Université 20 Août 1955-Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER

de l'Ecole Doctorale de Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Thème : Existence et comportement asymptotique des solutions d'un système intégro-différentiel avec diffusion intervenant en biologie cellulaire

Par

BAHEDDI Bahia

Devant le jury :

REBBANI Fouzia	Professeur	Université d'Annaba	Président
NOUAR Ahmed	M.C. A	Université de Skikda	Examinateur
SAADI Samira	M.C. A	Université d'Annaba	Examinateur
BOUSSETILA Nadjib	M.C. A	Université de Guelma	Examinateur
KOUCHE Mahiéddine	M.C. A	Université d'Annaba	Rapprteur

2013

Remerciement

En premier lieu, j'aimerais exprimer toute ma gratitude à Allah, qui m'a donné tous pour achever mon modeste travail.

Je remercie mon encadreur, Monsieur Mahièddine KOUCHE pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour son aide et pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de mon parcours.
Je voudrais aussi remercier le Pr. Fouzia REBBANI pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury.
Je tiens également à remercier tous les membres du jury, Dr Samira SAADI, Dr Ahmed NOUAR ainsi que Dr Nadjib BOUSTILA d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'adresse de sincères remerciements à mes enseignants qui ont contribués à ma formation universitaire.

Un merci au Pr. S. AHMAD de l'Université du Texas à San Antonio et au Pr. B. LISENA de l'Université de Bari d'avoir accepté de m'aider pour la seule raison d'être étudiante en mathématiques.

Je voudrais également remercier toute ma famille, en particulier mes parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour inconditionnel, leur soutien et leurs encouragements. Je dois beaucoup à mon oncle Abderrahman ainsi que sa femme et toute sa famille pour m'avoir aidé pendant toutes mes années à l'université et de me considérer comme membre de la famille.

Mes sincères remerciements à mes amies pour leur amour, leurs encouragements, leur présence, leur compréhension et pour les merveilleux moments que nous avons partagés.

Dédicace

A mon père, ma mère, mes frères Abdelhakim et Amine et ma sœur Hayat

A mes grands parents

A mon oncle Abderrahmane et sa femme Leila

Mes oncles Belhadj, Lakhdar et Rachid

A ma tante Louiza

A mes cousins et cousines Djamila, Louiza, Brahim, Hima, deux Aïcha, deux Yacine, Slimane, deux Fatima, Imèn et Daoud

A mes amies Rahima, Nabila, Souheyla, Fatima, Khadidja (A), Khadidja (M), et Houria

A tous mes enseignants en particulier, S. Laghraf, N. Bellal, S. Boudjemaa, et A. Nouar

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution ainsi que le comportement asymptotique d'un système intégro-différentiel parabolique avec diffusion. Le système en question dérive d'un modèle proposé par Kouche & Tatar qui modélise la croissance des cellules hépatocytes dans une capillaire du foie auquel on a rajouté un terme de diffusion avec des données aux bords mixtes en vu de modéliser l'effet de déplacement des cellules lelong de la capillaire. En utilisant la technique des sous- et sur-solutions on montre que le système parabolique admet une solution unique positive et globale. On propose aussi une étude du système stationnaire associé ainsi que le comportement asyptotique de la solution lorsque le temps tend vers l'infinie. Dans la dernière partie on propose une discrétisation numérique en utilisant un shema aux différences finie de Crank-Nicholson. Une simulation numérique avec Matlab est également proposé.

ABSTRACT

In this work, we are interested to study the existence, uniqueness and asymptotic behavior of solution of a parabolic integro-differential system with diffusion. The system is derived from a model proposed by Kouche and Tatar which describes the self-organization of hepatocytes in a liver capillary to which we have added a diffusion term to take into account the moving effect of cells in the capillary. By using the method of upper and lower-solutions we prove that the parabolic system admits a unique positive and global solution. We also suggest a study of the corresponding steady-state system as well as the asymptotic behavior of the solution as time tends to infinity. A numerical discretization of the parabolic system is also performed using a finite difference scheme of Cranck-Nicolson. A numerical simulation is also given using Matlab.

Introduction

Le foie exécute ses fonctions métaboliques à l'aide d'enzymes fixés à l'intérieur de certains types de cellules appelées hépatocytes. Ces cellules sont situées sur la paroi extérieure des sinusoides hépatiques (capillaires sanguin du foie) véhiculant le flux sanguin qui transporte l'oxygène, ainsi que d'autres substances, permettant les échanges entre les hepatocytes et le sang

Comme les sinusoids hépatiques sont similaires, et agissent essentiellement en parallèle, il est raisonnable de se restreindre à un seul capillaire représentatif, le long duquel on considère un axe X avec le point $x_0 = 0$ est l'entré (le point d'entré du sang au sinusoid) et la sortie au point $x_l = L$. En termes de biomathématiques, la population en question est une population cellulaire de N types dont on définit la densité $u_i(x,t)$ comme le nombre de cellules de type i au point $x \in [0, L]$, à l'instant t par unité de longueur. Soient α_i et β_i les taux de croissance et de mortalité respective des cellules de type i, qui peuvent dépendre de u, x, et t. Alors le taux de variation de densité par rapport au temps est estimé par

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \alpha_i u_i - \beta_i u_i$$

Donc $\alpha_i u_i - \beta_i u_i$ est le terme de réaction qui représente toutes les interactions entre les N espèces cellulaires. Pour modéliser ces interactions, deux facteurs ont été pris en compte par L. Bass et al [2] : le phénomène de l'inhibition par contact et la concentration du sang en oxygène, qui ont un rapport directe avec les taux de croissance α_i et de mortalité β_i. En effet, l'inhibition par contact est le fait que les cellules épithéliales (telles que les hépatocytes) arrêtent de se multiplier rapidement dés qu'elles se rejoignent de toutes ses parts et qu'elles peuvent établir entre elles des jonctions d'adhésion [16]. Ceci signifie qu'il existe une densité maximale des sites des cellules $\sigma > 0$, que la densité totale$\left(\sum_{j=1}^{N} u_j\right)$ ne peut pas dépasser.

Ainsi, l'approche consiste à considérer une relation proportionnelle entre le taux de croissance et à la densité des sites disponibles $\left(\sigma - \sum_{j=1}^{N} u_j\right)$. C'est-à-dire $\alpha_i = k_i \left(\sigma - \sum_{j=1}^{N} u_j\right)$ avec $k_i > 0$. Concernant l'effet de la concentration du sang en oxygène c, on remarque que lorsque cette dernière diminue, le taux de mortalité β_i augmente. Les auteurs dans [2] ont proposé d'approcher $\beta_i(c)$ par une fonction affine : $\beta_i(c) \approx \nu_i(c_0 - c) + \gamma_i$ où c_0 est la concentration en oxygène au point d'entré $x = 0$. A l'entré du sang au sinusoïde, l'oxygène commence à être consommé par les cellules, donc le flux du sang f porte moins d'oxygène à un point plus loin de la source (l'entré). Si $\kappa_i u_i(\xi, t)$ est la quantité d'oxygène consommée par les cellules de type i (au point ξ et à l'instant t) par unité de temps, la consommation cumulative de l'oxygène par toutes les cellules situées en amont d'un point x est donc estimée par $\int_0^x \sum_{j=1}^{N} \kappa_j u_j(\xi, t)\, d\xi$. D'où la concentration au point x est donnée par $c = c_0 - \frac{1}{f}\int_0^x \sum_{j=1}^{N} \kappa_j u_j(\xi, t)\, d\xi$ et $\beta_i(c) = \gamma_i + \frac{\nu_i}{f}\int_0^x \sum_{j=1}^{N} \kappa_j u_j(\xi, t)\, d\xi$.
Le modèle construit par L. Bass et al [2] est donc le système d'equations intégro-différentielles nonlinéaires suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i \left[k_i \left(\sigma - \sum_{j=1}^{N} u_j \right) - \gamma_i - \frac{\nu_i}{f} \int_0^x \sum_{j=1}^{N} \kappa_j u_j(\xi, t)\, d\xi \right] & x \in [0, L], \quad t > 0 \\ u_i(x,t) = u_{0i}(x) & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ce système a été étudié dans le cas $N = 2$ (deux types de cellules) [2] et à l'aide d'un convenable changement de variables, le problème a été réduit à la forme plus simple suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = v_1 \left[1 - v_1(x,t) - v_2(x,t) - \int_0^x [v_1 + \theta v_2](\xi, t)\, d\xi \right] \\ \frac{\partial v_2}{\partial t}(x,t) = \gamma v_2 \left[\lambda - v_1(x,t) - v_2(x,t) - \eta \int_0^x [v_1 + \theta v_2](\xi, t)\, d\xi \right] \end{cases} \quad x \in [0, \Lambda], \quad t > 0. \tag{1}$$

v_1 et v_2 étant proportionnelles à $u_1$et u_2, respectivement. Les coefficients $\theta,\ \gamma,\ \lambda,\ \eta,\ \Lambda$ sont des constantes positives (en fonction des paramètres donnés $k_i,\ \kappa_j,\ \alpha_i,\ \nu_i,\ \sigma,\ f,\ L$).

Les auteurs ont montré que pour toute donnée initiale $u_0 = (v_{01}, v_{02}) \geqslant 0$, mesurable et bornée, le système admet une unique solution positive (non nulle), bornée, et globale, et qu'il existe une infinité de solutions stationnaires, mais toutes, sauf une, sont instables. La solution stationnaire $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ qui reste, a été démontré qu'elle est asymptotiquement stable contre une large classe de perturbations. Pour certains ranges de paramètres du modèles, cette solution a une structure "zonale" de sort qu'un type de cellules est entièrement situé en amont de l'autre type, c'est-à-dire il existe $x^\star \in \left]0, L\right[$ (un point qui divise le domaine en deux zones) tel que

$$\begin{cases} \phi_1(x) > 0, \quad \phi_2(x) \equiv 0 \quad x \in \left]0, x^\star\right[\\ \phi_1(x) \equiv 0 \quad \phi_2(x) > 0 \quad x \in \left]x^\star, L\right[\end{cases}$$

Holmåker [9] a démontré que pour un certain range de paramètres, un des deux espèces est conduit à l'extinction alors que l'autre se stabilise dans son état stationnaire non-triviale.

Dans [13], Kouche and Tatar ont proposé une généralisation de ce modèle aux cas de N enzymes. Le modèle proposé est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_i(x,t) = u_i(x,t)\left(a_i(t) - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t)\, u_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}(t) \int_0^x u_j(\xi,t)d\xi\right), & x \in [0,L], \quad t > 0, \\ u_i(x,t) = u_{0i}(x), & x \in [0,L], \end{cases} \tag{2}$$

où les fonctions $a_i(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t)$ sont positives continues et bornées pour $t > 0$.
Le système (2) possède une certaine similitude avec les systèmes de types Lotka-Volterra compétitifs non-autonomes. La particularité de ce système est la présence de la variable spatiale x dans le modèle. En utilisant les techniques de comparaisons pour les équations différentielles les auteurs ont établit un critère portant sur les coefficients du système (2) sous lequel les $N - r$ dernières composantes de la solution tendent vers l'extinction en tout point de $(0, L)$. Dans le cas autonome c'est à dire lorsque les coefficients du système (2) sont constants ils ont montré que dans ce cas les solutions permanentes convergent vers leurs solutions stationnaires correspondantes.

Les modèles introduits par L. Bass et al [2] et M. Kouche et N-e. Tatar [13] couvrent un vaste domaine d'application où les phénomènes sont gouvernées par le même mécanisme. On peut citer par exemple la distribution des espèces de plantes le long d'une rivière [2] où les substances apporté (par la rivière) influent sur la mort de ces espèces. Cependant, ces modèles ne permettent pas aux espèces de se diffuser. Par exemple, le modèle ne peut pas expliquer l'apparition d'un espèce dans une région où il était initialement absent [2] (si un des espèces est initialement absent dans une certaine région, il n'y a aucune mécanisme dans ces modèles par lequelle il peut y apparaitre). Or, ceci se passe souvent dans la nature. A fin que cela soit pris en compte, nous ajoutons un terme de diffusion $\mu_i \Delta u_i$, ($\mu_i > 0$) et on se limite au cas où les coefficients a_i, b_{ij}, c_{ij} sont des constants positifs. Pour que le problème soit bien poser, nous ajoutons aussi des conditions au bord $\Gamma = \{x_0, x_l\}$ de type Dirichlet et Neumann :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u_i(x,t) - \mu_i \Delta u_i(x,t) = u_i(x,t)\left(a_i - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x,t) - \sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij} \int\limits_0^x u_j(\xi,t)d\xi\right) & \\ \qquad\qquad\qquad \text{sur } \;]0,L[\times]0,\infty[\quad 1 \leqslant i \leqslant N & \\ u_i(x,t) = 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K & \\ \partial_x u_i(x,t) = 0 \qquad\quad \text{sur } \Gamma \quad \text{si } K < i \leqslant N & \\ u_i(\cdot,0) = u_{0i} \geqslant 0 \, (\not\equiv 0) \quad \text{sur } \Omega \quad 1 \leqslant i \leqslant N & \end{array}\right. \tag{3}$$

Notre objectif dans ce mémoire est d'étudier l'existence, l'unicité, ainsi que le comportement asymptotique des solutions du système (3). Nous commençons dans le chapitre 1 par rappeler des notions de base et des résultat préliminaires tels que les espaces fonctionnels, le théorème d'injections continues entre ces espaces, le théorème d'Ascoli-Azela, le théorème de point fixe de Schauder, les notion et les résultats liées aux problèmes aux dérivées partielles paraboliques et elliptiques.

L'existence d'une unique solution positive, non nulle, bornée et globale pour le problème (3), sera l'objet du chapitre 2. Ce problème est un système d'équations parabolique semilinéaire, le terme nonlinéaire contient une fonctionnelle d'intégration de u, alors nous proposons de montrer que ce système admet une paire de sous- et sur-solutions ; puis nous appliquons le Théorème 1.2.5 dû à R. Redlinger [23] qui assure l'existence et l'unicité d'une solution positive dans le secteur entre les sous-et sur-solutions ; en appliquant le principe du maximum on vérifie que la solution est non nulle.

Dans le chapitre 3 on s'intéresse au comportement asymptotique de la solution. Pour cela on étudie du problème stationnaire correspondant à (3)

$$\left\{\begin{array}{l} -\mu_i \Delta u_i(x) = u_i(x)\left(a_i - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x) - \sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij} \int\limits_0^x u_j(\xi)d\xi\right) \\ \qquad\qquad \text{sur } \;]0,L[, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_i(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x u_i(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{si } K < i \leqslant N \end{array}\right. \tag{4}$$

Le système (4) est un problème elliptique semilinéaire, nous proposons pour démontrer l'existence d'une solution Φ positive, non nulle et bornée, d'utiliser le Théorème du point fixe de Schauder 1.1.4, les sous- et sur-solutions, le principe du maximum et le théorème d'injections. En construisant deux suite monotones (une est croissante et l'autre est décroissante) et par la méthode de sous- et sur-solutions, on obtient deux quasisolutions $\underline{\underline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$ pour (4) et on démontre que toute solution (stationnaires) Φ srictement positive, satisfait $\underline{\underline{\varphi}} \leqslant \Phi \leqslant \overline{\overline{\varphi}}$. On termine par l'étude du comportement asymptotique de la solution u du problème (3), on démontre que la solution u est attirée quand $t \rightarrow +\infty$, par le secteur entre les deux quasisolutions $\underline{\underline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$ de (4) et si $\underline{\underline{\varphi}} = \overline{\overline{\varphi}} = \Phi$, alors $u\,(x,t)$ converge vers Φ quand $t \rightarrow +\infty$.

Le chapitre 4 est consacré à la discrétisation numérique du problème (3). Dans un premier temps on discrétise le système (3) selon la variable spatiale x pour obtenir un système d'équations différentielles ordinaires semi-discret. Dans un deuxième temps on utilise la méthode de Crank-Nicholson pour discrétiser le système semi-discret et obtenir en fin de compte un problème discret sous forme de système d'équations algébriques nonlinéaires. On vérifie tout d'abord que le schéma numérique ainsi construit est consistant d'ordre deux en espace et en temps ; puis, à fin de simplifier l'étude et les calcules, nous proposons une expression matricielle compacte de notre problème. En suite, on s'intéresse au problème d'existence d'une unique solution positive, non nulle et bornée. On utilise la méthode de sous- et sur-solutions [17] pour construire deux suites monotones convergentes vers la même limite qui présente la solution approchée (les valeurs approchées prises par la solution $u_i(t,x)$ du système (3)). La convergence vers la solution exacte a été montrée d'être d'ordre deux en espace et en temps. Finalement on propose une simulation numérique à l'aide de Matlab ainsi qu'une interprétation des résultats.

