherche des conditions LMI équivalentes basées sur le théorème du complément de **Schur**, à cet effet, noté que **LMI** (3.3.41) peut être réécrite :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} & \tilde{M}_{13} & \tilde{M}_{14} \\ * & \tilde{M}_{22} & \tilde{M}_{23} & \tilde{M}_{24} \\ * & * & \tilde{M}_{33} & \tilde{M}_{34} \\ * & * & * & \tilde{M}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^t \\ (BK)^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [hS][A \quad BK \quad 0 \quad 0] < 0 \quad (3.3.44)$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{11} &= A^t P + PA + Q + A - W_1 - W_1^t, & M_{23} &= W_3 \\ \tilde{M}_{12} &= W_1^t - W_2 + PKB, & M_{24} &= W_2^t \\ M_{13} &= -W_3, & M_{33} &= -R \\ M_{14} &= W_1^t, & M_{34} &= W_3^t \\ M_{22} &= -(1 - \mu)Q + W_2 + W_2^t, & M_{44} &= -\frac{1}{h}S,\end{aligned}$$

Si est seulement si : $hS < \varepsilon P, \varepsilon > 0$

\tilde{M} Peut-être récrit comme suit :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} & \tilde{M}_{13} & \tilde{M}_{14} & A^t \\ * & \tilde{M}_{22} & \tilde{M}_{23} & \tilde{M}_{24} & (BK)^t \\ * & * & \tilde{M}_{33} & \tilde{M}_{34} & 0 \\ * & * & * & \tilde{M}_{44} & 0 \\ A & BK & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.46)$$

L'ensemble du LMIs (3.3.42) et (3.3.43) sont linéaires dans les matrices inconnues $X, Y, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{R} = XSX$, et S peut être résolue en utilisant la boîte à outils de LMI et la matrice de gain de stabilisation est calculée comme : $K = Y.X^{-1}$

3.4. Simulations et analyse de la stabilité du pendule inversé et du système dynamique d'un satellite à temps retardé

3.4.1. Introduction

Dans ce chapitre nous appliquons les théorèmes précédents dans la commande de deux systèmes d'états à travers un réseau de communication qui induit des retards dans la boucle de commande dans une première phase le système est d'abord régulé par la technique de placement de pôles (méthode d'Ackermann) et nous montrons que cette commande devient instable dès que le système est connecté à un réseau de communication, nous montrons aussi que la commande par retour d'état calculée par la technique LMI doit stabilise le système.

Préambule

Nous avons déjà presque tous un jour essayé de maintenir en équilibre un grand bâton de bois sur notre index, Afin d'éviter la chute de celui-ci, nous devons déplacer notre doigt de façon à contrecarrer en permanence son basculement. C'est exactement le même défi que propose le système automatisé du pendule inversé.

Alors que cet exercice semble assez simple et instinctif pour l'homme, il sera nécessaire de définir des stratégies précises pour assurer le maintien automatisé du pendule inversé. Bien évidemment, les performances obtenues grâce à un système automatisé sont de loin supérieures à celles qui seraient obtenues par l'homme.

Le système qui sera utilisé consiste en un pendule lié une articulation de rotation à un chariot libre de se déplacer latéralement. Le mouvement du chariot est assuré par une vis sans fin qui, en tournant, entraîne le chariot.

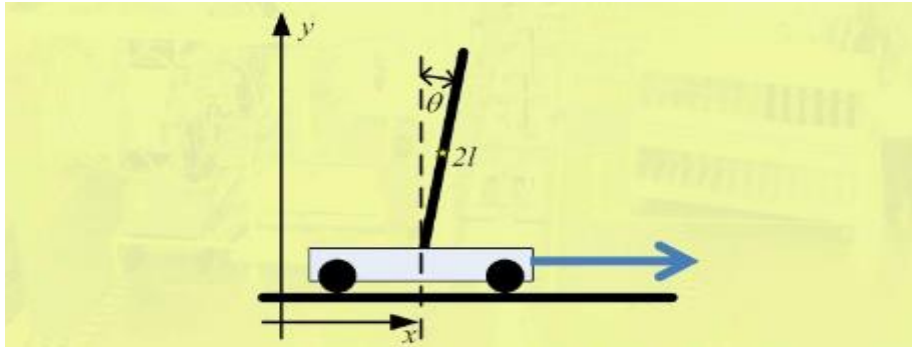


Figure 3.4.1 Structure linéaire du pendule inversé

3.4.2. Etude du pendule sans l'influence de retard causé par un réseau

Considérons le pendule inversé monté sur un chariot à moteur de la figure (3.4.1), le pendule inversé est instable parce qu'il peut tomber à n'importe quel moment dans n'importe quel direction, à moins qu'une force sur la commande appropriée est appliquée, nous considérons ici uniquement un problème à deux dimensions dans lequel le pendule ne se déplace que dans le plan de la page, la force de commande \mathbf{u} est appliquée au chariot, il est souhaitable de maintenir le montant du pendule dans la présence de perturbations

(comme un coup de vent agissant sur la masse \mathbf{m} , une force inattendue appliquée au panier).

Le pendule incliné peut être rapporté de nouveau à la position verticale quand la force appropriée \mathbf{u} de commande est appliquée au chariot à la fin de chaque procédure de contrôle, il est souhaitable d'apporter le chariot de nouveau à $x=0$, la position de référence.

Il est souhaitable de concevoir un système de commande qui permettrait de maintenir le pendule inversé en position verticale pour des conditions initiales sur l'angle θ et / ou une vitesse angulaire $\dot{\theta}$, en outre, le système de commande est tenu de restituer le chariot à sa position de référence à la fin de chaque processus de contrôle, le système doit répondre efficacement à toute perturbation dans la forme de condition initiale, (l'angle désiré θ_d est toujours égale à zéro) et la position souhaité x_d est toujours à la position de référence, ainsi

ce système est un système de régulation, ici, le correcteur sera conçu selon la méthode de retour d'état par la technique du placement de pôles.

3.4.3. Modèle mathématique

Supposons que le centre de gravité de la tige du pendule est à son centre géométrique, la masse m de la tige de pendule est 0.1 kg, la masse du chariot est de 2 kg, et la longueur $2l$ de la tige du pendule est de 1 m, ou $M=2$ kg, $m=0.1$ kg, $2l = 1$ m, on définit les angles de la tige de la ligne verticale comme θ , on définit également les coordonnées du centre de gravité de la tige du pendule comme (X_G, Y_G) , alors :

$$x_G = x + l \sin \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

Pour dériver les équations du mouvement de ce système, considérons le diagramme de forces représenté sur la figure (2.4.1), le mouvement de rotation de la tige du pendule au tour de son centre de gravité peut être décrit par :

$$I\ddot{\theta} = vl \sin \theta - Hl \cos \theta \quad (3.4.1)$$

Où : I est le moment d'inertie de la tige au tour de son centre de gravité le mouvement horizontale du centre de gravité de la tige du pendule est donné par :

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (3.4.2)$$

Le mouvement vertical du centre de gravité de la tige du pendule est

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = v - mg \quad (3.4.3)$$

Le mouvement horizontale du chariot est décrit par

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (3.4.4)$$

Les équations (3.4.1) et (3.4.4) décrivent le mouvement du pendule inversé le système sur le système de chariot, puisque ces équations contiennent ($\sin \theta$ et $\cos \theta$) elles sont des équations non linéaires, si nous assumons l'angle θ petit, les équations (3.4.1) et (3.4.4) peuvent être linéaires comme suit :

$$I\ddot{\theta} = vl\theta - Hl \quad (3.4.5)$$

$$H = m (\ddot{x} + l\ddot{\theta}) \quad (3.4.6)$$

$$\theta = v - mg \quad (3.4.7)$$

$$M\ddot{x} = u - H \quad (3.4.8)$$

Et à partir des équations (3.4.6) et (3.4.8), nous obtenons

$$(M+m)\ddot{x} + m l\ddot{\theta} = u \quad (3.4.9)$$

Et à partir des équations (3.4.6) et (3.4.8), nous avons :

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl = mgl\theta - l(m\ddot{x} + l\ddot{\theta})$$

Ou :

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + m l\ddot{x} = mgl\theta \quad (3.4.10)$$

Les équations (3.4.9) et (3.4.10) décrivent le mouvement du pendule inversé sur le système de chariot, elles constituent un modèle mathématique du système.

Considère maintenant le pendule inversé sur un chariot entraîné par un moteur électrique représenté sur la figure 3.4.2.

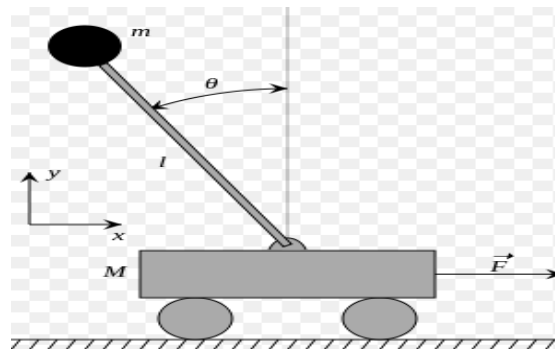


Figure 3.4.2 Structure du pendule inversé

Avec x : position du chariot

θ : Angle de rotation de la tige

F : Force appliquée sur le chariot

On assume que la masse de pendule est concentré au sommet de la tige et on assume que la tige est sans masse, alors se rapportant au système précédent décrivant la dynamique du système sont données par :

$$(M+m)\ddot{x} + m l\ddot{\theta} = u$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + m l\ddot{x} = mgl\theta$$

ou : le moment d'inertie de la tige du pendule au tour de son centre de gravité, puisque dans ce système la masse est concentrée au sommet de la tige, le centre de gravité est le centre de la boucle du pendule, dans cette analyse nous supposons que le moment d'inertie du pendule au tour de son centre de gravité est nulle, ou $I = 0$.

Alors le système d'équations mathématique devient comme suit :

$$(M+m)\ddot{x} + m l\ddot{\theta} = u \quad (3.4.11)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + m l\ddot{x} = mgl\theta \quad (3.4.12)$$

Les équations (3.4.11), (3.4.12), définissent un modèle mathématique du système (pendule inversé) représenté sur la figure (3.4.2), (ces équations linéarisées sont valides si θ est petit), les équations (3.4.11) (3.4.12) peuvent être modifiées selon.

$$M l\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \quad (3.4.13)$$

$$M\ddot{x} = u - m g\theta \quad (3.4.14)$$

L'équation (3.4.13) a été obtenue en éliminant x des équations (3.4.11) et (3.4.12), l'équation (2.4.9) a été obtenue en éliminant θ des équations (3.4.11) et (3.4.12). De l'équation (3.4.13) nous obtenons la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\theta(s)}{-u(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M+m)g}$$

En substituant les valeurs numériques données et en notant que $g = 9.81\text{m/sec}$, il résulte :

$$\frac{\theta(s)}{-u(s)} = \frac{1}{s^2 - 20.601} = \frac{1}{s^2 - (4.539)^2}$$

Le système de pendule inversé a un pôle sur l'axe réel négatif ($s = -4.539$) et un autre sur l'axe réel positif ($s = 4.539$), ainsi, ce système est en boucle ouverte instable.

On définit les variables d'état x_1, x_2, x_3, x_4 , par :

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Noter que l'angle θ indique la rotation de la tige du pendule au tour du point p, et x est le déplacement du chariot, nous considérons θ et x comme sorties du système, ou

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Noter que θ et x sont facilement des quantités mesurables, puis, à partir de la définition des variables d'état des équations (3.4.8) (3.4.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u\end{aligned}$$

En termes d'équations vecteur matrice, nous avons

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (3.4.15)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.4.16)$$

Les équations (3.4.15) (3.4.16) donnent une représentation d'état du système du pendule inversé, (noter que cette représentation n'est pas unique, il existe une infinité de telles représentations).

En substituant les valeurs numériques de M , m et L nous obtenons :

$$\frac{M+m}{Ml} g = 20.601, \frac{m}{M} g = 0.4905, \frac{1}{Ml} = 1, \frac{1}{M} = 0.5$$

En utilisant ces valeurs numériques, les équations (3.4.10) (3.4.11) peuvent être réécrites :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3.4.17)$$

$$y(t) = C x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.4. Réponse libre du pendule à état initial donné

Comme nous avons vu précédemment le système du pendule inversé n'est pas stable en boucle ouverte et pour voir la réponse temporelle graphique de ce système à des conditions initiales données on utilise la programmation sur **MATLAB** qui est un logiciel puissant dans le calcul mathématique.

Considérons l'état initial suivant :

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Soit le système d'équations du pendule inversé libre suivant :

$$\dot{x}(t) = A x(t), x(0) \quad (3.4.18)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.4.19)$$

NB : Comme il n'y a pas de commande spécifique pour la réponse d'un état initial dans Matlab, il faut alors modifier le système d'équations précédent.

En exécutant Les commandes de **MATLAB**, on obtient les réponses dans un seul diagramme.

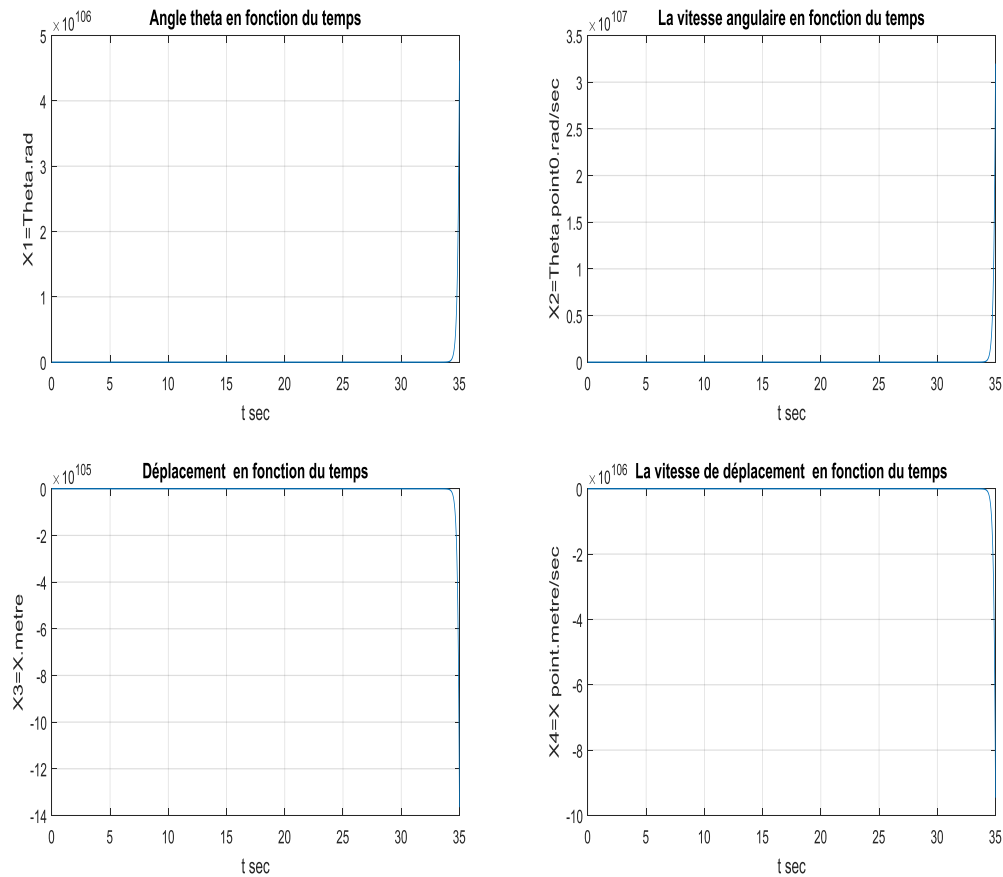


Figure 3.4.3 Réponse du pendule en boucle ouverte

Remarque

- ✓ Nous constatons d'après ses figures que le pendule inversé est instable en boucle ouverte.
- ✓ Alors on peut appliquer un correcteur de type régulateur par la méthode du placement de pôle (Ackermann), et on doit vérifier si le système est stable.

3.4.5. Conception d'un correcteur de type régulateur par la méthode du placement de pôle

Dans cette section nous présenterons une méthode de conception généralement appelée la technique de placement de pôles, Nous supposons que les variables d'état sont mesurables et sont disponibles pour la rétroaction, il sera démontré que si le système considéré est complètement contrôlable, alors les pôles du système en boucle fermée peuvent être placés à tous les endroits désirés par rétroaction d'état d'un gain de retour k .

La technique de conception actuelle commence par une détermination des pôles en boucle fermé désirés basés sur la réponse transitoire et/ou la réponse fréquentielle.

Supposons que nous décidons que les pôles en boucle fermé désirés doivent être à $s = \mu_1, s = \mu_2, s = \mu_3, \dots, s = \mu_n$.

En choisissant une matrice appropriée de gain k pour la rétroaction d'état, il est possible de forcer le système à avoir le placement des pôles en boucle fermé aux endroits désirés, à condition que le système original soit complètement contrôlable.

Dans ce qui suit, nous traiterons le cas où le signal de commande est une grandeur scalaire et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les pôles en boucle fermé peuvent être placés à tous les endroits arbitrairement dans le plan de s est que le système soit complètement contrôlable. Alors la formule d'Ackermann détermine la matrice de gain de rétroaction de retour d'état k .

La formule d'Ackermann

Considérer le système donné par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

Nous supposons que les pôles désirés en boucle fermée sont à :

$$s = \mu_1, s = \mu_2, s = \mu_3, \dots, s = \mu_n$$

L'utilisation de la commande de retour d'état suivante :

$$u(t) = -k x(t)$$

Modifier le système d'équation selon :

$$\dot{x}(t) = (A - Bk) x(t)$$

$$\tilde{A} = (A - Bk)$$

L'équation caractéristique désirée sera :

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\dots(s - \mu_n) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_{n-1} s + a_n = 0 \end{aligned}$$

Puisque le théorème de Cayley-Hamilton assure que A satisfait l'équation caractéristique écrite:

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + a_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \tilde{A} + a_n I = 0 \quad (3.4.20)$$

Pour simplifier la dérivation de la formule d'Ackermann, nous considérons le cas où $n = 3$ (pour n 'importe quel autre nombre entier positif n , la dérivation suivante peut être facilement prolongé).

Considérons les identités suivantes :

$$I = I$$

$$\tilde{A} = A - BK$$

$$\tilde{A}^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BKA\tilde{A}$$

$$\tilde{A}^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BKA\tilde{A}^2$$

Multiplions les équations précédentes dans l'ordre par α_3 , α_2 , α_1 et α_0 (où $\alpha_0 = 1$), respectivement et ajoutant les résultats, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 &= \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK) + \alpha_1 (A^2 - ABK - BKA\tilde{A}) + A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BKA\tilde{A}^2 \\ K\tilde{A}^2 &= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

En se référant à l'équation (3.4.21), nous avons

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0$$

On a également:

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 = \phi(A) = 0$$

Substituant les deux dernières équations dans l'équation (3.4.21), nous donne :

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BKA\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2BK$$

Comme $\phi(\tilde{A}) = 0$, on obtiens:

$$\begin{aligned} (A) &= B(\alpha_2 k + \alpha_1 k \tilde{A} + k \tilde{A}^2) + \\ (AB(\alpha_1 k + K\tilde{A}) + A^2BK) &= [B : AB : A^2B] \begin{bmatrix} \alpha_2 k + \alpha_1 k \tilde{A} + k \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 k + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

On suppose que le système est complétement contrôlable donc la matrice de commandabilité

$M = [B : AB : A^2B]$ est inversible (de rang $n = 3$).

Pré-multipliant l'inverse de la matrice de commandabilité aux côtés de l'équation (3.4.22),

$$[B : AB : A^2 B]^{-1} (A) \begin{bmatrix} \alpha_2 k + \alpha_1 k \tilde{A} + k \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 k + K \tilde{A} \\ K \end{bmatrix}$$

Pré-multipliant les deux côtés de cette dernière équation par $[0 \ 0 \ 1]$, nous obtenons :

$$[0 \ 0 \ 1][B : AB : A^2 B]^{-1} (A) \quad (3.4.23)$$

Cette dernière équation donne la matrice k , le gain de retour d'état.

Pour un nombre entier positif arbitraire n , nous prenons :

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1][B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]^{-1} \varphi(A) \quad (3.4.24)$$

L'équation (3.4.24), la formule d'Ackermann pour la détermination de la matrice k de gain de rétroaction d'état.

NB : on ne peut pas calculer le gain k de formule d'Ackermann si la matrice de commandabilité n'est pas inversible (de rang plein) donc la condition nécessaire et suffisante pour le placement de pôles dans n'importe quel endroit dans le plan de s est que le système nominal soit complètement contrôlable.

3.4.6. Application

Nous appliquons la formule d'Ackermann sur le système du pendule inversé pour calculer le gain de retour k afin de stabiliser ce pendule inversé :

$$\frac{M+m}{Ml} g = 20.601, \frac{m}{M} g = 0.4905, \frac{1}{Ml} = 1, \frac{1}{M} = 0.5$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous emploierons la commande suivante :

$$u(t) = -k x(t)$$

Vérifions si le système est complètement contrôlable :

$$M = [B : AB : A^2B : A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ 20.601 & 0 & 20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ -0.4905 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}$$

puisque le rang de M est 4, le système est complètement contrôlable, après où devons choisir les pôles désires en boucle fermé, puisque nous avons besoin du système avec le temps de stabilisation raisonnablement petit (environ 2 sec) et avec dépassement raisonnable (équivalent au $\xi = 0.5$ dans le système de second ordre standard), on vas devoir choisir les pôles en boucle fermé désirés à $s = \mu_i$ ($i=1,2,3,4$).

$$\text{Ou :} \quad \mu_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad \mu_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad \mu_3 = -10, \quad \mu_4 = -10$$

dans ce cas μ_1 et μ_2 sont une paire des pôles dominant avec $\xi = 0.5$ et $w_n = 4$ les deux pôles restants μ_3 et μ_4 , sont situés loin à la gauche de la paire dominante de pôles en boucle fermé, en conséquence, l'effet de μ_3 et μ_4 sur la réponse est négligeable, ainsi la vitesse et la condition de dépassement seront satisfaites.

Alors l'équation caractéristique désirée devient :

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) &= (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 10)(s + 10) \\ &= (s^2 + 4s + 16) + (s^2 + 20s + 100) \\ &= s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600 \end{aligned}$$

En consequence, nous avons:

$$\alpha_1 = 24 \quad \alpha_2 = 196 \quad \alpha_3 = 720 \quad \alpha_4 = 1600$$

Nous déterminons le gain de retour k à partir de l'équation (2.4.24) :

$$k = [0 \ 0 \ 0 \ 1][B : AB : A^2B : A^3B]^{-1} \varphi(A)$$

$$\text{Ou :} \quad \varphi(A) = A^4 + 24A^3 + 196A^2 + 720A + 1600$$

$$\text{AN} \quad k = [-298.1504 \ -60.6927 \ -163.0989 \ -73.3954]$$

Le signal de commande u est donné par :

$$u(t) = kx = -298.1504 x_1 - 60.6972 x_2 - 163.0989 x_3 - 73.3945 x_4$$

Noter que ce système est un système de régulation, l'angle désire x_1 est toujours au point zéro et le déplacement désire x_d du chariot est également au point zéro, la figure (3.4.4).

montre la commande par un gain de rétroaction du pendule inversé, puisque la consigne est toujours zéro.

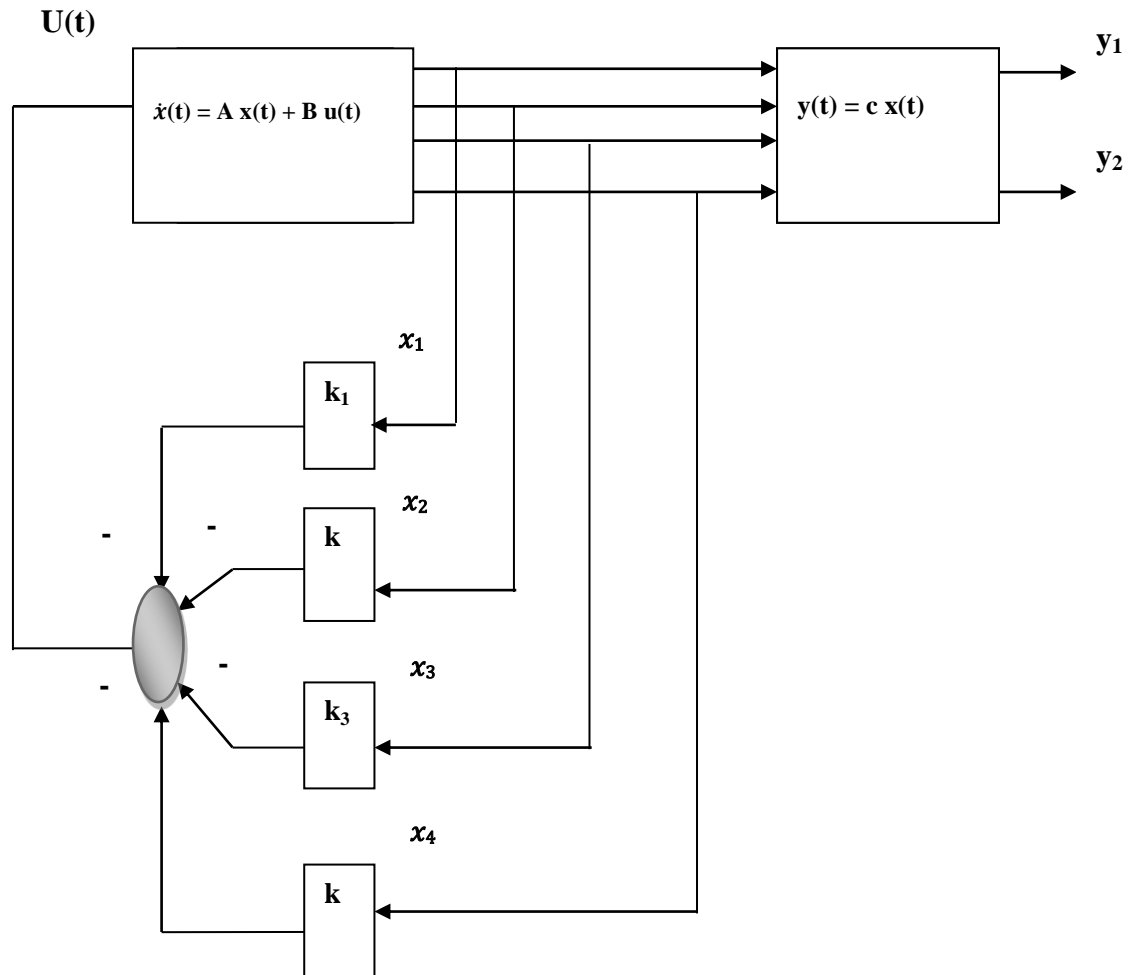


Figure 3.4.4 La commande par un gain de rétroaction du pendule inversé

Il en résulte les réponses du système dans un seul diagramme :

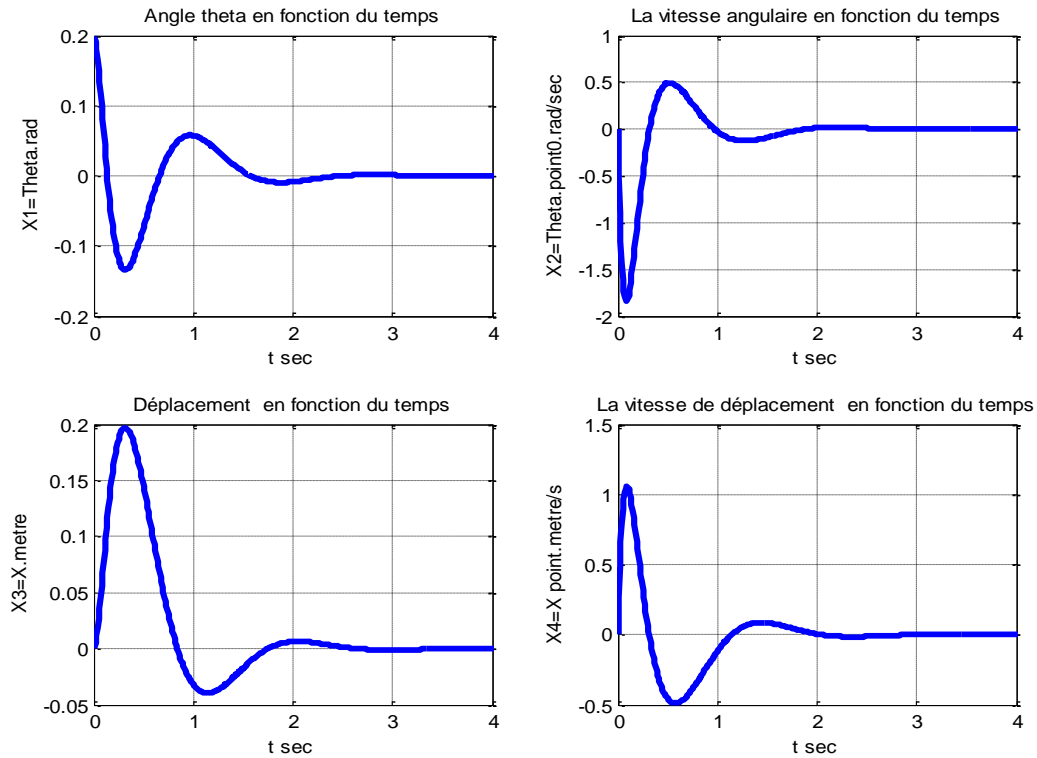


Figure 3.4.5 Réponse et stabilisation du pendule inversé par commande de retour d'état et positionnement des pôles

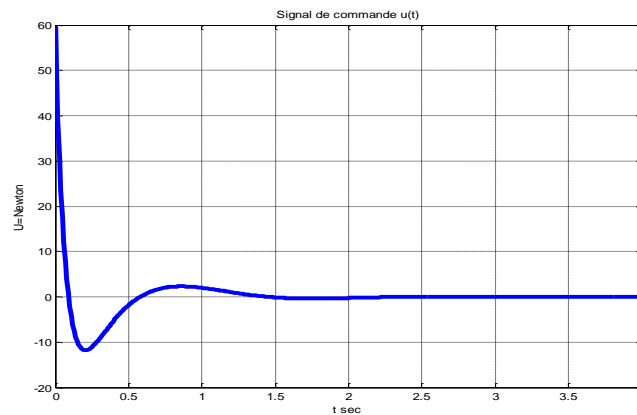


Figure 3.4.6 Réponse du système commandé par un gain de rétroaction

La figure (3.4.5) montre les courbes des réponses et la commande $u(t) = -k x(t)$ respectivement obtenus avec le programme de MATLAB précédent, ces courbes montrent le système de pendule inversé revient dans la position de référence ($\theta=0$, $x=0$) si on lui applique les conditions initiales.

$$(\theta = 0.1, \dot{\theta} = 0, x = 0 \text{ et } \dot{x} = 0)$$

3.4.7. Analyse de la stabilité du pendule inversé commandé à travers un réseau

Dans cette section nous présentons l'effet du retard sur la stabilité du système régulé précédemment, en considère alors la figure (3.4.7) suivante qui montre l'influence du réseau sur notre système.