Table des matières

1 Notions de base **1**

1.1 Notations et rappels sur les espaces fonctionnels 1

1.1.1 Notations 1

1.1.2 Espaces de Hölder 3

1.1.3 Espaces de Sobolev 4

1.2 Problèmes paraboliques 5

1.2.1 Problèmes de valeurs aux limites de type parabolique 5

1.2.2 Comportement asymptotique de la solution 6

1.2.3 Régularité d'ordre supérieure 7

1.2.4 Systèmes semilinéaires 8

1.3 Problèmes elliptiques 10

1.3.1 Problèmes de valeurs au bord de type elliptique 10

1.3.2 Existence et unicité des solutions 11

1.3.3 Problème aux valeurs propres 12

2 Existence et unicité de la solution du système intégrodifférentiel **14**

2.1 Introduction 14

2.2 Existence et unicité des solutions positives 14

2.3 Régularité d'ordre supérieur 24

3 Comportement asymptotique de la solution **27**

3.1 Problème stationnaire 27

3.2 Existence d'une solution positive 29

3.3 Comportement asymptotique de la solution du système (2.1.1) 41

4 Résolution numérique du problème inlérgodifférentiel 50

4.1 Construction du schéma numérique 50

4.1.1 Discrétisations et approximations 50

4.1.2 Consistance 53

4.1.3 Expression matricielle et résultats préliminaires 55

4.2 Existence et unicité des solutions positives bornées 62

4.2.1 Unicité de la solution 62

4.2.2 Existence de la solution par méthode monotone itérative 65

4.3 Convergence vers la solution exacte 72

4.4 Exemple 78

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions et résultats principaux que nous utiliserons dans le reste de ce mémoire.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 1)$. On désignera par $\partial\Omega$ le bord de Ω qu'on supposera suffisamment régulier. Si T est un réel positif on notera par $D_T = \Omega \times (0, T]$ et $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T]$ sa frontière parabolique.

1.1 Notations et rappels sur les espaces fonctionnels

1.1.1 Notations

Dans tous le reste de ce chapitre on utilisera les notations suivantes :

$\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i$ désigne le produit scalaire de x et y dans $\mathbb{R}^k$.

$|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{1/2}$ désigne la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^k$.

Si x et y sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^k$ alors $x \leqslant y$ (resp : $x < y$) est équivalent à $x_i \leqslant y_i$ (resp : $x_i < y_i$) pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$.

$\eta(x) := (\eta_1(x), ..., \eta_d(x))$ est le vecteur normal unitaire sortant au point $x \in \partial\Omega$.

L'opérateur $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ dénote la dérivée partielle (par rapport à x_i).

Soit $r = (r_1, ..., r_d) \in \mathbb{N}^d$. On notera par $|r| = r_1 + ... + r_d$ et $\partial_x^r = \partial_1^{r_1} ... \partial_d^{r_d}$. De même $\partial_\nu f(x) := \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+t\nu) - f(x)}{t}$ désigne la dérivée directionnelle de f au point x et suivant la direction ν. En particulier, ∂_η désigne la dérivée normale extérieure.

Soient $l, m \in \mathbb{N}$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles (dans $\mathbb{R}^N$).

$C^l(\Omega)$ (resp : $C^l(\overline{\Omega})$) désigne l'espace des fonctions *l-fois* continûment différentiables sur Ω (resp : $\overline{\Omega}$) muni de la norme $\|f\|_{\overline{\Omega}}^l = \sum_{r=1}^{l} \|\partial_x^r f\|_{\overline{\Omega}}$, où $\|f.\|_{\overline{\Omega}} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$ pour $f \in C(\overline{\Omega})$.

$C^{l,m}(D_T)$ $\left(resp : C^{l,m}\left(\overline{D}_T\right)\right)$ est l'espace des fonctions $f(x,t)$ de D_T, *l-fois* continûment différentiables en x et *m-fois* continûment différentiables en t sur D_T (resp : $\overline{D}_T$) muni de la norme $\|f\|_{\overline{D}_T}^{l,m} = \sum_{\substack{0\leqslant |r|\leqslant l \\ 0\leqslant s\leqslant m}} \|\partial_x^r \partial_t^s f\|_{\overline{D}_T}$.

Définition 1.1.1. (a) On dit que $\partial\Omega$ est continue si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbb{R}^d$ et un nouveau système de coordonnées cartésiennes $\{y_1, ..., y_d\}$ dont l'origine en x, tel que :

(i) Il existe $a_i > 0$ $(i = 1, ..., d)$ tel que $V_x = \left\{ (y_1, ..., y_d) : \ |y_i| < a_i, \ 1 \leqslant i \leqslant d \right\}$ et $\partial\Omega \cap V_x$ est une partie connexe.

(ii) Il existe une fonction φ_x continue, à valeurs réelles, définie sur $V'_x = \left\{ (y_1, ..., y_{d-1}) : \ |y_i| < a_i, \ 1 \leqslant i \leqslant d-1 \right\}$ et satisfaisant :

$$\varphi_x(y') < \tfrac{a_d}{2}, \quad \forall y' \in V'_x,$$

$$\Omega \cap V_x = \{(y', y_d) \in V_x : y_d < \varphi_x(y')\},$$

$$\partial\Omega \cap V_x = \{(y', y_d) \in V_x : y_d = \varphi_x(y')\}.$$

(b) De la même manière, on dit que $\partial\Omega$ est lipschitzien (ou bien que Ω est lipschitzien), lorsque la fonction φ_x ci-dessus est lipschitzienne.

Remarque 1.1.1. Remarquons que si $\partial\Omega$ est continue, alors Γ_T l'est aussi, car dans ce cas il existe $a_0 > 0$ tel que $V_{(x,t)} = V_x \times (-a_0, a_0)$ est un voisinage de (x,t) dans le nouveau système de coordonnées cartésiennes $\{y_1, ..., y_d, y_0\}$ et $\Gamma_T \cap V_{(x,t)} = (\partial\Omega \cap V_x) \times (-a_0, a_0)$ est une partie connexe. $V'_{(x,t)} = V'_x \times (-a_0, a_0)$ sur lequel $\varphi_{(x,t)}$ est définie par $\varphi_{(x,t)}(y_1, ..., y_{d-1}, y_0) = \varphi_x(y_1, ..., y_{d-1})$. Ainsi, $\varphi_{(x,t)}$ vérifie avec $V_{(x,t)}$ toutes les conditions pour que Γ_T soit continue.

1.1.2 Espaces de Hölder

Définition 1.1.2. 1) Soit $\alpha \in (0,1)$. On dit que $f \in C(\Omega)$ est Hölderienne d'exposant α si $[f]_{\Omega}^{\alpha} := \sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty$. L'espace $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ des fonctions Hölderiennes d'exposant α muni de la norme $\|f\|_{\Omega}^{\alpha} := \|f\|_{\overline{\Omega}} + [f]_{\Omega}^{\alpha}$ est un espace de Banach.

2) Soit $l \geq 1$ un entier. On définie l'espace $C^{l+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ comme étant l'espace des fonctions l-fois continument dérivables dont les dérivées d'ordre l sont Hölderienne d'ordre α. $C^{l+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ muni de la norme $\|f\|_{\Omega}^{l+\alpha} = \|f\|_{\Omega}^{l} + \sum\limits_{|r|=l} [\partial^r f]_{\Omega}^{\alpha}$ est un espace de Banach.

Remarque *1.1.2.* $C^{\alpha,0}\left(\overline{D}_T\right)$est l'espace de Banach des fonctions $f(x,t) \in C\left(\overline{D}_T\right)$ est Hölderienne en $x \in \Omega$, uniformément par rapport à t dans $(0,T)$.

$C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$ est l'espace de Banach des fonctions $f(x,t) \in C\left(\overline{D}_T\right)$ telles que $[f]_{\overline{D}_T}^{\alpha} := \sup\limits_{\substack{t,s\in(0,T),x,y,\in\Omega \\ t\neq s,x\neq y}} \frac{|f(x,t)-f(y,s)|}{\left(|x-y|^2+|t-s|\right)^{\alpha/2}} < \infty$, muni de la norme $\|f\|_{\overline{D}_T}^{\alpha} = \|f\|_{\overline{D}_T} + [f]_{\overline{D}_T}^{\alpha}$.

Définition 1.1.3. On dit que $\partial\Omega$ est de classe $C^{l+\alpha}$ (resp. $C^{l,1}$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, la fonction φ_x intervenant dans la Définition 1.1.1 est de classe $C^{l+\alpha}\left(\overline{V_x'}\right)$(resp.$C^{l,1}\left(\overline{V_x'}\right)$.).

Soit $\partial\Omega$ de classe $C^{l+\alpha}(l \geqslant 1)$. On dit que la fonction $\phi(s)$ définie sur $\partial\Omega$ est de classe $C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$ (resp. $C^{l}(\partial\Omega)$) si ϕ en tant que fonction de $(y_1,...,y_{d-1})$ est de classe $C^{l+\alpha}\left(\overline{V_x'}\right)$(resp. $C^{l}\left(\overline{V_x'}\right)$) pour tout $x \in \partial\Omega$. La norme sur $C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$ est définie comme suite :

$$\|\phi\|_{\partial\Omega}^{(l+\alpha)} = \inf\left\{\left\|\widetilde{\phi}\right\|_{\overline{\Omega}}^{(l+\alpha)} : \widetilde{\phi} \text{ de } C^{l+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ une extension de } \phi \text{ à } \overline{\Omega}\right\}$$

De même, la fonction $\phi(s)$ définie sur $\overline{\Gamma}_T$ est de classe $C^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}\left(\overline{\Gamma}_T\right)$ (resp. $C^{l,m}(\Gamma_T)$) si ϕ en tant que fonction de $(y_1,...,y_{d-1},y_0)$ est de classe $C^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}\left(\overline{V'_{(x,t)}}\right)$(resp. $C^{l,m}\left(\overline{V'_{(x,t)}}\right)$) pour tout $(x,t) \in \Gamma_T$.

Soient X un espace métrique compact et $C(X)$ l'espace vectoriel de tous les fonctions continue f de X dans $\mathbb{R}$,muni de la norme $\|f\| := \max\{|f(x)| : x \in X\}$

Définition 1.1.4. L'ensemble $F \subset C(X)$ est dit equicontinu si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ pour tout $x, y \in X$ satisfaisants $d(x,y) < \delta$ et tout $f \in F$

On peut facilement remarquer que tout sous ensemble F borné de $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ (resp. $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$) est equicontinu. En effet, comme F est un sous ensemble borné de $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in F$, $[f]_{\Omega}^{\alpha} \leqslant M$ ce qui signifie que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$.

Soit $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = (\epsilon M^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}$ alors pour tout $x, y \in \overline{\Omega}$ satisfaisants $|x-y| < \delta$ et tout $f \in F$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|^{\alpha} < M\left((\epsilon M^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \epsilon$
De même, si F borné de $C^{l+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ alors l'ensemble $F^{(l)} := \left\{\partial^l f : f \in F\right\}$ est equicontinu.

Théorème 1.1.1 (Ascoli-Arelá). *Un sous ensemble $F \subset C(X)$ est relativement compact si et seulement si F borné et equicontinu.*

1.1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.1.5. Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ un réel, $l \in \mathbb{N}$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace de Sobolev $W^{l,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $f \in L^p(\Omega)$ telle que $\partial_x^r f \in L^p(\Omega)$ pour tout r tel que $|r| \leq l$, où $\partial_x^r f$ dénote les dérivées de f au sens des distribution et $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{N}^n$. $W^{l,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{W^{l,p}(\Omega)} = \sum_{|r|=0}^{l} \|\partial_x^r f\|_{L^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach, on l'appelle espace de Sobolev.

Théorème 1.1.2. *[4, Théorème 3.9 p. 58] Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$.*
Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p.sur* Ω.

ii) *Il existe $h \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ p.p.sur Ω.*

Théorème 1.1.3. *[8, Théorème 7.25 p.171] On suppose que le domaine Ω est lipschitzien dans $\mathbb{R}^d$ alors,*
(i) Si $lp < d$, on a l'injection $W^{l,p}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$, où $\left(p' = \frac{dp}{d-lp}\right)$. De plus pour tout $q < p'$, l'injection $W^{l,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est compacte.
(ii) Si $0 \leqslant m < l - \frac{d}{p} < m+1$, on a l'injection $W^{l,p}(\Omega) \subset C^{m+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, où $\left(\alpha = l - \frac{d}{p} - m\right)$. De plus pour tout $\beta < \alpha$, l'injection $W^{l,p}(\Omega) \subset C^{m+\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ est compacte.

Théorème 1.1.4. *[5, Théorème 7.1.2 p.189] Soient E un espace de Banach et S un sous ensemble fermé, borné et convexe de E. Alors toutes application continue $T : S \longrightarrow S$ telle que $T(S)$ soit relativement compact, possède un point fixe.*

1.2 Problèmes paraboliques

1.2.1 Problèmes de valeurs aux limites de type parabolique

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ et a_{ij}, b_i, c $(1 \leq i, j \leq d)$ des fonctions continues sur $\overline{D}_T$. Définissons l'opérateur différentiel

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\,\partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^{d} b_i(x,t)\,\partial_i u + c(x,t)\,u.$$

Définition 1.2.1. (i) On dit que L est parabolique si la matrice $(a_{ij}(x,t))$ est définie positive pour tout $(x,t) \in \overline{D}_T$.
(ii) On dit que L est uniformément parabolique dans $\overline{D}_T$ s'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\mu^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^{d} \xi_i^2 \geqslant \sum\nolimits_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\,\xi_i \xi_j \geqslant \mu \sum\nolimits_{i=1}^{d} \xi_i^2,$$

pour tout $(x,t) \in \overline{D}_T$, et $\xi = (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{R}^d$.

Soient $f, \psi, \alpha_i, u_0, \beta_0$ des fonctions continues sur D_T, Γ_T, et $\overline{\Omega}$ respectivement. Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$Lu(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.2.1}$$

sous la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega \tag{1.2.2}$$

et la condition au bord

$$Bu = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(x,t)\,\partial_i u + \beta_0(x,t)\,u = \psi(x,t) \quad \text{sur } \Gamma_T \tag{1.2.3}$$

ou

$$Bu = \alpha_0(x,t)\,\partial_\nu u + \beta_0(x,t)\,u = \psi(x,t) \quad \text{sur } \Gamma_T \tag{1.2.4}$$

Remarque 1.2.1. (i) Lorsque $\alpha = 0$ et $\beta_0 = 1$, le problème aux limites (1.2.1)-(1.2.3) est dit de type Dirichlet. Si de plus $\psi = 0$ il est dit de type Dirichlet homogène.
(ii) Problème est à dérivée oblique ou directionnelle si $\alpha_0 \neq 0$ et $|\langle \alpha, \eta \rangle| > \mu_0 > 0$, en particulier, se dit de Neumann si $\alpha = \eta$ et $\beta_0 = 0$, et de Neumann homogène si de plus, $\psi = 0$

Définition 1.2.2. On dit qu'une fonction $u : \overline{D}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution classique du problème (1.2.1)-(1.2.3) si

$$\begin{array}{ll} u \in C(\overline{D}_T) \cap C^{1,2}(D_T) & \text{si } \alpha_0 = 0 \\ u \in C^{1,0}(\overline{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T) & \text{si } \alpha_0 \neq 0 \end{array}$$

et u vérifie (1.2.1)-(1.2.3). De même, on définie la solution classique du problème (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4), sauf que si $\alpha_0 \neq 0$ il suffit que la dérivée $\partial_\nu u$ existe sur Γ_T.

Le résultat suivant connu sous le nom de principe du maximum est un important critère de comparaison.

Théorème 1.2.1 (Principe du maximum fort [18]). *Soit L un opérateur uniformément parabolique à coefficients bornés. Si $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C\left(\overline{D}_T\right)$ satisfait les inégalités*

$$\begin{array}{ll} Lu \geqslant 0 & \text{dans } D_T \\ \alpha_0 \partial_\nu u + \beta_0 u \geqslant 0 & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) \geqslant 0 & \text{dans } \Omega \end{array}$$

tel que $\alpha_0 \geqslant 0$, $\beta_0 \geqslant 0$, $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ sur Γ_T, alors $u \geqslant 0$ dans $\overline{D}_T$. De plus, $u > 0$ dans D_T sinon $u \equiv 0$.

Théorème 1.2.2. *([20]). Soient L un opérateur uniformément parabolique à coefficients bornés. Si $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C\left(\overline{D}_T\right)$ satisfait l'inégalité*

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad \forall (x,t) \in D_T$$

et atteint sur D_T un maximum positif M au point (x_0, t_0), alors $u(x,t) = M$ en tous points (x,t) reliés à (x_0, t_0) par un chemin dans D_T constitué seulement des segments horizontaux et verticaux vers le haut.

1.2.2 Comportement asymptotique de la solution

Théorème 1.2.3. *[18, p. 53] Soient $\beta_0 \geqslant 0$,$c \geqslant 0$ tels que β_0 ou c soit strictement positifs. Si $f(x,t)$ et $\psi(x,t)$ convergent vers 0 uniformément dans $\overline{\Omega}$ et sur $\partial\Omega$, respectivement, quand $t \to +\infty$, alors pour tout donné initiale u_0 la solution $u(x,t)$ de (1.2.1)-(1.2.3) converge uniformément dans $\overline{\Omega}$ vers 0 quand $t \to +\infty$. La convergence de u vers 0 est dans l'espace $L^2(\Omega)$ si $f(\cdot,t)$ et $\psi(\cdot,t)$ convergent vers 0 dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega)$, respectivement, quand $t \to +\infty$.*

1.2.3 Régularité d'ordre supérieure

Dans cette partie on introduit les conditions sous lesquelles on peut améliorer la régularité de la solution d'un problème parabolique linéaire.
Soit u solution du problème (1.2.1)-(1.2.3), on note

$$u^{(k)}(x) = \partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}.$$

Il est claire que

$$u^{(0)}(x) = u_0(x), \quad u^{(1)}(x) = f(x,0) - A\left(x,0,\tfrac{\partial}{\partial x}\right) u^{(0)}(x)$$

Où,

$$A\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\,\partial_i\partial_j - \sum_{i=1}^{d} b_i(x,t)\,\partial_i - c(x,t)$$

Le reste s'obtient par récurrence

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(x) &= \left.\frac{\partial^{k+1}u(x,t)}{\partial t^{k+1}}\right|_{t=0} = \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(x,t) - \frac{\partial^k}{\partial t^k} A\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)\Big|_{t=0} \\ &= f^{(k)}(x,0) - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right) u^{(k-j)}(x). \end{aligned}$$

où l'opérateur $A^{(j)}$ (resp : $B^{(j)}$) est obtenu à partir de l'opérateur A (resp : B) en différenciant ses coefficients $j-$fois par rapport à t.

Définition 1.2.3 (Condition de compatibilité). [14, P. 319] On dit que la condition de compatibilité d'ordre $m \geqslant 0$ est satisfaite pour
(i) le problème de Dirichlet si

$$u^{(k)}(x)\big|_{x\in\partial\Omega} = \partial_t^k \psi(x,t)\big|_{t=0} := \psi^{(k)}(x) \quad (k=0,\dots,m).$$

(ii) le problème à dérivée oblique si

$$\sum\nolimits_{j=0}^{k} \tbinom{k}{j} B^{(j)}\left(x,0,\tfrac{\partial}{\partial x}\right) u^{(k-j)}(x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = \partial_t^k \psi(x,t)\big|_{t=0} := \psi^{(k)}(x) \quad (k=0,\dots,m)$$

Maintenant en est en mesure d'énoncer le théorème principal suivant.

Théorème 1.2.4. *[14, Théorèmes 5.2, 5.3 p. 320] Soient* $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$. *On suppose que les coefficients de L sont de classe* $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$, *et que* $\partial\Omega \in C^{k+2+\alpha}$.

i) *Si le problème* (1.2.1)-(1.2.3) *est de Dirichlet (* $\alpha_0 = 0$ *et* $\beta_0 = 1$*), alors pour tous* $f \in C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$ *et* $\psi \in C^{2+k+\alpha,1+\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$, $u_0 \in C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *satisfaisants la condition de compatibilité d'ordre* $\left[\frac{k+\alpha}{2}\right]+1$, *le problème* (1.2.1)-(1.2.3) *possède une unique solution de classe* $C^{2+k+\alpha,1+\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$.

ii) *Si le problème* (1.2.1)-(1.2.3) *est à dérivée oblique (* $\alpha_0 \geqslant \mu_0 > 0$*), et* α_0, $\beta_0 \in C^{k+1+\alpha,\frac{k+1+\alpha}{2}}\left(\overline{\Gamma}_T\right)$, *alors pour tous* $f \in C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$, *et* $\psi \in C^{k+1+\alpha,\frac{k+1+\alpha}{2}}\left(\overline{\Gamma}_T\right)$, $u_0 \in C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. *satisfaisants la condition de compatibilité d'ordre* $\left[\frac{k+1+\alpha}{2}\right]$, *le problème* (1.2.1)-(1.2.3) *possède une unique solution de classe* $C^{2+k+\alpha,1+\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$.

1.2.4 Systèmes semilinéaires

On considère le système semilinéaire suivant

$$\begin{cases} L_k u_k(x,t) = f_k(x,t,u(.)) & \text{dans } D_T & (k=1,2,\ldots,N) \\ u_k(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma_T & (k=1,\ldots,K) \\ \partial_{\nu^k} u_k(x,t) = g_k(x,t,u(.)) & \text{sur } \Gamma_T & (k=K+1,\ldots,N) \\ u = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}\times[-r,0] & \end{cases} \tag{1.2.5}$$

où $u = (u_1, u_2, ..., u_N)$ et L_k, $k = 1, 2, ..., N$ est un opérateur uniformément parabolique, i.e.

$$L_k u_k = \partial_t L_k u_k - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^k(x,t)\,\partial_i\partial_j u_k + \sum_{i=1}^{d} b_i^k(x,t)\,\partial_i u_k + c^k(x,t)\,u_k,$$

avec $a_{ij}^k \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D}_T\right)$, et $b_i^k, c^k \in C^{\alpha,0}\left(\overline{D}_T\right)$. Notons par $\nu^k = \left(\nu_1^k, ...\nu_d^k\right)$ la conormale intérieur par rapport à L_k, c'est à dire que $\nu_i^k(x,t) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}^k(x,t)\,\eta_i(x)$, $0 \leq K \leq N$. Pour $Z \in \mathbb{R}^N$ on note $Z' = (Z_1, Z_2, ..., Z_K)$ et $Z'' = (Z_{K+1}, ..., Z_N)$ de sorte que $Z = (Z', Z'')$. On supposera également que $f \in C(\overline{D}_T \times X, \mathbb{R}^N)$ et $g \in C(\overline{\Gamma}_T \times X, \mathbb{R}^{N-K})$ où X est l'espace de Banach définie par

$$X = \left\{u \in C(\overline{D}_T, \mathbb{R}^N) : u' \in C^{1,0}(\overline{D}_T, \mathbb{R}^K), \|u\|_{\overline{D}_T}^{1} < \infty\right\},$$

et muni de la norme $\|u\|_{\overline{D}_T}^{1} = \|u\|_{\overline{D}_T} + \sum_{i=1}^{d} \|\partial_i u'\|_{\overline{D}_T}$.

Définition 1.2.4. La fonction $u \in X \cap C^{2,1}(D_T, \mathbb{R}^N)$ pour laquelle les dérivées conormales $\partial_{\nu^k} u_k$ existent sur Γ_T $(k = K+1, \ldots, N)$ et telle que les équations du système (1.2.5) soient identiquement satisfaites est dite solution régulière de (1.2.5).

Notons par X_0 l'espace $C(\overline{\Omega} \times [-r, T], \mathbb{R}^N)$ muni de sa norme de la convergence uniforme et considérons les hypothèses suivantes sur f et g :

(H1) Les fonctions non linéaires f, g ont la forme spéciale
$f(x, t, u(.), \nabla u'(x, t)) \in C(\overline{D}_T \times X_0 \times \mathbb{R}^K, \mathbb{R}^N)$
$g \in C(\overline{\Gamma}_T \times X_0, \mathbb{R}^{N-K})$
avec f_k indépendante de $\nabla u_j(x, t)$ pour tout $j \neq k \quad (j, k = 1, \ldots, N)$.

(H2) Si $\widetilde{u} \in X_0$ tel que $C^{\beta, \frac{\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [-r, T], \mathbb{R}^N\right)$ et $\nabla \widetilde{u}' \in C^{\beta, 0}\left(\overline{D}_T, \mathbb{R}^{Kd}\right)$ pour un certain $\beta \in (0, 1)$, alors $f(\widetilde{u})$ satisfait la propriété :
pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta \in (0, 1)$ tel que $f(\widetilde{u}) \in C^{\beta, 0}\left([\epsilon, T] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$.

(H3) Il existe une fonction bornée $h(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ dont les dérivées premières et deuxièmes sont bornées et pour $k = K+1, \ldots, N$

$$\partial_{\nu^k} h > 0 \quad \text{sur } \Gamma_T$$

(H4) La fonction $u_0 := \varphi(\cdot, 0) \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ telle que $u_0' = 0$ sur $\partial\Omega$ et il existe un voisinage V de $\partial\Omega$ tel que $u_0'', a_{ij}^k(x, 0) \in C^1(V)$ $(i, j = 1, \ldots, d;\, k = K+1, \ldots, N)$

Pour $v, w \in X_0$ tels que $v \leqslant w$ on note

$$B_{v.w} = \left\{u \in C(\overline{\Omega} \times [-r, T], \mathbb{R}^N) : \; v \leqslant u \leqslant w \quad \text{dans } \overline{\Omega} \times [-r, T] \;\right\}.$$

Définition 1.2.5 (Sous- et sur-solutions [23, 18])**.** Soient $\underline{u}, \overline{u} \in X_0 \cap C^{2,1}(D_T, \mathbb{R}^N)$ deux fonctions telles que :
(i) $\underline{u} \leqslant \overline{u}$ dans $\overline{D}_T$.
(ii) Les dérivées conormales existent sur Γ_T.
On appelle $(\underline{u}, \overline{u})$ une paire de sous- et sur-solutions pour le système (1.2.5) sous la condition i), si les hypothèses suivantes sont vérifiées :
En tout point (x, t) de D_T, resp. Γ_T on a

$$\begin{array}{l} L_k \underline{u}_k(x; t) \leqslant f_k(x, t, \sigma^k(\cdot), \nabla \underline{u}'(x, t)) \\ L_k \overline{u}_k(x; t) \geqslant f_k(x, t, \rho^k(\cdot), \nabla \overline{u}'(x, t)) \end{array} \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.2.6}$$

et

$$\begin{array}{l} \partial_{\nu^k} \underline{u}_k(x; t) \geqslant g_k(x, t, \sigma^k(\cdot)) \\ \partial_{\nu^k} \underline{u}_k(x; t) \leqslant g_k(x, t, \rho^k(\cdot)) \end{array} \quad (k = K+1, \ldots, N)$$

pour toutes fonctions σ^k, $\rho^k \in B_{\underline{u}.\overline{u}}$ telles que $\sigma_k^k = \underline{u}_k$, $\rho_k^k = \overline{u}_k$ au point (x,t).

De plus, on a

$\underline{u} \leqslant \varphi \leqslant \overline{u}$, dans $\overline{\Omega} \times [-r,T]$ et $\underline{u}' \leqslant 0 \leqslant \overline{u}'$, sur Γ_T

On peut maintenant énoncer le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.2.5. *[23, Théorème 3.4] Soient les conditions (H1)-(H3) satisfaites et soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *une paire de sous- et sur- solutions pour le système* (1.2.5)*. On suppose qu'il existe un constant* $C > 0$ *tel que*

$$|f(x,t,u(\cdot),p) - f(x,t,v(\cdot),\widetilde{p})| \leqslant K \left(\|u-v\|_{\overline{D}_t} + |p-\widetilde{p}| \right) \quad \textit{dans } D_T$$

$$|g(x,t,u(\cdot)) - g(x,t,v(\cdot))| \leqslant K \|u-v\|_{\overline{D}_t} \quad \textit{dans } \Gamma_T$$

pour tout $u, v \in B_{\underline{u}.\overline{u}}$ *et tout* $p, \widetilde{p} \in \mathbb{R}^{Kd}$*. On suppose de plus que* u_0 *est Hölderienne dans* $\overline{\Omega}$ *satisfaisante (H4). Alors le système* (1.2.5) *possède exactement une solution régulière dans* $B_{\underline{u}.\overline{u}}$.

1.3 Problèmes elliptiques

1.3.1 Problèmes de valeurs au bord de type elliptique

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière et a_{ij}, b_i, c $(1 \leq i,j \leq d)$ des fonctions définies sur Ω. Définissons l'opérateur différentiel L

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\,\partial_i u + c(x)\,u.$$

Définition 1.3.1. L'opérateur L est dit uniformément élliptique s'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in \overline{\Omega}$, et $\xi = (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\mu^{-1} \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \geqslant \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2.$$

Soient f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et α_i, β_0, ψ des fonctions continues sur $\partial\Omega$ que tels que $|\langle \alpha, \eta \rangle| > \mu_0 > 0$ si $\alpha \neq 0$ et $\beta_0 = 1$ si $\alpha \equiv 0$. Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.3.1}$$

avec la donnée au bord

$$Bu(x) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (x) \partial_i u(x) + \beta_0 (x) u(x) = \psi (x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3.2}$$

Théorème 1.3.1 (Principe du maximum [18])**.** *Supposons que L est uniformément elliptique et que les coefficients c et β_0 sont positifs et ne sont pas à la fois identiquement nuls. Soit $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaisant*

$$\begin{aligned} Lu &\geqslant 0, \quad \textit{dans } \Omega, \\ Bu &\geqslant 0, \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

alors $u \geqslant 0$ dans $\overline{\Omega}$. De plus ou bien $u > 0$ dans Ω ou $u \equiv 0$.

Le principe du maximum admet une extension aux solutions fortes (i.e. dans $W^{2,p}(\Omega)$) (voir Bony [3] pour $p > d$ et P.L. Lions [15] pour $p = d$)

Proposition 1.3.1. *Si pour un certain $p \geqslant d$, une fonction $u \in W^{2,p}(\Omega)$ atteint un maximum locale au point $x_0$dans l'intérieur de Ω, alors*

$$\lim_{\rho \to 0} \left(\operatorname*{essinf}_{B_\rho(x_0)} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u \right) \leqslant 0$$

Basé sur la Proposition précédente, le principe du maximum fort (Théorème 1.3.1, et autres versions de principes du maximum) est valide pour les fonctions u dans l'espace de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$, $p > k$ (voir Trioaniello [25]).

1.3.2 Existence et unicité des solutions

Les deux théorèmes suivants assurent l'existence et l'unicité d'une solution forte (dans $W^{2,p}(\Omega)$) et classique du problème elliptique (1.3.1)-(1.3.2).

Théorème 1.3.2. *[7] Soit $1 < p < \infty$ et supposons que*

(i) $\partial\Omega$ est de classe $C^{1,1}$

(ii) les coefficients a_{ij} sont continues sur $\overline{\Omega}$

(iii) $c \geqslant 0$

(iv) les coefficients de B sont lipschitziens dans $\partial\Omega$

(v) $\beta_0 \geqslant 0$ *et* $\sup_{\Omega} c + \max_{\partial\Omega} \beta_0 > 0.$
Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$, *et* ψ *tel que*

$$\begin{array}{ll} \psi \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega), & si\ \alpha \neq 0, \\ \psi \in W^{1+\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega), & si\ \alpha \equiv 0, \end{array}$$

le problème (1.3.1)-(1.3.2) *possède une solution unique* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *qui vérifie l'estimation*

$$\begin{array}{ll} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)}\right), & si\ \alpha \neq 0, \\ \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{1+\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)}\right), & si\ \alpha \equiv 0, \end{array}$$

pour une certaine constante C *indépendante de* f *et* ψ.

Théorème 1.3.3. *[7] Soit* $\alpha \in (0,1)$ *et supposons que*

(i) $\partial\Omega$ *est de classe* $C^{2+\alpha}$

(ii) les coefficients de l'opérateur L *sont de classe* $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, *et ceux de l'opérateur* B *de classe* $C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$

(iii) $c \geqslant 0$ *sur* $\overline{\Omega}$ *et* $\beta_0 \geqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

(iv) $\max_{\Omega} c + \max_{\partial\Omega} \beta_0 > 0.$
Alors pour tout $f \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, *et tout* ψ *tels que*

$$\begin{array}{ll} \psi \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega) & si\ \alpha \neq 0, \\ \psi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega) & si\ \alpha \equiv 0, \end{array}$$

le problème (1.3.1)-(1.3.2) *admet une solution unique* $u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *qui vérifie l'estimation*

$$\begin{array}{ll} \|u\|_{\Omega}^{2+\alpha} \leqslant C\left(\|f\|_{\Omega}^{\alpha} + \|\psi\|_{\partial\Omega}^{1+\alpha}\right), & si\ \alpha \neq 0, \\ \|u\|_{\Omega}^{2+\alpha} \leqslant C\left(\|f\|_{\Omega}^{\alpha} + \|\psi\|_{\partial\Omega}^{2+\alpha}\right), & si\ \alpha \equiv 0, \end{array}$$

pour une certaine constante C *indépendante de* f *et* ψ

1.3.3 Problème aux valeurs propres

On considère le problème aux valeurs propres suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\phi = \lambda\phi & \text{sur } \Omega \\ \alpha_0 \partial_\eta \phi + \beta_0 \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.3.3}$$

où, $c \in C(\Omega)$ (c est le coefficient de L) et $\alpha_0, \beta_0 \in C^{1+\gamma}(\Omega)$ tels que, ou bien $\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 > 0$, ou $\alpha_0 > 0, \quad \beta_0 \geqslant 0$.

Alors on note par $\lambda^\star(c)$ la valeur propre principale de (1.3.3) et par $\phi^\star$ la fonction propre positive associée à $\lambda^\star(c)$ et normalisée à $\|\phi^\star\|_\Omega = 1$. De plus, $\lambda^\star(c)$ est la seule valeur propre ayant une fonction propre positive.

Théorème 1.3.4. *[18] Soit $c \in C(\Omega)$ telle que $c \geqslant 0$. Alors la valeur propre principale $\lambda^\star(c)$ est réelle, non négative, croissante en c, et sa fonction propre associée $\phi^\star$ est positive sur Ω. De plus, si c et β_0 ne sont pas à la fois identiquement nulles, $\phi^\star > 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $\alpha_0 > 0$ alors $\lambda^\star(c) > 0$.*

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du système intégrodifférentiel

2.1 Introduction

On considère le problème intégrodifférentiel suivant

$$\begin{cases} \partial_t u_i(x,t) - \mu_i \Delta u_i(x,t) = u_i(x,t) \left(a_i - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x,t) - \sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij} \int\limits_0^x u_j(\xi,t) d\xi \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } D \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_i(x,t) = 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \Gamma \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x u_i(x,t) = 0 \qquad\quad\;\; \text{sur } \Gamma \quad \text{si } K < i \leqslant N \\ u_i(x,0) = u_{0i}(x) \geqslant 0 \quad \text{sur } \Omega \quad 1 \leqslant i \leqslant N \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Où

$\Omega =]0, L[\subset \mathbb{R}, \quad D = \Omega \times]0, +\infty[\,, \quad \Gamma = \partial\Omega \times]0, +\infty[\,.$

On considère les hypothèses suivantes :

(H1) *Les constantes $\mu_i, a_i, b_{ij}, c_{ij}$ sont non-négatives avec $b_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, ..., N$.*

(H2) *Il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $u_{0i} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $u_{0i} \geqslant 0$, $(\not\equiv 0)$ sur $\overline{\Omega}$ et*

$$\begin{gathered} u_{0i}(x) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x u_{0i}(x) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad K < i \leqslant N. \end{gathered}$$

2.2 Existence et unicité des solutions positives

Notre but dans cette partie est de démontrer sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution de (2.1.1).