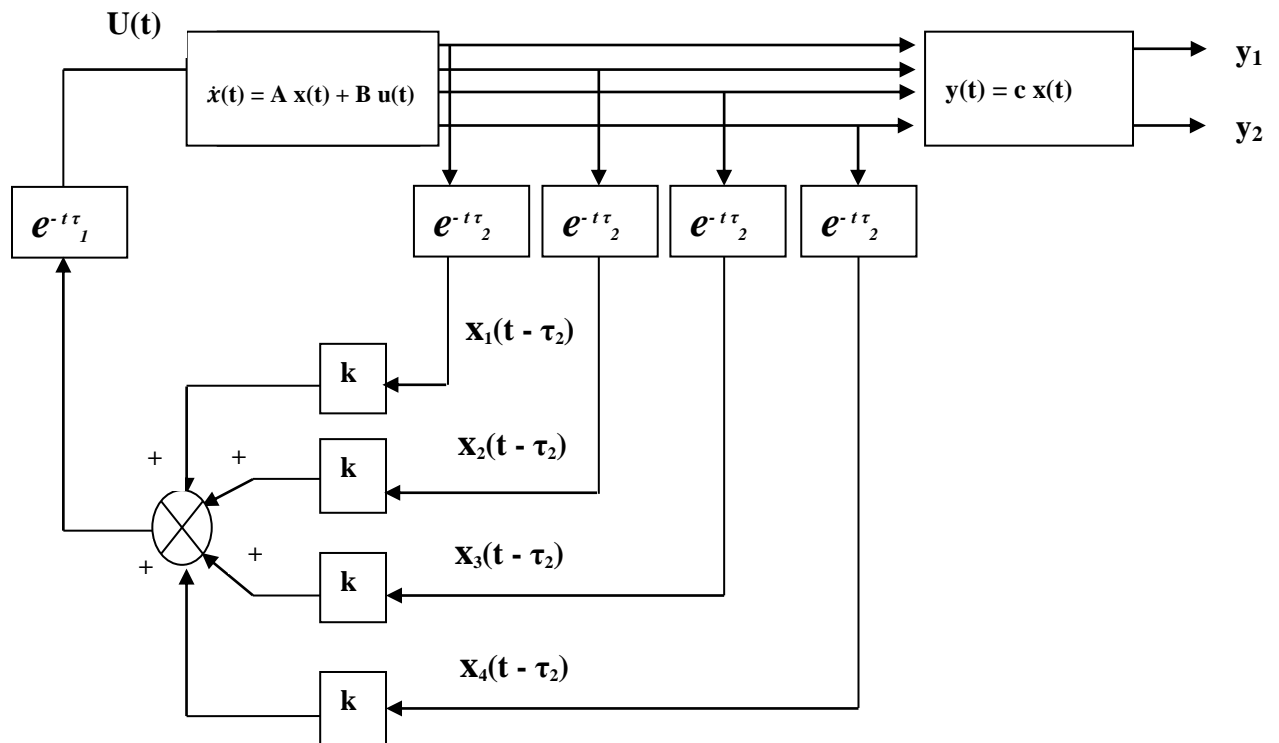


Figure 3.4.7 Influence du réseau sur notre système

Ou : τ_1 et τ_2 représente les retards causées par le réseau, donc les équations mathématiques qui décris ce systèmes sont :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B x(t - \tau)$$

$$y(t) = c x(t)$$

Ou : $\tau = \tau_1 + \tau_2$, k est le gain calculé par le programme précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- La simulation effectuée avec le gain calculé par la technique d'Ackermann indique que le système perd sa stabilité au-delà d'un retard de 50 ms.

Il en résulte les réponses suivantes :

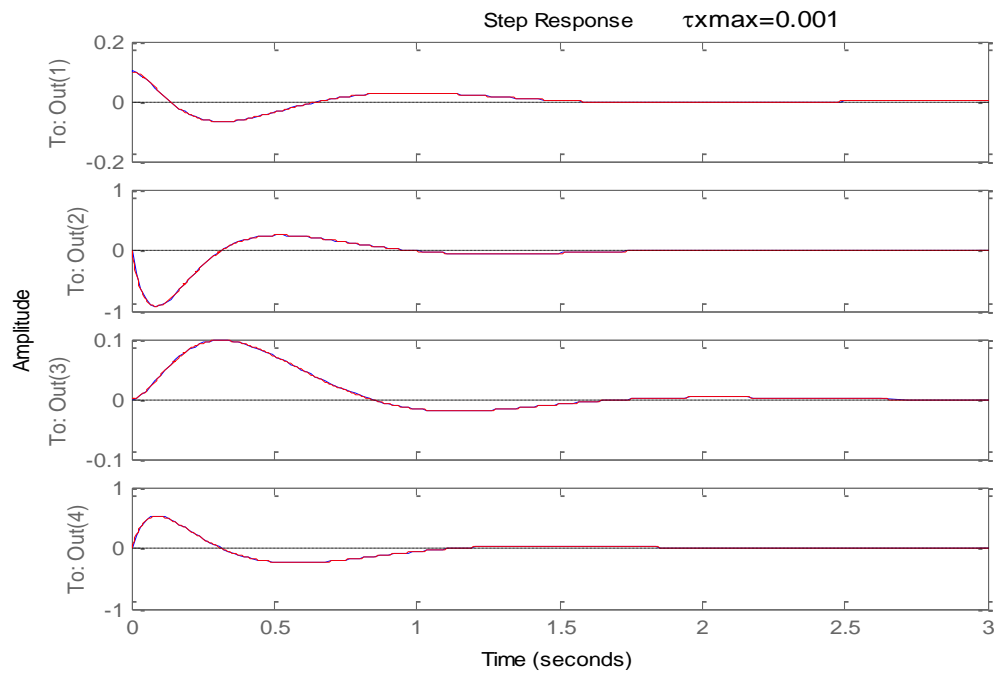


Figure 3.4.8 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.001s$

- Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.04s$

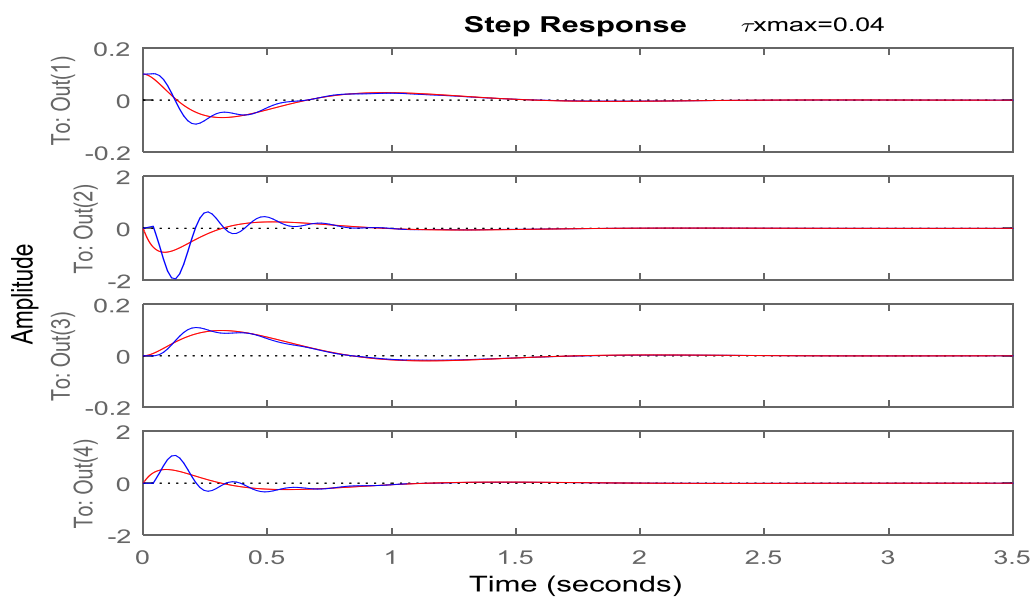


Figure 3.4.9 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.04s$

- Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.05s$

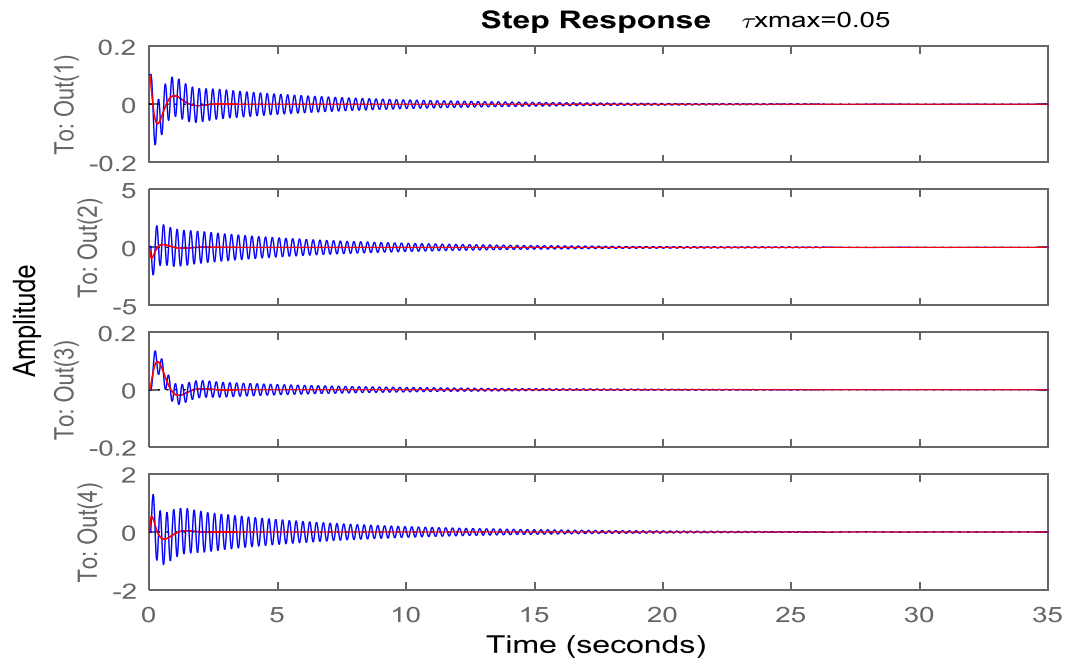


Figure 3.4.10 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.05s$

- Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.06s$

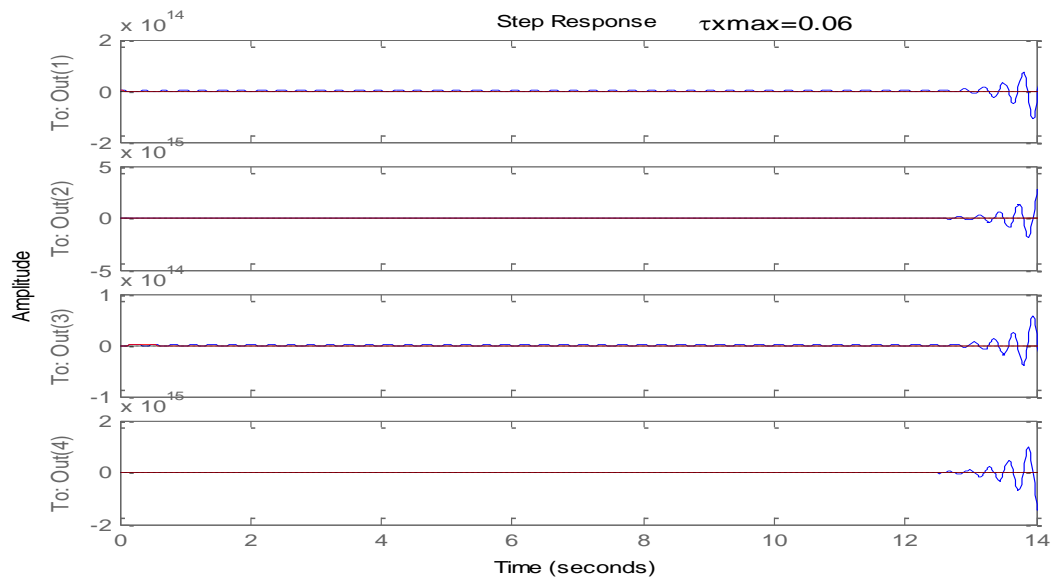


Figure 3.4.11 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.06s$

Remarque

- ✓ Nous constatons que la stabilité du système se détériore dès que le retard atteint la valeur de 50 ms et devient instable pour un retard de 60ms pour le gain calculé par la méthode d'Ackermann.
- ✓ Alors on peut programmer avec LMI Toolbox l'inégalité du théorème pour calculer le retard maximum qui possède la stabilité du système.

3.4.8. Conditions de la stabilité asymptotique dépendante de retard

D'après le théorème 4 le système du pendule inversé est asymptotique stable si les inégalités des matrices linéaires (LMI) suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{M}_{13} & \bar{M}_{14} & XA^t \\ * & \bar{M}_{22} & \bar{M}_{23} & \bar{M}_{24} & (BY)^t \\ * & * & \bar{M}_{33} & \bar{M}_{34} & 0 \\ * & * & * & \bar{M}_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\varepsilon} X \end{bmatrix} < 0$$

$$h.\bar{s} < \varepsilon X, \varepsilon > 0$$

Avec :

$$\bar{M}_{11} = XA^t + AX + \bar{Q} + \bar{R} - \bar{W}_1 - \bar{W}_1^t$$

$$\bar{M}_{12} = \bar{W}_1^t - \bar{W}_2 + BY,$$

$$\bar{M}_{13} = -\bar{W}_3,$$

$$\bar{M}_{14} = \bar{W}_1^t$$

$$\bar{M}_{22} = -(1 - \mu)\bar{Q} + \bar{W}_2 + \bar{W}_2^t,$$

$$\bar{M}_{23} = \bar{W}_3,$$

$$\bar{M}_{24} = \bar{W}_2^t$$

$$\bar{M}_{33} = -\bar{R}, \bar{M}_{34} = \bar{W}_3^t,$$

$$\bar{M}_{34} = -\frac{1}{h}\bar{s}$$

Le gain de sans mémoire stabilisant le contrôleur est donné par :

$$K = Y.X^{-1}$$

Avec LMI Toolbox MATLAB nous pouvons programmer les inégalités précédente pour calculer le retard maximum h, LMI Toolbox possède la fonction feasp qui vérifié si le système des LMIs admet une solution oui ou non.

Description de la fonction feasp :

- La fonction feasp calcule la solution xfeas du système des (LMI) s décrit par lmisys.
- Le vecteur xfeas est la valeur particulière des variables pour lesquels tous les LMIS sont satisfaites.
- xfeas est calculé par la résolution de la programmation convexe suivante :
Minimiser qui vérifie $N^t L(x) N - M^t R(x) M \leq tI$
- Le minimum globale de ce programme est une valeur scalaire t_{\min} , les contraintes des LMIS sont faisables si $t_{\min} \approx 0$ et strictement faisable.

Nb : Résultats de faisabilité des LMI sur MATLAB.

3.4.9. Réponse du pendule inversé retardé à la condition initiale

Considérons l'état initial suivant :

$$X(0) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit le système d'équation du pendule inversé suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) \quad x(0) = x_0 \quad (3.4.25)$$

$$y(t) = c x(t)$$

Ou :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$k = [36.3789 \quad 7.8820 \quad 0.2587 \quad 1.1746]$$

Les commandes de **MATLAB** pour obtenir les réponses dans un seul diagramme sont données par [146].

Commentaire sur les résultats

Nous constatons que le gain calculé par la technique LMI stabilise le pendule inversé commandé à travers un réseau jusqu'à un retard de 145 ms, alors que le gain calculé par la méthode d'Ackermann perd des performances stabilisatrices lorsque le retard atteint 50 ms.

Remarque

Les résultats du test LMIs sont cohérents avec la réponse du système

- ✓ On remarque que la stabilité s'améliore à chaque fois le retard diminue.
- ✓ On constate que notre système pendule inversé avec la correction de placement de pôle peut admettre un retard maximum de 50 ms pour qu'il reste, stable, donc ça nous oblige à utiliser un réseau de communication qui respecte cette contrainte.

3.5. Etude d'un système dynamique de satellite à retards

On considère le problème du contrôle des angles lacets d'un système dynamique de satellite à retards, le model du système de satellite et donnée dans [147], le système de satellite consiste en deux corps rigides relié par les liens flexibles, les équations de ce système sont :

$$j_1 \ddot{\theta}_1(t) + f(\dot{\theta}_1(t) + \dot{\theta}_2(t)) + k(\theta_1(t) + \theta_2(t)) = u(t) + w(t)$$

$$j_2 \ddot{\theta}_2(t) + f(\dot{\theta}_1(t) + \dot{\theta}_2(t)) + k(\theta_1(t) + \theta_2(t)) = 0$$

Ou j_i ($i = 1,2$) sont les moments d'inertie des deux corps (le corps principe et le module d'instrumentation). f est l'amortissement visqueux, k est un couple de constante $\ddot{\theta}_i(t)$ ($i = 1,2$) sont les angles lacet pour les deux corps, $u(t)$ est le control de l'entrée, j_i ($i = 1,2$), $k = 0.3$, $f = 0.004$ est le vecteur d'état.

$$x^t(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^t = [\theta_1(t) \ \dot{\theta}_1(t) \ \theta_2(t) \ \dot{\theta}_2(t)]^t$$

Le système peut être représenté par :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = c x(t)$$

Ou

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -f & f \\ k & -k & f & -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & -0.004 & 0.004 \\ 0.3 & -0.3 & 0.004 & -0.004 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

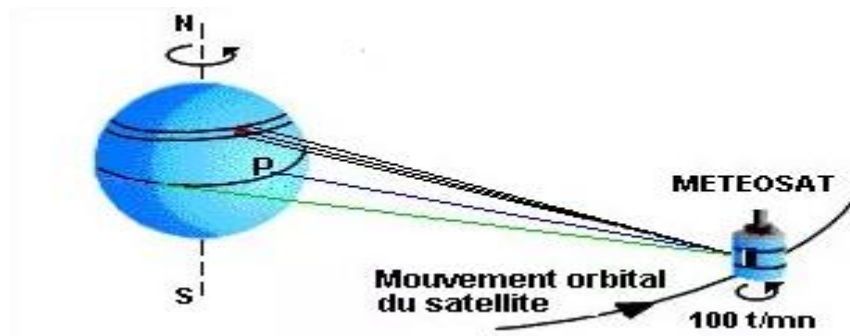


Figure 3.5.1 Structure linéaire d'un angle lacet du satellite

3.5.1. Application de la formule d'Ackermann

Nous appliquons la formule d'Ackermann sur précédent pour calculer le gain de retour k qui a le but de stabiliser ce système :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = c x(t)$$

Ou

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & -0.004 & 0.004 \\ 0.3 & -0.3 & 0.004 & -0.004 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous emploierons la commande suivante :

$$u(t) = -k x(t)$$

Vérifions si le système est complètement contrôlable.

$$M = [B : AB : A^2B : A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.004 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0.004 & 0.3 \\ 1 & -0.04 & -0.3 & 0.0048 \\ 0 & 0.04 & 0.3 & -0.0048 \end{bmatrix}$$

Puisque le rang de M est 4, le système est complètement contrôlable, après ou devons choisir les pôles désires en boucle fermé, puisque nous avons besoin du système avec le temps de stabilisation raisonnablement petit (environ 2 sec) et avec un dépassement raisonnable (équivalent au $\xi=0.5$ dans le système de second ordre standard), on va choisir les pôles en boucle fermé désirés à

$$s = \mu_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

$$\mu_1 = -0.15 + j, \mu_2 = -0.15 - j, \mu_3 = -0.1, \mu_4 = -0.1$$

Dans ce cas, μ_1 et μ_2 sont une paire des pôles dominant avec $\xi=0.5$ et $w_n = 4$ les deux pôles restants, μ_3 et μ_4 sont situés loin à la gauche de la paire dominante de pôles en boucle fermé et, en conséquence, l'effet de μ_3 et μ_4 sur la réponse est négligeable, ainsi la vitesse et la condition de dépassement seront satisfaites l'équation caractéristique désiré devient :

$$\begin{aligned} (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)(s-\mu_4) &= (s+0.15-j)(s+0.15+j)(s+0.1)(s+0.1) \\ &= (s^2+0.3s+1.0225)(s^2+0.2s+0.01) \\ &= s^4+0.5s^3+0.07s^2+0.415s+0.010225 \end{aligned}$$

En conséquence, nous avons :

$$a_1=0.5 \quad a_2=0.07 \quad a_3=0.0415 \quad a_4=0.010225$$

Nous déterminons le gain de retour k à partir de l'équation (4.24) :

$$k = [0 \ 0 \ 0 \ 1][B : AB : A^2B : A^3B]^{-1}\varphi(A)$$

Ou :

$$\varphi(A) = A^4 + 0.5A^3 + 0.07A^2 + 0.415A + 0.010225$$

AN :

$$k = [0.4897 \quad -0.4577 \quad 0.4920 \quad 0.1992]$$

Le signal de commande u est donné par :

$$u(t) = -k \ x = 0.4897x_1 - 0.4577x_2 + 0.4920x_3 + 0.1992x_4$$

Noter que ce système est un système de régulation, l'angle désire x_1 est toujours zéro et l'angle désire x_d du satellite est également zéro, la figure (3.5.1) montre la commande par un gain de rétroaction de ce satellite, (puisque la consigne est toujours zéro, elle n'est pas montrées dans le diagramme). Nous avons résumé tout le travail précédent dans le programme MATLAB.

Il en résulte les figures suivantes :

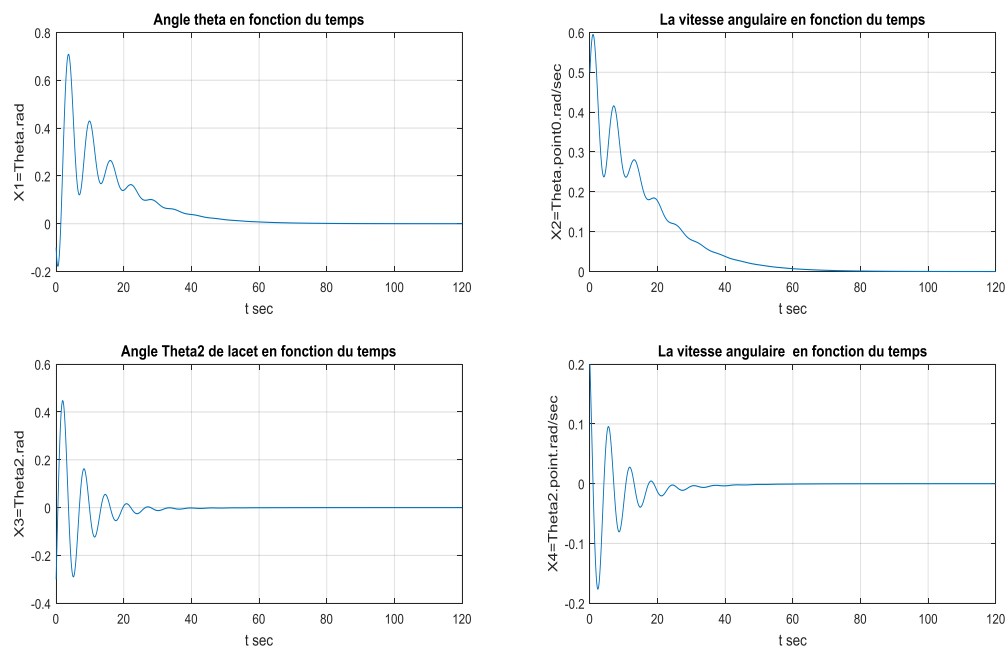


Figure 3.5.2 Réponse du système commandé par un gain de rétroaction

- Réponse de la commande d'entrée $u(t)$. Voir Annexe2, prog 8.