Pour tout $T > 0$, on définit $D_T = \Omega \times]0, T]$ et $\Gamma_T = \partial\Omega \times]0, T]$.

Considérons la fonction $f = (f_1, \ldots, f_N) : \overline{D}_T \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$ définie par :

$$f_i(x,t,u) = u_i(x,t)\left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}u_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\int_0^x u_j(\xi,t)d\xi\right) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

où $(x,t) \in \overline{D}_T$ et $u \in X_0$. Pour $i = 1, ..., N$, posons

$$L_i = \partial_t - \mu_i\Delta,$$

L_i ainsi défini est un opérateur uniformément parabolique.

Considérons la restriction du temps t dans le problème (2.1.1) sur l'intervalle $]0, T]$:

$$L_i u_i(x,t) = f_i(x,t,u) \qquad \text{sur } D_T \tag{2.2.1}$$

$$u_i(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_T, \qquad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K$$

$$\partial_x u_i(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_T, \qquad \text{si } K \leqslant i \leqslant N \tag{2.2.2}$$

$$u_i(x,0) = u_{0i}(x) \geqslant 0 \qquad \text{sur } \Omega \tag{2.2.3}$$

Lemme 2.2.1. *La fonction f satisfait les propriétés suivantes*

i) $f \in C(\overline{D}_T \times X_0, \mathbb{R}^N)$.

ii) si $u \in X$ tel que pour un certain $0 < \beta < 1$ $u \in C^{\beta}(\overline{D}_T, \mathbb{R}^N)$

alors $f(u)$ satisfait :

pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta \in]0; 1[$ tel que

$$f(u) \in C^{\delta,0}\left([\epsilon, T] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$$

iii) il existe $h \in C(\overline{\Omega})$ dont les dérivées premières et secondes sont bornées et

$$\partial_{\nu i} h > 0 \quad \textit{sur } \Gamma_T, \quad \textit{pour } K < i \leqslant N$$

Preuve.

i) Il suffit de démontrer que $f_i \in C(\overline{D}_T \times X_0, \mathbb{R})$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Fixons $\epsilon > 0$, $(x,t) \in \overline{D}_T$ et $u \in X_0$. Soient $\theta \in X_0$ et $h, k \in \mathbb{R}$ tels que $(x+h, t+k) \in \overline{D}_T$

et montrons qu'il existe $\xi, \tau, \delta \in \mathbb{R}^+$ tels que
si $h \leqslant \xi$, $k \leqslant \tau$, $\|\theta\| \leqslant \delta$ alors

$$\left|(u_i+\theta_i)(x+h,t+k) - u_i(x,t)\right| < \epsilon \tag{2.2.4}$$

$$\left|((u_i+\theta_i)(u_j+\theta_j))(x+h,t+k) - u_iu_j(x,t)\right| < \epsilon, \quad (j=1,\dots,N) \tag{2.2.5}$$

$$\left|(u_i+\theta_i)(x+h,t+k)\int\limits_0^{x+h}(u_j+\theta_j)(\xi,t+k)d\xi - u_i(x,t)\int\limits_0^{x}u_j(\xi,t)d\xi\right| < \epsilon, \quad (j=1,\dots,N) \tag{2.2.6}$$

On a

$$\left|(u_i+\theta_i)(x+h,t+k) - u_i(x,t)\right| \leqslant \left|u_i(x+h,t+k) - u_i(x,t)\right| + \left|\theta_i(x+h,t+k)\right|,$$

puisque u est continue il existe $\xi_1, \tau_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que si $h \leqslant \xi_1$ et $k \leqslant \tau_1$ alors $|u_i(x+h,t+k) - u_i(x,t)| < \frac{\epsilon}{2}$. On en déduit donc que pour tout h, k et θ tels que $h \leqslant \xi_1$, $k \leqslant \tau_1$ et $\|\theta\| < \delta' = \frac{\epsilon}{2}$

$$\left|(u_i+\theta_i)(x+h,t+k) - u_i(x,t)\right| < \epsilon.$$

alors (2.2.4) est satisfaite.

Montrons maintenant (2.2.5). On a

$$\begin{aligned}((u_i+\theta_i)(u_j+\theta_j))\left|(x+h,t+k) - u_iu_j(x,t)\right| \leqslant\ & \left|(\theta_i\theta_j)(x+h,t+k)\right| + \\ & \left|(\theta_iu_j)(x+h,t+k)\right| + \\ & \left|(\theta_ju_i)(x+h,t+k)\right| + \\ & \left|u_iu_j(x+h,t+k) - u_iu_j(x,t)\right| \\ \leqslant\ & \|\theta\|^2 + 2\|\theta\|\|u\| + \\ & \left|u_iu_j(x+h,t+k) - u_iu_j(x,t)\right|\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Choisissons θ tel que

$$\|\theta\| < \delta'' := \begin{cases} \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, & \text{si } \|u\| = 0 \\ \|\theta\| < \min\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \frac{\epsilon}{8\|u\|}\right) & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a alors $\|\theta\|^2 + 2\|\theta\|\|u\| < \frac{\epsilon}{2}$. Etant donné la continuité de u_iu_j il existent $\xi_2, \tau_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que si $h \leqslant \xi_2$ et $k \leqslant \tau_2$ alors

$$\left|u_iu_j(x+h,t+k) - u_iu_j(x,t)\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.2.8}$$

Les relations (2.2.7)-(2.2.8) entrainent que si

$$h \leqslant \xi_2, \quad k \leqslant \tau_2, \quad \|\theta\| \leqslant \delta'',$$

alors (2.2.5) est vérifiée.

Montrons maintenant (2.2.6). Pour cela posons

$$\Delta = (u_i + \theta_i)(x+h, t+k) \int_0^{x+h} (u_j + \theta_j)(\xi, t+k) d\xi - u_i(x,t) \int_0^x u_j(\xi, t).$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta \leqslant \; & \left| \theta_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} u_j(\xi,t+k)d\xi \right| + \left| u_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} \theta_j(\xi,t+k)d\xi \right| + \\
& \left| \theta_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} \theta_j(\xi,t+k)d\xi \right| + \\
& \left| u_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} u_j(\xi,t+k)d\xi - u_i(x,t) \int_0^x u_j(\xi,t)d\xi \right| .
\end{aligned}$$

D'une part on a

$$\left| \theta_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} u_j(\xi,t+k)d\xi \right| + \left| u_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} \theta_j(\xi,t+k)d\xi \right| \leqslant 2\left|\Omega\right| \|\theta\| \|u\| ,$$

$$\left| \theta_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} \theta_j(\xi,t+k)d\xi \right| \leqslant \left|\Omega\right| \|\theta\|^2 ,$$

alors si on choisit

$$\|\theta\| < \tilde{\delta} := \begin{cases} \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{|\Omega|}}, & \text{si } \|u\| = 0 \\ \min\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{|\Omega|}}, \frac{\epsilon}{8\|u\||\Omega|} \right), & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\tfrac{\epsilon}{2} > \; & \left| \theta_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} u_j(\xi,t+k)d\xi \right| + \left| u_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} \theta_j(\xi,t+k)d\xi \right| + \\
& \left| \theta_i(x+h,t+k) \int_0^{x+h} \theta_j(\xi,t+k)d\xi \right|
\end{aligned}$$

D'autre part u_i et $U_j(x,t) = \int\limits_0^x u_j(\xi,t)d\xi$ sont continues, on en déduit qu'il existe ξ_3 et $\tau_3 \in \mathbb{R}^+$ tels que si $h \leqslant \xi_3$ et $k \leqslant \tau_3$ alors

$$\left| u_i(x+h,t+k) \int\limits_0^{x+h} u_j(\xi,t+k)d\xi - u_i(x,t) \int\limits_0^x u_j(\xi,t)d\xi \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi, si

$h \leqslant \xi_3$, $k \leqslant \tau_3$ et $\|\theta\| < \tilde{\delta}$ alors

$$(u_i + \theta_i)(x+h,t+k) \int\limits_0^{x+h} (u_j+\theta_j)(\xi,t+k)d\xi - u_i(x,t) \int\limits_0^x u_j(\xi,t) < \epsilon$$

(2.2.6) est donc satisfaite.

Pour conclure, si $h \leqslant \min(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $k \leqslant \min(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, $\theta \leqslant \min(\delta',\delta'',\tilde{\delta})$ alors (2.2.4)-(2.2.6) sont tous satisfaites.

ii) Soient $\epsilon > 0, u \in X$ tel que $u \in C^\beta(\overline{D}_T,\mathbb{R}^n)$ et $u'_x \in C^{\beta,0}(\overline{D}_T,\mathbb{R}^{Kd})$ pour un certain $0 < \beta < 1$. On veut montrer qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que $f(u) \in C^{\gamma,0}([\epsilon,T] \times \overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$. Pour celà, il suffit de montrer que :

Il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que les quantitées :

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |u_i(x,t) - u_i(y,t)|\,|x-y|^{-\gamma},$$
$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |(u_iu_j)(x,t) - (u_iu_j)(y,t)|\,|x-y|^{-\gamma},$$
$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \left| u_i(x\ ,t) \int\limits_0^x u_j(\xi,t)d\xi - u_i(y,t) \int\limits_0^y u_j(\xi,t)d\xi \right| |x-y|^{-\gamma}$$

soient bornées indépendamment de $t \in [\epsilon,T]$. En effet, comme $u \in C^\beta(\overline{D}_T,\mathbb{R}^n)$ on a $u_i \in C^\beta(\overline{D}_T,\mathbb{R})$ pour tout $i = 1,\ldots,N$. D'ou pour tout $(x,t),(y,s) \in \overline{D}_T$ et $(x,t) \neq (y,s)$

$$\frac{|u_i(x,t) - u_i(y,s)|}{\left(|x-y|^2 + |t-s|\right)^{\frac{\beta}{2}}} \leqslant [u_i]^{(\beta)}_{,\overline{D}_T},$$

où $[u_i]^{(\beta)}_{,\overline{D}_T}$ est indépendant de $(x,t),(y,s) \in \overline{D}_T$. On en déduit qu'en choisissant $\gamma = \beta$, on obtient :

pour tout $t \in [\epsilon,T]$, $x,y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$: $|u_i(x,t) - u_i(y,t)|\,|x-y|^{-\gamma} \leqslant [u_i]^{(\gamma)}_{,\overline{D}_T}$

alors $\sup |u_i(x,t) - u_i(y,t)|\,|x-y|^{-\gamma}$ est borné indépendamment de $t \in [\epsilon,T]$.

On a $(u_iu_j)(x,t)-(u_iu_j)(y,t)=u_i(x,t)\left[u_j(x,t)-u_j(y,t)\right]+u_j(y,t)\left[u_i(x,t)-u_i(y,t)\right]$ d'où,

$$\begin{aligned}\left|(u_iu_j)(x,t)-(u_iu_j)(y,t)\right||x-y|^{-\gamma} &\leqslant |u_i(x,t)|\left|u_j(x,t)-u_j(y,t)\right||x-y|^{-\gamma}+\\ &\quad |u_j(y,t)|\left|u_i(x,t)-u_i(y,t)\right||x-y|^{-\gamma}\\ &\leqslant 2\|u\|\left[u_i\right]^{(\gamma)}_{,\overline{D}_T}\end{aligned}$$

pour tout $t\in[\epsilon,T]$, $x,y\in\overline{\Omega}$, $x\neq y$,

donc $\sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega}}\left|(u_iu_j)(x,t)-(u_iu_j)(y,t)\right||x-y|^{-\gamma}$ est borné indépendamment de $t\in[\epsilon,T]$

Pour la dernière, on a pour tout $t\in[\epsilon,T]$, $x,y\in\overline{\Omega}$, $x\neq y$

$$\begin{aligned}u_i(x\ ,t)\int_0^x u_j(\xi,t)d\xi-u_i(y,t)\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi &= u_i(x\ ,t)\left[\int_0^x u_j(\xi,t)d\xi-\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi\right]+\\ &\quad \left[u_i(x,t)-u_i(y,t)\right]\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\left|u_i(x\ ,t)\int_0^x u_j(\xi,t)d\xi-u_i(y,t)\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi\right| &\leqslant |u_i(x\ ,t)|\left|\int_y^x u_j(\xi,t)d\xi\right|+\\ &\quad |u_i(x,t)-u_i(y,t)|\left|\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi\right|\\ &\leqslant \|u\|^2|x-y|+|y|\,\|u\|\,|u_i(x,t)-u_i(y,t)|\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|u_i(x\ ,t)\int_0^x u_j(\xi,t)d\xi-u_i(y,t)\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi\right||x-y|^{-\gamma} &\leqslant \|u\|^2|x-y|^{1-\gamma}+|y|\,\|u\|\left[u_i\right]^{(\gamma)}_{\overline{D}_T}\\ &\leqslant \|u\|^2|\Omega|^{1-\gamma}+|\Omega|\,\|u\|\left[u_i\right]^{(\gamma)}_{\overline{D}_T},\end{aligned}$$

d'où
$\sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega}}\left|u_i(x\ ,t)\int_0^x u_j(\xi,t)d\xi-u_i(y,t)\int_0^y u_j(\xi,t)d\xi\right||x-y|^{-\gamma}$ est borné indépendamment de $t\in[\epsilon,T]$ $\square$

On aura aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *Soient $\underline{u}, \overline{u} \in C(\overline{D_T})$ tels que $\underline{u} \leqslant \overline{u}$. Sous l'hypothèse (H1), il existe un constant $K > 0$ tel que*

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leqslant K \|u - v\|_{D_t}$$

pour tout $(x,t) \in \overline{D}_T$, *et* $u, v \in B_{\underline{u},\overline{u}}$.

Preuve.

Soient $(x,t) \in \overline{D}_T$, $u, v \in B_{\underline{u},\overline{u}}$ $i = 1, \ldots, N$.

On a

$$f_i(x,t,u) - f_i(x,t,v) = (u_i(x,t) - v_i(x,t)) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j(\xi,t) d\xi \right) +$$
$$v_i(x,t) \left(- \sum_{j=1}^{N} b_{ij} \left(u_j(x,t) - v_j(x,t)\right) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x \left(u_j(\xi,t) - v_j(\xi,t)\right) d\xi \right),$$

alors

$$|f_i(x,t,u) - f_i(x,t,v)| \leqslant |u_i(x,t) - v_i(x,t)| \left(a_i + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} |u_j(x,t)| + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x |u_j(\xi,t)| \, d\xi \right) +$$
$$|v_i(x,t)| \left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} |u_j(x,t) - v_j(x,t)| + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x |u_j(\xi,t) - v_j(\xi,t)| \, d\xi \right).$$

Comme $|u_j(x,t) - v_j(x,t)| \leqslant \|u - v\|_{D_t}$ et $\underline{u}_j(x,t) \leqslant u_j(x,t), v_j(x,t) \leqslant \underline{u}, \overline{u}_j(x,t)$,

$$|f_i(x,t,u) - f_i(x,t,v)| \leqslant |u_i(x,t) - v_i(x,t)| \left(a_i + \sum_{j=1}^{N} (b_{ij} + Lc_{ij}) \right) \|\overline{u}_j\| +$$
$$\|\overline{u}_i\| \max_j (b_{ij} + Lc_{ij}) \sum_{j=1}^{N} |u_j(x,t) - v_j(x,t)|$$
$$\leqslant \max \left(\max_j (b_{ij} + Lc_{ij}), a_i + \sum_{j=1}^{N} M_j \left(b_{ij} + Lc_{ij}\right) \|\overline{u}_j(x,t)\| \right) \|u - v\|_{D_t},$$

donc il suffit de prendre

$$K = \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\max \left(\max_j (b_{ij} + Lc_{ij}), a_i + \sum_{j=1}^{N} M_j \left(b_{ij} + Lc_{ij}\right) \|\overline{u}_j(x,t)\| \right) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour que :

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leqslant K \|u - v\|_{D_t}$$

pour tout $(x,t) \in \overline{D}_T$, $u, v \in B_{\underline{u},\overline{u}}$ □

Théorème 2.2.1. *Soit* $(\underline{u}, \overline{u})$ *une paire de sous- et sur-solutions pour le système* (2.2.1)-(2.2.3)*. Si les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, alors il existe une unique solution* u *de* (2.1.1)*, satisfaisant :* $\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D}_T$.

Preuve. Sous l'hypothèse (H2), la fonction $u_0 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ admet l'extension à une fonction continue de $\mathbb{R}$, de sort que l'hypothèse (H4) dans la chapitre précédent soit satisfaite ; puis, en tenant compte des lemmes 2.2.1 et 2.2.2 on en déduit en appliquant le Théorème 1.2.5 que (2.2.1)-(2.2.3) possède une unique solution régulière u dans $\in B_{\underline{u},\overline{u}}$. Pour l'existence globale, il suffit de remarquer que la solution u du problème (2.2.1)-(2.2.3) existe pour tout $T > 0$. Ce qui signifie que le système intégrodifféretiel (2.1.1) admet une unique solution régulière, satisfaisante :

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_T.$$

□

Le Théorème précédent montre que pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système (2.2.1)-(2.2.3) il suffit de trouver une paire de sous- et sur-solutions pour ce système. Soient $\underline{u} = 0$ et $\overline{u} = M = (M_1, \ldots, M_N)$ tels que

$$M_i \geqslant \max\left(\tfrac{a_i}{b_{ii}}, \|u_{0i}\|_\infty\right) \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.2.9}$$

Montrons que $(\underline{u}, \overline{u})$ est paire de sous- et sur-solutions pour le système (2.2.1)-(2.2.3).
On peut facilement voir que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ vérifient :

$$\begin{aligned} \underline{u} &\leqslant \overline{u} \text{ et } \underline{u}, \overline{u} \in C(\overline{D}_T, \mathbb{R}^N) \cap C^{2,1}(D_T, \mathbb{R}^N) \\ &\underline{u} \leqslant u_0 \leqslant \overline{u} \quad \text{sur } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

Pour tout $i = 1, \ldots, N$, $(x,t) \in D_T$, et $\eta^i \in B_{\underline{u},\overline{u}}$ tel que $\eta^i_i(x,t) = 0$
$\underline{u} \equiv 0$ vérifie :

$$\begin{array}{rcc} \partial_t \underline{u}_i(x,t) - \mu_i \Delta \underline{u}_i(x,t) \leqslant & f_i(x,t,\eta^i) & \text{dans } D_T \\ \underline{u}_i(x,t) \leqslant 0 & \text{sur } \Gamma & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x \underline{u}_i(x,t) \leqslant 0 & \text{sur } \Gamma & \text{si } K < i \leqslant N, \end{array}$$

alors $\underline{u}$ est sous-solution pour le sytème (2.2.1)-(2.2.3).

Reste à démontrer que $\overline{u} = M$ vérifie la deuxième inégalité de (1.2.6) dans la Définition 1.2.5.

Soient $i = 1, \ldots, N$ et $(x,t) \in D_T$. On a $\partial_t M_i = \mu_i \Delta M_i = 0$.

Donc

$$\partial_t \overline{u}_i - \mu_i \Delta \overline{u}_i = 0. \tag{2.2.10}$$

D'autre part, soit $\varphi^i \in B_{\underline{u},\overline{u}}$ tel que $\varphi^i_i(x,t) = M_i$.

On a

$$f_i(x,t,\varphi^i) = M_i \left((a_i - b_{ii} M_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} \varphi^i_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x \varphi^i_j(\xi,t) d\xi \right)$$

Or, $M_i \geqslant \frac{a_i}{b_{ii}} \geqslant 0$, $M_i \geqslant \varphi^i \geqslant 0$ et a_i, b_{ij}, c_{ij}, sont positives

ceci implique que

$$(a_i - b_{ii} M_i) \leqslant 0$$

et

$$\left(- \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} \varphi^i_j(x,t) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \int_0^x \varphi^i_j(\xi,t) d\xi \right) \leqslant 0.$$

Donc,

$$M_i \left((a_i - b_{ii} M_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} \varphi^i_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x \varphi^i_j(\xi,t) d\xi \right) \leqslant 0,$$

c'est à dire

$$f_i(x,t,\varphi^i) \leqslant 0 \tag{2.2.11}$$

On en déduit de (2.2.10) et (2.2.11) que :

$$\partial_t \overline{u}_i - \mu_i \Delta \overline{u}_i \geqslant f_i(x,t,\varphi^i)$$

finalement, $\overline{u} = M$ vérifie

$$\begin{array}{rl} \overline{u}_i(x,t) \geqslant 0 \quad \text{sur } \Gamma \ , & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x \overline{u}_i(x,t) \geqslant 0 \quad \text{sur } \Gamma \ , & \text{si } K < i \leqslant N \end{array}$$

ce qui signifie que $\overline{u} = M$ est bien sur-solution pour le système (2.2.1)-(2.2.3).

Alors on peut énoncer

Lemme 2.2.3. *Soient $\underline{u} = 0$ et $\overline{u} = M$, sous l'hypothèse (H1), $(\underline{u}, \overline{u})$ est paire de sous- et sur-solutions pour le système* (2.2.1)-(2.2.3).

Théorème 2.2.2. *Sous les hypothèses (H1) et (H2), le système intégrodifféretiel* (2.1.1) *admet une unique solution régulière bornée u. De plus, $u(x,t) > 0$ sur D_T.*

Preuve.

D'après le Lemme 2.2.3, $(0, M)$ est une paire de sous- et sur-solutions pour le système (2.2.1)-(2.2.3), d'après le Théorème 2.2.1 on en déduit que le systeme (2.1.1) admet une unique solution régulière u dans $B_{0,M}$; et ce pour tout $M \in \mathbb{R}^N$ vérifiant la condition (2.2.9), d'où il en résulte l'unicité de la solution (régulière) bornée. On démontre la positivité stricte de la solution par l'absurde, en appliquant (sur $-u$) le principe du maximum :
Supposons qu'il existe $(x_1, t_1) \in D_T$ tel que

$$u(x_1, t_1) = 0$$

on montre qu'on aboutit à une contradiction avec le fait que u_0 n'est pas identiquement nulle.
Comme $u \in B_{0,M}$, la fonction $h_i(x,t) := \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x,t) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j(\xi,t) d\xi$ est bornée
u est solution de (2.1.1) donc u vérifie $[L_i + h(x,t)]\,(-u_i(x,t)) = -a_i u_i(x,t) \leqslant 0 \quad (x,t) \in D_T$ c'est-à-dire

$$[L_i + h(x,t)]\,(-u_i(x,t)) \leqslant 0 \quad \text{sur } D_T$$

En appliquant le principe du maximum (Théorème 1.2.2) on en déduit que pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$-u_i(x,t) = 0 \quad \text{pour tout } (x,t) \in D_T \text{ tel que } t \leqslant t_1$$

ce qui signifie que

$$u(x,t) = 0 \quad \text{pour tout } (x,t) \in D_T \text{ tel que } t \leqslant t_1$$

alors d'une part on a

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = \lim_{t \to 0, t \leqslant t_1} u(x,t) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega$$

d'autre part comme u est continue en $t = 0$,

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = u_o(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega$$

ce qui implique que

$$u_o(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

ce qui contredit le fait que u_o n'est pas identiquement nulle sur Ω (hypothèse (H2). □

2.3 Régularité d'ordre supérieur

Le théorème suivant nous donne une régularité d'ordre supérieure pour la solution u.

Remarque 2.3.1. –

- $f(u)$ -par son expression, et comme $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$- est de classe $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$.Plus généralement il est claire que si $u \in C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{D}_T)$ alors $f(u) \in C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{D}_T)$
- On remarque qu'en cas des conditions au bord de Dirichlet ou de dérivée oblique homogènes on a $\psi = 0 \in C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}\left(\overline{\Gamma}_T\right)$, $\psi^{(k)} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$

Théorème 2.3.1. *Sous l'hypothèse (H2), si pour tout* $1 \leqslant i \leqslant K$

$$\Delta u_{0i}(x)|_{\partial\Omega} = 0,$$

alors la solution $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$
Si de plus, $u_0 \in C^{4+\delta}(\overline{\Omega})$ *et*

$$\mu_i \partial_x^4 u_{0i}(x) - 2\partial_x u_{0i}(x)\left(\sum_{j=1}^{K} b_{ij}\partial_x u_{0j}(x) + \sum_{j=K+1}^{N} c_{ij}u_{0j}(x)\right) = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \qquad 1 \leqslant i \leqslant K$$
$$\mu_i \partial_x^3 u_{0i}(x) - u_{0i}(x)\left(\sum_{j=1}^{K} b_{ij}\partial_x u_j(x) + \sum_{j=K+1}^{N} c_{ij}u_j(x)\right) = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \qquad K < i \leqslant N$$

alors la solution u *est de classe* $C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{D}_T)$

Preuve. .

- (i) Montrons que la solution est de classe $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$.

On a

$$u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad f(u) \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T), \quad \psi = 0 \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Gamma}_T\right) \subset C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}\left(\overline{\Gamma}_T\right)$$

donc il nous reste de démontrer que la condition de compatibilité d'ordre 1 est satisfaite pour les toutes les équations du système (2.1.1) dont la condition au bord est de type Dirichlet et d'ordre 2 pour les équations dont la condition au bord est de type Neumann, sous l'hypothèse (H2), la condition de compatibilité d'ordre $0 = [(\alpha+1)/2]$ est satisfaite pour toutes les équations du système intégrodifférentiel (voir Définition 1.2.3)

On a pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(x) &= \mu_i \Delta u_i^{(0)}(x) + u_i^{(0)}(x) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j^{(0)}(x) - \sum_{j=K+1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j^{(0)}(\xi)\, d\xi \right) \\ &= \mu_i \Delta u_{0i}(x) + u_{0i}(x) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_{0j}(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_{0j}(\xi)\, d\xi \right) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

alors

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(x)\Big|_{x\in\partial\Omega} &= \mu_i \Delta u_{0i}(x)\big|_{x\in\partial\Omega} + u_{0i}(x)\big|_{x\in\partial\Omega} \times \\ & \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\, u_{0j}(x)\big|_{x\in\partial\Omega} - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_{0j}(\xi)\big|_{x\in\partial\Omega} d\xi \right) \end{aligned}$$

sous l'hypothèse (H2) et les hypothèses du théorème, on a pour tout $i = 1, \ldots, K$

$$u_i^{(1)}(x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = \mu_i \Delta u_{0i}(x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0 = \psi_i^{(1)}(x)$$

C.'-à-d. la condition de compatibilité d'ordre $1 = [\alpha/2] + 1$ est satisfaite pour les toutes les equations du système (2.1.1) dont la condition au bord est de type Dirichlet.

Ainsi, en vertu du Théorème 1.2.4 la solution est de classe $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$.

– (ii) Montrons que la solution est de classe $C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{D}_T)$.

On a $u_0 \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\psi = 0 \in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}\left(\overline{\Gamma}_T\right) \subset C^{3+\alpha,1+(1+\alpha)/2}\left(\overline{\Gamma}_T\right)$

et comme $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$, on aura aussi $f(u) \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$.

D'autre part on obtient de (2.3.1), pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_i^{(1)}(x) &= \mu_i \partial_x^3 u_{0i}(x) - u_{0i}(x) \left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} \partial_x u_j(x) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} u_j(x) \right) \\ & + \partial_x u_{0i}(x) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_{0j}(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_{0j}(\xi)\, d\xi \right) \end{aligned}$$

sous les hypothèses du théorème, on obtient pour tout $i = K+1, \ldots, N$

$$\partial_x u_i^{(1)}(x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0 = \psi_i^{(1)}(x).$$

Alors la condition de compatibilité d'ordre $1 = [1 + (1+\alpha)/2]$ est satisfaite pour toutes les équations du système (2.1.1) dont la condition au bord est de type Neumann.

Reste à montrer que la condition de compatibilité d'ordre $2 = [1 + \alpha/2] + 1$ est satisfaite

pour les équations du système (2.1.1) ayant des conditions au bord de type Dirichlet.
On a

$$u_i^{(2)}(x) = \mu_i \Delta u_i^{(1)}(x) + \partial_t \left[u_i(x,t) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j(\xi,t) d\xi \right) \right] \Bigg|_{t=0}.$$

Comme $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$ et $u \leqslant M$, en appliquant la formule de Leibniz pour la dérivation sous signe d'intégrale on obtient

$$\partial_t \int_0^x u_j(\xi,t)\, d\xi \Big|_{t=0} = \int_0^x \partial_t u_j(\xi,t)|_{t=0}\, d\xi = \int_0^x u_j^{(1)}(\xi)\, d\xi$$

donc,

$$\begin{aligned} \partial_t \left[u_i(x,t) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j(x,t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j(\xi,t) d\xi \right) \right] \Bigg|_{t=0} &= u_i^{(1)}(x) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_{0j}(x) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_{0j}(\xi) d\xi \right) &- u_{0i}(x) \left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j^{(1)}(\xi)\, d\xi \right) \end{aligned}$$

et d'après (2.3.1) on a

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{(1)}(x) &= \partial_x^4 u_{0i}(x) + \Delta u_{0i}(x) \left(a_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_{0j}(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_{0j}(\xi)\, d\xi \right) \\ &\quad - u_{0i}(x) \left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} \Delta u_{0j}(x) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \partial_x u_{0j}(x) \right) \\ &\quad - 2\partial_x u_{0i}(x) \left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} \partial_x u_{0j}(x) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} u_{0j}(x) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte des l'hypothèses du théorème

$$u_i^{(2)}(x) \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 = \psi_i^{(2)}(x), \quad K < i \leqslant N.$$

Alors la condition de compatibilité d'ordre $2 = [1 + \alpha/2] + 1$ est satisfaite pour les équations avec condition au bord de Dirichlet.
On en déduit du Théorème 1.2.4 que la solution est de classe $C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{D}_T)$. □

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution

3.1 Problème stationnaire

On considère le problème stationnaire correspondant au système intégrodifférentiel (2.1.1) du chapitre précédent :

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta\varphi_i(x) = \varphi_i(x)\left(a_i - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{ij}\varphi_j(x) - \sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x \varphi_j(\xi)d\xi\right) & \text{sur } \Omega \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ \varphi_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x\varphi_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \quad \text{si } K < i \leqslant N. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Considérons la fonction $f : (x, y, \varphi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times C\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, définie par

$$f(x, y, \varphi) = (f_1(x, y_1, \varphi), \ldots, f_N(x, y_N, \varphi))$$

où

$$f_i(x, y_i, \varphi) = y_i\left(a_i - b_{ii}y_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij}\varphi_j(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x \varphi_j(\xi)d\xi\right) \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Définissons la fonction $h_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$h_i(x) = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij}M_j + x\sum_{j=1}^{N} c_{ij}M_j$$

où $M_i = \frac{a_i}{b_{ii}}$ $(i = 1, \ldots, N)$, et posons

$$M_i' = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} M_j + L \sum_{j=1}^{N} c_{ij} M_j.$$

Considérons l'hypothèse suivante :

(H'1) *On suppose que* $\lambda_i^\star(h_i) < a_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, N$.

Rappelons que $\lambda_i^\star(c_i)$ représente la valeur propre principale associée à l'opérateur $-\mu_i\Delta + c_i$ sous la condition au bord de Dirichlet homogène si $1 \leqslant i \leqslant K$ et de Neumann homogène sinon. $\phi_{c_i}^\star$ est la fonction propre positive associée à $\lambda_i^\star(c_i)$ et normalisée à $\|\phi_i^\star\|_\Omega = 1$ et $\lambda_i^\star(c_i)$ est la seule valeur propre dont la fonction propre est positive.

Définition 3.1.1. Soient $\underline{\varphi}, \overline{\varphi} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. $\left(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}\right)$ est dit paire de sous- et sur-solution pour le système (3.1.1) si $\underline{\varphi} \leqslant \overline{\varphi}$ dans $\overline{\Omega}$ et si pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $\sigma \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tel que $\underline{\varphi} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\varphi}$

$$-\mu_i \Delta \underline{\varphi}_i(x) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i(x), \sigma) \qquad \text{sur } \Omega \tag{3.1.2}$$

$$-\mu_i \Delta \overline{\varphi}_i(x) \geqslant f_i(x, \overline{\varphi}_i(x), \sigma) \qquad \text{sur } \Omega, \tag{3.1.3}$$

et

$$\begin{array}{ll} \overline{\varphi}_i \geqslant 0 \geqslant \underline{\varphi}_i & \text{sur } \partial\Omega \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K, \\ \partial_x \overline{\varphi}_i \geqslant 0 \geqslant \partial_x \underline{\varphi}_i & \text{sur } \partial\Omega \quad \text{si } K < i \leqslant N. \end{array} \tag{3.1.4}$$

Lemme 3.1.1. *Soit* $\lambda_i^\star(0)$ *la valeur propre principale de l'opérateur* $-\Delta$ *avec la condition au bord de Dirichlet homogène lorsque* $1 \leqslant i \leqslant K$ *et de Neumann homogène lorsque* $K < i \leqslant N$. *Si* $\mu_i \lambda_i^\star(0) + M_i' < a_i$, *pour tout* $i = 1, \ldots, N$, *alors l'hypothèse (H'1) est vérifiée.*

Preuve. D'après le Théorème 1.3.4 pour $L = -\mu_i\Delta$, sous la condition au bord de Dirichlet ou de Neumann homogènes (selon l'indice i), $\lambda_i^\star(c)$ est croissant en c ; alors

$$\lambda_i^\star(h_i) \leqslant \lambda_i^\star(M_i') \tag{3.1.5}$$

D'autre part on a $(-\mu_i\Delta + M_i')\, \phi_{M_i'}^\star = \lambda_i^\star(M_i')\phi_{M_i'}^\star$ alors $-\Delta\phi_{M_i}^\star = \frac{\lambda_i^\star(M_i') - M_i'}{\mu_i}\phi_{M_i}^\star$ et comme $\phi_{M_i'}^\star > 0$ sur Ω, on en déduit que $\lambda_i^\star(0) = \frac{\lambda_i^\star(M_i') - M_i'}{\mu_i}$ c'est-à-dire $\lambda_i^\star(M_i') = \mu_i\lambda_i^\star(0) + M_i'$, d'après (3.1.5) ceci qui implique que $\lambda_i^\star(h_i) < \mu_i\lambda_i^\star(0) + M_i'$ et d'après l'hypothèse du lemme on a $\mu_i\lambda_i^\star(0) + M_i' < a_i$ d'où $\lambda_i^\star(h_i) < a_i$. □

3.2 Existence d'une solution positive

Le théorème suivant assure l'existence d'une solution positive de (3.1.1).