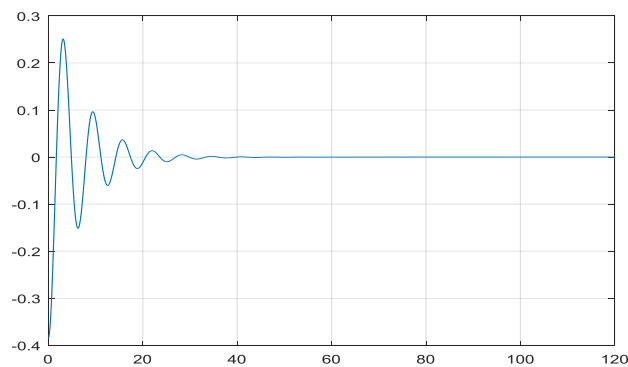


Figure 3.5.3 Réponse de la commande $u(t)$

3.5.2. Analyse de la stabilité du système commandé à travers un réseau

Dans cette section on va discuter l'effet du retard sur la stabilité du système régulé précédemment, qui montre l'influence d'un réseau sur notre système.

Où : τ_1 et τ_2 représente les retards causée par le réseau, donc les équations mathématiques qui décris ce système sont :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B x(t-\tau)$$

$$y(t) = c x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & -0.004 & 0.004 \\ 0.3 & -0.3 & 0.004 & -0.004 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où : $\tau = \tau_1 + \tau_2$ et k est le gain calculé par le programme précédent

NB : La simulation effectuée avec le gain calculé par la technique d'LMI indique que le système est stabilisé au-delà d'un retard de 2.2s.

Il résulte les figures suivantes :

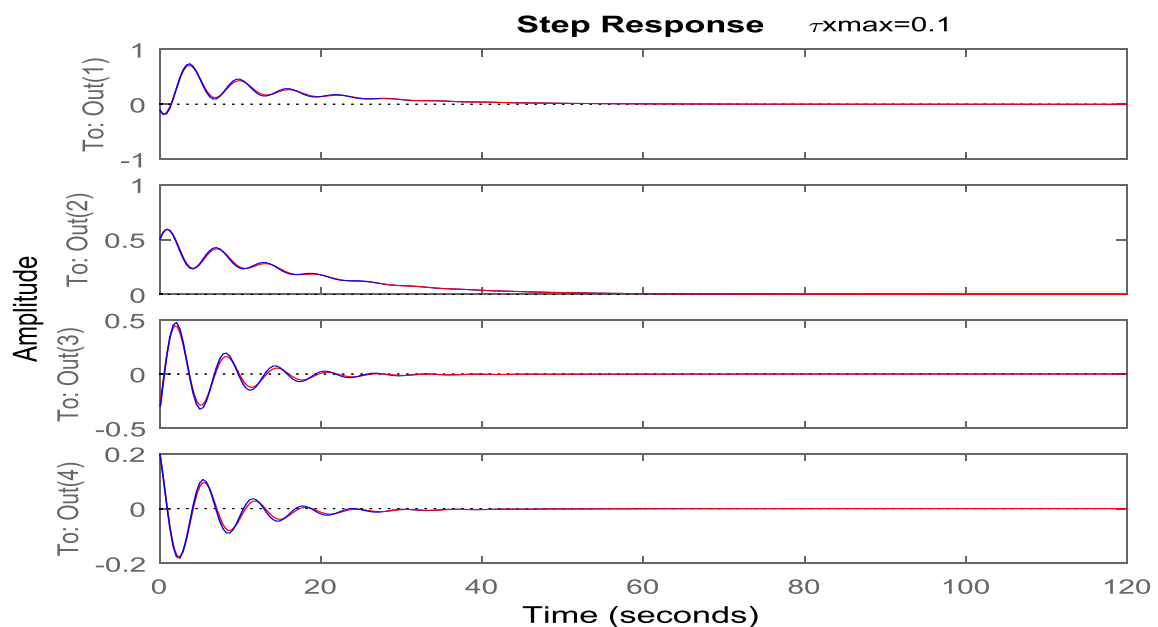


Figure 3.5.4 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.1s$

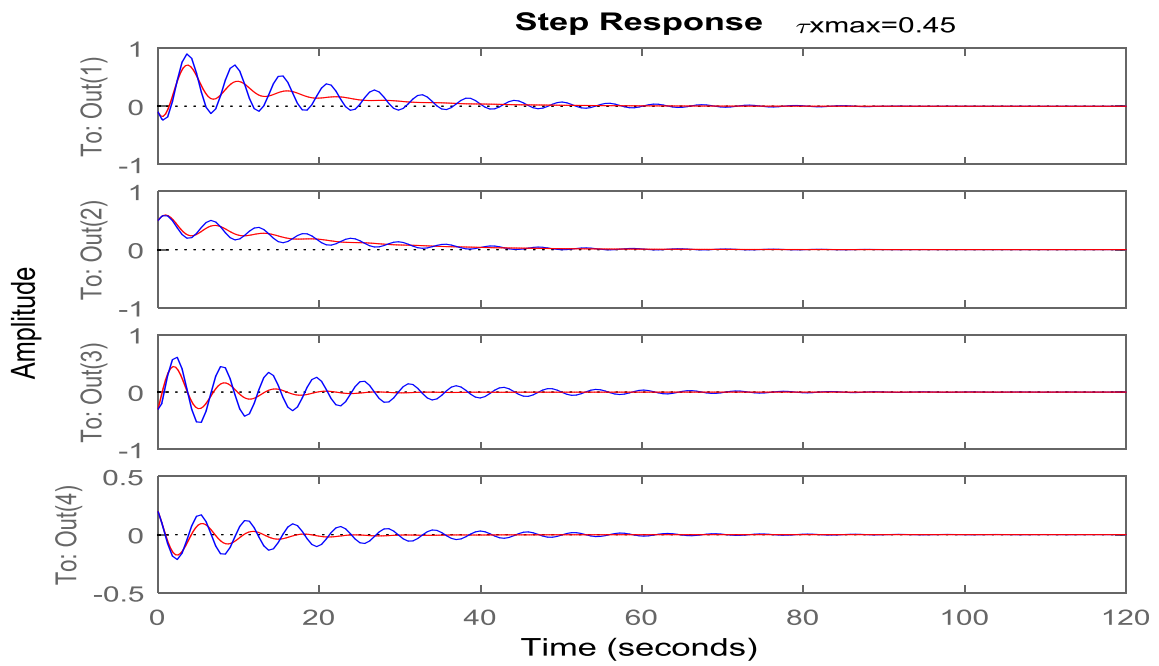


Figure 3.5.5 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.45s$

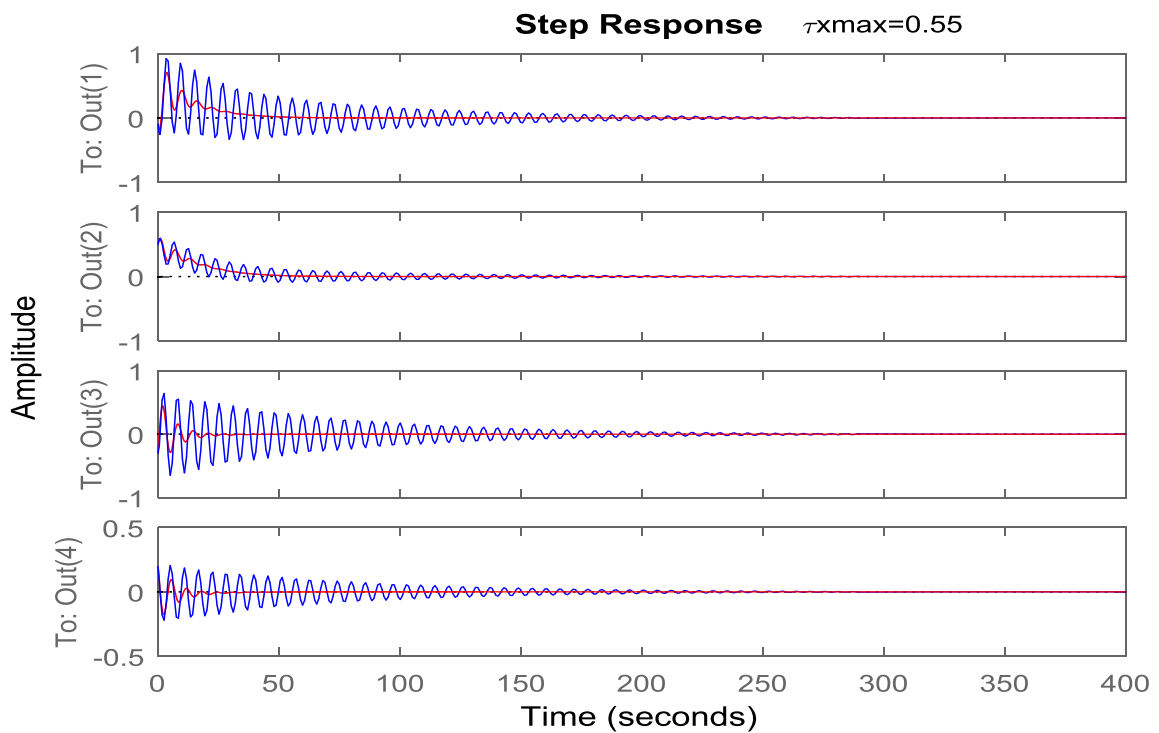


Figure 3.5.6 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0,55s$

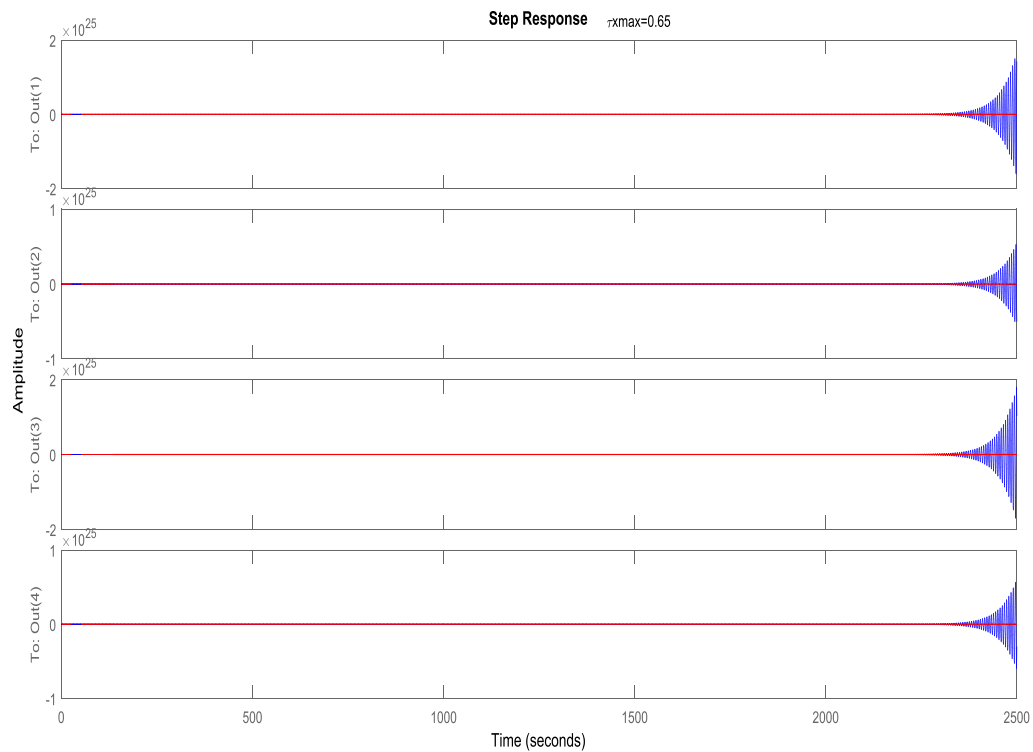


Figure 3.5.7 Réponse du système pour $\tau_{\max} = 0.65\text{s}$

Remarque

- ✓ Nous constatons que la stabilité du système se détériore dès que le retard atteint la valeur de 0.55 ms et devient instable pour un retard de 0.65s pour le gain calculé par la méthode d'Ackermann.

3.5.3. Conditions de la stabilité asymptotique dépendante du retard

D'après le théorème 4, le système précédent est asymptotique stable si les inégalités des matrices linéaires LMI sont vérifiées avec **LMI Toolbox** dans MATLAB ainsi nous pouvons programmer les inégalités précédentes pour calculer le retard maximum.

Commentaire sur les résultats

Nous observons que le gain calculé par la technique LM stabilise le système précédent à travers un réseau jusqu'à un retard de 2.20s, alors que le gain calculé par la méthode d'Ackermann perd des performances stabilisatrices lorsque le retard atteint 0.55ms.

Remarque

- 1- On remarque que la stabilité s'améliore à chaque fois que le retard diminue.
- 2- On constate que notre système avec la correction de placement de pôle peut admettre un retard de 0.55s pour qu'il reste stable.

3.5.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode d'analyse de la stabilité du pendule inversé et on a commencé par présenter la réponse libre du pendule, en suite, on a conçu un régulateur à ce système par la méthode d'Ackermann et enfin, nous avons constaté l'influence du retard causé par un réseau de communication sur la stabilité de notre pendule inversé par les techniques des LMI proposée.

Chapitre 4

Stabilisation des SCR sous les contraintes de communication

Cas des systèmes discret

4.1. Introduction

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1909-1920 avec les travaux d'A.K.Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague (suède). La théorie mathématique s'est ensuite développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine,...etc. actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Cette théorie est ensuite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en générale, la fiabilité des systèmes complexes.... Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société, les exemples ne manquent pas.

- Attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration),
- Trafics urbain ou aérien,
- Programmes dans un système informatique,....

Il est devenu inconcevable de construire un système quelconque (que ce soit un système informatique, un réseau de communication, un système de production ou un système de la vie quotidienne) sans avoir auparavant fait l'analyse des performances.

En plus de la modélisation analytique s'imposent les simulations sur calculateurs qui permettront des évolutions relativement précises, mais demandant parfois des temps de calcul qui peuvent être important si l'on veut reproduire correctement les phénomènes aléatoires et avoir atteint un régime permanent.

4.1.1. Processus de MARKOV

Les systèmes markoviens à sauts (MJS) sont une classe spéciale des systèmes de commutation de paramètres, ils sont modélisés par un ensemble de systèmes linéaires ou non linéaires avec les transitions entre les modèles déterminés par une chaîne de Markov prenant des valeurs dans un ensemble fini [101],[102], [103]. Les MJS peuvent également être considéré comme un cas particulier des systèmes hybrides commutés avec les signaux de commutation gouvernés par une chaîne de Markov.

D'un point de vue mathématique, les MJS peuvent être considéré comme une classe spéciale de système stochastique à temps discret avec matrices changeant de manière aléatoire gouvernés par un processus de Markov invariant dans le temps entre les sauts aléatoires [104].

Dans les dernières décennies, une grande attention a été accordée aux MJS, en raison de leurs larges applications dans les systèmes opérationnels [105]. Leurs applications peuvent être trouvées dans de nombreuses domaines pratiques, telles que les systèmes économiques [106], [108], l'aéronautique [109], systèmes d'alimentation [107], [110], Flux de puissance dynamique [111], [112], système de communications [113], et systèmes de contrôle en réseau [114], [115].

Dans ce qui suit, nous donnerons un bref exposé de quelques sujets sélectionnés concernant les applications des MJS.

a. Systèmes de communication

L'application des MJS dans la modélisation des systèmes de communication est une nouvelle tendance prometteuse audacieusement motivée, en temps discret par la connexion entre les MJS et d'autres modèles pour les canaux de communication en rafale [114], qui dans sa forme la plus simple correspond à un système de chaînes de Markov à deux états.

Une caractéristique pratique de ces modèles (mise à part leur simplicité relative) est leur capacité à décrire le fait que les éventuelles pertes de paquets se produisent généralement pendant des intervalles de temps ou délai [114]. Les taux de perte de paquets importants impliquent des performances médiocres ou même une instabilité, et la mise en œuvre des contrôleurs au sein du réseau peuvent fournir des résultats considérablement meilleurs si leur conception tient compte du caractère probabiliste du réseau.

b. Systèmes de contrôle en réseau

Avec taux de perte de paquets connus et constants, les systèmes de contrôle en réseau ont été formulé comme MJSs dans [60] avec deux modes d'opérations.

L'approche de [114] considère que des variations, modélisées par les MJS, se produisent dans le réseau par exemple en raison de la mobilité et les variations topologiques. La prise en compte du délai dans le modèle sous-jacent est d'une importance majeure, en raison du temps que les paquets doivent attendre dans une file d'attente avant d'être traité, ainsi que le fait que les nœuds du réseau sont géographiquement séparé.

De plus, cette dernière contrainte a motivé l'examen d'un système de contrôle décentralisé. Le problème ultime considéré dans [114] était la minimisation de la longueur de la file d'attente dans le pire des cas, avec l'aide de la méthode de contrôle H_∞ .

Ces dernières années, pour faciliter l'application pratique des MJS, des efforts considérables ont été faits, et beaucoup de progrès ont été réalisés sur des sujets tels que :

- 1) modélisation des MJS
- 2) analyse de la stabilité et des performances ;
- 3) contrôle et filtrage
- 4) détection de défaut et défaut tolérance;
- 5) identification via les réseaux

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires de saut a attiré l'attention de nombreux chercheurs. L'analyse de la stabilité et les problèmes de stabilisation des MJS ont été abordés dans [116]. Plus précisément, Boukas, Cao et Lama ont enquêté sur la stabilisation stochastique pour le saut en temps discret linéaire des systèmes avec temporisation dans [117], [118] ; de Sousa a étudié le problème de stabilité et de stabilisation robustes pour les MJS à temps discret dans [119]; Gao et al. Considéré comme le problème de stabilisation pour les MJS bidimensionnels (2-D) dans [120]; et Sun et al. Discuté de l'exponentielle robuste de stabilisation pour MJS avec retard d'entrée dépendant du mode dans [122]. De plus, de nombreux progrès ont été réalisés sur la stabilité et la stabilisation des systèmes stochastiques avec paramètres de saut markovien. Pour n'en citer que quelques-uns, Boukas et Yang a proposé une stabilisation exponentielle condition pour les systèmes stochastiques avec saut de paramètres Markovien dans [116]; tandis que Wang et al. Résolu le problème de stabilisation pour un retard bilinéaire incertain stochastiques avec paramètres de saut Markovien [122]; et quelques autres résultats sur le saut Markovien des systèmes stochastiques peuvent être trouvés, par exemple [121], et les références qui y figurent.

c. Systèmes de contrôle en réseau avec retard Markovien

Les systèmes de contrôle en réseau (NCS) sont un type de systèmes de contrôle distribués, où les informations des composants du système de contrôle sont échangées via des réseaux de

communication. L'introduction des réseaux aussi présente certaines contraintes telles que les délais et les pertes de paquets qui posent des difficultés d'analyse et de conception des SNC.

De nos jours, diverses méthodologies ont été proposées pour la modélisation, l'analyse de stabilité et le contrôleur conception pour les NCS en présence de temps induit par le réseau à retard et pertes de paquets. La chaîne de Markov, un processus stochastique en temps discret avec la propriété de Markov, peut être utilisée efficacement pour modéliser le réseau induit [123], avec retards dans les NCS. Dans [124], les délais dans les NCS sont modélisés en utilisant les chaînes de Markov, et en outre conception de contrôleur optimal gaussien quadratique linéaire méthode est proposée. Xiao et al. développé deux types de méthodes de conception de contrôleurs pour NCS modélisés comme à dimension finis [125], systèmes linéaires à sauts en temps discret : L'un est le contrôleur de retour d'état qui ne dépend que du retards du capteur au contrôleur (retards S-C), est appelé le contrôleur du mode dépendant; l'autre est le contrôleur de retour de sortie qui ne dépend pas soit des retards S-C soit des retards C-A (retards contrôleur à actionneur), et appelé le contrôleur du mode indépendant.

En mathématiques, un processus de MARKOV est un processus stochastique possédant la propriété de MARKOV. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas précise qu'à partir des éléments d'information concernant le passé. Les processus stochastique vérifie la propriété de MARKOV si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs ne dépend en fait que de l'état présent et non pas des états passés (absence de <mémoire>). Un processus qui possède cette propriété est appelé processus de MARKOV. Pour de tels processus, la meilleure prévision qu'on puisse faire du futur, connaissant uniquement le présent : si on connaît le présent, la connaissance du passé n'apporte pas d'information supplémentaire utile pour la prédiction du future.

Un processus de MARKOV en temps discret est une séquence X_1, X_2, \dots, X_n , de variables aléatoires, l'ensemble de leurs valeurs possibles est appelé l'espace d'états, la valeur X_n , étant l'état du processus à l'instant n. Selon les auteurs, le vocabulaire < chaîne de MARKOV > désigne les processus de MARKOV a temps discret ou uniquement les processus de MARKOV a temps discret et dont l'espace d'états est fini ou dénombrable.

Si la loi conditionnelle de X_{n+1} , sachant le passé, i.e. sachant X_k , ou : $0 \leq k \leq n$ est une fonction de X_n seul,

Alors

$$P(X_{n+1} = x | X_0, X_1, X_2, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = x | X_n) \quad (4.1.1)$$

Où x est un état quelconque du processus. C'est la propriété caractéristique d'une chaîne de MARKOV.

4.1.2. Chaîne de MARKOV

Lorsque les variables aléatoires successives sont des variables discrètes munies d'une fonction de probabilité, on parle de chaîne de MARKOV.

On peut associer aux valeurs successives x_i les instants t_i la propriété markovienne selon laquelle la probabilité d'un état du système ne dépend que de son état précédent à travers une probabilité conditionnelle appelée probabilité de transition et s'exprime par :

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; x_{n-3}, t_{n-3}; \dots, x_1, t_1, x_0, t_0) = P(x_n, t_n | x_0, t_0) \quad (4.1.2)$$

Où :

$$t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0$$

Si l'espace des états est fini, alors la distribution de probabilité peut être représentée par une matrice stochastique appelée matrice de transition, dont le (i, j) élément vaut :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Définition

le nombre $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ est appelé matrice de transition de l'état i à l'état j en un pas, ou bien probabilité de transition de l'état i à l'état j s'il n'y a pas d'ambiguïté, on note souvent ce nombre $P(i, j)$:

$$P(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (4.1.3)$$

Cette famille de nombres est appelée matrice de transition, noyau de transition, ou opérateur de transition de la chaîne de MARKOV.

Stabilité des systèmes linéaires avec retard stochastique :

Les délais aléatoires du réseau du côté capteur/contrôleur (S/C) et contrôleur/actionneur (C/A) sont modélisés en utilisant deux chaînes de MARKOV indépendantes.

Les sauts de transition associée sont modélisés comme un état fini des chaînes de MARKOV. Cette classe de système peut être appelée un système stochastique hybride.

Un système commandé par réseau est considéré dans la figure (4.1.3). Cette SCR constitué est supposée avoir un délai de transition possible due aux paquets d'information perdu du coté capteur-contrôleur (S/C) et du coté contrôleur-actionneur (C/A), ici les capteurs, contrôleurs et actionneurs sont tous synchronisés par la même horloge.

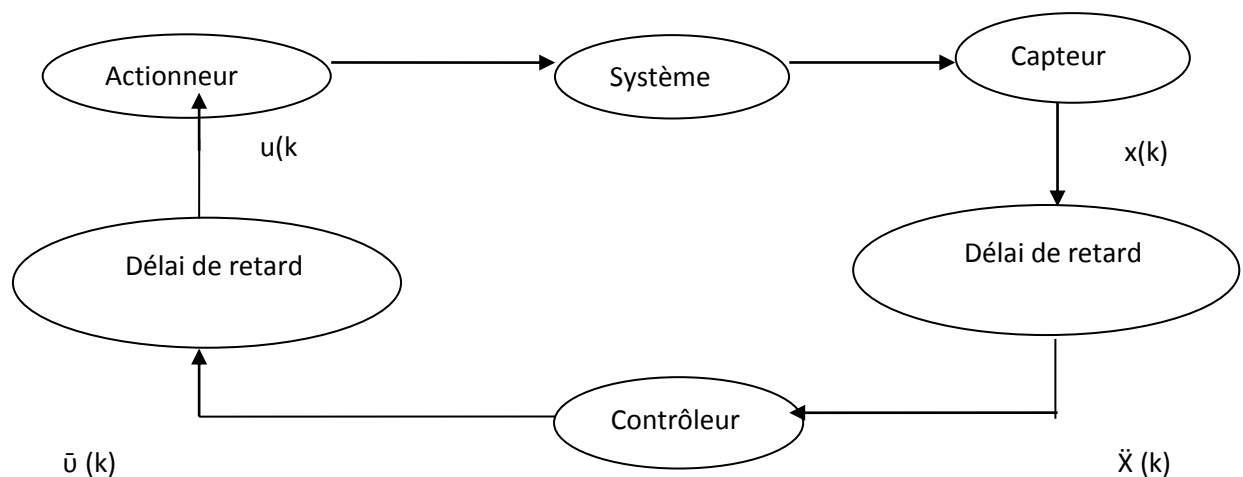


Figure 4.1.1 Schéma d'un SCR avec délai de retard

4.1.3. Modélisation du retard de communication par les chaînes de Markov

On considère la loi de commande suivante :

$$\bar{u}(k) = F(d_k^{sc}, d_k^{ca}) \bar{x}(k) \quad (4.1.4)$$

Où $F(d_k^{sc}, d_k^{ca})$ est le gain du contrôleur en se basant sur d_k^{sc} et d_k^{ca} .

L'obtention du système en boucle fermée est défini comme un système linéaire de saut markovien (MJL (markovien jump linear)) avec deux modes (d_k^{sc} et d_k^{ca}) et un seul mode indépendant de délais de temps de variation d_k^{sc} , ceci nous permet d'implémenter le résultat des MJLs avec les délais de temps pour l'analyse et la synthèse d'un tel SCR.

$$z(k+1) = [A(d_k^{ca})z(k) + B(d_k^{ca}, d_k^{ca})z(k - d_k^{ca})] \quad (4.1.5)$$

Pour une exacte description du principal objectif, la définition suivante est introduite pour le système.

Définition

Le système de l'équation est stochastiquement stable, si pour toutes les valeurs fini de $z(k) = \phi \in R^{\bar{n}+\bar{m}}$ défini sur $k \in [-d_1, 0]$ et un modèle initiale d_0^{sc}, d_0^{ca} il existe un nombre fini $(\phi, d_0^{sc}, d_0^{ca}) > 0$ tel que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N \| z(k) \|^2 \mid \Phi(\cdot), d_0^{sc}, d_0^{ca} \right\} < \Xi(\Phi, d_0^{sc}, d_0^{ca})$$

Où E est : l'opérateur statistique de l'espérance.

Dans cette section, les conditions suffisantes requises pour la stabilité stochastique d'un système en boucle fermé avec une connaissance complète de matrices de probabilités de transitions sont présentées.

Pour une notation simplifiée : $d_k^{sc} = i \in S_1, d_k^{ca} = m \in S_2$ on indique $A(d_k^{ca}) = A_m, B(d_k^{sc}, d_k^{ca}) = B(i, m), \underline{d}_1 = \min \{d_k^{sc}, k \in D_i \in S_1\}, \underline{\rho} = \min \{\rho_{ii}, i \in S_1\}$,

Théorème 1

Le système considéré est dit stochastiquement stable s'ils existent des matrices.

$P(i, m) > 0, B(i, m) > 0, Q > 0, R > 0, X_v > 0, V = 1, 2, M_{(i,m)(v)}, N_{(i,m)(v)} S_{(i,m)(v)},$

$V = 1, 2, 3, \forall i, m \in I$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}(i, m) & 0 & 0 & \omega_{(i,m)1} \\ * & -X_2 & 0 & \omega_{(i,m)2} \\ * & * & -X_1 & \omega_{(i,m)3} \\ * & * & * & \omega_{(i,m)4} \end{bmatrix}$$

Où : $\bar{P}_{i,m} = \sum_{j \in I} \sum_{n \in I} P(j, n)$

$$\omega_{(i,m)1} := [\bar{P}(i, m)A_m \quad \bar{P}_{(i,m)}B(i, m) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\omega_{(i,m)2} := [\sqrt{d_1} X_2 (A_m - I) \quad \sqrt{d_1} X_2 B(i, m) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\omega_{(i,m)3} := [\sqrt{d_1} X_1 (A_m - I) \quad \sqrt{d_1} X_1 B(i, m) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\omega_{(i,m)4} := \begin{bmatrix} \eta_{(i,m)11} & \eta_{(i,m)12} & \eta_{(i,m)13} & \sqrt{d_1} M_{(i,m)1} & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_{(i,m)1} & \sqrt{d_1} N_{(i,m)1} \\ * & \eta_{(i,m)22} & \eta_{(i,m)23} & \sqrt{d_1} M_{(i,m)2} & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_{(i,m)2} & \sqrt{d_1} N_{(i,m)2} \\ * & * & \eta_{(i,m)33} & \sqrt{d_1} M_{(i,m)3} & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_{(i,m)3} & \sqrt{d_1} N_{(i,m)3} \\ * & * & * & -X_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -X_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X_2 \end{bmatrix}$$

$$\eta_{(i,m)11} := -\bar{P}(i, m) + (1 + d_1 - \underline{d}_1)Q + R + M_{(i,m)1}$$

$$+ N_{(i,m)1} + M^T_{(i,m)1} \mathbf{1} + N^T_{(i,m)1}$$

$$\eta_{(i,m)12} := S_{(i,m)1} - M_{(i,m)1} + M^T_{(i,m)2} + N^T_{(i,m)2}$$

$$\eta_{(i,m)13} := -N_{(i,m)1} - S_{(i,m)1} + M^T_{(i,m)3} + N^T_{(i,m)3}$$

$$\eta_{(i,m)22} := -Q + S_{(i,m)2} - M_{(i,m)2} + S^T_{(i,m)2} - M^T_{(i,m)2}$$

$$\eta_{(i,m)23} := -N_{(i,m)2} - S_{(i,m)2} + S^T_{(i,m)3} - M^T_{(i,m)3}$$

$$\eta_{(i,m)33} := -R - N_{(i,m)3} - S_{(i,m)3} + N^T_{(i,m)3} - S^T_{(i,m)3}$$

Démonstration

La fonctionnelle de LYAPUNOV- KRASOVSKI est :

$$V(z(k), k) = \sum_{s=1}^5 V_s(z(k), k) \quad (4.1.6)$$

$$V_1(z(k), k) = z^T(k), P(i, m) z(k) \quad (4.1.7)$$

$$V_2(z(k), k) = \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \quad (4.1.8)$$

$$V_3(z(k), k) = \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} z^T(\tau) R z(\tau) \quad (4.1.9)$$

$$V_4(z(k), k) = (1 - \underline{\rho}) \sum_{\theta=-d_1+1}^{-d_1} \sum_{\tau=k+\theta}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \quad (4.1.10)$$

$$z(k), k) = \sum_{\theta=-d_1}^{-1} \sum_{\tau=k+\theta}^{k-1} y^T(\tau) (X_1 + X_2) y(\tau) \quad (4.1.11)$$

Avec : $y(\tau) = z(\tau + 1) - z(\tau)$ et $P(i, m), B(i, m), Q, R, X_1, X_2, M_{(i,m)v}, N_{(i,m)v}, S_{(i,m)v}$:

à déterminer. Nous avons ainsi:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1 &= E[V_1(z(k+1), k+1 | z(k), k) - V_1(z(k), k)] \\
&= E[(z^T(k+1)P(j, n)z(k+1) - z^T(k)P(i, m)z(k))] \\
&= z^T(k+1) \sum_{n=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \lambda_{mn} \rho_{ij} P(j, n)z(k+1) - z^T(k)P(i, m)z(k) \\
&= \sum_{n=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \lambda_{mn} \rho_{ij} (z^T(k)A^T(m) + z^T(k - d_k^{sc})B^T(i, m)) P(j, n)(A(m)z(k) \\
&\quad + B(i, m)z(k - d_k^{sc})) - z^T(k)P(i, m)z(k) \\
&= z^T(k)A^T(m) + z^T(k - d_k^{sc})B^T(i, m) (\sum_{n=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \lambda_{mn} \rho_{ij} P(j, n)) (A(m)z(k) \\
&\quad + B(i, m)z(k - d_k^{sc})) - z^T(k)P(i, m)z(k) \\
&= (z^T(k)A^T(m) + z^T(k - d_k^{sc})B^T(i, m))\bar{P}(i, m)(A(m)z(k) + B(i, m)z(k - d_k^{sc})) \\
&\quad - z^T(k)P(i, m)z(k) \\
&= z^T(k)A^T(m)\bar{P}(i, m)A(m)z(k) + z^T(k)A^T(m)\bar{P}(i, m)B(i, m)z(k - d_k^{sc}) \\
&\quad + z^T(k - d_k^{sc})B^T(i, m)\bar{P}(i, m)A(m)z(k) \\
&\quad + z^T(k - d_k^{sc})B^T(i, m)\bar{P}(i, m)B(i, m)z(k - d_k^{sc}) - z^T(k)P(i, m)z(k) \\
\Delta V_1 &= z^T(k)(A_m^T\bar{P}(i, m)A_m - P(i, m))z(k) + 2z^T(k)A_m^T\bar{P}(i, m)B(i, m)z(k - d_k^{sc}) \\
&\quad + z^T(k - d_k^{sc})B^T(i, m)\bar{P}(i, m)B(i, m)z(k - d_k^{sc}) \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_2 &= E[V_2(z(k+1), k+1 | z(k), k) - V_2(z(k), k)] \\
&= (\sum_{\tau=k+1-d_{k+1}^{sc}}^k \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau)Qz(\tau)) \\
&= \sum_{n=1}^{d_1} \lambda_{mn} (\sum_{\tau=k+1-d_{k+1}^{sc}}^k z^T(\tau)Qz(\tau)) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau)Qz(\tau) \\
\Delta V_2 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} (\sum_{\tau=k+1-d_{k+1}^{sc}}^k z^T(\tau)Qz(\tau)) + \lambda_{mn} (\sum_{\tau=k+1-d_{k+1}^{sc}}^k z^T(\tau)Qz(\tau) \\
&\quad - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau)Qz(\tau)) \tag{4.1.13}
\end{aligned}$$

On note que :

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} \left(\sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \right) \\
&= \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} + \lambda_{mm} \right) \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} \left(\sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \right) + \lambda_{mm} \left(\sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \right) \tag{4.1.14}
\end{aligned}$$

On remplaçant l'équation (4.1.14) dans (4.1.13) on obtiendra :

$$\begin{aligned}
\Delta V_2 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} \left[\left(\sum_{\tau=k+1-d_{k+1}^{sc}}^k - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \right) z^T(\tau) Q z(\tau) \right] \\
&\quad + \lambda_{mn} \left[\left(\sum_{\tau=k+1-d_{k+1}^{sc}}^k - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \right) z^T(\tau) Q z(\tau) \right] \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} \sum_{\tau=k-d_{k+1}^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) + z^T(k) Q z(k) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \\
&\quad - z^T(k-d_k^{sc}) Q z(k-d_k^{sc}) + \lambda_{mm} \left(\sum_{\tau=k-d_k^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) + z^T(k) Q z(k) \right) \\
&\quad - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) (k-d_k^{sc}) Q z(k-d_k^{sc}) \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} \left(\sum_{\tau=k-d_{k+1}^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} \left(z^T(k) Q z(k) - z^T(k-d_k^{sc}) Q z(k-d_k^{sc}) \right) + \lambda_{mm} (z^T(k) Q z(k) \\
&\quad - z^T(k-d_k^{sc}) Q z(k-d_k^{sc})) \\
\Delta V_2 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} + \lambda_{mm} \left(z^T(k) Q z(k) - z^T(k-d_k^{sc}) Q z(k-d_k^{sc}) \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \left(\sum_{\tau=k-d_{k+1}^{sc}+1}^{k-d_1} z^T(\tau) Q z(\tau) + \sum_{\tau=k-d_1+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau) Q z(\tau) \right) \\
&\quad + \lambda_{mn} (z^T(k) Q z(k) - z^T(k-d_k^{sc}) Q z(k-d_k^{sc})) \tag{4.1.15}
\end{aligned}$$

Comme :

$$\sum_{\tau=k-\underline{d}_1+1}^{k-1} z^T(\tau)Q z(\tau) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}+1}^{k-1} z^T(\tau)Q z(\tau) \leq 0$$

$$\sum_{\tau=k-d_{k+1}^{sc}+1}^{k-\underline{d}_1} z^T(\tau)Q z(\tau) \leq \sum_{\tau=k-\underline{d}_1+1}^{k-1} z^T(\tau)Q z(\tau)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{d_1} \lambda_{mn} = 1 \cdot \lambda_{mm} \leq 1 \cdot \underline{\lambda} \leq 0$$

Alors :

$$\Delta V_2 = z^T(k)Q z(k) - z^T(k-d_k^{sc})Q z(k-d_k^{sc}) + \sum_{\tau=k+1-d_k^{sc}+1}^{k-d_k^{sc}} z^T(\tau)Q z(\tau) \quad (4.1.16)$$

$$\Delta V_2 \leq z^T(k)Q z(k) - z^T(k-d_k^{sc})Q z(k-d_k^{sc}) + \sum_{\tau=k-\underline{d}_1+1}^{k-\underline{d}_1} z^T(\tau)Q z(\tau) \quad (4.1.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3 &= E[V_3(z(k+1), k+1 \mid z(k), k)) - V_3(z(k), k)] \\ &= \sum_{\tau=k+1-\underline{d}_1}^k \sum_{\tau=k-\underline{d}_1}^{k-1} z^T(\tau)R z(\tau) \\ &= (\sum_{\tau=k+1-\underline{d}_1}^{k-1} - \sum_{\tau=k-\underline{d}_1+1}^{k-1}) z^T(\tau)R z(\tau) - z^T(k-\underline{d}_1)R z(k-\underline{d}_1) \\ \Delta V_3 &= z^T(k)R z(k) - z^T(k-\underline{d}_1)R z(k-\underline{d}_1) \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_4 &= E[V_4(z(k+1), k+1 \mid z(k), k)) - V_4(z(k), k)] \\ &= (1-\underline{\rho}) \sum_{\theta=-\underline{d}_1+1}^{-\underline{d}_1} (\sum_{\tau=k+1+\theta}^k - \sum_{\tau=k+\theta}^{k-1}) z^T(\tau)Q z(\tau) \\ &= (1-\underline{\rho}) \sum_{\theta=-\underline{d}_1+1}^{-\underline{d}_1} (\sum_{\tau=k+1+\theta}^{k-1} z^T(K)Q z(K) - \sum_{\tau=k+\theta+1}^{k-1} z^T(k+\theta)Q z(k+\theta)) \\ &= (1-\underline{\rho}) \sum_{\theta=-\underline{d}_1+1}^{-\underline{d}_1} (z^T(k)Q z(k) - z^T(k+\theta)Q z(k+\theta)) \\ -\Delta V_4 &= (d_1 - \underline{d}_1) z^T(\tau)Q z(\tau) - (1-\underline{\rho}) \sum_{\tau=k-\underline{d}_1+1}^{k-\underline{d}_1} z^T(\tau)Q z(\tau) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_5 &= \sum_{\theta=-\underline{d}_1}^{-1} [\sum_{\tau=k+\theta+1}^k y^T(\tau)(X_1 + X_2)y(\tau) - \sum_{\tau=k+\theta}^{k-1} y^T(\tau)(X_1 + X_2)y(\tau)] \\ &= \sum_{\theta=-\underline{d}_1}^{-1} (\sum_{\tau=k+\theta+1}^k - \sum_{\tau=k+\theta}^{k-1}) y^T(\tau)(X_1 + X_2)y(\tau) \\ &= (\sum_{\theta=-\underline{d}_1}^{-1} (\sum_{\tau=k+\theta+1}^{k-1} - \sum_{\tau=k+\theta+1}^{k-1})) (y^T(k)(X_1 + X_2)y(k) - y^T(k+\theta)(X_1 + X_2)y(k+\theta)) \\ &= \sum_{\theta=-\underline{d}_1}^{-1} [y^t(K)(X_1 + X_2)y(k) - y^T(k+\theta)(X_1 + X_2)y(k+\theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_5 = & d_1 y^T(k)(X_1 + X_2)y(k) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) \\ & - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y^T(\tau) X_2 y(\tau) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \Delta Z(z(k), k) = & z^T(k)(A_m^T \bar{P}(i, m) - P(i, m)) z(k) + 2z^T(k)A_m^T \bar{P}(i, m) B^T(i, m) z(k - d_k^{sc}) \\ & + z^T(k - d_k^{sc}) B^T(i, m) \bar{P}(i, m) B(i, m) z(k - d_k^{sc}) - z^T(k - d_k^{sc}) Q z(k - d_k^{sc}) \\ & + (d_1 - \underline{d}_1 + 1) z^T(k) Q z(k) + z^T(k) R z(k) - z^T(k - d_1) R z(k - d_1) \\ & + d_1 [(A_m - 1) z(k) + B(i, m) z(k - d_k^{sc})]^T (X_1 + X_2) [(A_m - 1) z(k) + B(i, m) z(k - d_k^{sc})] \\ & - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y^T(\tau) X_2 y(\tau) \\ & + 2\zeta^T(k) M_i [z(k) - z(k - d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau)] \\ & + 2\zeta^T(k) S_i [z(k - d_k^{sc}) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y(\tau)] \\ & + 2\zeta^T(k) N_i [z(k) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y(\tau)] \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta Z(z(k), k) = & \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \\ B^T(i, m) \end{bmatrix} \bar{P}(i, m) [A_m B(i, m)] + \begin{bmatrix} -P(i, m) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \end{bmatrix} \\ & - z^T(k - d_k^{sc}) Q z(k - d_k^{sc}) + (d_1 - \underline{d}_1 + 1) z^T(k) Q z(k) + z^T(k) R z(k) + z^T(k) R z(k) \\ & - z^T(k - d_1) R z(k - d_1) + d_1 [(A_m - 1) z(k) \\ & + B(i, m) z(k - d_k^{sc})]^T (X_1 + X_2) [(A_m - 1) z(k) + B(i, m) z(k - d_k^{sc})] \\ & - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y^T(\tau) X_2 y(\tau) \\ & + 2\zeta^T(k) M_i [z(k) - z(k - d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau)] \\ & + 2\zeta^T(k) S_i [z(k - d_k^{sc}) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y(\tau)] \\ & + 2\zeta^T(k) N_i [z(k) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y(\tau)] \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned}
\Delta Z(z(k), k) &= \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}(i, m) [A_m \ B(i, m) \ 0] + \begin{bmatrix} -P(i, m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&\times \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (d_1 - \underline{d}_1 + 1) Q + R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \right\} \\
&+ \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} (A_m - 1)^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} d_1 (X_1 + X_2) (A_m - 1) B(i, m) \ 0 \right\} + \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y^T(\tau) X_2 y(\tau) \\
&+ 2\zeta^T(k) M_i [z(k) - z(k - d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau)] \\
&+ 2\zeta^T(k) S_i [z(k - d_k^{sc}) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y(\tau)] \\
&+ 2\zeta^T(k) N_i [z(k) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y(\tau)] \tag{4.1.23}
\end{aligned}$$

$$\Delta Z(z(k), k) =$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}(i, m) [A_m \ B(i, m) \ 0] + \begin{bmatrix} -P(i, m) + (d_1 - \underline{d}_1 + 1) & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} + \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} (A_m - 1)^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} d_1 (X_1 + X_2) (A_m - 1) B(i, m) \ 0 \right\} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y^T(\tau) X_2 y(\tau) \\
&+ 2\zeta^T(k) M_i [z(k) - z(k - d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau)] \\
&+ 2\zeta^T(k) S_i [z(k - d_k^{sc}) - z(k - d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y(\tau)]
\end{aligned}$$

$$+ 2\zeta^T(k) N_i [z(k) - z(k-d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y(\tau)] \quad (4.1.24)$$

Ou:

$$\zeta^T = [z(k)^T - z^T(k-d_k^{sc}) - z^T(k-d_1)]$$

On a:

$$\begin{aligned} & 2 \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T M_i [z(k) - z(k-d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau)] \\ &= \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} [z(k) - z(k-d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau)] + [z(k) - z(k-d_k^{sc}) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau)]^T \\ & \times [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T] \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) \\ &= \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} [z(k) - z(k-d_k^{sc}) + z^T(k) - z^T(k-d_k^{sc})] \times [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T] \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} (\sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau)) [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T] \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \\ & - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) \\ &= \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T] \times \\ & \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T] \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \\ & - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} y^T(\tau) X_1 y(\tau) \\ &= \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 + M_1^T & -M_1 + M_2^T & M_3^T \\ M_2 - M_1^T & -M_2 - M_2^T & -M_3^T \\ M_3 & -M_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} y(\tau) + y^T(\tau) \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} + y^T(\tau) X_1 y(\tau) \right) \\
& - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \\
& - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \\
& = \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 + M_1^T & -M_1 + M_2^T & M_3^T \\ M_2 - M_1^T & -M_2 - M_2^T & -M_3^T \\ M_3 & -M_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \\
& - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} X_1 y(\tau) + y^T(\tau) X_1^{-1} X_1 \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) + \\
& y^T(\tau) X_1^{-1} X_1 X_1 y(\tau) + \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \Bigg) \\
& + \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \\
& = \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 + M_1^T & -M_1 + M_2^T & M_3^T \\ M_2 - M_1^T & -M_2 - M_2^T & -M_3^T \\ M_3 & -M_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \\
& - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + y^T(\tau) X_1 \right) X_1^{-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + y^T(\tau) X_1 \right)^T \\
& + d_k^{sc} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \leq \\
& \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 + M_1^T & -M_1 + M_2^T & M_3^T \\ M_2 - M_1^T & -M_2 - M_2^T & -M_3^T \\ M_3 & -M_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\tau=k-d_k^{sc}}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + y^T(\tau)X_1 \right) X_1^{-1} \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + y^T(\tau)X_1 \right)^T \\
& + d_1 \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \\
& \leq \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 + M_1^T & -M_1 + M_2^T & M_3^T \\ M_2 - M_1^T & -M_2 - M_2^T & -M_3^T \\ M_3 & -M_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \\
& + d_1 \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \tag{4.1.25}
\end{aligned}$$

Alors on aura pour :

$$\begin{aligned}
& 2 \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T S_i [z(k-d_k^{sc}) - z(k-d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-d_k^{sc}-1} y^T(\tau)X_1 y(\tau)] \\
& \leq \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & S_1 & -S_1 \\ S_1^T & S_2 + S_2^T & -S_2 + S_3^T \\ -S_1^T & -S_2^T + S_3 & -S_3 - S_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} + (d_1 - \underline{d}_1) \\
& \times \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T & S_2^T & S_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \tag{4.1.26}
\end{aligned}$$

Et on aura aussi pour :

$$\begin{aligned}
& 2 \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T N_i [z(k) - z(k-d_1) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y(\tau) - \sum_{\tau=k-d_1}^{k-1} y^T(\tau)X_2 y(\tau)] \\
& \leq \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & N_2^T & -N_1 + N_3^T \\ N_2 & 0 & -N_2 \\ -N_1^T + N_3 & -N_2^T & -N_3 - N_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} + d_1 \\
& \times \left(\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-d_k^{sc}) \\ z(k-d_1) \end{bmatrix} \right) \tag{4.1.27}
\end{aligned}$$

On remplaçant les équations (4.1.25), (4.1.26) et (4.1.27) dans (4.1.24) on obtiendra :

$$\begin{aligned}
\Delta V \leq & \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}(i, m) [A_m \ B(i, m) \ 0] + \begin{bmatrix} -P(i, m) + (d_1 - \underline{d}_1 + 1)Q + R & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \right\} + \\
& \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_m - 1)^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} d_1 (X_1 + X_2) \begin{bmatrix} (A_m - 1) & B(i, m) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} d_1 [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T] + \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} (d_1 - \underline{d}_1) [S_1^T \ S_2^T \ S_3^T] + \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} X_1^{-1} d_1 [N_1^T \ N_2^T \ N_3^T] \right\} \times \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \tag{4.1.28}
\end{aligned}$$

Avec

$$\Delta_{11} = M_1 + M_1^T + N_1 + N_1^T$$

$$\Delta_{12} = -M_1 + M_2^T + S_1 + N_2^T$$

$$\Delta_{13} = M_3^T - S_1 - N_1 + N_3^T$$

$$\Delta_{21} = M_2 - M_1^T + S_1^T + N_2$$

$$\Delta_{22} = -M_2 - M_2^T + S_2 + S_2^T$$

$$\Delta_{23} = -M_3^T - S_2 + S_3^T - N_2$$

$$\Delta_{31} = M_3 - S_1^T - N_1^T + N_3$$

$$\Delta_{32} = -M_3 - S_2^T + S_3 - N_2^T$$

$$\Delta_{33} = -S_3 - S_3^T - N_3 - N_3^T$$

$\Delta V \leq$

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \bar{P}(i, m) A_m & A_m^T \bar{P}(i, m) B(i, m) & 0 \\ \bar{P}(i, m) B^T(i, m) A_m & B^T(i, m) \bar{P}(i, m) B(i, m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T(X_1 + X_2)\sqrt{d_1}(A_m - 1) & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T(X_1 + X_2)\sqrt{d_1}B(i, m) & 0 \\ \sqrt{d_1}B^T(i, m)(X_1 + X_2)\sqrt{d_1}(A_m - 1) & \sqrt{d_1}B^T(i, m)(X_1 + X_2)\sqrt{d_1}B(i, m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{12} & \Delta'_{13} \\ * & \Delta'_{22} & \Delta'_{23} \\ * & * & \Delta'_{33} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_i & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_i & \sqrt{d_1}N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & X_2^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_i^T \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_i^T \\ \sqrt{d_1}N_i^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \quad (4.1.29)
\end{aligned}$$

Ou:

$$\Delta'_{11} = M_1 + M_1^T + N_1 + N_1^T - P(i, m) + (1 + (d_1 - \underline{d}_1))Q + R$$

$$\Delta'_{12} = -M_1 + M_2^T + S_1 + N_2^T$$

$$\Delta'_{13} = M_3^T - S_1 - N_1 + N_3^T$$

$$\Delta'_{22} = -M_2 - M_2^T + S_2 + S_2^T - Q$$

$$\Delta'_{23} = -M_3^T - S_2 + S_3^T - N_2$$

$$\Delta'_{33} = -S_3 - S_3^T - N_3 - N_3^T - R$$

Donc ;

$\Delta V \leq$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}(i, m) [A_m \ B(i, m) \ 0] + \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T \\ \sqrt{d_1}B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} X_2 [\sqrt{d_1}(A_m - 1) \ \sqrt{d_1}B(i, m) \ 0] + \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T \\ \sqrt{d_1}B^T(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} X_1 [\sqrt{d_1}(A_m - 1) \ \sqrt{d_1}B(i, m) \ 0] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1 & \sqrt{d_1}N_1 \\ \sqrt{d_1}M_2 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2 & \sqrt{d_1}N_2 \\ \sqrt{d_1}M_3 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3 & \sqrt{d_1}N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & X_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3^T \\ \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T \end{bmatrix} +$$

$$\left. \begin{bmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{12} & \Delta'_{13} \\ * & \Delta'_{22} & \Delta'_{23} \\ * & * & \Delta'_{33} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \quad (4.1.30)$$

$\Delta V \leq$

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \bar{P}(i, m) \\ B^T(i, m) \bar{P}(i, m) \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}^{-1}(i, m) [\bar{P}(i, m) A_m \quad \bar{P}(i, m) B(i, m)] + \right.$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_2 \\ \sqrt{d_1}B^T(i, m) X_2 \\ 0 \end{bmatrix} X_2^{-1} [\sqrt{d_1}(A_m - 1) X_2 \quad \sqrt{d_1}B(i, m) X_2 \quad 0] + \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_1 \\ \sqrt{d_1}B^T(i, m) X_1 \\ 0 \end{bmatrix} X_1^{-1} [\sqrt{d_1}(A_m -$$

$$1) X_1 \quad \sqrt{d_1}B(i, m) X_1 \quad 0] +$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1 & \sqrt{d_1}N_1 \\ \sqrt{d_1}M_2 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2 & \sqrt{d_1}N_2 \\ \sqrt{d_1}M_3 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3 & \sqrt{d_1}N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & X_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3^T \\ \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T \end{bmatrix} +$$

$$\left. \begin{bmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{12} & \Delta'_{13} \\ * & \Delta'_{22} & \Delta'_{23} \\ * & * & \Delta'_{33} \end{bmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \quad (4.1.31)$$

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_m^T \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_2 & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_1 \\ B^T(i, m) \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1}B^T(i, m) X_2 & \sqrt{d_1}B^T(i, m) X_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1}(i, m) & 0 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & X_2^{-1} \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(i, m) A_m & \bar{P}(i, m) B(i, m) & 0 \\ \sqrt{d_1}(A_m - 1) X_2 & \sqrt{d_1}B(i, m) X_2 & 0 \\ \sqrt{d_1}(A_m - 1) X_1 & \sqrt{d_1}B(i, m) X_1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1 & \sqrt{d_1}N_1 \\ \sqrt{d_1}M_2 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2 & \sqrt{d_1}N_2 \\ \sqrt{d_1}M_3 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3 & \sqrt{d_1}N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & X_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3^T \\ \sqrt{d_1}N_1^T & \sqrt{d_1}N_2^T & \sqrt{d_1}N_3^T \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{12} & \Delta'_{13} \\ * & \Delta'_{22} & \Delta'_{23} \\ * & * & \Delta'_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \right. \quad (4.1.32)$$

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1 & \sqrt{d_1}N_1 & A_m^T \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_2 & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_1 \\ \sqrt{d_1}M_2 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2 & \sqrt{d_1}N_2 & B^T(i, m) \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1}B^T(i, m) X_2 & \sqrt{d_1}B^T(i, m) X_1 \\ \sqrt{d_1}M_3 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3 & \sqrt{d_1}N_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\begin{bmatrix} -X_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{P}^{-1}(i, m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \&0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_1^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_2^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)}S_3^T \\ \sqrt{d_1}N_1^T & \sqrt{d_1}N_2^T & \sqrt{d_1}N_3^T \\ \bar{P}(i, m)A_m & \bar{P}(i, m)B(i, m) & 0 \\ \sqrt{d_1}(A_m - 1)X_2 & \sqrt{d_1}B(i, m)X_2 & 0 \\ \sqrt{d_1}(A_m - 1)X_1 & \sqrt{d_1}B(i, m)X_1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left. \begin{bmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{12} & \Delta'_{13} \\ * & \Delta'_{22} & \Delta'_{23} \\ * & * & \Delta'_{33} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k - d_k^{sc}) \\ z(k - d_1) \end{bmatrix} \quad (4.1.33)$$