Théorème 3.2.1. *Sous l'hypothèse (H'1) le systeme* (3.1.1) *admet une solution positive dans* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Avant de donner la preuve de ce théorème on aura besoin des lemmes suivants.
Posons $\phi^\star := (\phi_1^\star, \ldots, \phi_N^\star) := \left(\phi_{h_1}^\star, \ldots, \phi_{h_1}^\star\right)$ et $M = \left(\frac{a_1}{b_{11}}, \ldots, \frac{a_N}{b_{NN}}\right)$,

Lemme 3.2.1. *Sous l'hypothèse (H'1) il existe* $\overline{\alpha} = (\ \overline{\alpha}_1, \ \ldots, \ \overline{\alpha}_N\ ) \in \mathbb{R}_+^N$, $\overline{\alpha} \neq 0$, *tel que si* $0 < \alpha \leqslant \overline{\alpha}$, *alors* $(\ \alpha\phi^\star, \ M\ )$ *est une paire de sous- et sur-solution pour le système* (3.1.1).

Preuve. Supposons pour commencer, que $0 < \alpha \leqslant M$, alors il est claire que

$$\begin{aligned} \alpha\phi^\star, M \quad &\in \quad C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \alpha\phi^\star &\leqslant M \quad \text{sur } \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité découle du fait que $0 < \phi_i^\star \leqslant \|\phi_i^\star\|_\Omega = 1 \quad (i = 1, \ldots, N)$ et $0 < \alpha \leqslant M$.

Soit $\sigma \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tel que $\alpha\phi^\star \leqslant \sigma \leqslant M$, on a

$$a_i - b_{ii}M_i = -\mu_i \Delta M_i = 0 \geqslant -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij}\sigma_j(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_{0j}^{x} \sigma_j(\xi)d\xi \quad x \in \overline{\Omega}.$$

alors

$$-\mu_i \Delta M_i \geqslant M_i \left((a_i - b_{ii}M_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij}\sigma_j(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_{0j}^{x} \sigma_j(\xi)d\xi \right), \quad \text{sur } \Omega,$$

d'où

$$\begin{array}{lll} -\mu_i \Delta M_i \geqslant f_i(x, M_i, \sigma) & \text{sur } \Omega & 1 \leqslant i \leqslant N \\ M_i \geqslant 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x M_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{array} \tag{3.2.1}$$

De l'hypothèse (H'1), il existe $\alpha_i > 0$ tel que $\alpha_i \leqslant \frac{a_i - \lambda_i^\star(h_i)}{b_{ii}}$ et comme $0 < \phi_i^\star \leqslant 1$

$$\lambda_i^\star(h_i) \leqslant a_i - b_{ii}\alpha_i\phi_i^\star(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

et par définition, $\phi_i^\star$ vérifie

$$-\mu_i \Delta \alpha_i \phi_i^\star + h_i \alpha_i \phi_i^\star = \lambda_i^\star(h_i) \alpha_i \phi_i^\star$$

ce qui implique que pour tout $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
-\mu_i \Delta \alpha_i \phi_i^\star(x) &= \left[\lambda_i^\star(h_i) - h_i(x)\right] \alpha_i \phi_i^\star(x) \leqslant \alpha_i \phi_i^\star(x) \left[a_i - b_{ii}\alpha_i \phi_i^\star(x) - h_i(x)\right] \\
&\leqslant \alpha_i \phi_i^\star(x) \left(a_i - b_{ii}\alpha_i\phi_i^\star(x) - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} M_j - x \sum_{j=1}^{N} c_{ij} M_j \right) \\
&\leqslant \alpha_i \phi_i^\star(x) \left(a_i - b_{ii}\alpha_i\phi_i^\star(x) - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} \sigma_j(x) - \int_{0j}^{x} \sigma_j(\xi) d\xi \right)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $\sigma \leqslant M$. Alors on a

$$\begin{array}{lll}
-\mu_i \Delta \alpha_i \phi_i^\star(x) \leqslant f_i(x, \alpha_i \phi_i^\star(x), \sigma(x)) & \text{sur } \Omega & 1 \leqslant i \leqslant N \\
\alpha_i \phi_i^\star(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\
\partial_x \alpha_i \phi_i^\star(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N
\end{array} \tag{3.2.2}$$

Ainsi en choisissant

$$\overline{\alpha}_i = \frac{a_i - \lambda_i^\star(h_i)}{b_{ii}},$$

$\left(\alpha\phi^\star, \quad M \right)$ est paire de sous- et sur-solutions pour (3.1.1) pour tout $\alpha \leqslant \overline{\alpha}$. □

Maintenant, on définit dans $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^K) \times C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N-K})$ l'ensemble :

$$\begin{aligned}
S = \Big\{ \ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^K) \times C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N-K}), \quad \varphi \in [\alpha\phi^\star, M] \quad \text{sur } \Omega \ , \\
(\varphi_1, \ldots, \varphi_K, \quad \partial_x \varphi_{K+1}, \ldots, \partial_x \varphi_N)_{|\partial\Omega} = 0, \quad \|\varphi_i\|_\Omega^1 \leqslant C_i, \quad K < i \leqslant N \ \Big\}
\end{aligned}$$

tel que $C_i, \quad K < i \leqslant N$ sont des constant à déterminer plus loin d'une façon convenable dans la démonstration du Lemme 3.2.3.

Il est claire que S est fermé, borné et convexe.

Lemme 3.2.2. *Soit*

$$\overline{M}_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij} M_j + L \sum_{j=1}^{N} c_{ij} M_j.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, N$, $x \in \Omega$ *et* $\varphi \in S$ *l'application* $f_i(x, y_i, \varphi) + \overline{M}_i y_i$ *est croissante par rapport à* y_i *dans* $[0, M_i] \subset \mathbb{R}$.

Preuve.

Soient $x \in \overline{\Omega}$, $\varphi \in S$, $y_i, \acute{y}_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

On démontre que si $y_i - \acute{y}_i \geqslant 0$, alors $f_i(x, y_i, \varphi) - f_i(x, \acute{y}_i, \varphi) + \overline{M}_i(y_i - \acute{y}_i) \geqslant 0$.

En effet, supposons que $y_i - \acute{y}_i > 0$ (le cas $y_i - \acute{y}_i = 0$ est évident). On a

$$\begin{aligned}
\frac{f_i(x, y_i, \varphi) - f_i(x, \acute{y}_i, \varphi)}{y_i - \acute{y}_i} &= a_i - b_{ii}(y_i + \acute{y}_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} u_j(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_0^x u_j(\xi) d\xi \\
&\geqslant a_i - 2b_{ii} M_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_{ij} M_j - L \sum_{j=1}^{N} c_{ij} M_j \\
&= -\left(b_{ii} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} M_j + L \sum_{j=1}^{N} c_{ij} M_j \right) \\
&= -\overline{M}_i,
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$f_i(x, y_i, \varphi) - f_i(x, \acute{y}_i, \varphi) + \overline{M}_i(y_i - \acute{y}_i) \geqslant 0.$$

□

Soit $\varphi \in S \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, pour tout $i = 1, \ldots, N$, le problème suivant

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta T\varphi_i(x) + \overline{M}_i T\varphi_i(x) = & f_i(x, \varphi_i(x), \varphi) + \overline{M}_i \varphi_i(x) & p.p.\text{sur } \Omega \\ T\varphi_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x T\varphi_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{cases} \tag{3.2.3}$$

est un problème aux limites elliptique linéaire qui admet, d'après le Théorème 1.3.2, une unique solution forte $T\varphi_i \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, $0 < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ pour tout $i = 1, \ldots, N$.
Ainsi, l'application T qui à $\varphi \in S$ associe $T\varphi = \left(T\varphi_1, \ \ldots, \ T\varphi_N \right)$ est bien définie.
Le problème d'existence d'une solution pour le système (3.1.1) est donc ramené au problème d'existence d'un point fixe de l'application T.

Lemme 3.2.3. *Sous l'hypothèse (H'1), l'application T satisfait les propriétés suivantes*
(i) $T(S) \subset S$.
(ii) $T(S)$ est relativement compact dans $C(\overline{\Omega})^K \times C^1(\overline{\Omega})^{N-K}$.
(iii) T est continue sur S.

Preuve.

(i) Soit $\varphi \in S$, on veut démontrer que $T\varphi \in S$.

On a $T\varphi \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^{1+\beta}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ solution de (3.2.3), ce qui donne

$$T\varphi \in C(\overline{\Omega})^K \times C^1(\overline{\Omega})^{N-K}, \quad \left(\varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_K, \quad \partial_x \varphi_{K+1}, \quad \ldots, \quad \partial_x \varphi_N \right)_{|\partial\Omega} = 0$$

Montrons que $\alpha\phi^\star \leqslant T\varphi \leqslant M$ sur Ω $\varphi \in S$ implique que pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$\varphi_i(x) - \alpha_i \phi_i^\star(x) \geqslant 0, \quad M_i - \varphi_i \geqslant 0 \quad \text{sur } \Omega. \tag{3.2.4}$$

ce qui entraine d'aprés le Lemme 3.2.2

$$f_i(x, \alpha\phi_i^\star(x), \varphi) - f_i(x, \varphi_i(x), \varphi) + \overline{M}_i [\alpha_i \phi_i^\star - \varphi_i](x) \leqslant 0$$

et

$$f_i(x, M_i, \varphi) - f_i(x, \varphi_i(x), \varphi) + \overline{M}_i [M_i - \varphi_i(x)] \geqslant 0$$

d'autre part sous l'hypothèse (H'1), $(\alpha\phi, M)$ constitue une paire de sous- et sur-solutions pour (3.1.1), alors $\alpha\phi$ et M vérifient les inégalités (3.2.1) et (3.2.2) et avec (3.2.3) on obtient

$$-\mu_i \Delta [\alpha\phi_i^\star - T\varphi_i](x) + \overline{M}_i [\alpha\phi^\star - T\varphi]_i(x) \leqslant f_i(x, \alpha\phi_i^\star(x), \varphi) - f_i(x, \varphi_i(x), \varphi) + \overline{M}_i [\alpha\phi_i^\star - \varphi_i](x)$$

$$-\mu_i \Delta [M_i - T\varphi_i](x) + \overline{M}_i [M_i - T\varphi_i](x) \geqslant f_i(x, M_i, \varphi) - f_i(x, \varphi_i(x), \varphi) + \overline{M}_i [M_i - \varphi_i(x)]$$

d'où

$$\begin{array}{c} -\mu_i \Delta [T\varphi_i - \alpha\phi_i^\star](x) + \overline{M}_i [T\varphi_i - \alpha\phi_i^\star](x) \leqslant 0 \quad \textit{p.p.}\text{sur } \Omega \\ [T\varphi_i - \alpha\phi_i^\star](x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x [T\varphi_i - \alpha\phi_i^\star](x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \text{si } K < i \leqslant N \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} -\mu_i \Delta [M_i - T\varphi_i](x) + \overline{M}_i [M_i - T\varphi_i](x) \geqslant 0 \quad \textit{p.p.}\text{sur } \Omega \\ [M_i - T\varphi_i](x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x [M_i - T\varphi_i](x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \text{si } K < i \leqslant N \end{array}$$

par définition on a $\overline{M}_i > 0$, alors en appliquant le principe du maximum fort (Théorème 1.3.1) on en déduit que

$$[T\varphi_i - \alpha\phi_i^\star] \leqslant 0 \quad \text{sur } \overline{\Omega}, \quad (i = 1, \ldots, N)$$

$$[M_i - T\varphi_i] \geqslant 0 \quad \text{sur } \overline{\Omega}, \quad (i = 1, \ldots, N)$$

ce qui signifie que $\alpha_i \phi_i^\star \leqslant T\varphi_i \leqslant M_i \quad \text{sur } \overline{\Omega}, \quad (i = 1, \ldots, N)$

c'-à-d.

$$\alpha\phi^\star \leqslant T\varphi \leqslant M \quad \text{sur } \Omega.$$

Pour obtenir les bornes uniformes $\|T\varphi_i\|_\Omega^1 \leqslant C_i, \quad K < i \leqslant N,$ d'après le Théorème 1.3.2 on a l'estimation :

$$\|T\varphi_i\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C_{1i} \left\| f_i(\cdot, \varphi) + \overline{M}_i \varphi_i \right\|_{L^p(\Omega)},$$

comme $\varphi \in S \subset L^\infty(\Omega)$ on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\left\| f_i(\cdot, \varphi_i(\cdot), \varphi) + \overline{M}_i \varphi_i(\cdot) \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant |\Omega| \left\| f_i(\cdot, \varphi_i(\cdot), \varphi) + \overline{M}_i \varphi_i(\cdot) \right\|_\Omega \leqslant LM_i(a_i + \overline{M}_i)$$

ce qui signifie que $\|T\varphi_i\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ est unifomément borné par rapport à φ dans S, maintenant il suffit d'appliquer le Théorème 1.1.3 (d'injection) $\|T\varphi_i\|_\Omega^{1+\beta} \leqslant C_{2i} \|T\varphi_i\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ où $0 < \beta < 1 - \frac{1}{p}$, il en résulte

$$\|T\varphi_i\|_\Omega^1 \leqslant \|T\varphi_i\|_\Omega^{1+\beta} \leqslant C_{2i} C_{1i} |\Omega| M_i(a_i + \overline{M}_i) = C_i \tag{3.2.5}$$

(ii) Montrons que $T(S)$ est relativement compact dans $\left(C(\overline{\Omega})\right)^K \times \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{N-K}$.

On a trouvé que $\|T\varphi_i\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ est unifomément borné par rapport à φ dans S, ceci signifie que $T(S)$ est borné dans $W^{2,p}(\Omega)$ alors par l'injection compact dans $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ (voir Théorème 1.1.3) on en déduit que $T(S)$ est relativement compact dans $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ et comme l'inclusion de $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ est continu dans $C(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega})$ on conclue que $T(S)$ est relativement compact dans $\left(C(\overline{\Omega})\right)^K \times \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{N-K}$.

(iii) Montrons maintenant la continuité de T sur S,

soit $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ une suite convergente dans $\left(C(\overline{\Omega})\right)^K \times \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{N-K}$ vers $\varphi \in S$, on veut montrer que $T\varphi^n \to T\varphi$ dans $\left(C(\overline{\Omega})\right)^K \times \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{N-K}$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, par des calculs simples, on obtient,

$$\begin{aligned}\left(-\mu_i\Delta + \overline{M}_i\right)\left[T\varphi_i^m - T\varphi_i^n\right](x) &= -\varphi_i^n(x)\left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij}\left[\varphi_j^m - \varphi_j^n\right](x) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x \left[\varphi_j^m - \varphi_j^n\right](\xi)d\xi\right)\\ &+ \left[\varphi_i^m - \varphi_i^n\right](x)\left(a_i + \overline{M}_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\varphi_j^m(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x \varphi_j^m(\xi)d\xi\right)\\ &=: g_i^{m,n}(x) \ \ p.p. \text{ sur } \Omega.\end{aligned}$$

alors

$$\begin{array}{lll}\left(-\mu_i\Delta + \overline{M}_i\right)\left[T\varphi_i^m - T\varphi_i^n\right](x) & = g_i^{m,n}(x) & p.p.\text{sur } \Omega\\ \left[T\varphi_i^m - T\varphi_i^n\right](x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K\\ \partial_x\left[T\varphi_i^m - T\varphi_i^n\right](x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, & \text{si } K < i \leqslant N\end{array} \tag{3.2.6}$$

en appliquant l'estimation dans le Théorème 1.3.2 sur (3.2.6) on obtient

$$\left\|T\varphi_i^m - T\varphi_i^n\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\left\|g_i^{m,n}\right\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.2.7}$$

maintenant on estime $\|g_i^{m,n}\|_{L^p(\Omega)}$ On a

$$\begin{aligned}\left|g_i^{m,n}\right| &\leqslant \varphi_i^n(x)\left|\sum_{j=1}^{N} b_{ij}\left[\varphi_j^m - \varphi_j^n\right](x) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x \left[\varphi_j^m - \varphi_j^n\right](\xi)d\xi\right|\\ &+ \left|\left[\varphi_i^m - \varphi_i^n\right](x)\right|\left|a_i + \overline{M}_i - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\varphi_j^m(x) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x \varphi_j^m(\xi)d\xi\right|\\ &\leqslant M_i\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\left(b_{ij} + Lc_{ij}\right)\left\|\varphi_j^m - \varphi_j^n\right\|_\Omega + \left(a_i + \overline{M}_i + M_i(b_{ii} + Lc_{ii})\right)\left\|\varphi_i^m - \varphi_i^n\right\|_\Omega\\ &\leqslant \max\left\{\ a_i + \overline{M}_i + M_i(b_{ii} + Lc_{ii}),\ \ M_i(b_{i1} + Lc_{i1}),\ \ \ldots,\ \ M_i(b_{iN} + Lc_{iN})\ \right\}\sum_{j=1}^{N}\left\|\varphi_j^m - \varphi_j^n\right\|_\Omega\\ &:= C_i\sum_{j=1}^{N}\left\|\varphi_j^m - \varphi_j^n\right\|_\Omega\end{aligned}$$

alors

$$\left\|g_i^{m,n}\right\|_{L^p(\Omega)}^p = \int\limits_\Omega \left|g_i^{m,n}\right|^p \leqslant L^p C_i^p\left(\sum_{j=1}^{N}\left\|\varphi_j^m - \varphi_j^n\right\|_\Omega\right)^p$$

d'où

$$\left\|g_i^{m,n}\right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant LC_i\sum_{j=1}^{N}\left\|\varphi_j^m - \varphi_j^n\right\|_\Omega$$

de (3.2.7), ceci signifie que

$$\|T\varphi_i^m - T\varphi_i^n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant LC_i \sum_{j=1}^{N} \left\|\varphi_j^m - \varphi_j^n\right\|_{\Omega}. \tag{3.2.8}$$

La suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes dans $\left(C(\overline{\Omega})\right)^K \times \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{N-K}$, alors pour tout $j = 1,\ldots,N$ la suite $(\varphi_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C(\overline{\Omega})$ ce qui implique par (3.2.8) que pour tout $i = 1,\ldots,N$ la suite $(T\varphi_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $W^{2,p}(\Omega)$ qui est un espace de Banach, alors il existe $\omega \in W^{2,p}(\Omega)$ tel que $T\varphi^n \to \omega, \quad W^{2,p}(\Omega)$. Ceci implique que, d'une part

$$T\varphi^n \to \omega, \quad C^1(\overline{\Omega}), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{3.2.9}$$

(par l'injection continue de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $C^1(\overline{\Omega})$ (Théorème 1.1.3))
et d'autre part, $\Delta T\varphi_i^n \to \Delta\omega_i, \quad L^p(\Omega)$
d'où par le Théorème 1.1.2 il existe une sous-suite $(T\varphi_i^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(T\varphi_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\Delta T\varphi_i^{n_k} \to \Delta\omega_i, \quad p.p.\text{sur } \Omega.$$

et par (3.2.9), pour tout $x \in \Omega$,

$$T\varphi_i^{n_k}(x) \to \omega_i(x), \quad \partial_x T\varphi_i^{n_k}(x) \to \partial_x\omega_i(x)$$

Alors par passage à la limite lorsque $k \to \infty$ dans le système

$$\left\{\begin{array}{lll} -\mu_i\Delta T\varphi_i^{n_k}(x) + \overline{M}_i T\varphi_i^{n_k}(x) = & f_i(x,\varphi_i^{n_k}(x),\varphi^{n_k}) + \overline{M}_i\varphi_i^{n_k}(x) & p.p.\text{sur } \Omega \\ T\varphi_i^{n_k}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \frac{\partial}{\partial x}T\varphi_i^{n_k}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{array}\right.$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{lll} -\mu_i\Delta\omega_i(x) + \overline{M}_i\omega_i(x) = & f_i(x,\varphi_i(x),\varphi) + \overline{M}_i\varphi_i(x) & p.p.\text{sur } \Omega \\ \omega_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x\omega_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{array}\right.$$

donc $\omega = T\varphi$, de (3.2.9) on en déduit que $T\varphi_i^n \to T\varphi_i, \quad C^1(\overline{\Omega}), \quad i = 1,\ldots,N.$ d'où

$$\left\{\begin{array}{lll} T\varphi_i^n \to T\varphi_i, & C(\overline{\Omega}), & \text{si } i = 1,\ldots,K, \\ T\varphi_i^n \to T\varphi_i, & C^1(\overline{\Omega}), & \text{si } i = K+1,\ldots,N, \end{array}\right. \tag{3.2.10}$$

(3.2.10) signifie que $T\varphi^n \to T\varphi$ dans $\left(C(\overline{\Omega})\right)^K \times \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{N-K}$.

$\square$

On est maintenant en mesure de démontrer le Théorème 3.2.1

Preuve. [**Preuve du Théorème 3.2.1**] Par définition, S est un sous ensemble fermé, borné et convexe de l'espace de Banach $C(\overline{\Omega})^K \times C^1(\overline{\Omega})^{N-K}$. D'après le Lemme 3.2.3 l'application T est continue et définie de S dans S lui même, $T(S)$ est relativement compact dans $C(\overline{\Omega})^K \times C^1(\overline{\Omega})^{N-K}$, alors le théorème de point fixe de Schauder (Théorème 1.1.4) assure que T possède au moins un point fixe Φ dans S donc le système (3.2.3) admet au moins une solution forte Φ dans $W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$.

On a

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta\Phi_i(x) + \overline{M}_i\Phi_i(x) = & f_i(x, \Phi_i(x), \Phi) + \overline{M}_i\Phi_i(x) & p.p.\text{sur } \Omega \\ \Phi_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x\Phi_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{cases} \tag{3.2.11}$$

pour améliorer la régularité de la solution Φ, il suffit de remarquer que $\Phi \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ entraine $f_i(\cdot, \Phi_i(\cdot), \Phi) + \overline{M}_i\Phi_i(\cdot) \in C^{1+\beta}\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^{\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ et en appliquant le Théorème 1.3.3 sur (3.2.11) on en déduit que la solution $\Phi \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$. □

On a démontré l'existence d'au moins une solution stationnaire entre les sous- et sur-solutions $\alpha\phi^\star$ et M. Maintenant on donne une localisation plus précise des solutions stationnaires strictement positives sur Ω.

Construisons les suites $\left(\underline{\varphi}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{\varphi}^n)$ dans $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par le processus itératif suivant pour tout $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta\underline{\varphi}_i^{n+1}(x) + \overline{M}_i\underline{\varphi}_i^{n+1}(x) = & f_i(x, \underline{\varphi}_i^n(x), \overline{\varphi}^n) + \overline{M}_i\underline{\varphi}_i^n(x) & \text{sur } \Omega \\ -\mu_i \Delta\overline{\varphi}_i^{n+1}(x) + \overline{M}_i\overline{\varphi}_i^{n+1}(x) = & f_i(x, \overline{\varphi}_i^n(x), \underline{\varphi}^n) + \overline{M}_i\overline{\varphi}_i^n(x) & \text{sur } \Omega \\ \overline{\varphi}_i^{n+1}(x) = \underline{\varphi}_i^{n+1}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x\overline{\varphi}_i^{n+1}(x) = \partial_x\underline{\varphi}_i^{n+1}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N, \end{cases} \tag{3.2.12}$$

et en démarrant par les itérations initiales $\underline{\varphi}^0 = \underline{\varphi} = \alpha\phi^\star$ et $\overline{\varphi}^0 = \overline{\varphi} = M$. Vérifions que les suites $\left(\underline{\varphi}^n\right)$ et $(\overline{\varphi}^n)$ ainsi construites sont bien définies. On a $f_i(\cdot, \underline{\varphi}_i^0(\cdot), \overline{\varphi}^0) + \overline{M}_i\underline{\varphi}_i^0(\cdot)$ et $f_i(\cdot, \overline{\varphi}_i^0(\cdot), \underline{\varphi}^0) + \overline{M}_i\overline{\varphi}_i^0(\cdot) C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ (car $\underline{\varphi}^0$, $\overline{\varphi}^0 \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$) ce qui assure d'après le Théorème 1.3.3 qu'il existe $\underline{\varphi}^1$ et $\overline{\varphi}^1$ uniques dans $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. supposons par récurrence que $\left(\underline{\varphi}^{n-1}\right)$ et $(\overline{\varphi}^{n-1})$ sont définie (par (3.2.12)) d'une manière unique dans $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ alors $f_i(\cdot, \underline{\varphi}_i^{n-1}(\cdot), \overline{\varphi}^{n-1}) + \overline{M}_i\underline{\varphi}_i^{n-1}(\cdot)$ et $f_i(x, \overline{\varphi}_i^{n-1}(\cdot), \underline{\varphi}^{n-1}) + \overline{M}_i\overline{\varphi}_i^{n-1}(x\cdot) \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, ce qui implique d'après le Théorème 1.3.3 qu'il existe $\left(\underline{\varphi}^{n-1}\right)$ et $(\overline{\varphi}^{n-1})$ uniques dans $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Par conséquent, les suites $\left(\underline{\varphi}^{n}\right)$ et $(\overline{\varphi}^{n})$ sont bien définies dans $\overline{\varphi}^{n} \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Lemme 3.2.4. *Sous l'hypothèse (H'1) les suites $\left(\underline{\varphi}^{n}\right)$ et $(\overline{\varphi}^{n})$ possèdent la propriété de monotinie suivante*

$$\alpha\phi^\star = \underline{\varphi}^0 \leqslant \underline{\varphi}^1 \leqslant \cdots \leqslant \underline{\varphi}^n \leqslant \underline{\varphi}^{n+1} \leqslant \overline{\varphi}^{n+1} \leqslant \overline{\varphi}^{n} \leqslant \cdots \leqslant \overline{\varphi}^{1} \leqslant \overline{\varphi}^{0} = M \quad sur\ \overline{\Omega} \tag{3.2.13}$$

Preuve. Soit $w = \underline{\varphi}^0 - \underline{\varphi}^1$. On a $-\mu_i \Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) = -\mu_i \Delta\left(\underline{\varphi}_i^0 - \underline{\varphi}_i^1\right)(x) + \overline{M}_i\left(\underline{\varphi}_i^0 - \underline{\varphi}_i^1\right)(x)$ D'après le Lemme 3.2.1, sous l'hypothèse (H'1), $(\alpha\phi^\star, M) = (\underline{\varphi}^0, \overline{\varphi}^0)$ est paire de sous- et sur-solutions, alors (3.1.3), (3.1.2) et (3.1.4) sont vérifiés pour $(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}) = (\underline{\varphi}^0, \overline{\varphi}^0))$ et avec (3.2.12) on obtient

$$\begin{array}{ll} -\mu_i \Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) \leqslant 0 & \text{sur } \Omega \\ w_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x w_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ si } K < i \leqslant N \end{array} \tag{3.2.14}$$

en appliquant le principe du maximum fort (Théorème 1.3.1) on en déduit que $w_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, N)$ c'.-à-d. $\underline{\varphi}^0 \leqslant \underline{\varphi}$. Par le même argument on démontere que $\overline{\varphi}^1 \leqslant \overline{\varphi}^0$.

Soit $w^1 = \underline{\varphi}^1 - \overline{\varphi}^1$. Comme $0 \leqslant \underline{\varphi}^0 \leqslant \overline{\varphi}^0$ sur $\overline{\Omega}$, on peut facilement vérifier que $f_i(x, \underline{\varphi}_i^0(x), \overline{\varphi}^0) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^0(x), \underline{\varphi}_i^0)$; et en tenant compte de (3.2.12) pour $n = 0$ on obtient

$$-\mu_i \Delta w_i^1(x) + \overline{M}_i w_i^1(x) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^0(x), \underline{\varphi}^{i0}) - f_i(x, \overline{\varphi}_i^0(x), \underline{\varphi}^0) + \overline{M}_i\left(\underline{\varphi}_i^0 - \overline{\varphi}_i^0\right)(x) \quad \text{sur } \Omega \tag{3.2.15}$$

et

$$\begin{array}{lll} w_i^1(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x w_i^1(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N. \end{array} \tag{3.2.16}$$

la croissance de $f_i(x, y_i, \varphi) + \overline{M}_i y_i$ en y_i (Lemme 3.2.2) donne $f_i(x, \underline{\varphi}_i^0(x), \underline{\varphi}^{i0}) - f_i(x, \overline{\varphi}_i^0(x), \underline{\varphi}^0) + \overline{M}_i\left(\underline{\varphi}_i^0 - \overline{\varphi}_i^0\right)(x) \leqslant 0$.

Donc, (3.2.14) reste vérifié en replaçant w par w^1

en appliquant de nouveau le principe fort du maximum on obtient $w_i^1 \leqslant 0$ pour tout $(i = 1, \ldots, N)$ c'.-à-d. $\underline{\varphi}^1 \leqslant \overline{\varphi}^1$.

Ainsi, on a démontré que $\underline{\varphi}^0 \leqslant \underline{\varphi}^1 \leqslant \overline{\varphi}^1 \leqslant \overline{\varphi}^0$ sur $\overline{\Omega}$

On suppose, par induction, que $\underline{\varphi}^{n-1} \leqslant \underline{\varphi}^n \leqslant \overline{\varphi}^n \leqslant \overline{\varphi}^{n-1}$ sur $\overline{\Omega}$; on démontre que $\underline{\varphi}^{n-1} \leqslant \underline{\varphi}^n \leqslant \overline{\varphi}^n \leqslant \overline{\varphi}^{n-1}$ sur $\overline{\Omega}$.

La fonction $w^n = \underline{\varphi}^n - \underline{\varphi}^{n+1}$ vérifie

$$-\mu_i \Delta w_i^n(x) + \overline{M}_i w_i^n(x) = f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n-1}) - f_i(x, \underline{\varphi}_i^n(x), \overline{\varphi}^n) + \overline{M}_i\left(\underline{\varphi}_i^{n-1} - \underline{\varphi}_i^n\right)(x) \quad \text{sur } \Omega$$

On a $0 \leqslant \underline{\varphi}^{n-1} \leqslant \underline{\varphi}^{n} \leqslant \overline{\varphi}^{n} \leqslant \overline{\varphi}^{n-1}$, alors $f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n-1}) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n})$ ce qui implique que

$-\mu_i \Delta w_i^n(x) + \overline{M}_i w_i^n(x) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n}) - f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n}(x), \overline{\varphi}^{n}) + \overline{M}_i \left(\underline{\varphi}_i^{n-1} - \underline{\varphi}_i^{n}\right)(x)$

De nouveau, on utilise la croissance de $f_i(x, y_i, \varphi) + \overline{M}_i y_i$ en y_i pour obtenir,

$$\begin{array}{lll} -\mu_i \Delta w_i^n(x) + \overline{M}_i w_i^n(x) \leqslant 0 & \text{sur } \Omega & \\ w_i^n(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x w_i^n(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N. \end{array}$$

d'où $w_i^n \leqslant 0$ pour tout $(i = 1, \ldots, N)$ c'.-à-d. $\underline{\varphi}^{n} \leqslant \underline{\varphi}^{n+1}$. De même on démontre que $\overline{\varphi}^{n} \leqslant \overline{\varphi}^{n+1}$.

De même que w^1 on obtient que $\acute{w}^n = \underline{\varphi}^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1} \leqslant 0$. Ainsi la propriété de monotonie (3.2.13) est démontré par récurrence. □

Le résultat du Lemme 3.2.4 implique la convergence ponctuelle des suites $\left(\underline{\varphi}^{n}\right)$ et $\left(\overline{\varphi}^{n}\right)$. Posons, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\varphi}^{n}(x) = \overline{\overline{\varphi}}(x), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \underline{\varphi}^{n}(x) = \underline{\underline{\varphi}}(x)$

Théorème 3.2.2. *$\underline{\underline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\varphi}} \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, satisfont*

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\mu_i \Delta \underline{\underline{\varphi}}_i(x) = f_i(x, \underline{\underline{\varphi}}_i(x), \overline{\overline{\varphi}}) & \text{sur } \Omega & \\ -\mu_i \Delta \overline{\overline{\varphi}}_i(x) = f_i(x, \overline{\overline{\varphi}}_i(x), \underline{\underline{\varphi}}) & \text{sur } \Omega & \\ \overline{\overline{\varphi}}_i(x) = \underline{\underline{\varphi}}_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x \overline{\overline{\varphi}}_i(x) = \partial_x \underline{\underline{\varphi}}_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{array} \right. \tag{3.2.17}$$

et

$$\underline{\varphi} \leqslant \underline{\underline{\varphi}} \leqslant \overline{\overline{\varphi}} \leqslant \overline{\varphi}^{0}. \tag{3.2.18}$$

De plus, si $\Phi \in S$ est une solution de (3.1.1) *alors $\underline{\underline{\varphi}} \leqslant \Phi \leqslant \overline{\overline{\varphi}}$*

Preuve. On a, $\underline{\varphi}_j^n(x) \to \underline{\underline{\varphi}}(x)_j$ et $\overline{\varphi}_j^n(x) \to \overline{\overline{\varphi}}_j(x)$ quand $n \to \infty$ (cette convergence est simple) ; d'après le lemme précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\left|\underline{\varphi}_j^n\right| = \underline{\varphi}_j^n \leqslant M_j$ et $\left|\overline{\varphi}_j^n\right| = \overline{\varphi}_j^n \leqslant M_j$ et $M_j \in L^1(\Omega)$, alors en appliquant le théorème de convergence dominée on obtient : Pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\int_0^x \underline{\varphi}_j^n(\xi)\, d\xi \to \int_0^x \underline{\underline{\varphi}}_j(\xi)\, d\xi$ et $\int_0^x \overline{\varphi}_j^n(\xi)\, d\xi \to \int_0^x \overline{\overline{\varphi}}_j(\xi)\, d\xi$, alors en tenant compte de l'expression explicite de f_i on en déduit que les suites $\left(f_i(x, \underline{\varphi}_i^n(x), \overline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \underline{\varphi}_i^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$\left(f_i(x, \overline{\varphi}_i^n(x), \underline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \overline{\varphi}_i^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont d'une part, simplement convergentes vers

$f_i(x, \underline{\underline{\varphi}}_i(x), \overline{\overline{\varphi}}) + \overline{M}_i \underline{\underline{\varphi}}_i(x)$ et $f_i(x, \overline{\overline{\varphi}}_i(x), \underline{\underline{\varphi}}) + \overline{M}_i \overline{\overline{\varphi}}_i(x)$ respectivement, et sont d'autre part uniformément bornées par une constante C_i indépendante de x et n , ceci implique que $\left\{ f_i(x, \underline{\varphi}_i^n(x), \overline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \underline{\varphi}_i^n(x) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left\{ f_i(x, \overline{\varphi}_i^n(x), \underline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \overline{\varphi}_i^n(x) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$) sont uniformément bornées dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geqslant 1$. En appliquant sur (3.2.12), les estimations L^p dans le Théorème 1.3.2 on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\varphi}_j^n \right\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leqslant \left\| f_i(x, \underline{\varphi}_i^n(x), \overline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \underline{\varphi}_i^n(x) \right\|_{L^p(\Omega)} \\ \left\| \overline{\varphi}_j^n \right\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leqslant \left\| f_i(x, \overline{\varphi}_i^n(x), \underline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \overline{\varphi}_i^n(x) \right\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

ceci entraîne que $\left(\underline{\varphi}_j^n\right)$ est unifomément bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$. On choisit $p > 1$ tel que $\alpha \equiv 1 - 1/p > 0$, comme l'injection de $W^{2,p}(\Omega)\, dans C^{1+\alpha}(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ est continue (Théorème 1.1.3, ii)) ; $\left(\underline{\varphi}_j^n\right)$ est unifomément bornée dans $C^{1+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, et de la même manière on démontre que $\left(\overline{\varphi}_j^n\right)$ est unifomément bornée dans $C^{1+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ ce qui implique que $\left\{ f_i(x, \underline{\varphi}_i^n(x), \overline{\varphi}^n) + \overline{M}_i \underline{\varphi}_i^n(x) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uneformément bornée dans $C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ d'où par les estimations dans le Théorème 1.3.3, $\left(\underline{\varphi}_j^n\right)$ est unifomément bornée dans $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ alors, par le théorème d'Ascoli-Arzelá (Théorème 1.1.1), $\left(\underline{\varphi}_j^n\right)$ admet une sous suite convergent dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ vers une fonction v ; de la convergence ponctuelle vers $\underline{\underline{\varphi}}$ on en déduit que $v = \underline{\underline{\varphi}}$ et que $\underline{\underline{\varphi}}$ est l'unique point d'adhérence pour $\left(\underline{\varphi}^n\right)$ dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ ce qui implique que la suite $\left(\underline{\varphi}^n\right)$ converge dans $C^2(\Omega)$ vers $\underline{\underline{\varphi}}$. De même on démontre que $(\overline{\varphi}^n)$ converge dans $C^2(\Omega)$ vers $\overline{\overline{\varphi}}$. Il suffit donc de passer à la limite quand $n \to \infty$, dans (3.2.12) , pour obtenir (3.2.17). De 3.2.13 on a $\underline{\varphi}^0 \leqslant \underline{\varphi}^n \leqslant \overline{\varphi}^n \leqslant \overline{\varphi}^0$ pour tout $n \geqslant 0$, alors on obtient (3.2.18) par passage à limite quand $n \to \infty$.