Pour la stabilité du système il faut que :

$$\Delta v \Leftrightarrow (\Delta + \Omega_3^T \Omega_2 \Omega_3) < 0$$

C'est le complément du théorème de SCHUR

Ou :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{12} & \hat{\Delta}_{13} \\ * & \hat{\Delta}_{22} & \hat{\Delta}_{23} \\ * & * & \hat{\Delta}_{33} \end{bmatrix}; \Omega_3^T = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} M_1^T & \sqrt{d_1} M_2^T & \sqrt{d_1} M_3^T \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_1^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_2^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_3^T \\ \sqrt{d_1} N_1^T & \sqrt{d_1} N_2^T & \sqrt{d_1} N_3^T \\ \bar{P}(i, m) A_m & \bar{P}(i, m) B(i, m) & 0 \\ \sqrt{d_1} (A_m - 1) X_2 & \sqrt{d_1} B(i, m) X_2 & 0 \\ \sqrt{d_1} (A_m - 1) X_1 & \sqrt{d_1} B(i, m) X_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} -X_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{P}^{-1}(i, m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} M_1 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_1 & \sqrt{d_1} N_1 & A_m^T \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1} (A_m - 1)^T X_2 & \sqrt{d_1} (A_m - 1)^T X_1 \\ \sqrt{d_1} M_2 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_2 & \sqrt{d_1} N_2 & B^T(i, m) \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1} B^T(i, m) X_2 & \sqrt{d_1} B^T(i, m) X_1 \\ \sqrt{d_1} M_3 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_3 & \sqrt{d_1} N_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \sqrt{d_1} M_1 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_1 & \sqrt{d_1} N_1 & A_m^T \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1} (A_m - 1)^T X_2 & \sqrt{d_1} (A_m - 1)^T X_1 \\ \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \sqrt{d_1} M_2 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_2 & \sqrt{d_1} N_2 & B^T(i, m) \bar{P}(i, m) & \sqrt{d_1} B^T(i, m) X_2 & \sqrt{d_1} B^T(i, m) X_1 \\ \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \sqrt{d_1} M_3 & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_3 & \sqrt{d_1} N_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{d_1} M_1^T & \sqrt{d_1} M_2^T & \sqrt{d_1} M_3^T & -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_1^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_2^T & \sqrt{(d_1 - \underline{d}_1)} S_3^T & 0 & -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{d_1} N_1^T & \sqrt{d_1} N_2^T & \sqrt{d_1} N_3^T & 0 & 0 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{P}(i, m) A_m & \bar{P}(i, m) B(i, m) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{P}^{-1}(i, m) & 0 & 0 \\ \sqrt{d_1} (A_m - 1) X_2 & \sqrt{d_1} B(i, m) X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_2 & 0 \\ \sqrt{d_1} (A_m - 1) X_1 & \sqrt{d_1} B(i, m) X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1 \end{bmatrix}$$

(4.1.34)

En utilisant le théorème de SCHUR on obtiendra finalement :

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} \bar{P} - 1_{(i,m)} & 0 & 0 & \bar{P}(i,m)A_m & \bar{P}(i,m) B(i,m) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_2 & 0 & \sqrt{d_1}(A_m - 1)X_2 & \sqrt{d_1}B(i,m)X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X_1 & \sqrt{d_1}(A_m - 1)X_1 & \sqrt{d_1}B(i,m)X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_m^T \bar{P}(i,m) & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_2 & \sqrt{d_1}(A_m - 1)^T X_1 & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \sqrt{d_1}M_1 & \sqrt{(d_1 - d_1)S_1} & \sqrt{d_1}N_1 \\ B^T(i,m) \bar{P}(i,m) & \sqrt{d_1}B^T(i,m)X_2 & \sqrt{d_1}B^T(i,m)X_1 & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \sqrt{d_1}M_2 & \sqrt{(d_1 - d_1)S_2} & \sqrt{d_1}N_2 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{11} & \sqrt{d_1}M_3 & \sqrt{(d_1 - d_1)S_3} & \sqrt{d_1}N_3 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_1}M_1^T & \sqrt{d_1}M_2^T & \sqrt{d_1}M_3^T & -X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{(d_1 - d_1)S_1^T} & \sqrt{(d_1 - d_1)S_2^T} & \sqrt{(d_1 - d_1)S_3^T} & 0 & -X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_1}N_1^T & \sqrt{d_1}N_2^T & \sqrt{d_1}N_3^T & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.35)$$

Théorème 2

En considérant le système donné de l'équation (4.1.5) il existe un contrôleur tel que donné dans l'équation (4.1.4) tel que le système en boucle fermé est stochastiquement stable s'ils existent les matrices :

$$P(i,m) > 0, B(i,m) > 0, Q > 0, R > 0, X_v > 0, v=1, 2, M_{(i,m)(v)}, N_{(i,m)(v)}, S_{(i,m)(v)}, v=1, 2, 3, \forall i, m \in I$$

On écrit la matrice $\bar{P}(i,m)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{P}(i,m) &= \sum_{n=0}^{d_2} \sum_{j=0}^{d_1} \lambda_{mn} \rho_{ij} P(j,n) \\ &= \lambda_{m0} \rho_{i0} P(0,0) + \lambda_{m0} \rho_{i1} P(1,0) + \dots + \lambda_{m0} \rho_{id_1} P(d_1, 0) \\ &= \lambda_{m1} \rho_{i0} P(0,1) + \lambda_{m1} \rho_{i1} P(1,1) + \dots + \lambda_{m1} \rho_{id_1} P(d_1, 1) \\ &= \lambda_{m2} \rho_{i0} P(0,2) + \lambda_{m2} \rho_{i1} P(1,2) + \dots + \lambda_{m2} \rho_{id_1} P(d_1, 2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &= \lambda_{md_2} \rho_{i0} P(0, d_2) + \lambda_{md_2} \rho_{i1} P(1, d_2) + \dots + \lambda_{md_2} \rho_{id_1} P(d_1, d_2) \\ &= \sqrt{\lambda_{m0} \rho_{i0}} \sqrt{\lambda_{m1} \rho_{i0}} \dots \sqrt{\lambda_{md_2} \rho_{i0}} \vdots \sqrt{\lambda_{m0} \rho_{id_1}} \sqrt{\lambda_{m1} \rho_{id_1}} \sqrt{\lambda_{md_2} \rho_{id_1}} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & p(0,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & p(0,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & p(0, d_2) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & p(d_1, 0) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & p(d_1, 0) & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & p(d_1, d_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_{m0} \rho_{i0}} \\ \sqrt{\lambda_{m1} \rho_{i0}} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_{md_2} \rho_{i0}} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_{m0} \rho_{id_1}} \\ \sqrt{\lambda_{m1} \rho_{id_1}} \\ \sqrt{\lambda_{md_2} \rho_{id_1}} \end{bmatrix}$$

$$= \varphi^T(i, m) \hat{P} \varphi(i, m) \tag{4.1.36}$$

On peut aussi écrire :

$$\varphi^T(i, m) = [\varphi_0^T(i, m) \ \varphi_1^T(i, m) \ \dots \ \varphi_{d_1}^T(i, m)]$$

Avec :

$$\varphi_h^T(i, m) = [\sqrt{\lambda_{m0} \rho_{ih}} \ \sqrt{\lambda_{m1} \rho_{ih}} \ \dots \ \sqrt{\lambda_{md_2} \rho_{ih}}]$$

Ou :

$$h = 0, \quad 0, \dots, d_1$$

La matrice \hat{P} s'écrit aussi :

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{P}_{d_1} \end{bmatrix} = \text{diag} \{ \hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{d_1} \}$$

Avec :

$$P_i = \begin{bmatrix} P(i, 0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(i, 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(i, d_2) \end{bmatrix} = \text{diag} \{ P(i, 0), P(i, 1), \dots, P(i, d_2) \}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, d_1$$

Maintenant on définit la matrice suivante :

$$\hat{X} = \text{diag} \{ I, X_2^{-1}, X_1^{-1}, I \}$$

On multiplie la matrice de l'équation (3.1.35) a gauche et a droit par \widehat{X}^T et \widehat{X} respectivement :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ * & X_2^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & X_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\bar{P}(i, m) & 0 & 0 & \omega_{(i, m)1} \\ * & -X_2 & 0 & \omega_{(i, m)2} \\ * & * & -X_1 & \omega_{(i, m)3} \\ \omega_{(i, m)1^T} & \omega_{(i, m)2^T} & \omega_{(i, m)3^T} & \omega_{(i, m)4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ * & X_2^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & X_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ * & X_2^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & X_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\bar{P}(i, m) & 0 & 0 & \omega_{(i, m)1} \\ * & -I & 0 & \omega_{(i, m)2} \\ * & * & -I & \omega_{(i, m)3} \\ \omega_{(i, m)1^T} & \omega_{(i, m)2^T} X_2^{-1} & \omega_{(i, m)3^T} X_1^{-1} & \omega_{(i, m)4} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.37)
 \end{aligned}$$

En appliquant le complément de SCHUR, la matrice de l'équation (4.1.36) est équivalente a :

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & 0 & \Omega_2(i, m) \\ * & -X_1^{-1} & \Omega_2(i, m) \\ * & * & \omega_{(i, m)4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{(i, m)1^T} \end{bmatrix} (-\bar{P}(i, m))^{-1} [0 \ 0 \ \omega_{(i, m)1}] < 0 \quad (4.1.38)$$

$$\text{Avec : } \Omega_2(i, m) = [\sqrt{d_1}(A_m - 1) \sqrt{d_1}B(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{(i, m)1^T} \end{bmatrix} (-\bar{P}(i, m))^{-1} [0 \ 0 \ \omega_{(i, m)1}]$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_2(i, m) & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_m^T \bar{P}(i, m) \\ B^T(i, m) \bar{P}(i, m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-\bar{P}(i, m))^{-1} \times [0 \ 0 \ \bar{P}(i, m) A_m \ \bar{P}(i, m) \ B(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] \\
 & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_m^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-\bar{P}(i, m)) [0 \ 0 \ A_m \ B(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.1.39)
 \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } B(i, m) = \begin{cases} B(i, 0) = \begin{bmatrix} \Gamma F(i, m) & 0 \\ F(i, m) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ I \end{bmatrix} F(i, m) [I \ 0] & \text{si : } m = 0 \\ B(i, m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si : } 1 \leq m \leq d_2 \end{cases}$$

Alors l'intégration de l'équation (4.1.38) devient :

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & 0 & \Omega_2(i, m) \\ * & -X_1^{-1} & \Omega_2(i, m) \\ * & * & \omega_{(i,m)4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_m^T \\ B^T(i, m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(-\varphi^T(i, m) \hat{P} \varphi(i, m) \right) [0 \ 0 \ A_m \ B(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] < 0 \quad (4.1.40)$$

L'équation (4.1.39) s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & 0 & \Omega_2(i, m) \\ * & -X_1^{-1} & \Omega_2(i, m) \\ * & * & \omega_{(i,m)4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_m^T \varphi^T \\ B^T(i, m) \varphi^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\hat{P}) [0 \ 0 \ A_m \varphi(i, m) \ B(i, m) \varphi(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] < 0 \quad (4.1.41)$$

En posant :

$$\hat{P} = X^{-1} \text{ et } [0 \ 0 \ A_m \varphi(i, m) \ B(i, m) \varphi(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] = \Omega_1(i, m)$$

$$\Omega_1(i, m) \Leftrightarrow [0 \ 0 \ A_m \varphi(i, m) \ B(i, m) \varphi(i, m) \ 0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ \Omega_1(i, m)]$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & 0 & \Omega_2(i, m) \\ * & -X_1^{-1} & \Omega_2(i, m) \\ * & * & \omega_{(i,m)4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_1(i, m) \end{bmatrix} X^{-1} [0 \ 0 \ \Omega_1(i, m)] < 0 \quad (4.1.42)$$

Par le complément de SCHUR on obtient :

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & 0 & \Omega_1(i, m) \\ 0 & -X_2^{-1} & 0 & \Omega_2(i, m) \\ 0 & 0 & -X_1^{-1} & \Omega_2(i, m) \\ \Omega_1^T(i, m) & \Omega_2^T(i, m) & \Omega_2^T(i, m) & \omega_{(i,m)4} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.43)$$

En posant : $Z_2 = X_2^{-1}$ et $Z_2 - X_1^{-1}$ on obtient la matrice finale de notre système qui doit être inférieur à zéro pour que notre système soit stable :

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & 0 & \Omega_1(i, m) \\ 0 & -Z_2 & 0 & \Omega_2(i, m) \\ 0 & 0 & -Z_1 & \Omega_2(i, m) \\ \Omega_1^T(i, m) & \Omega_2^T(i, m) & \Omega_2^T(i, m) & \omega_{(i,m)4} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.44)$$

4.1.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu déterminer la condition nécessaire pour qu'un système commandé à travers un réseau de communication avec retard induit soit stable sous forme d'LMI, en se basant sur la théorie de stabilité de LYAPUNOV et les chaînes de MARKOV. Cette méthode se distingue des autres par le fait de prendre en compte la stabilité du système, ainsi que le délai de retard induit par le réseau. C'est la connaissance de l'ensemble des paramètres qui permet d'agir sur le réseau pour maintenir la stabilité du système.

4.2. Stabilisation d'un système SCR discret par retour d'état

4.2. Introduction

Les systèmes de commandé en réseau (NCS), peuvent être définie d'une manière générale comme des systèmes automatiques dans l'interface de raccordement sont les capteurs, les actionneurs et les contrôleurs, sont distribués sur de nombreux champs d'applications, comme le montre la figure 4.2.1. Les échanges de données se font par l'intermédiaire d'un canal de transmission numérique à bande limitée partagée conforme aux protocoles de communication normalisés tels que le protocole d'étatisation datagramme (UDP) et le Protocole de control de transfert (TCP). En comparaisant aux systèmes de control centralisés traditionnel point-par-point, l'utilisation des technologies de réseau pour le transfert de données à distance entre les dispositifs distribués dans l'espace d'une application

de contrôle offre plusieurs avantages intéressants, tels que la modularité fonctionnelle, la flexibilité des architectures de conception de système, la complexité réduite du câblage, coûts de câblage, fiabilité améliorée et facilité d'installation et de maintenance [126], [127], [128].

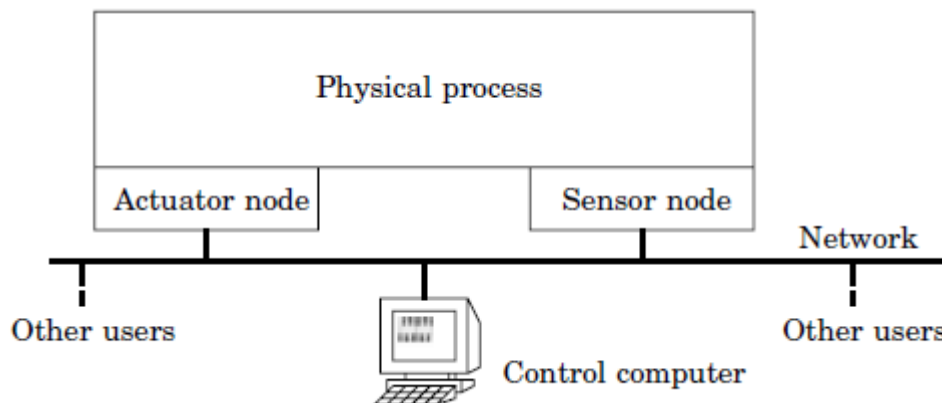


Figure 4.2.1 Configuration schématique d'un SCR

En raison de ces avantages importants, les systèmes de contrôle en réseau sont devenus omniprésents dotés d'applications allant des automobiles intelligentes à l'automatisation des usines, en passant par le contrôle des processus industriels et les grands réseaux d'énergie électrique.

Cependant, malgré leurs nombreuses caractéristiques attrayantes, l'utilisation des SCR a introduit de nouveaux défis et contraintes d'un grand intérêt pour la communauté de recherche sur le contrôle. En effet, l'insertion d'un canal de communication systématique entre l'entité et le contrôleur peut fortement dégrader les performances d'un système de contrôle et induire des problèmes de stabilité indésirables. Les causes des performances médiocres dans les systèmes de stockage réseau ne sont pas seulement inhérentes à la nature physique du réseau, mais également à ses conditions de fonctionnement.

Plus précisément, les problèmes les plus difficiles rencontrés dans la recherche sur les systèmes de contrôle en réseau sont les suivants: délais induits par le réseau, perte d'informations et désordre des paquets [129], [130]. Les réseaux de communication introduisent inévitablement des retards, dus à la limitation de la bande passante, mais aussi en raison de la surcharge des nœuds dans le réseau de communication.

Alors que les pertes de paquets de données et les phénomènes de désordre se produisent en raison de l'encombrement du trafic réseau et des "défaillances" dans la livraison des paquets

de données de la source à la destination via le réseau, les causes des retards induits par le réseau, à la fois de capteur à contrôleur (S-C) et les liaisons contrôleur à actionneur (C-A), incluent le temps de traitement requis pour encapsuler les données de mesure ou de contrôle dans des paquets, le temps de mise en file d'attente pour la disponibilité du réseau, en plus du temps de propagation mis par un paquet de données pour transiter de la source jusqu'à destination via le support physique du réseau. L'effet des retards induits par le réseau sur les SCR a attiré une attention considérable, et de nombreuses approches ont été développées afin de traiter le problème.

Selon le type de réseau et les protocoles de communication utilisés, les résultats existants peuvent être classés en trois paires principales [131]:

- 1 délai constant par rapport au temps;
- 2 délais déterministes par rapport aux délais stochastiques;
- 3 retard inférieur à un intervalle d'échantillonnage et contrairement.

Pour des retards variant de manière stochastique avec l'hypothèse réaliste d'une certaine corrélation entre le retard actuel et les précédents, la variation peut être associée à certaines descriptions statistiques et en effet peut être modélisée efficacement à l'aide des chaînes de Markov. Cela permet d'établir l'analyse de la stabilité et la conception du contrôleur de ces systèmes de contrôle en réseau dans le cadre de systèmes linéaires à sauts markoviens à temps discret (DMJLS) avec délai [132], [133]. Le problème des systèmes de réseau de communication soumis à des contraintes de délai de communication aléatoires a fait l'objet de nombreuses recherches au cours des deux dernières décennies. Dans Krtolica et H.Goktas. [134], des retards variables dans le temps ont été modélisés par des chaînes de Markov et des conditions complètes pour la stabilité en boucle fermée exponentielle quadratique moyenne à l'état zéro sont établies pour les systèmes linéaires discrets utilisant une approche de fonction stochastique de Lyapunov. Dans Nilsson et B.Wittenmark. [135], une structure de contrôle stochastique optimale d'état à rétroaction a été proposée, dans laquelle les signaux de contrôle et de mesure sont complétés avec horodatage (timestamping).

La loi de commande a été dérivée en utilisant la même technique que pour le problème standard de la linéarité quadratique gaussienne (LQG). Une autre configuration avec des données horodatées dans la communication réseau a été étudiée dans Xiao et A.Hassibi [136] où le problème de contrôle de rétroaction dépendant du mode a été converti en un problème de contrôle de rétroaction de sortie et résolu dans le cadre des systèmes linéaires de sauts markoviens (MJLS) sous la forme d'une optimisation convexe sur un ensemble de LMI. Dans

[137], H. Lin et al. L. Zhang et al [138], ont obtenu d'autres résultats intéressants sur la stabilisation de systèmes de commande en réseau à temps discret avec des retards aléatoires.

Dans [139] Y. Shi et al, ont établi un contrôleur de rétroaction d'état à deux modes dont le gain dépend à la fois du retard capteur à contrôleur (τ_k^{sc}) et du délai précédent contrôleur à actionneur (τ_{k-1}^{ca}) a été calculé en utilisant une approche itérative d'inégalité matricielle linéaire (LMI). Dans [139], des sauts en mode retard markovien à étapes multiples ont été introduit dans la conception d'un contrôleur de rétroaction de sortie dynamique à deux modes stabilisant en résolvant un ensemble de LMI.

Dans le travail de J. Wu et al. [32], un modèle SCR pour les pertes de paquets aléatoires a été proposé, dans lequel le contrôleur et l'actionneur ont été alimentés à travers des mémoires tampons avec la règle du dernier arrivé, premier sorti (LIFO).

Dans cette configuration, les pertes de paquets consécutives ont été traitées comme des retards variables aléatoires et un contrôleur de retour d'état dépendant du mode est calculé en résolvant des inégalités matricielles linéaires. Dans des études plus récentes, plusieurs schémas et configurations de contrôle avancés pour les systèmes SCR à temps discret avec retards aléatoires ont été proposés afin d'améliorer les performances et la stabilité.

Dans Q. Li et al. [140], le problème de contrôle mixte H_2/H_∞ a été étudié et des conditions suffisantes ont été établies pour l'existence d'un contrôleur d'état à deux modes H_2/H_∞ avec une stabilité stochastique en boucle fermée garantie. Dans [141], L. Qui et al. ont présenté un modèle unifié pour lancer simultanément les retards aléatoires et les pertes de paquets. Dans [142], M.S. Mahmoud et al. ont étendu le travail dans [142] pour se concentrer sur les systèmes de commande en réseau à temps discret avec incertitude de la centrale et retards aléatoires markoviens avec probabilités de transition partiellement connues. Les méthodes développées dans [138], [139] se sont améliorées dans [143] en prenant en compte les incertitudes dans les matrices de transition dues à des variations temporelles ou à des informations statistiques incomplètes. D'autres résultats impliquant des NCS avec des retards aléatoires peuvent être trouvés dans [144], [145].

Jusqu'à présent, la conception de contrôleurs à rétroaction dépendant du mode pour stabiliser les NCS avec des retards dans les liaisons capteur à contrôleur (τ_k^{sc}) et contrôleur à actionneur (τ_k^{ca}) a été réalisée en supposant que le délai total imposé au signal d'état à travers la boucle de régulation (capteur-contrôleur-actionneur) est égal à $\tau_k^{ca} + \tau_k^{sc}$. Cependant, ce n'est qu'une approximation qui ne tient pas compte de l'effet de τ_k^{ca} sur τ_k^{sc} au niveau du lien contrôleur-actionneur.

En effet, si à un instant donné k l'information d'état $x(k)$ est décalée dans le temps de $\tau_k^{sc}(k \leftarrow k - \tau_k^{sc})$ pour être disponible pour le contrôleur sous la forme $x(k - \tau_k^{sc})$ en raison de la latence du lien S-C, il en va de même lorsque cet état retardé passe par le lien C-A où le temps est de nouveau décalé de $\tau_k^{ca}(k \leftarrow k - \tau_k^{ca})$ de sorte que l'état atteint l'actionneur comme $x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc})$ au lieu de $x(k - \tau_k^{ca}\tau_k^{sc})$ supposé dans la littérature disponible. Autant que les auteurs le sachent, cette approximation n'a été mentionnée et justifiée que dans [141], mais la conception d'un contrôleur de retour d'état dépendant du mode pour la comptabilisation non approchée du problème par l'effet du retard de C-A n'a pas été étudiée, ce qui motive l'objectif de cet article.

Ce travail stipule, la conception d'un contrôleur stabilisateur à retour d'état pour un système de contrôle en réseau avec des retards markoviens C-A et C-S dans un cadre DMJLS a été envisagée. Il est supposé qu'à chaque instant d'échantillonnage, le retard actuel S-C τ_k^{sc} et le retard précédent C-A τ_{k-1}^{ca} sont disponibles pour les nœuds de contrôleur et d'actionneur, respectivement, par la technique d'horodatage. Cependant, le délai C-A τ_{k-1}^{ca} passe par la liaison S-C pour atteindre le contrôleur sous la forme $\tau_{k-\tau_{k-1}^{ca}}^{sc}$. Par conséquent, le gain du contrôleur à deux modes peut être conçu pour dépendre de τ_k^{sc} et de $\tau_{k-\tau_{k-1}^{ca}}^{sc}$.

Plus important encore, l'effet global du retard C-A sur le signal d'état est incorporé dans le modèle en boucle fermée afin de réduire davantage la prudence des conditions de stabilisation du SCR. En outre, contrairement à la plupart des références mentionnées ci-dessus, la conception proposée dans le présent document évite l'utilisation de l'approche d'augmentation de variable d'état, ce qui entraîne une réduction significative de la complexité de calcul du schéma.

Ce chapitre est organisé comme suite :

La section **(2)** présente la formulation du problème de contrôle de SCR, y compris la description du retard markovien.

La section **(3)** établit les conditions de stabilité en fonction du mode avec le contrôleur de retour d'état.

Dans la section **(4)** des exemples de simulation sont donnés afin d'illustrer la conception proposée, les conclusions sont résumées dans la section **(5)**.

$$\begin{aligned}\lambda_{mn} &= \Pr(\tau_{k+1}^{sc} = n | \tau_k^{sc} = m) \\ \rho_{ij} &= \Pr(\tau_{k+1}^{ca} = j | \tau_k^{ca} = i)\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

Ou

$$\lambda_{mn} \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho_{ij} \geq 0$$

Et

$$\sum_{n=0}^{\tau_{max}^{sc}} \lambda_{mn} = 1, \quad \sum_{j=0}^{\tau_{max}^{ca}} \rho_{ij} = 1 \quad (4.2.3)$$

Pour tout $m, n \in \mathcal{M}$ et $i, j \in \mathcal{N}$. On établit au niveau du nœud de l'actionneur où le signal de commande horodaté, un processeur intégré qui permet de calculer l'information de retard τ_{k-1}^{ca} à chaque instant d'échantillonnage k , avant sa transmission au contrôleur. Pendant que le délai τ_k^{sc} au nœud du contrôleur, est obtenu par la technique d'horodatage, bien que l'information τ_{k-1}^{ca} n'est pas immédiatement accessible en raison du retard induit par le réseau sur la liaison S-C. Par conséquent, l'information disponible pour le contrôleur, à chaque instant d'échantillon k , est le retard S-C actuel τ_k^{sc} de l'ancien retard C-A $\tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}$.

Par conséquent, l'action de commande de retour d'état $u(k)$ peut être calculée par la commande à distance en fonction de l'état retardé $x(k - \tau_k^{sc})$ et les dernières informations de retard disponibles à l'instant k , à savoir, τ_k^{sc} et $\tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}$

$$\bar{u}(k) = \mathbf{K} \left(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \right) x(k - \tau_k^{sc}) \quad (4.2.4)$$

Ou $\mathbf{K} \left(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \right)$ est le gain du contrôleur de rétroaction dépendant du délai de deux modes. Lorsque le signal de commande $u(k)$ est transmis par le contrôleur, il est encore retardé de τ_k^{ca} avant d'atteindre l'actionneur de la manière suivante:

$$u(k) = \bar{u}(k - \tau_k^{ca}) \quad (4.2.5)$$

$$\text{Avec} \quad (k - \tau_k^{ca}) = \mathbf{K} \left(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \right) x \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \quad (4.2.6)$$

En utilisant (4.2.5) et (4.2.6), l'équation (4.2.1) peut être réécrite dans un système à boucle fermée retardée comme suit:

$$x(k+1) = Ax(k) + BK \left(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \right) \times x \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \quad (4.2.7)$$

Avec les conditions initiales

$$x(i) = \varphi_i, \quad i = -\tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc}, -\tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc} + 1, \dots, 0.$$

Remarque 1

L'équation (4.2.6) est obtenue à partir de (3.2.4) en effectuant un décalage temporel de τ_k^{ca} remplaçant ainsi le temps k par $(k - \tau_k^{ca})$ dans le signal de commande $\bar{u}(k)$. Cependant, étant donné que les modes du gain $K \left(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \right)$ sont calculés et fixés au noeud du contrôleur, ils ne sont pas affectés par le retard induit de la liaison C-A τ_k^{ca} .

Remarque 2

Bien que τ_k^{sc} et τ_k^{ca} sont des retards aléatoires produits par des chaînes de Markov à temps discret, le système en boucle fermée (4.2.6) n'est pas un système linéaire standard de saut Markovien retardé à deux modes (MJLS), car le gain du contrôleur de rétroaction d'état dépend des modes τ_k^{sc} et $\tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}$ qui sont liés, simultanément, à la fois à τ_k^{pc} et τ_k^{cp} .

Remarque 3

Pour $\tau_k^{sc} = m$ et $\tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} = i$, le système en boucle fermée (4.2.7) est dit en mode (m, i) et le gain du contrôleur $K \left(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \right)$ est noté $K(m, i)$.

L'objectif est de concevoir un contrôleur de rétroaction d'état de telle sorte que le système en boucle fermée (4.2.7) soit stochastiquement stable. Dans cette configuration, effet globale du retard C-A τ_k^{ca} sur le signal d'état est incorporé dans le modèle en boucle fermée afin de réduire davantage la conservativité des conditions de stabilisation du NCS. De plus, contrairement à la plupart des références disponibles, la conception de rétroaction d'état proposée dans cet article évite l'utilisation de l'approche d'augmentation de variable d'état qui conduit à une réduction significative de la complexité de calcul du schéma. Pour le système sous-jacent, la définition suivante est adoptée pour la stabilité stochastique [140].

Définition 1

Le système en boucle fermée dans (4.2.7) est dit stochastiquement stable si pour chaque condition initiale $\varphi_i \in \mathbb{R}^p$ définie sur $\mathcal{J} = \{-\tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc}, -\tau_{max}^{sc} + 1, \dots, 0\}$

le mode de retard initial et $\tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca}$,

Il existe une constante de retard ξ , tel-que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\|x(k)\|^2 \mid x(0), \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \right] \leq \xi Y \left(\begin{array}{c} \varphi_i, -\tau_{max}^{sc} - \tau_{max}^{ca} \leq i \leq 0 \\ 0, \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \end{array} \right) \quad (4.2.8)$$

Ou

$Y(\varphi_i, -\tau_{max}^{sc} - \tau_{max}^{ca} \leq i \leq 0, \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca})$ et une fonction non négative des valeurs initiales du système satisfaisant $Y(0,0, \dots, 0) = 0$.

4.2.2. Résultats principaux

Dans cette section, des conditions suffisantes pour la stabilité stochastique du système en boucle fermée (4.2.7) sont établies et un contrôleur de stabilisation par rétroaction d'état dépendant de deux modes est conçu en appliquant une approche d'inégalité matricielle fonctionnelle et linéaire de Lyapunov stochastique. Comme le gain du contrôleur dépend du retard de mode $\tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}$ le saut à plusieurs étapes des chaînes de Markov est impliqué dans le système (4.2.7). Par conséquent, la matrice de probabilité de transition pour le saut de mode de retard à plusieurs étapes est applicable dans la conception du contrôleur de rétroaction d'état. À cet effet, la proposition suivante est donnée.

Proposition 1

Si la matrice de probabilité de transition de τ_{k-1}^{ca} à τ_k^{ca} est $T^{ca} = \{\rho_{ij}\}$, alors la matrice de probabilité de transition de $\tau_{k-\tau_{k+1}^{sc}}^{ca}$ à τ_k^{ca} est $[T^{ca}]^{\tau_{k+1}^{sc}}$, qui est toujours une matrice de

probabilité de transition de la chaîne de Markov. Surtout quand $\tau_{k+1}^{sc} = 0$, la matrice de probabilité de transition est $[T^{ca}]^{\tau_{k+1}^{sc}} = [T^{ca}]^0 = I$,

Ou

$$[T^{ca}]^{\tau_{k+1}^{sc}} = \sum_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}=0}^{\tau_{max}^{ca}} \dots \sum_{j_3=0}^{\tau_{max}^{ca}} \sum_{j_2=0}^{\tau_{max}^{ca}} \begin{bmatrix} \rho_{0j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{sc} 0 \\ \rho_{1j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{sc} 0 \\ \vdots \\ \rho_{\tau_{max}^{ca} j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{sc} 0 \\ \rho_{0j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{sc} 1 \quad \dots \quad \rho_{0j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{ca} \tau_{max}^{ca} \\ \rho_{1j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{sc} 1 \quad \dots \quad \rho_{1j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{ca} \tau_{max}^{ca} \\ \vdots \\ \rho_{\tau_{max}^{ca} j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{sc} 1 \quad \dots \quad \rho_{\tau_{max}^{ca} j_2} \rho_{j_2 j_3} \dots \rho_{j_{\tau_{k+1}^{sc}}} \tau_{k+1}^{ca} \tau_{max}^{ca} \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Les conditions suffisantes pour garantir la stabilité stochastique du système (4.2.7) selon la définition 1 sont présentées dans le théorème suivant :

Théorème 1

Pour le système en boucle fermée (4.2.7) avec des retards aléatoires bornés induits par le réseau $\tau_k^{sc} \in \mathcal{M}$ et $\tau_k^{ca} \in \mathcal{N}$, si pour chaque mode $m \in \mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \tau_{max}^{sc}\}$ et $i \in \mathcal{N} = \{0, 1, \dots, \tau_{max}^{ca}\}$, il existe des matrices $Q_v > 0$, $Z_v > 0$, $v = 1, 2$, $\mathcal{U}_d(m, i)$, $\mathcal{V}_d(m, i)$, $\mathcal{W}_d(m, i)$, $d = 1, 2, 3$ $P(m, i) > 0$ et $K(m, i)$, satisfaisant l'inégalité matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}(m, i) & 0 & 0 & \Psi_1(m, i) \\ * & -Z_2 & 0 & \Psi_2(m, i) \\ * & * & -Z_1 & \Psi_3(m, i) \\ * & * & * & \Psi_4(m, i) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.10)$$

Ou

$$\begin{aligned} \Psi_1(m, i) &\triangleq [\bar{P}(m, i)A \quad \bar{P}(m, i)BK(m, i) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ &\quad \Psi_2(m, i) \\ &\triangleq [\sqrt{\tau_M} Z_2(A - I) \quad \sqrt{\tau_M} Z_2 BK(m, i) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ &\quad \Psi_3(m, i) \\ &\triangleq [\sqrt{\tau_M} Z_1(A - I) \quad \sqrt{\tau_M} Z_1 BK(m, i) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

$$\Psi_4(m, i) \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(m, i) & \Lambda_{12}(m, i) & \Lambda_{13}(m, i) & \sqrt{\tau_M} \mathcal{U}_1(m, i) \\ * & \Lambda_{22}(m, i) & \Lambda_{23}(m, i) & \sqrt{\tau_M} \mathcal{U}_2(m, i) \\ * & * & \Lambda_{33}(m, i) & \sqrt{\tau_M} \mathcal{U}_3(m, i) \\ * & * & * & -Z_1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \sqrt{\tau_r} \mathcal{V}_1(m, i) & \sqrt{\tau_M} \mathcal{W}_1(m, i) \\ \sqrt{\tau_r} \mathcal{V}_2(m, i) & \sqrt{\tau_M} \mathcal{W}_2(m, i) \\ \sqrt{\tau_r} \mathcal{V}_3(m, i) & \sqrt{\tau_M} \mathcal{W}_3(m, i) \\ 0 & 0 \\ -Z_1 & 0 \\ * & -Z_2 \end{bmatrix}$$

Avec

$$\bar{P}(m, i) \triangleq \sum_{n=0}^{\tau_{max}^{sc}} \sum_{j=0}^{\tau_{max}^{ca}} \sum_{s_1=0}^{\tau_{max}^{ca}} \lambda_{mn} [\text{Tca}]_{i,j}^{m-n+1} [\text{Tca}]_{j,s_1}^n P(n, j)$$

et

$$\Lambda_{11}(m, i) \triangleq \mathcal{U}_1(m, i) + \mathcal{U}_1^T(m, i) + \mathcal{W}_1(m, i) + \mathcal{W}_1^T(m, i) - P(m, i) + (1 + \tau_M)Q_1 + Q_2$$

$$\Lambda_{12}(m, i) \triangleq -\mathcal{U}_1(m, i) + \mathcal{U}_2^T(m, i) - \mathcal{V}_1 + \mathcal{W}_2^T(m, i)$$

$$\Lambda_{13}(m, i) \triangleq \mathcal{U}_3^T(m, i) - \mathcal{V}_1(m, i) - \mathcal{W}_1(m, i) + \mathcal{W}_3^T(m, i)$$

$$\Lambda_{22}(m, i) \triangleq -\mathcal{U}_2(m, i) - \mathcal{U}_2^T(m, i) + \mathcal{V}_2(m, i) + \mathcal{V}_2^T(m, i) - P(m, i) - Q_1$$

$$\Lambda_{23}(m, i) \triangleq -\mathcal{U}_3^T(m, i) - \mathcal{V}_2(m, i) - \mathcal{V}_3^T(m, i) \\ - \mathcal{W}_2(m, i)$$

$$\Lambda_{33}(m, i) \triangleq -\mathcal{V}_3(m, i) - \mathcal{V}_3^T(m, i) - \mathcal{W}_3(m, i) \\ - \mathcal{W}_3^T(m, i) - Q_2$$

$$\tau_M = \tau_{max}^{ca} + \tau_{max}^{sc}, \tau_m = \tau_{min}^{ca} + \tau_{min}^{sc}, \tau_r = \tau_M - \tau_m$$

Alors, le système en boucle fermée (4.2.7) entraîné par le contrôleur (4.2.4) est stochastiquement stable.

Preuve

Pour le système en boucle fermée (4.2.7), la fonctionnelle candidate stochastique de Lyapunov suivant est construite.

$$V(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) = \\ \sum_{s=1}^5 V_s(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc})$$

Ou

$$V_1(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) \\ = x^T(k)P(\tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca})x(k) \\ = x^T(k)P(m, i)x(k)$$

$$V_2(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) \\ = \sum_{l=k-\tau_k^{ca}-\tau_{k-\tau_k^{sc}}^{sc}}^{k-1} x^T(l)Q_1x(l)$$

$$\begin{aligned}
& V_3 \left(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \\
&= \sum_{\theta=-\tau_{min}^{ca}-\tau_{min}^{sc}}^{-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}+1} \sum_{l=k+\theta}^{k-1} x^T(l) Q_1 x(l) \\
& V_4 \left(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \\
&= \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-1} x^T(l) Q_2 x(l) \\
& V_5 \left(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \\
&= \sum_{\theta=-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{-1} \sum_{l=k+\theta}^{k-1} \delta^T(l) (Z_1 + Z_2) \delta(l)
\end{aligned}$$

Où

$\delta(l) = x(l+1) - x(l)$ et $P(m, i)$, Q_1 , Q_2 , Z_1 et Z_2 satisfaisant (4.2.10).

Afin de simplifier les équations, les indices entre parenthèses $(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc})$, sera omis et remplacé par le point (\cdot), dans $V_1 \dots V_5$.

Ce qui dénote :

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \sum_{s=1}^5 \Delta V_s = \sum_{s=1}^5 \mathbb{E} \\
& \left[V_s \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{sc}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \mid \right. \right. \\
& \left. \left. x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) - V_s(\cdot) \right] \quad (4.2.11)
\end{aligned}$$

En définie $\tau_k^{sc} = m\tau_{k+1}^{sc} = n$, $\tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} = i$, $\tau_{k-\tau_k^{sc}}^{ca} = j$, $\tau_k^{ca} = s_1$, $\tau_{k+1}^{ca} = s_2$, $\tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} = r_1$ et $\tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} = r_1$

Ensuite, l'évaluation des termes ΔV_s , $s = 1, 2, \dots, 5$ implique les matrices de transition de probabilité suivantes:

$$\begin{aligned}
[T^{sc}] &= \{\lambda_{mn}\} : \tau_k^{sc} \rightarrow \tau_{k+1}^{sc}, \quad [T^{ca}]^{m-n+1} : \tau_{k-\tau_k^{sc}-1}^{ca} \rightarrow \tau_{k-\tau_{k+1}^{sc}}^{ca}, \quad [T^{ca}]^n : \tau_{k-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \rightarrow \tau_k^{ca}, \\
[T^{ca}] &= \{\rho_{ij}\} : \tau_k^{ca} \rightarrow \tau_{k+1}^{ca} \text{ and } [T^{sc}]^{s_1-s_2+1} : \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \rightarrow \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc}.
\end{aligned}$$

Ces matrices de transition impliquent un saut en plusieurs étapes de chaînes de Markov modélisant les retards induits. Ensuite, les termes de (4.2.11) sont évalués comme:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1 &\triangleq \\
&\mathbb{E} \left[V_1 \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{ca}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_k^{sc} \mid \right. \right. \\
&\quad \left. \left. x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) - V_1(\cdot) \right] \\
&= x^T(k) (A^T \bar{P}(m, i) A - P(m, i)) x(k) + 2x^T \\
&\quad (k) A^T \bar{P}(m, i) B K(m, i) x \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \\
&\quad + x^T \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) K^T(m, i) B^T \bar{P}(m, i) B \\
&\quad \times K(m, i) x \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_2 &\triangleq \mathbb{E} \left[V_2 \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{ca}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \mid \right. \right. \\
&\quad \left. \left. x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) - V_2(\cdot) \right] \\
&= \sum_{s_2=0}^{\tau_{max}^{ca}} \sum_{r_2=0}^{\tau_{max}^{pc}} [\text{T}^{ca}]_{s_1, s_2} \cdot [\text{T}^{sc}]_{r_1, r_2}^{r_1-r_2+1} \\
&\quad \left(\sum_{l=k+1-s_2-r_2}^k x^T(l) Q_1 x(l) \right) - \sum_{l=k-s_1-r_1}^{k-1} x^T(l) Q_1 x(l)
\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
\Delta V_2 &\leq x^T(k) Q_1 x(k) - x^T \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) Q_1 x \left(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \\
&\quad + \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}+1}^{k-\tau_{min}^{ca}-\tau_{min}^{sc}} x^T(l) Q_1 x(l)
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_3 &\triangleq \\
&\mathbb{E} \left[V_3 \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{ca}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \mid \right. \right. \\
&\quad \left. \left. x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) - V_3(\cdot) \right] \\
&= \sum_{\theta=-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}+1}^{-\tau_{min}^{ca}-\tau_{min}^{sc}} \left(\sum_{l=k+\theta+1}^k - \sum_{l=k+\theta}^{k-1} \right) \\
&\quad \times x^T(l) Q_1 x(l) \\
&= (\tau_{max}^{ca} + \tau_{max}^{sc} - \tau_{min}^{ca} - \tau_{min}^{sc}) x^T(k) Q_1 x(k) \\
&\quad - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}+1}^{k-\tau_{min}^{ca}-\tau_{min}^{sc}} x^T(l) Q_1 x(l)
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta V_4 \triangleq \\
& \left[V_4 \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{ca}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \mid \right. \right. \\
& \left. \left. x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) - V_4(\cdot) \right] = \\
& \left(\sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}+1}^k - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-1} \right) \\
& \quad \times x^T(l) Q_2 x(l) \\
& = x^T(k) Q_2 x(k) - x^T(k - \tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc}) \\
& \quad Q_2 x(k - \tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc})
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta V_5 \triangleq \\
& \mathbb{E} \left[V_5 \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{ca}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \right. \right. \\
& \left. \left. x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) - V_5(\cdot) \right] \\
& = \sum_{\theta=-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{-1} \left(\sum_{l=k+\theta+1}^k - \sum_{l=k+\theta}^{k-1} \right) \delta^T(l) \\
& \quad \times (Z_1 + Z_2) \delta \\
& = \sum_{\theta=-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{-1} \left[\delta^T(k) (Z_1 + Z_2) \delta(k) - \right. \\
& \quad \left. \delta^T(k + \theta) (Z_1 + Z_2) \delta(k + \theta) \right] \\
& = (\tau_{max}^{sc} + \tau_{max}^{ca}) \delta^T(k) (Z_1 + Z_2) \delta(k) \\
& \quad - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-\tau_k^{ca}-\tau_k^{sc}-1} \delta^T(l) Z_1 \delta(l) \\
& \quad - \sum_{l=k-\tau_k^{ca}-\tau_k^{sc}}^{k-1} \delta^T(l) Z_1 \delta(l) \\
& \quad - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-1} \delta^T(l) Z_2 \delta(l)
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Soit

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) \\ x(k - \tau_{max}^{sc} - \tau_{max}^{ca}) \end{bmatrix},$$

Alors on a:

$$\begin{aligned}
\Delta V & = \sum_{s=1}^5 \Delta V_s \leq x^T(k) (A^T \bar{P}(m, i) A - P(m, i)) x(k) \\
& \quad + 2x^T(k) A^T \bar{P}(m, i) B K(m, i) x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) \\
& \quad + x^T(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) K^T(m, i) B^T \bar{P}(m, i) B K(m, i) \\
& \quad \times x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc}) + (\tau_r + 1) x^T(k) Q_1 x(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^T(k)Q_2x(k) - x^T(k - \tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc})Q_2x(k - \tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc}) \\
& \quad +\tau_M \left[(A - I)x(k) + BK(m, i)x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k}^{sc}) \right]^T \\
& \quad \times (Z_1 + Z_2) \left[(A - I)x(k) + BK(m, i)x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k}^{sc}) \right] \\
& \quad \quad - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-\tau_k^{ca}-\tau_{k-\tau_k}^{sc}-1} \delta^T(l)Z_1\delta(l) \\
& \quad \quad - \sum_{l=k-\tau_k^{ca}-\tau_{k-\tau_k}^{sc}}^{k-1} \delta^T(l)Z_1\delta(l) \\
& \quad \quad - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-1} \delta^T(l)Z_2\delta(l) \\
& +2\zeta^T(k)\mathcal{U}(m, i) \left(x(k) - x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k}^{sc}) - \sum_{l=k-\tau_k^{ca}-\tau_{k-\tau_k}^{sc}}^{k-1} \delta(l) \right) \\
& +2\zeta^T(k)\mathcal{V}(m, i) \left(x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k}^{sc}) - x(k - \tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc}) \right. \\
& \quad \quad \left. - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-\tau_k^{ca}-\tau_{k-\tau_k}^{sc}-1} \delta(l) \right) \\
& \quad +2\zeta^T(k)\mathcal{V}(m, i) \left(x(k - \tau_k^{ca} - \tau_{k-\tau_k}^{sc}) \right. \\
& \quad \quad \left. - x(k - \tau_{max}^{ca} - \tau_{max}^{sc}) - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-\tau_k^{ca}-\tau_{k-\tau_k}^{sc}-1} \delta(l) \right)
\end{aligned}$$

On peut noter que les trois derniers termes introduits dans la partie droite de l'inégalité sont identiques à zéro avec

$$\mathcal{U}(m, i) \triangleq [\mathcal{U}_1^T(m, i) \quad \mathcal{U}_2^T(m, i) \quad \mathcal{U}_3^T(m, i)]^T,$$

$$\mathcal{V}(m, i) \triangleq [\mathcal{V}_1^T(m, i) \quad \mathcal{V}_2^T(m, i) \quad \mathcal{V}_3^T(m, i)]^T \text{ et,}$$

$$\mathcal{W}(m, i) \triangleq [\mathcal{W}_1^T(m, i) \quad \mathcal{W}_2^T(m, i) \quad \mathcal{W}_3^T(m, i)]^T.$$

Après quelques manipulations matricielles, l'équation suivante est obtenue:

$$\begin{aligned}
\Delta V \leq & \zeta^T(k) \times \\
& \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} A^T \bar{P}(m, i) \\ K^T(m, i) B^T \bar{P}(m, i) \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}(m, i)^{-1} \\ & \begin{bmatrix} A^T \bar{P}(m, i) \\ K^T(m, i) B^T \bar{P}(m, i) \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_2 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & Z_2^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_2 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_1 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_1 \\ 0 \end{bmatrix} Z_1^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_1 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \right. \\
& + \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(m, i) & \Lambda_{12}(m, i) & \Lambda_{13}(m, i) \\ * & \Lambda_{22}(m, i) & \Lambda_{23}(m, i) \\ * & * & \Lambda_{33}(m, i) \end{bmatrix} \\
& + \left. \begin{aligned} & + \tau_M \mathcal{U}(m, i) Z_1^{-1} \mathcal{U}^T(m, i) + \\ & \tau_r \mathcal{V}(m, i) Z_1^{-1} \mathcal{V}^T(m, i) \\ & + \tau_M \mathcal{W}(m, i) Z_2^{-1} \mathcal{W}^T(m, i) \end{aligned} \right\} \zeta(k) \\
& - \sum_{l=k-\tau_k^{ca}-\tau_k^{sc}}^{k-1} [\zeta^T(k) \mathcal{U} + \delta^T(l) Z_1] \\
& \times [\zeta^T(k) \mathcal{U}(m, i) + \\
& \delta^T(l) Z_1]^T \tag{4.2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-\tau_k^{ca}-\tau_k^{sc}-1} ([\zeta^T(k) \mathcal{V}(m, i) + \delta^T(l) Z_1] \\
& Z_1^{-1} [\zeta^T(k) \mathcal{V}(m, i) + \delta^T(l) Z_1]^T) \\
& - \sum_{l=k-\tau_{max}^{ca}-\tau_{max}^{sc}}^{k-1} ([\zeta^T(k) \mathcal{W}(m, i) + \delta^T(l) Z_2] \\
& Z_2^{-1} [\zeta^T(k) \mathcal{W}(m, i) + \delta^T(l) Z_2]^T)
\end{aligned}$$

Étant donné que $Z_1 > 0$ et $Z_2 > 0$, ont conclu que les trois derniers termes de (4.2.17) sont non positifs et cela conduit à (4.2.18).

En introduisant le complément de Schur, l'équation (4.2.10) équivaut à $\Xi(m, i)$ et garantit que $\Xi(m, i) < 0$.

En déduit :

$$\begin{aligned}
 \Delta V \leq & \zeta^T(k) \times \\
 & \left(\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} A^T \bar{P}(m, i) \\ K^T(m, i) B^T \bar{P}(m, i) \\ 0 \end{array} \right] \bar{P}(m, i)^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} A^T \bar{P}(m, i) \\ K^T(m, i) B^T \bar{P}(m, i) \\ 0 \end{array} \right]^T \\ + \left[\begin{array}{c} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_2 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_2 \\ 0 \end{array} \right] \\ Z_2^{-1} \left[\begin{array}{c} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_2 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_2 \\ 0 \end{array} \right]^T \\ + \left[\begin{array}{c} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_1 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_1 \\ 0 \end{array} \right] Z_1^{-1} \left[\begin{array}{c} \sqrt{\tau_M} (A - I)^T Z_1 \\ \sqrt{\tau_M} K^T(m, i) B^T Z_1 \\ 0 \end{array} \right]^T \\ + \left[\begin{array}{ccc} \Lambda_{11}(m, i) & \Lambda_{12}(m, i) & \Lambda_{13}(m, i) \\ * & \Lambda_{22}(m, i) & \Lambda_{23}(m, i) \\ * & * & \Lambda_{33}(m, i) \end{array} \right] + \\ + \tau_M \mathcal{U}(m, i) Z_1^{-1} \mathcal{U}^T(m, i) + \\ \left. \begin{array}{l} \tau_r \mathcal{V}(m, i) Z_1^{-1} \mathcal{V}^T(m, i) \\ + \tau_M \mathcal{W}(m, i) Z_2^{-1} \mathcal{W}^T(m, i) \end{array} \right\} \zeta(k) \\ = \zeta^T(k) \Xi(m, i) \zeta(k)
 \end{array} \right) \quad (4.2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta V = & \mathbb{E} \left[V \left(x(k+1), \tau_{k+1}^{sc}, \tau_{k-\tau_{k+1}^{sc}}^{ca}, \tau_{k+1}^{ca}, \tau_{k+1-\tau_{k+1}^{ca}}^{sc} \right) \right. \\
 & \left. - V \left(x(k), \tau_k^{sc}, \tau_{k-\tau_k^{sc}}^{ca}, \tau_k^{ca}, \tau_{k-\tau_k^{ca}}^{sc} \right) \right] \\
 & \leq -\lambda_{\min}(-\Xi(m, i)) \zeta^T(k) \zeta(k) \\
 & \leq -\sigma x^T(k) x(k)
 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Ou :

$\Lambda_{\min}(-\Xi(m, i))$ désigne la valeur propre minimale de $-\Xi(m, i)$

et $\sigma = \inf\{\lambda_{\min}(-\Xi(m, i)), m \in \mathcal{M}, i \in \mathcal{N}\}$. par itération de la relation de l'inégalité (4.2.19),

il s'ensuit que pour tout $T > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[V \left(x(T+1), \tau_{T+1}^{sc}, \tau_{T-\tau_{T+1}^{sc}}^{ca}, \tau_{T+1}^{ca}, \tau_{T+1-\tau_{T+1}^{ca}}^{sc} \right) \right] \\ & \quad - \mathbb{E} \left[V \left(\varphi_i, -\tau_{\max}^{sc} - \tau_{\max}^{ca} \leq i \leq 0, \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \right) \right] \\ & \quad \leq -\sigma \sum_{k=0}^T \mathbb{E} [x^T(k)x(k)] \\ & \quad - \mathbb{E} \left[V \left(x(k+1), \tau_{T+1}^{sc}, \tau_{T-\tau_{T+1}^{sc}}^{ca}, \tau_{T+1}^{ca}, \tau_{T+1-\tau_{T+1}^{ca}}^{sc} \right) \right] \end{aligned}$$

Avec $\xi = \frac{1}{\sigma}$, il en résulte de cette inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^T \mathbb{E} [x^T(k)x(k)] \\ & \leq \xi \left(\mathbb{E} \left[V \left(x(0), \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E} \left[V \left(x(k+1), \tau_{T+1}^{sc}, \tau_{T-\tau_{T+1}^{sc}}^{ca}, \tau_{T+1}^{ca}, \tau_{T+1-\tau_{T+1}^{ca}}^{sc} \right) \right] \right) \\ & \leq \xi \mathbb{E} \left[V \left(\varphi_i, -\tau_{\max}^{sc} - \tau_{\max}^{ca} \leq i \leq 0, \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \right) \right] \end{aligned}$$

Pour $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[x^T(k)x(k) \mid x(0), \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \right] \leq \\ & \xi \mathbb{E} \left[V \left(\varphi_i, -\tau_{\max}^{sc} - \tau_{\max}^{ca} \leq i \leq 0, \tau_0^{ca}, \tau_0^{sc}, \tau_{-\tau_0^{ca}}^{sc}, \tau_{-\tau_0^{sc}-1}^{ca} \right) \right] \end{aligned}$$

Cela implique que la stabilité stochastique du système en boucle fermée (4.2.7) et complète ainsi la preuve du théorème 1. Théorème 1 fournit des conditions suffisantes d'LMI pour que le système en boucle fermée (4.2.7) soit stochastiquement stable sous le contrôleur de rétroaction d'état (4.2.4). Cependant, ces conditions sont non linéaires dans les contrôleur des matrices du gain $K(m, i)$, $m \in \mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \tau_{\max}^{sc}\}$ and $i \in \mathcal{N} = \{0, 1, \dots, \tau_{\max}^{ca}\}$. Afin de concevoir le contrôleur de stabilisation par rétroaction d'état, des conditions équivalentes d'LMI sont dérivées et données avec certaines contraintes de matrice inverses dans le théorème suivant.

Théorème 2

Pour le système de commande en réseau en boucle fermée (4.2.7) avec des retards aléatoires bornés $\tau_k^{sc} \in \mathcal{M}$ et $\tau_k^{ca} \in \mathcal{N}$, induits par le réseau, il existe un contrôleur (4.2.4) tel que le système est stochastiquement stable, si pour chaque mode $m \in \mathcal{M} = \{0,1, \dots, \tau_{max}^{sc}\}$ et $i \in \mathcal{N} = \{0,1, \dots, \tau_{max}^{ca}\}$,

il existe des matrices $P(m,i) > 0$, $\mathcal{X}(m,i)$, $Q_v > 0$, $Z_v > 0$, $S_v > 0$ $v = 1,2$, $U_r(m,i), V_r(m,i), W_r(m,i)$, $r = 1,2,3$ et $K(m,i)$, tels que

$$\begin{bmatrix} -x & 0 & 0 & \Omega_1(m,i) \\ * & -S_2 & 0 & \Omega_2(m,i) \\ * & * & -S_2 & \Omega_2(m,i) \\ * & * & * & \Omega_3(m,i) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.20)$$

$$P(m,i)\mathcal{X}(m,i) = I, Z_1 S_1 = I, Z_2 S_2 = I \quad (4.2.21)$$

Ou

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \text{diag}\{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{\tau_{max}^{sc}}\} \\ \mathcal{X}_h &= \text{diag}\{\mathcal{X}(h,0), \mathcal{X}(h,0), \dots, \mathcal{X}(h, \tau_{max}^{ca})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(m,i) &= \\ [\mathcal{L}(m,i)A & \mathcal{L}(m,i)BK(m,i) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(m,i) &= \\ [\sqrt{\tau_M}(A-I) & \sqrt{\tau_M}BK(m,i) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

$$\Omega_3(m,i) = \Psi_4(m,i)$$

Avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(m, i) &= [\mathcal{L}_0^T(m, i) \ \mathcal{L}_1^T(m, i) \ \dots \ \mathcal{L}_{\tau_{max}^{sc}}^T(m, i)]^T \\ \mathcal{L}_h(m, i) &= [\mathcal{L}_{h,0}(m, i) \ \mathcal{L}_{h,1}(m, i) \ \dots \ \mathcal{L}_{h,\tau_{max}^{ca}}(m, i)]^T\end{aligned}$$

et,

$$\mathcal{L}_{h,l}(m, i) = \left(\sum_{s_1=0}^{\tau_{max}^{ca}} [T^{sc}]_{m,h} [T^{ca}]_{i,l}^{m-h+1} [T^{ca}]_{l,s_1}^h \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour $h = 0, 1, \dots, \tau_{max}^{sc}$ and, $l = 0, 1, 2, \dots, \tau_{max}^{ca}$.

Ensuite, si (4.2.20) et (4.2.21) ont des solutions, le gain du contrôleur dépendant du mode est donné par $K(m, i)$.

Preuve

Par le complément de Schur, (4.2.10) est équivalent à :

$$\Phi_1(m, i) + \Phi_2(m, i) < 0 \quad (4.2.22)$$

$$\Phi_1(m, i) = \begin{bmatrix} -Z_2^{-1} & 0 & \Omega_2(m, i) \\ * & -Z_1^{-1} & \Omega_2(m, i) \\ * & * & \Psi_4(m, i) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(m, i) = \Psi_5^T(m, i) \bar{P}(m, i) \Psi_5(m, i)$$

Avec $\Psi_5(m, i) = [0 \ 0 \ A \ BK(m, i) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

En exprimant la matrice $\bar{P}(m, i)$ introduite dans le théorème 1 sous une forme compacte comme suit:

$$\begin{aligned}
\bar{P}(m, i) &\triangleq \\
&\sum_{n=0}^{\tau_{max}^{sc}} \sum_{j=0}^{\tau_{max}^{ca}} \sum_{s_1=0}^{\tau_{max}^{ca}} [T^{sc}]_{m,n} [T^{ca}]_{i,j}^{m-n+1} [T^{ca}]_{j,s_1}^n \\
&\quad \times P(n, j) \\
&= \sum_{h=0}^{\tau_{max}^{sc}} \mathcal{L}_h^T(m, i) \hat{P}_h \mathcal{L}_h(m, i) \\
&= \mathcal{L}^T(m, i) \hat{P} \mathcal{L}(m, i)
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Ou $\hat{P}_h = \text{diag}\{P(h, 0), P(h, 1), \dots, P(h, \tau_{max}^{ca})\}$ and, $\hat{P} = \text{diag}\{\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{\tau_{max}^{sc}}\}$

Alors, la matrice $\Phi_2(m, i)$ peut être écrite comme suite

$$\begin{aligned}
\Phi_2(m, i) &= \Psi_5^T(m, i) \mathcal{L}^T(m, i) \hat{P} \mathcal{L}(m, i) \Psi_5(m, i) \\
&= \hat{P} [0 \quad 0 \quad \Omega_1(m, i)]
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

En utilisant (4.2.24) avec les contraintes (4.2.21) et par le complément de Schur, l'équation (4.2.22) est équivalente à (4.2.20). Ceci complète la preuve.

Les conditions énoncées dans le théorème 2 sont en fait un ensemble d'LMI avec quelques contraintes de matrice inversée. Bien qu'ils ne soient pas convexes, il existe des méthodes pour les résoudre, comme l'algorithme de linéarisation complémentaire des cônes (CCL) qui s'est avéré efficace dans la mise en œuvre numérique. Par conséquent, dans cet article, il est suggéré d'utiliser l'algorithme CCL afin de calculer les gains du contrôleur $K(m, i)$ à partir du théorème 2.

4.2.3. Simulation et résultats expérimentaux

Dans cette section, un exemple est présenté afin d'illustrer l'efficacité du contrôleur de rétroaction d'état proposé. Considérons un système de pendule à chariot actionné par un moteur à courant continu à aimant permanent couplé à un engrenage de sortie [147] illustré dans la figure (4.2.3).

La combinaison de la dynamique du moteur à courant continu avec le sous-système de pendule à chariot aboutit à un modèle d'espace d'état d'entrée unique à quatre états.

Le vecteur d'état est défini comme $x(t) = [y(t) \dot{y}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t)]^T$ ou $y(t)$ est la position du chariot sur la piste et $\theta(t)$ est l'angle du pendule par rapport à l'équilibre vertical. L'entrée du système est la tension $v(t)$ appliquée au moteur à courant continu.

La surface de la piste du chariot est supposée sans frottement et les paramètres du système sont résumés dans le tableau 1 [147]. Le contrôleur de rétroaction d'état est conçu pour le modèle à temps discret linéarisé suivant, obtenu avec un temps d'échantillonnage $T_s = 0.025s$:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0208 & -0.0011 & 0 \\ 0 & 0.6808 & -0.0817 & -0.0011 \\ 0 & 0.0085 & 1.0083 & 0.0251 \\ 0 & 0.6399 & 0.6553 & 1.0083 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.0009 \\ 0.0714 \\ -0.0019 \\ -0.1432 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont 1.0000, 1.1228, 0.6720 et 0.9026. Par conséquent, le système discrétisé est instable. Les retards aléatoires dans les liaisons S-C et C-A du SCR varient respectivement comme $\tau_k^{sc} \in \{0, 1\}$ and, $\tau_k^{ca} \in \{0, 1, 2\}$. Les matrices de probabilité de transition sont données par :

$$T^{sc} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.80 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad T^{ca} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.15 & 0.55 & 0.30 \\ 0.20 & 0.40 & 0.40 \end{bmatrix}$$

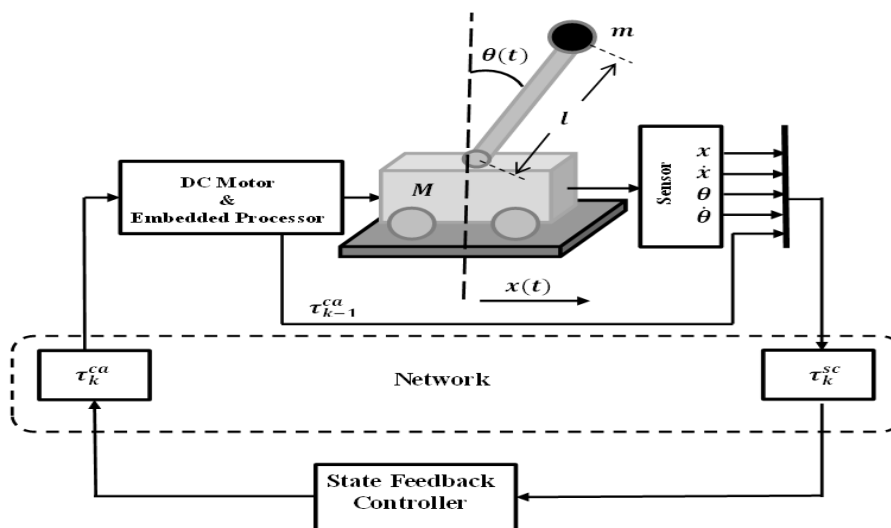


Figure 4.2.3. Système de chariot du pendule inversé

Tableau 1. Paramètres et variable du pendule inversé

Paramètre	Description	Unit	Value
M	Masse du chariot	Kg	0.5
m	Masse du pendule	Kg	0.2
l	Longueur du balancier	M	0.5
g	Accélération	ms^{-2}	9.81
R_m	Résistance de l'armature du moteur	Ohms	2.6
K_m	FEM (tension de retour constante)	volts(rad.s ⁻¹)	0.007
K_g	rapport d'engrenage		3.7
r	Rayon de l'engrenage de sortie	M	0.0063

On se basant sur le théorème 2 et en utilisant l'algorithme CCL, les gains du contrôleur de rétroaction d'état à deux modes sont:

$$\begin{aligned}
 K(0,0) &= [0.0095 \quad 4.7943 \quad 9.5007 \quad 2.0504], \\
 K(0,1) &= [0.0403 \quad 4.7707 \quad 9.8760 \quad 2.0095], \\
 K(0,2) &= [0.0221 \quad 4.7893 \quad 9.6776 \quad 2.0190], \\
 K(1,0) &= [0.0568 \quad 4.7582 \quad 10.1068 \quad 2.1051], \\
 K(1,1) &= [0.0685 \quad 4.7547 \quad 10.3650 \quad 2.1702], \\
 K(1,2) &= [0.0643 \quad 4.7561 \quad 10.2680 \quad 2.1568].
 \end{aligned}$$

Les trajectoires d'état du modèle à temps discret et du contrôleur de rétroaction d'état sont obtenues pour les valeurs d'état initiales:

$$x(-3) = x(-2) = x(-1) = x(0) = [-0.35 \quad 0 \quad 0.15 \quad 0]^T$$

Et les retards initiaux sont définis tel que $\tau_0^{sc} = \tau_0^{ca} = 0$.

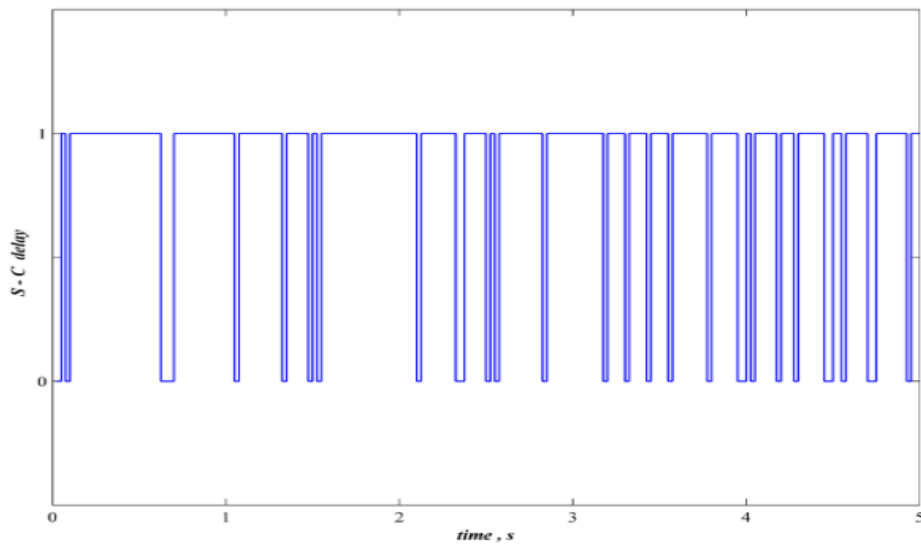
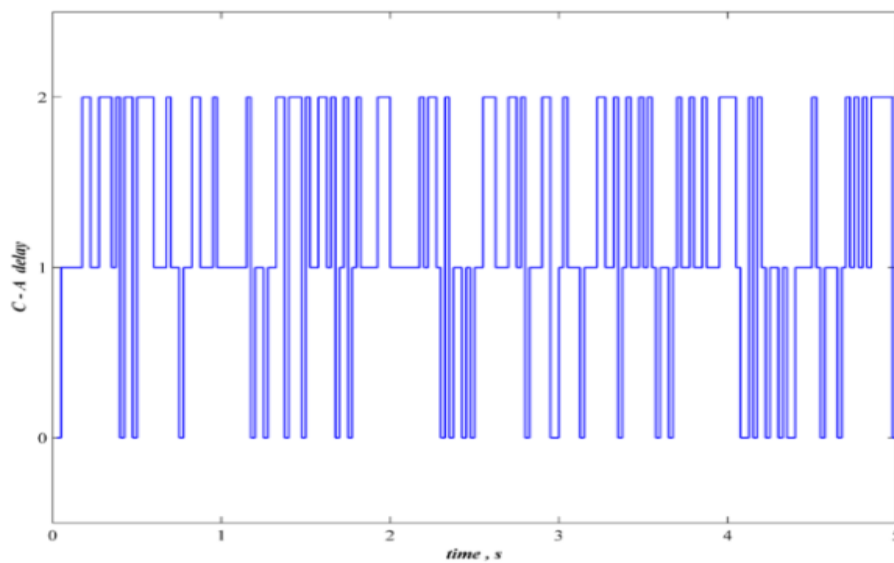
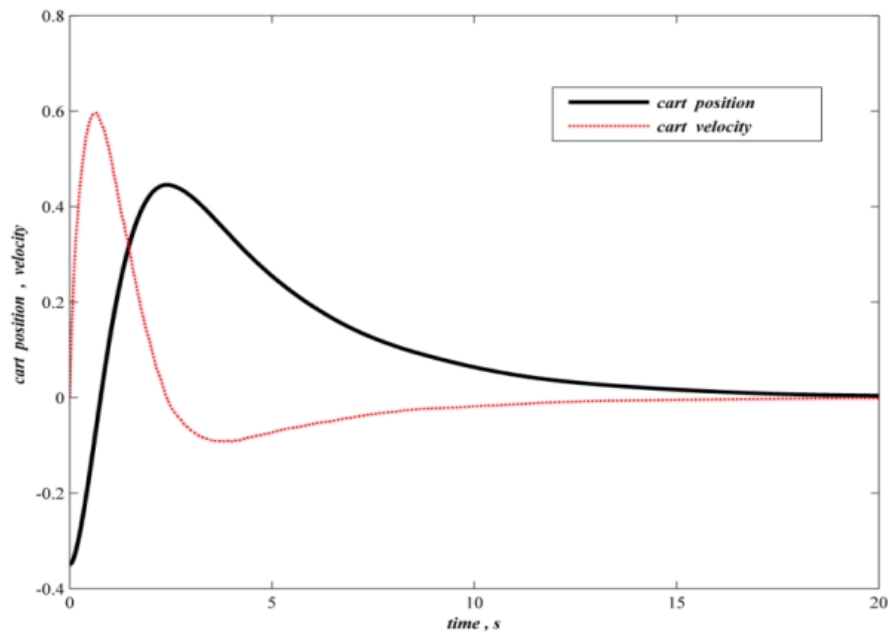
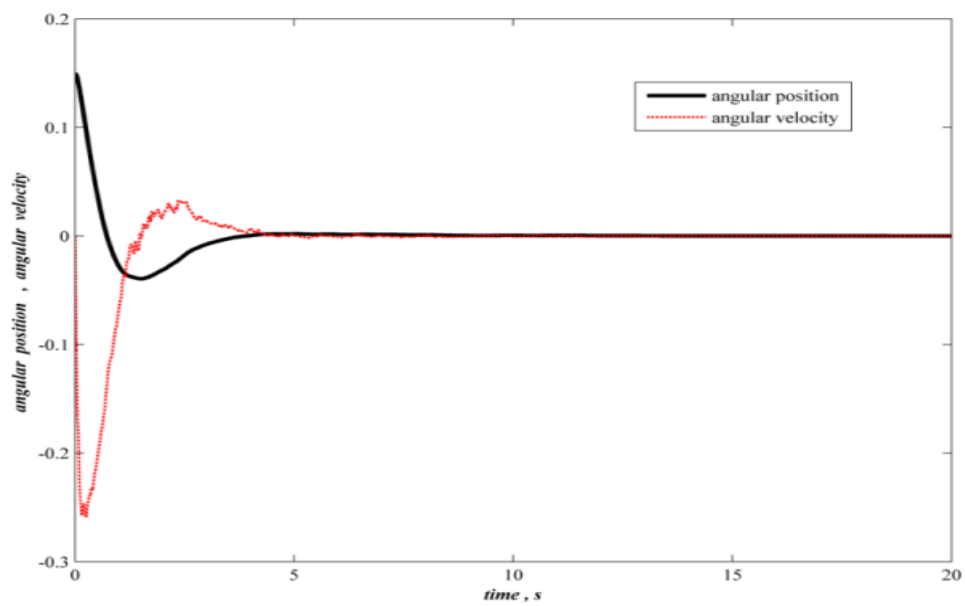


Figure 4.2.4 Retard Markovien S-C

Figure 4.2.5 Retard Markovien τ_k^{ca}

Les figures (4.2.4) et (4.2.5) montrent les sauts des retards S-C τ_k^{sc} et C-A τ_k^{ca} pendant les cinq premières secondes de la simulation en fonction de leurs probabilités de transition respectives.

Figure 4.2.6 Réponses de la position et de la vitesse du chariot $y(t)$ Figure 4.2.7 Réponses de la position et la vitesse angulaire du pendule $\theta(t)$

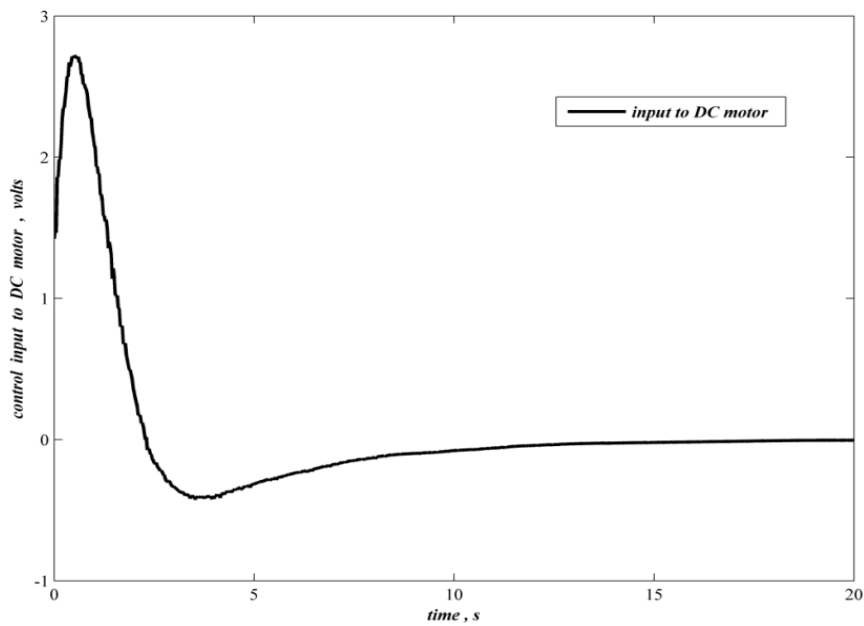


Figure 4.2.8 Stabilisation du signal de commande d'une entrée de moteur à courant continu

. Interprétation

Les réponses de chariot du pendulaire actionné par un moteur à courant continu sous le contrôleur de rétroaction d'état à deux modes dépendant proposé sont illustrées dans les figures (4.2.6) et (4.2.7). Comme le montrent les figures (4.2.6) et (4.2.7), la position et la vitesse se stabilisent en moins de 5 secondes. Les oscillations de la vitesse de démarrage sont dues à l'inertie de charge et aux phénomènes transitoires du moteur à courant continu.

On peut voir que le système en boucle fermée est stochastiquement stable. Le temps de transition du pendule de la position angulaire est inférieur au temps pris par la position du chariot. Le signal de commande généré appliqué au moteur CC est illustré dans la figure (4.2.8). La valeur de crête de l'entrée CC de transition est atteinte pendant le temps de démarrage.

4.3. Conclusion

Le problème de stabilité d'une classe de systèmes de contrôle en réseau (SCR) avec structure est considéré comme un système de saut de Markov. Les retards aléatoires du capteur au contrôleur et du contrôleur à l'actionneur sont modélisés comme deux chaînes de Markov.

Dans cet article, un contrôleur de rétroaction à deux états a été proposé pour les systèmes de contrôle en réseau avec des retards de communication aléatoires S-C et C-A dans le cadre général des systèmes linéaires de saut de Markov à temps discret.

En appliquant un type de fonctionnelle stochastique de Lyapunov, des conditions suffisantes sur la stabilisation stochastique sont dérivées en termes d'LMI couplées. Ces conditions incorporent l'effet global du retard C-A dans la conception du contrôleur sur le système en boucle fermée.

Afin de réduire le caractère conservateur des conditions de stabilisation du SCR, l'effet global du retard C-A sur le signal d'état est incorporé dans le modèle en boucle fermée. Des simulations numériques sont présentées afin de démontrer l'efficacité du contrôleur. Un signal de commande de stabilisation à l'entrée du moteur à CC est obtenu sous forme d'une surtension minimale dans une courte période de transition.

Il convient de souligner que les résultats obtenus sont encourageants, et il convient de mentionner que le schéma proposé peut être étendu afin d'envisager des systèmes de contrôle en réseau basés sur des observateurs avec des retards aléatoires.

5.1. Conclusion générale

Les réseaux de communication génèrent des perturbations qui déstabilise le système à commander en forme de retard, de pertes de données,... qui doivent être prises en compte dans la boucle de régulation du système de commande par retour d'état. Les retards de transmission sont fréquemment la cause d'une dégradation de performances. Nous avons présenté le contexte des systèmes à retards. Leur apparition fréquente dans la modélisation des phénomènes physiques.

Le control à distance est une solution pour pouvoir réaliser sans danger des taches en temps réel dans un environnement difficile et qui nécessite un échantillonnage des sorties capteur et actionneurs et des commandes générées. Ou la technologie << Internet >> apparait comme un moyen de communication fiable et peu couteux.

Ce mémoire fait l'objet d'analyse des problèmes apparaissant dans la commande a travers le réseau de communication << internet >> entre les différents agents maitre esclave. La principale difficulté aperçue dans ce type de problèmes est de pouvoir calculer les gain de la commande \mathbf{K} et de l'observateur \mathbf{L} , d'une façon à stabilisé le système dans l'existence du retards variable induits par la transmission des lois de commande dans le réseau.

En effet, après avoir donnée un aperçu sur certaines notions fondamentales relatives aux systèmes à retard, avec un regard porté notamment sur les principaux modelés mathématiques de tels systèmes, le type de retard considéré est le retard variable dans le temps ont étaient traité par les deux approches de la stabilité qui sont : l'approche de stabilité indépendante du retard, et certains méthodes d'analyse de stabilité tel que la deuxième méthode de Lyapunov. L'analyse de la stabilité avec retard de communication aléatoire S-C et C-S des systèmes de contrôle en réseau (SCR) considéré comme un saut de Markov à temps discret, avec les conditions suffisantes sur la stabilisation stochastique sont dérivées en termes d'LMI couplées. Les conditions garantissant la stabilisation en boucle fermée ont été traité sous forme d'LMI, les techniques classique de changement de variables ainsi que le complément de Schur.

Enfin, pour mettre en valeur la puissance de l'approche LMI ainsi pour illustrer l'efficacité de contrôleurs conçus sur la base des contraintes de communication, nous avons effectué nos simulations sous MATLAB sur un pendule-inversé à travers un réseau Internet, tout en rendant le système presque linéaire pour faciliter l'étude et la simulation de l'esclave.

Le calcul des gains \mathbf{L} de l'observateur et \mathbf{K} de la commande réalisé avec l'application des théorèmes des **LMI** (inégalité matricielles linéaire) donne de bonne résultats et justifie la stabilité même avec la présence des retards due aux réseau de communication.

5.2. Perspectives

Ces techniques de calcul des **LMI** et de simulation pour calculer théoriquement les gains ont les introduisant dans la commande par retour d'état observé, ouvre une grande vision pour les recherches dans les domaines d'étude des systèmes complexes, couteux et même pour les systèmes non linéaires complexes.

Espérons dans l'avenir que ce modeste travail de recherche sera considéré comme une plate-forme pour d'autre recherche et pour pouvoir trouver des solutions aux problèmes de commande des systèmes linéaires et non linéaires avec retard.

Annexe 1

A. Les inégalités matricielles linéaires, LMI :

• Introduction :

L'inégalité matricielle linéaire (LMI) et les techniques de LMI sont apparues comme outils puissants de conception dans des domaines allant de l'ingénierie au système de contrôle, d'identification et de conception structurale. Trois facteurs rendent les techniques des LMI attirante :

- 1- Une variété de spécifications de conception et les contraintes peuvent être exprimées en LMI.
- 2- Une fois formulées en termes de LMI, le problème peut être résolu exactement par l'efficacité des algorithmes d'optimisation convexe (les « solveurs LMI »).
- 3- Alors que la plupart des problèmes avec de multiples contraintes en termes d'équations matricielle, ils restent souvent traitable dans le cadre LMI. Cela rend la conception LMI basée sur une alternative intéressante aux méthodes « d'analyse » classiques.

Brève historique des LMI en théorie du contrôle :

L'histoire des LMI dans l'analyse des systèmes dynamiques remonte à plus de 100 ans.

L'histoire commence vers 1890, quand Lyapunov publia son ouvrage fondamental.

L'introduction de ce qu'on appelle aujourd'hui « Lyapunov théorie ». A montré que l'équation différentielle :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (\text{A.1.3})$$

Est stable (i.e. toutes les trajectoires convergent vers zéro) si et seulement si il existe une matrice définie positive P telle que :

$$A^T P + PA < 0 \quad (\text{A.1.4})$$

L'exigence $P > 0, A^T P + PA < 0$, est aujourd'hui appelé une inégalité de Lyapunov sur P , qui est une forme particulière de LMI. Lyapunov a également montré que cette LMI pourrait être explicitement résolu.

Annexes

En effet, on peut choisir n'importe quelle $Q^T = Q > 0$, puis résoudre les équations linéaires :

$$A^T \times P + P \times A = -Q$$

Pour la matrice P , qui est garantie d'être définie positif si le système (A.1.3) est stable.

En résumé, la première LMI utilisée pour analyser la stabilité d'un système dynamique est l'inégalité de Lyapunov (A.1.4), qui peuvent être résolues de manière analytique (par résolution d'un ensemble d'équations linéaires).

La technique que nous avons utilisée pour résoudre nos problèmes est celle exploitée par le logiciel Matlab (plus précisément la fonction : feasp).

B. Complément de Schur :

Le complément de Schur est l'exemple le plus classique de contraintes de type LMI

Lemme 1 : (complément de Schur) [131]). Soient trois matrices :

$$Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T, \text{ et } S(x),$$

Affines par rapport à la variable x . Les LMI suivantes sont équivalentes :

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} < 0$$

Est équivalente aux inégalités suivantes :

$$R(x) > 0,$$

$$Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0$$

Bibliographies

- [1] Y. Halevi and A. Ray, “*Integrated communication and control systems: Part I—Analysis*,” *J. Dynamic Syst., Measure. Contr.*, vol. 110, pp. 367-373, Dec. 1988.
- [2] D. Hristu-Varsakelis and W. Levine, *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*, Boston, MA, Birkhäuser, 2005.
- [3] IDC Technologies, *Communications, Industrial Networking and TCP/IP*, Houston, IDC Technologies & Ventus Publishing ApS, 2012.
- [4] W. Lawrenz, *CAN System Engineering: From Theory to Practical Applications*, New York, Springer-Verlag, 2013.
- [5] R. J. Anderson and M. W. Spong, “*Bilateral control of teleoperators with time delay*,” *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 5, pp. 494–501, 1989
- [6] L. Srinivasan, J. Scharnagl, Z. Xu, N. Faerber, D. K. Babu and K. Schilling, “*Design and Development of a Robotic Teleoperation System using Duplex WebSockets suitable for Variable Bandwidth Networks*,” 3rd IFAC Symposium on Telematics Applications, The International Federation of Automatic Control, November 11-13, 2013. Seoul, Korea
- [7] Yuling Li, “*Stabilization of Teleoperation Systems with Communication Delays: An IMC Approach*,” *Hindawi Journal of Robotics* Volume 2018, Article ID 1018086.
- [8] P. F. Hokayem and M. W. Spong, “*Bilateral teleoperation: An historical survey*,” *Automatica*, vol. 42, no. 12, pp. 2035–2057, 2006.
- [9] Dong-Seong Kim and Hoa Tran-Dang, *Industrial Sensors and Controls in Communication Networks : From Wired Technologies to Cloud Computing and the Internet of Things*, Switzerland, Springer, 2019.
- [10] X. H. Nguyen, G. Juanole, G. Mouneyl and C. Calmettes “*Networked Control System (NCS) on a network CAN: on the Quality of Service (QoS) and Quality of Control (QoC) provided by different message scheduling schemes based on hybrid priorities*,” in Proc. 8th IEEE International Workshop on Factory Communication Systems (WFCS 2010), Nancy, France, May 2010.

Bibliographie

- [11] P. Marti, J. Yopez, M. Velasco, R. Villa, and J. Fuertes, "Managing quality-of-control in network-based control systems by controller and message scheduling co-design", *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 6, pp. 1159-1167, Dec. 2004
- [12] H. Nguyen Xuan, "Networked Control Systems Quality of Service aware Quality of Control adaptation," in Proc. 16th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA'2011), Toulouse, France, Sep 2011.
- [13] Wei Zhang, M. S. Branicky and S. M. Phillips, "Stability of networked control systems," in *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, no. 1, pp. 84-99, Feb. 2001.
- [14] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi and Y. Xu, "A Survey of Recent Results in Networked Control Systems," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138-162, Jan. 2007.
- [15] J. Wang, "A brief survey on networked control systems," 2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), 2015, pp. 212-216.
- [16] J. Nilsson, "Real-time control systems with delays," Ph.D. dissertation, Automatic Control Dept., Lund Inst. of Technol., Lund, Sweden, 1998.
- [17] G. Walsh and H. Ye, "Scheduling of networked control systems," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 21, no. 1, pp. 57-65, 2001.
- [18] F. Lian, J. Moyne, and D. Tilbury, "Performance evaluation of control networks: Ethernet, controlnet, and devicenet," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 21, no. 1, pp. 66-83, 2001.
- [19] Y. Tipsuwan and M. Chow, "Control methodologies in networked control systems," *Control Eng. Practice*, vol. 11, no. 10, pp. 1099-1111, 2003.
- [20] L. Zhang, H. Gao and O. Kaynak, "Network-Induced Constraints in Networked Control Systems—A Survey," in *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 403-416, Feb. 2013, doi: 10.1109/TII.2012.2219540.
- [21] M. B. G. Cloosterman, N. van de Wouw, W. P. M. H. Heemels and H. Nijmeijer, "Stability of Networked Control Systems With Uncertain Time-Varying Delays," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1575-1580, July 2009, doi: 10.1109/TAC.2009.2015543.

Bibliographie

- [22] Ying Zheng, Huajing Fang and H. O. Wang, "Takagi-sugeno fuzzy-model-based fault detection for networked control systems with Markov delays," in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 36, no. 4, pp. 924-929, Aug. 2006, doi: 10.1109/TSMCB.2005.861879.
- [23] Lin Xiao, A. Hassibi and J. P. How, "Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach," *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, 2000, pp. 2199-2204 vol.3, doi: 10.1109/ACC.2000.879591.
- [24] Liqian Zhang, Yang Shi, Tongwen Chen and Biao Huang, "A new method for stabilization of networked control systems with random delays," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 8, pp. 1177-1181, Aug. 2005, doi: 10.1109/TAC.2005.852550.
- [25] Y. Lu, W. Ren, S. Yi, Y. Zuo, "Stability analysis for discrete delayed Markovian jumping neural networks with partly unknown transition probabilities," in *Neurocomputing*, Volume 74, Issue 18, 2011, Pages 3768-3772, <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2011.06.029>.
- [26] A. Bemporad, "Predictive control of teleoperated constrained systems with unbounded communication delays," in *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, Tampa, FL, 1998, pp. 2133–2138.
- [27] Y. Zhao, G. Liu, and D. Rees, "Improved predictive control approach to networked control systems," *IET Control Theory Appl.*, vol. 2, no. 8, pp. 675–681, 2008.
- [28] Dan Zhang, Peng Shi, Qing-Guo Wang, Li Yu, "Analysis and synthesis of networked control systems: A survey of recent advances and challenges," *ISA Transactions*, Volume 66, 2017, Pages 376-392, ISSN 0019-0578, <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2016.09.026>.
- [29] Li M, Chen Y. "Challenging research for networked control systems: A survey. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*," 2019; 41(9), Pages 2400-2418. doi:10.1177/0142331218799818
- [30] X. -M. Zhang et al., "Networked control systems: a survey of trends and techniques," in *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 7, no. 1, pp. 1-17, January 2020, doi: 10.1109/JAS.2019.1911651.

Bibliographie

- [31] Kim, DS., Tran-Dang, H. (2019). An Overview on Industrial Control Networks. In: Industrial Sensors and Controls in Communication Networks. Computer Communications and Networks. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04927-0_1
- [32] Voss W The future of CAN/CANopen and the industrial ethernet challenge. ESD Electronics, Inc., USA. <https://www.yumpu.com/en/document/view/19498286/can-canopen-the-industrial-ethernet-challenge>
- [33] Brooks P (2001) Ethernet/IP: industrial protocol. Retrieved 10 Jan 2005, from http://literature.rockwellautomation.com/idc/groups/literature/documents/wp/enet-wp001_en-p.pdf
- [34] Bettendorf B (2004) Which industrial network for you (Industrial Networking). PutmanMedia Publications, p 34
- [35] Stenerson J (1999) Industrial networks. In: Stewart CE (ed) Sensors and communications fundamentals of programmable logic controllers (2nd edn). Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, pp 367–392
- [36] Inetdoc (<https://www.inetdoc.net> > [adressage.ipv4.layer3.html](https://www.inetdoc.net/adressage.ipv4.layer3.html)).
- [37] Développement Informatique (<https://deloppemen-informatiquet.com> > [article >/378 principes-d 'encapsulation-et-décapsulation](https://deloppemen-informatiquet.com/article/378-principes-d-encapsulation-et-decapsulation)).
- [38] ClaudFlare (<https://www.cludflare.com> > [what-is- the-network-layer](https://www.cludflare.com/what-is-the-network-layer)).
- [39] Wikipédia ([Htts://docs.oracle.com/E19957-01/820-2982/ipov-19/index.html](https://docs.oracle.com/E19957-01/820-2982/ipov-19/index.html)).
- [40] E-monsite ([https ;//fahmi-benrejab.e-monsite.com](https://fahmi-benrejab.e-monsite.com) > [chapitre-«](https://fahmi-benrejab.e-monsite.com/chapitre-«) .pdf).
- [41] Les réseaux locaux industriels, F. LEPLACE et al. Editions Hermes, 1991.

Bibliographie

- [42] Réseaux locaux industriels, Zoubir Mammeri et Jean-Pierre Thomesse, Edition Eyrolles, 1994.
- [43] Introduction aux Réseaux Locaux Industriels, P. Hoppenot, Université d'Evry Val d'Essonne 1999.
- [44] Réseaux et bus de terrain, Frank Singhoff, Université de Bretagne occidentale, 2002.
- [45] Bus de terrain : une approche utilisateur, J.-C. Orsini, Cahier Technique Schneider Electric n° 197, mars 2000.
- [46] Yang T, Yu H, Fei M, Li L. Networked Control Systems: A Historical Review and Current Research Topics, *Measurement and Control*. 2005; 38(1); pp: 12-16. doi:10.1177/002029400503800101
- [47] Tim Tau Hsieh, "Using sensor networks for highway and traffic applications," in *IEEE Potentials*, vol. 23, no. 2, pp. 13-16, April-May 2004. doi: 10.1109/MP.2004.1289992.
- [48] Wai-Lun Danny Leung; R. Vanijjirattikhan; Zheng Li; Le Xu; T. Richards; B. Ayhan and Mo-Yuen Chow, Intelligent space with time-sensitive application, *Proceedings 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Monterey, CA, 2005, pp: 1413-1418. doi: 10.1109/AIM.2005.1511209.
- [49] Feng-Li Lian, J. Moyne and D. Tilbury, "Network design consideration for distributed control systems," in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 2, pp. 297-307, March 2002, doi: 10.1109/87.987076.
- [50] L. Litz, O. Gabel and I. Solihin, "NCS-Controllers for Ambient Intelligence Networks - Control Performance versus Control Effort," *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, pp. 1571-1576, doi: 10.1109/CDC.2005.1582382.
- [51] Y. Tipsuwan and Mo-Yuen Chow, "Gain scheduler middleware: a methodology to enable existing controllers for networked control and teleoperation - part I: networked

Bibliographie

control," in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, no. 6, pp. 1218-1227, Dec. 2004, doi: 10.1109/TIE.2004.837866.

[52] Y. Tipsuwan and Mo-Yuen Chow, "Gain scheduler middleware: a methodology to enable existing controllers for networked control and teleoperation-part II: teleoperation," in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, no. 6, pp. 1228-1237, Dec. 2004, doi: 10.1109/TIE.2004.837865.

[53] Zhuzheng Yu and Maying Yang, "MFC-based control methodology in network control system," Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No.04EX788), 2004, pp. 1361-1365 Vol.2, doi: 10.1109/WCICA.2004.1340863.

[54] V. Liberatore, "Integrated Play-Back, Sensing, and Networked Control," Proceedings IEEE INFOCOM 2006. 25TH IEEE International Conference on Computer Communications, 2006, pp. 1-12, doi: 10.1109/INFOCOM.2006.327.

[55] M. Velasco, J. M. Fuertes, C. Lin, P. Marti and S. Brandt, "A control approach to bandwidth management in networked control systems," 30th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, 2004. IECON 2004, 2004, pp. 2343-2348 Vol. 3, doi: 10.1109/IECON.2004.1432166.

[56] Mo-Yuen Chow and Yodyium Tipsuwan, "Network-based control systems: a tutorial," IECON'01. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (Cat. No.37243), 2001, pp. 1593-1602 vol.3, doi: 10.1109/IECON.2001.975529.

[57] Yodyium Tipsuwan, Mo-Yuen Chow, Control methodologies in networked control systems, Control Engineering Practice, Volume 11, Issue 10, 2003, Pages 1099-1111,

[58] J. W. Overstreet and A. Tzes, "An Internet-based real-time control engineering laboratory," in IEEE Control Systems Magazine, vol. 19, no. 5, pp. 19-34, Oct. 1999, doi: 10.1109/37.793435.

Bibliographie

[59] Y. Tipsuwan and Mo-Yuen Chow, "Gain adaptation of networked mobile robot to compensate QoS deterioration," IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society. IECON 02, 2002, pp. 3146-3151 vol.4, doi: 10.1109/IECON.2002.1182900.

[60] Sheridan TB (1992) Telerobotics, automation, and human supervisory control. The MIT Press, Cambridge, MA

[61] G. S. Guthart and J. K. Salisbury, "The Intuitive/sup TM/ telesurgery system: overview and application," Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065), 2000, pp. 618-621 vol.1, doi: 10.1109/ROBOT.2000.844121.

[62] I. R. Belousov, JiaCheng Tan and G. J. Clapworthy, "Teleoperation and Java3D visualization of a robot manipulator over the World Wide Web," 1999 IEEE International Conference on Information Visualization (Cat. No. PR00210), 1999, pp. 543-548, doi: 10.1109/IV.1999.781610.

[63] N. A. Tanner and G. Niemeyer, "Improving Perception in Time Delayed Teleoperation," Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2005, pp. 354-359, doi: 10.1109/ROBOT.2005.1570144.

[64] Chung-Kuo Chang, J. M. Overhage and J. Huang, "An application of sensor networks for syndromic surveillance," Proceedings. 2005 IEEE Networking, Sensing and Control, 2005., 2005, pp. 191-196, doi: 10.1109/ICNSC.2005.1461185.

[65] H. Durrant-Whyte, "Data Fusion in Sensor Networks," 2006 IEEE International Conference on Video and Signal Based Surveillance, 2006, pp. 39-39, Sydney, NSW, Australia, doi: 10.1109/AVSS.2006.39.

[66] Vieira MAM, Coelho CN Jr, da Silva DC Jr, da Mata JM (2003) Survey on wireless sensor network devices. In: Proceedings of IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, Lisbon, Portugal, 1:537–544

Bibliographie

[67] Park S, Kim JW, Lee K, Shin K-Y, Kim D (2006) Embedded sensor networked operating system. In: Proceedings of Ninth IEEE International Symposium on Object and Component-Oriented Real-Time Distributed Computing, Gyeongju, Korea, 117-124

[68] Park S, Kim JW, Shin K-Y, Kim D (2006) A nano operating system for wireless sensor networks. In: Proceedings of the 8th International Conference on Advanced Communication Technology, Phoenix Park, Korea, 1:345-348

[69] Olariu S, Xu Q (2005) Information assurance in wireless sensor networks. In: Proceedings of the 19th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium, Denver, CO

[70] Yamasaki K, Ohtsuki T (2005) Design of energy-efficient wireless sensor networks with censoring, on-off, and censoring and on-off sensors based on mutual information. In: Proceedings of the IEEE 61st Vehicular Technology Conference, Stockholm, Sweden, 2:1312-1316

[71] Mariottini GL, Pappas G, Prattichizzo D, Daniilidis K (2005) Vision-based localization of leader-follower formations. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference, Seville, Spain, 635-640

[72] Saeed IAK, Afzulpurkar NV (2005) Real time, dynamic target tracking using image motion. In: Proceedings IEEE International Conference on Mechatronics, Taipei, Taiwan, 241-246

[73] Folio D, Cadenat V (2005) A controller to avoid both occlusions and obstacles during a vision-based navigation task in a cluttered environment. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and 2005 European Control Conference, Seville, Spain, 3898-3903

[74] Rathinam S, Zu K, Soghikian A, Sengupta R (2005) Vision based following of locally linear structures using an unmanned aerial vehicle. In: Proceedings 1 Overview of Networked

Bibliographie

Control Systems 23 of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference, Seville, Spain, 6085-6090

[75] K. -B. Sim, K. -S. Byun and F. Harashima, "Internet-Based Teleoperation of an Intelligent Robot With Optimal Two-Layer Fuzzy Controller," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 4, pp. 1362-1372, June 2006, doi: 10.1109/TIE.2006.878295.

[76] Wang, S., Xu, B., Liu, Y. *et al.* Real-time mobile robot teleoperation via Internet based on predictive control. *Frontiers of Mechanical Engineering in China* 3, 299–306 (2008). <https://doi.org/10.1007/s11465-008-0049-7>

[77] T. Mitra, J. Teich and L. Thiele, "Time-Critical Systems Design: A Survey," in *IEEE Design & Test*, vol. 35, no. 2, pp. 8-26, April 2018, doi: 10.1109/MDAT.2018.2794204.

[78] Wang C, Wang Y (2004) Design networked control systems via time-varying delay compensation approach. In: *Proceedings of the Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, P. R. China, 2:1371-1375

[79] Walsh GC, Hong Y (2001) Scheduling of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine* 21(1):57-65

[80] Al-Hammouri AT, Branicky MS, Liberatore V, Phillips SM (2006) Decentralized and dynamic bandwidth allocation in networked control systems. In: *Proceedings of 20th International Parallel and Distributed Processing Symposium*, Long Beach, CA, 141-148

[81] Kim YH, Park HS, Kwon WH (1988) A scheduling method for network-based control systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*, Atlanta, GA, 2:718-722

[82] Li Z, Chow M-Y (2005) Adaptive multiple sampling rate scheduling of real time networked supervisory control system-Part I. In: *Proceedings of the IEEE Industrial Electronics Conference*, Raleigh, NC, 4605-4609

Bibliographie

- [83] Li Z, Chow M-Y (2005) Adaptive multiple sampling rate scheduling of realtime networked supervisory control system-Part II. In: Proceedings of the IEEE Industrial Electronics Conference, Raleigh, NC, Seville, Spain, 4615-4620
- [84] M. Bishop, *Computer Security: Art and Science*. Reading, MA: Addison-Wesley Professional, 2002.
- [85] Karygiannis, T. and Owens, L. (2002), *Wireless Network Security: 802.11, Bluetooth and Handheld Devices*, Special Publication (NIST SP 800-48), National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD (Accessed January 12, 2023)
- [86] Rachana Ashok Gupta, Avesh Kumar Agarwal, Mo-Yuen Chow and Wenye Wang, "Characterization of data-sensitive wireless distributed networked-control-systems," 2007 IEEE/ASME international conference on advanced intelligent mechatronics, Zurich, Switzerland, 2007, pp. 1-6, doi: 10.1109/AIM.2007.4412569.
- [87] J. Liu and D. Yue, "Event-triggering in networked systems with probabilistic sensor and actuator faults," *Information Sciences*, vol. 240, pp. 145–160, 2013.
- [88] M. Jungers, E. B. Castelan, V. M. Moraes, and U. F. Moreno, "A dynamic output feedback controller for NCS based on delay estimates," *Automatica*, vol. 49, no. 3, pp. 788–792, 2013.
- [89] Y. Xia, W. Xie, B. Liu, and X. Wang, "Data-driven predictive control for networked control systems," *Information Sciences*, vol. 235, pp. 45–54, 2013.
- [90] Y. Zhang and J. Jiang, "Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems," *Annual Reviews in Control*, vol. 32, no. 2, pp. 229–252, 2008.
- [91] V. B. Kolmanovskii and J.-P. Richard, "Stability of some linear systems with delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 5, pp. 984–989, 1999.

Bibliographie

- [92] C. Peng and T. C. Yang, "Event-triggered communication and H_∞ control co-design for networked control systems," *Automatica*, vol. 49, no. 5, pp. 1326–1332, 2013.
- [93] H. Song, L. Yu, and W.-A. Zhang, "Networked H_∞ filtering for linear discrete-time systems," *Information Sciences*, vol. 181, no. 3, pp. 686–696, 2011.
- [94] A. Ray and Y. Halevi, "Integrated communication and control systems: part II—design considerations," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 110, no. 4, pp. 374–381, 1988.
- [95] H. Chan and U. Özgüner, "Closed-loop control of systems over a communications network with queues," *International Journal of Control*, vol. 62, no. 3, pp. 493–510, 1995.
- [96] R. Luck and A. Ray, "An observer-based compensator for distributed delays," *Automatica*, vol. 26, no. 5, pp. 903–908, 1990.
- [97] J. Nilsson, *Real-time control systems with delays* [Ph.D. thesis], Lund Institute of Technology, 1998.
- [98] J. Xiong and J. Lam, "Stabilization of networked control systems with a logic ZOH," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 2, pp. 358–363, 2009.
- [99] K. Liu and E. Fridman, "Networked-based stabilization via discontinuous Lyapunov functionals," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 4, pp. 420–436, 2012.
- [100] X. Meng, J. Lam, and H. Gao, "Network-based H_∞ control for stochastic systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 19, no. 3, pp. 295–312, 2009.
- [101] M. S. Mahmoud and P. Shi, *Methodologies for Control of Jump Time-Delay Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

Bibliographie

- [102] M. Aoki, "Optimal control of partially observable Markovian systems," *J. Franklin Inst.*, vol. 280, no. 5, pp. 367-386, 1965.
- [103] W. P. Blair and D. D. Sworder, "Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria," *Int. J. Contr.*, vol. 21, no. 5, pp. 833-841, 1975.
- [104] H. J. Chizeck, A. S. Willsky, and D. Castanon, "Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control," *Int. J. Contr.*, vol. 43, no. 1, pp. 213-231, 1986.
- [105] D. D. Sworder, "Feedback control of a class of linear systems with jump parameters," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-14, no. 1, pp. 9-14, 1969.
- [106] W. P. Blair and D. D. Sworder, "Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria," *Int. J. Control*, vol. 21, pp. 833-844, 1975.
- [107] D. O. Cajueiro, *Stochastic Optimal Control of Jumping Markov Parameter Processes With Applications To Finance*, Ph.D. Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica-ITA, Brazil, 2002.
- [108] L. E. O. Svensson and N. Williams, "Optimal monetary policy under uncertainty: a Markov jump linear-quadratic approach," *Federal Reserve of St. Louis Review*, vol. 90, pp. 275-293, 2008.
- [109] W. S. Gray, O. R. González, and M. Doğan, "Stability analysis of digital linear flight controllers subject to electromagnetic disturbances," *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.*, vol. 36, pp. 1204-1218, 2000.
- [110] L. Li, V. A. Ugrinovskii, and R. Orsi, "Decentralized robust control of uncertain Markov jump parameter systems via output feedback," *Automatica*, vol. 43, pp. 1932-1944, 2007.

Bibliographie

- [111] K. A. Loparo and F. Abdel-Malek, "A probabilistic mechanism to dynamic power system security,"
- [112] V. A. Ugrinovskii and H. R. Pota, "Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems," *Int. J. Control*, vol. 78, pp. 662-677, 2005.
- [113] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and M. G. Todorov, *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer, 2013.
- [114] F. Abdollahi and K. Khorasani, "A decentralized Markovian jump H_∞ control routing strategy for mobile multi-agent networked systems," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 19, pp. 269-283, 2011.
- [115] K. You, M. Fu, and L. Xie, "Mean square stability for Kalman filtering with Markovian packet losses," *Automatica*, vol. 47, no. 12, pp. 2647- 2657, 2011.
- [116] E. K. Boukas and H. Yang, "Exponential stabilizability of stochastic systems with Markovian jumping parameters," *Automatica*, vol. 35, no. 8, pp. 1437-1441, 1999.
- [117] E. K. Boukas, *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*. Boston: Birkhauser, 2005.
- [118] Y. Cao and J. Lam, "Stochastic stabilizability and H_∞ control for discrete-time jump linear systems with time delay," *J. Franklin Inst.*, vol. 336, no. 8, pp. 1263-1281, 1999.
- [119] C. E. de Souza, "Robust stability and stabilization of uncertain discrete time Markovian jump linear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 51, no. 5, PP. 836-841, 2006.
- [120] H. Gao, J. Lam, S. Xu, and C. Wang, "Stabilization and H_∞ control of two-dimensional Markovian jump systems," *IMA J. Appl. Math.*, vol. 21, no. 4, pp. 377-392, 2004.

Bibliographie

- [121] X. Mao and C. Yuan, *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*. London: Imperial College Press, 2006.
- [122] Z. Wang, H. Qiao, and K. J. Burnham, "On stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian jumping parameters," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 4, pp. 640-646, 2002.
- [123] J. Xiong and J. Lam, "Stabilization of discretetime Markovian jump linear systems via timedelayed controllers," *Automatica*, vol. 42, no. 5, pp. 747-753, 2006.
- [124] J. Nilsson, *Real-time Control Systems with Delays*, Ph.D. dissertation, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1998.
- [125] L. Zhang, Y. Shi, T. Chen, and B. Huang, "A new method for stabilization of networked control systems with random delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 8, pp. 1177-1181, 2005.
- [126] J. Nilsson, *Real-time control systems with delays*, PhD dissertation, Dept. Auto. Control, Lund Institute of Technology Sweden, 1998.
- [127] K.Y. You, L.H. Xie, Survey of recent progress in networked control systems, *Acta Automatica Sinica* 39 (2), pp.101-117, 2013.
- [128] J.P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, Y. Xu, A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings of the IEEE* 95 (1), pp. 138-172, 2007.
- [129] W. Zheng, H. Wang, Z. Zhang, P. Yin, Dynamic output feedback control for nonlinear uncertain systems with multiple time-varying delays *Automation, Control and Intelligent Systems*, pp.8-99, Vol. 6(1), 2018.
- [130] E.K. Boukas, P. Shi, M. Karan, C.Y. Kaya, Linear discrete-time systems with Markovian jumps and mode-dependent time-delays :Stabilizability, *Mathematical Problems in Engineering* 8 (2), pp.123-133, 2002.

Bibliographie

- [131] L.X.Zhang, H.J.Gao, O.Kaynak, Network-induced constraints in networked control systems – a survey, *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 9 (1), pp.403-416, 2013.
- [132] Kang Y,ZhaoP.Networked control system : A Markovian jump system approach. *Stability Analysis of Markovian jump Systems* pp 131-147, Springer, Singapore, 2018.
- [133] M.Liu, D.w.c.Ho ,Y.Niu, Stabilization of Markovian jump linear system over networks with random communication delay, *Automatica*, 45, pp.416-421, 2009.
- [134] R.Krtolica, U.Ozguner, H.Chan, H.Goktas, J.Winkelman, M.Liubakka, Stability of linear feedback systems with random communication delays, *International Journal of Control*, 59 (4), pp.925-953, 1994.
- [135] J.Nilsson, B.Berhardsson, B.Wittenmark, Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays, *Automatica*, 34 (1), pp.57-64, 1998.
- [136] L.Xiao, A.Hassibi, J.P.How, Control with random communication delays via a discrete-time jump linear system approach, *Proc.American Control Conference* 3, pp.2199-2204, 2000.
- [137] :H.Lin, G.Zhai, P.J.Antsaklis, Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems, *Proc.42 nd IEEE Conf.Decision and Control*, pp.1182-1187, 2003.
- [138] L.Zhang, Y.Shi, T.Chen, B.Huang, A new methode for stabilization of networked control systems with random delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (8), pp.1177-1181, 2005.
- [139] Y.Shi, B.Yu, Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by markov chains, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54 (7), pp.1668-1673, 2009.

Bibliographie

- [140] Q.Li, X.BuGong, L.Shanbin, H_2/ H^∞ control of networked control systems with random time delays, Science China Information Sciences, 54 (12), pp.2615-2630, 2011.
- [141] L.Qiu, Q.Luo, F.Gong, S.Li, B.Xu, Stability and stabilization of networked control systems with random time delays and packet dropouts, Journal of the Franklin Institute, 350(7), pp.1886-1907, 2013.
- [142] M.S.Mahmoud, G.D.Khan, Robust mixed H_2 / H^∞ control of networked control systems with random delays and partially known transition matrix, Journal of the Franklin Institute, 351 (12), pp.5548-5564, 2014- Elsevier DOI :10.1016/j.jfranklin.2014.08.017.
- [143] H.Zhang, J.Wang, Robust two-mode-dependent controller design for networked control systems with random delays modeled by Markov chains, International Journal of Control, 88 (12), pp.2499-2509, 2015.
- [144] H.Zhang, Y.Shi, J.Wang, Observer-based tracking controller design for networked predictive control systems with uncertain Markov delays, International Journal of Control, 86 (10), pp.1824-1836, 2015.
- [145] A.Elahi, A.Alfi, Finite-time H^∞ control of uncertain networked control systems with randomly varying communication delays, ISA Transactions, 69, pp.65-88, 2017.
- [146] Pascal gahinet, Arkadinemirovski, Alan j. land, mahmoud g Chilai : LMI control toolbox, the matworks, Inc. 1995
- [147] Quanser Consulting Inc, IP-02 Self-Erecting, Linear Motion Inverted Pendulum, Markham Ontario Canada, 1996.