Maintenant on démotre que toute solution Φ de (3.1.1) dans S, vérifie $\underline{\underline{\varphi}} \leqslant \Phi \leqslant \overline{\overline{\varphi}}$. Pour cela, on démontre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $\underline{\varphi}^n \leqslant \Phi$ (resp. $\Phi \leqslant \overline{\varphi}^n$). Comme $\Phi \in S$, il est claire que $\underline{\varphi}^0 \leqslant \Phi$ (resp. $\Phi \leqslant \overline{\varphi}^0$) supposons que $\underline{\varphi}^{n-1} \leqslant \Phi$ et $\Phi \leqslant \overline{\varphi}^{n-1}$.

Posons $w^n = \underline{\varphi}^n - \Phi$, par (3.1.1) et (3.2.12) on a

$-\mu_i \Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) = f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n-1}) - f_i(x, \Phi_i(x), \Phi) + \overline{M}_i \left(\underline{\varphi}_i^{n-1} - \Phi_i\right)(x)$

et comme $f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n-1}) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \Phi)$ (car $\Phi \leqslant \overline{\varphi}^{n-1}$),

$-\mu_i \Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) \leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \Phi) - f_i(x, \Phi_i(x), \Phi) + \overline{M}_i \left(\underline{\varphi}_i^{n-1} - \Phi_i\right)(x)$

d'où $-\mu_i \Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) \leqslant 0$ (car $f_i(x, y_i, \varphi) + \overline{M}_i y_i$ croît en y_i, et $\underline{\varphi}_i^{n-1} \leqslant \Phi_i$)

de plus, selon la valeur de l'indice i, on a soit $w_i^n(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ soit $\partial_x w_i^n(x) = 0$ sur $\partial\Omega$;

c'.-à-d.

$$\begin{array}{lll} -\mu_i \Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) \leqslant 0 & \text{sur } \Omega, & \text{pour tout } i = 1, \ldots, N \\ w_i^n(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x w_i^n(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N, \end{array}$$

donc en appliquant le principe du maximum (Théorème 1.3.1) $w_i^n \leqslant 0$ pour tout $i = 1, \ldots, N$; c'.-à-d. $\underline{\varphi}^n \leqslant \Phi$.

De même, on démontre que $\Phi \leqslant \overline{\varphi}^n$,

donc on a $\underline{\varphi}^n \leqslant \Phi \leqslant \overline{\varphi}^n$; il suffit de passer à la limite lorsque $n \to \infty$ pour obtenir l'inégalité désirée. □

Considérons le problème

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta \psi_i = \psi_i \left(a_i - b_{ii} \psi_i\right) & \text{sur } \Omega \\ \psi_i = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_x \psi_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.19}$$

Ce problème représente le cas scalaire ($N = 1$) du système (3.1.1), avec $c = 0$; c'.-à-d. (3.2.19) est un cas particulier de (3.1.1), alors si $\lambda_i^\star(0) < a_i$, d'après le Lemme 3.2.1 existe $\overline{\alpha}_i > 0$ tel que pour tout $\alpha_i \leqslant \overline{\alpha}_i$, $(\alpha_i \phi_i^\star, M_i)$ est une paire de sous- et sur-solutions pour (3.2.19). On peut facilement remarquer que pour toute constante $C_i \geqslant M_i = \frac{a_i}{b_{ii}}$, on a $(\alpha_i \phi_i^\star, C_i)$ est une paire de sous et sur solutions pour (3.2.19) ; dans ce cas on remplace $\overline{M}_i$ par $\overline{C}_i = -a_i + 2b_{ii} C_i$, (de même que $\overline{M}_i$, on choisit $\overline{C}_i$ de sort que $y_i \left(a_i - b_{ii} y_i\right) + \overline{C}_i y_i$ soit croissant en $y_i \in [0, C_i]$) ; on construit les suite $\left(\underline{\psi}^n\right)$ et $\left(\overline{\psi}^n\right)$ par le processus (3.2.12) (M_i et $\overline{M}_i$ sont toujours remplacés par C_i et $\overline{C}_i$ respectivement)

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta \underline{\psi}_i^{n+1}(x) + \overline{C}_i \underline{\psi}_i^{n+1}(x) = & \underline{\psi}_i^n(x) \left(a_i - b_{ii} \underline{\psi}_i^n(x)\right) + \overline{C}_i \underline{\psi}_i^{n+1}(x) \quad \text{sur } \Omega \\ -\mu_i \Delta \overline{\psi}_i^{n+1}(x) + \overline{C}_i \overline{\psi}_i^{n+1}(x) = & \overline{\psi}_i^n(x) \left(a_i - b_{ii} \overline{\psi}_i^n(x)\right) + \overline{C}_i \overline{\psi}_i^{n+1}(x) \quad \text{sur } \Omega \\ \overline{\psi}_i^{n+1} = \underline{\psi}_i^{n+1} = 0 & \text{ou } \partial_x \overline{\psi}_i^{n+1} = \partial_x \underline{\psi}_i^{n+1}(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.20}$$

avec $\underline{\psi}_i^0 = \alpha_i \phi_i^\star$ et $\overline{\psi}_i^0 = C_i$. Comme dans les démonstrations du Lemme 3.2.4 et du Théorème 3.2.2, on montre qu'il existe $\underline{\underline{\psi}}_i$ et $\overline{\overline{\psi}}_i \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ tels que si $\Psi_i \in \langle \alpha_i \phi_i^\star, C_i \rangle$ est une solution de (3.2.19) alors $0 < \underline{\underline{\psi}}_i \leqslant \Psi_i \leqslant \overline{\overline{\psi}}_i$ et

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta \underline{\underline{\psi}}_i(x) = & \underline{\underline{\psi}}_i(x) \left(a_i - b_{ii} \underline{\underline{\psi}}_i(x)\right) \quad \text{sur } \Omega \\ -\mu_i \Delta \overline{\overline{\psi}}_i(x) = & \overline{\overline{\psi}}_i(x) \left(a_i - b_{ii} \overline{\overline{\psi}}_i(x)\right) \quad \text{sur } \Omega \\ \overline{\overline{\psi}}_i = \underline{\underline{\psi}}_i = 0 & \text{ou } \partial_x \overline{\overline{\psi}}_i = \partial_x \underline{\underline{\psi}}_i(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.21}$$

c'.-à-d. $\underline{\underline{\psi}}_i$ et $\overline{\overline{\psi}}_i$ sont des solutions de (3.2.19), en multipliant la première équation dans (3.2.21) par $\overline{\overline{\psi}}_i$ et la deuxième équation par $-\underline{\underline{\psi}}_i$ et en sommant on obtient
$-\mu_i \left[\overline{\overline{\psi}}_i \Delta \underline{\underline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i \Delta \overline{\overline{\psi}}_i\right] = b_{ii} \overline{\overline{\psi}}_i \underline{\underline{\psi}}_i \left(\overline{\overline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i\right)$ puis en intégrant sur $\Omega =]0, L[$, et par l'intégration par partie on obtient
$\int_0^L \left(\overline{\overline{\psi}}_i \Delta \underline{\underline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i \Delta \overline{\overline{\psi}}_i\right) dx = \left[\overline{\overline{\psi}}_i \partial_x \underline{\underline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i \partial_x \overline{\overline{\psi}}_i\right]_0^L - \int_0^L \left(\partial_x \overline{\overline{\psi}}_i \partial_x \underline{\underline{\psi}}_i - \partial_x \underline{\underline{\psi}}_i \partial_x \overline{\overline{\psi}}_i\right) dx = 0,$
ce qui implique que $\int_0^L b_{ii} \overline{\overline{\psi}}_i \underline{\underline{\psi}}_i \left(\overline{\overline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i\right) dx = 0$ et comme $\left(\overline{\overline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i\right) \geqslant 0$, $\overline{\overline{\psi}}_i > 0$ et $\underline{\underline{\psi}}_i > 0$, on en déduit que $\overline{\overline{\psi}}_i - \underline{\underline{\psi}}_i = 0$ sur Ω ; ce qui entraine l'unicité de la solution Ψ_i du problème (3.2.19) dans le secteur $\langle \alpha_i \phi_i^\star, C_i \rangle$, et comme α_i et C_i sont arbitrairement petit et grand respectivement, on en déduit que Ψ_i est l'unique solution satisfaisante $0 < \Psi_i$ sur Ω.
Alors on a le corollaire suivant

Corollaire 3.2.1. *Supposons que $\lambda_i^\star(0) < a_i$ Le problème* (3.2.19) *possède une unique solution $\Psi_i = \overline{\overline{\psi}}_i = \underline{\underline{\psi}}_i$ strictement positive sur Ω. De plus, $\Psi_i \leqslant \frac{a_i}{b_{ii}}$.*

3.3 Comportement asymptotique de la solution du système (2.1.1)

Soit $(U, V) \in C(D) \cap C^{2,1}(D)$ satisfaisant le $2N-$système intégrodifférentiel

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t U_i(x,t) - \mu_i \Delta U_i(x,t) = & f_i(x, U_i(x,t), V) & \text{dans } D \\ \partial_t V_i(x,t) - \mu_i \Delta V_i(x,t) = & f_i(x, V_i(x,t), U) & \text{dans } D \\ V_i(x,t) = U_i(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x V_i(x,t) = \partial_x U_i(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) & \text{si } K < i \leqslant N \\ U(x,0) = \alpha\phi^\star, \quad \text{et} & V(x,0) = \overline{\varphi}^1 & \text{sur } \Omega \end{array}\right. \tag{3.3.1}$$

On rappel que $\overline{\varphi}^1$ est l'élément de la suite $(\overline{\varphi}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par le processus itératif (3.2.12). Ce problème est de la même forme que celui étudié au chapitre précédent, système (2.1.1) (la seule différence est le nombre des équations $2N$ au lieu de N), alors tous les résultats obtenus au Chapitre 2 restent valables pour le problème (3.3.1). (u_0, v_0) ainsi choisi vérifie les hypothèses (H1) et (H2) du chapitre précédent, $((0,0), (M,M)$ est une paire de sous- est sur-solutions pour (3.3.1) ; alors d'après le Théorème 2.2.1, (U,V) est bien défini (c'.-à-d. une unique (U,V) existe) et $(0,0) \leqslant (U,V) \leqslant (M,M)$.

Théorème 3.3.1. **i)** *Si u_0 vérifie la relation*

$$\alpha\phi^\star \leqslant u_0 \leqslant \overline{\varphi}^1 \tag{3.3.2}$$

alors la solution u du système intégrodifférentiel (2.1.1) satisfait

$$U(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant V(x,t) \quad \textit{dans } \Omega \times (0,+\infty)$$

où (U,V) est donné par (3.3.1).

De plus,

$$\underline{\underline{\varphi}}(x) \leqslant \liminf_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \overline{\overline{\varphi}}(x) \tag{3.3.3}$$

ii) *Si de plus $\underline{\underline{\varphi}} = \overline{\overline{\varphi}} = \Phi$, alors $u(x,t) \to \Phi(x)$ lorsque $t \to \infty$.*

Nous rappelons que $\underline{\underline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$ représentent les limites des suites de fonctions $\left(\underline{\varphi}_j^n\right)$ et $\left(\overline{\varphi}_j^n\right)$ respectivement, qui sont construits par le processus itératif (3.2.12). Nous attirons l'attention sur le fait que (3.3.3) donne en fait une information sur "le domaine d'attraction" de la solution. C'.-à-d. le secteur $\left\langle \underline{\underline{\varphi}}, \overline{\overline{\varphi}} \right\rangle$ est un attracteur de la solution $u(x,t)$ du problème (2.1.1) lorsque $u_0 \in \langle \alpha\phi^\star, \overline{\varphi}^1 \rangle$. Soit $0 \neq u_0 \geqslant 0$, le même résultat d'attraction donné par (3.3.3) reste vrai si à un certain $t^\star > 0$, la solution $u(x,t)$ entre dans le secteur $\langle \alpha\phi^\star, \overline{\varphi}^1 \rangle$ (il suffit de prendre $u(x,t^\star)$ comme donnée initiale). Cette remarque nous conduit à obtenir la conclusion suivant.

Corollaire 3.3.1. *Soit $0 \neq u_0 \geqslant 0$. S'il existe $t^\star > 0$ tel que $u(x,t^\star) \in \langle \alpha\phi^\star, \overline{\varphi}^1 \rangle$, alors $u(x,t)$ satisfait (3.3.3).*

La preuve du Théorème 3.3.1 suit des lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. *Soient (U,V) l'unique solution de (3.3.1) alors $U \leqslant V$, de plus $\partial_t U \geqslant 0$ et $\partial_t V \leqslant 0$ dans D*

Preuve. On définie les suites $(\underline{u}^n)$ et $(\overline{u}^n)$ comme suit

$$\begin{array}{llll}
\underline{u}^0 = \alpha\phi^\star, \text{ et } \overline{u}^0 = M & & \text{dans } D_T \\
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right] \underline{u}_i^{n+1}(x,t) = & f_i(x, \underline{u}_i^n(x,t), \overline{u}^n) + \overline{M}_i \underline{u}_i^n(x,t) & \text{dans } D_T \\
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right] \overline{u}_i^{n+1}(x,t) = & f_i(x, \overline{u}_i^n(x,t), \underline{u}^n) + \overline{M}_i \overline{u}_i^n(x,t) & \text{dans } D_T \\
\overline{u}_i^{n+1}(x,t) = \underline{u}_i^{n+1}(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\
\partial_x \overline{u}_i^{n+1} = \partial_x \underline{u}_i^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) & \text{si } K < i \leqslant N \\
\underline{u}^{n+1}(x,0) = \alpha\phi^\star, \quad \text{et} & \overline{u}^{n+1}(x,0) = \overline{\varphi}^1(x) & \text{sur } \partial\Omega
\end{array} \tag{3.3.4}$$

Alors comme dans la démonstration du Lemme 3.2.4, on démontre en utilisant le principe du maximum fort Théorème 1.2.1 et les propriétés de f, on obtient, pour tout $(x,t) \in D_T$ et pour tout n

$$\alpha\phi^\star(x) = \underline{u}^0(x) \leqslant \underline{u}^1(x,t) \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}^n(x,t) \leqslant \overline{u}^n(x,t) \leqslant \cdots \leqslant \overline{u}^1(x,t) \leqslant \overline{u}^0(x) = M \quad (3.3.5)$$

d'où la convergence simple de ces deux suites. De plus, cette convergence est uniforme dans $C^{2,1}(D_T)$ [18, p.397]. Posons $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{u}^n = \overline{\overline{u}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{u}^n = \underline{\underline{u}}$ donc $\underline{\underline{u}} \leqslant \overline{\overline{u}}$ et $\left(\underline{\underline{u}}, \overline{\overline{u}}\right)$ vérifie (3.3.1) d'où par l'unicité de la solution $\underline{\underline{u}} = U$ et $\overline{\overline{u}} = V$ ce qui implique que

$$\alpha\phi^\star \leqslant U \leqslant V \leqslant M. \quad (3.3.6)$$

Il est important de remarquer que $\overline{u}^1(x,t) = \overline{\varphi}^1(x)$; en effet de (3.2.12) et (3.3.4), et comme $\partial_t\overline{\varphi}^1(x) = 0$;

$$\begin{array}{lll}
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right]\left(\overline{u}_i^1(x,t) - \overline{\varphi}^1(x)\right) = 0 & \text{dans } D_T & \\
\overline{u}_i^1(x,t) - \overline{\varphi}^1(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\
\partial_x\overline{u}_i^1(x,t) - \overline{\varphi}^1(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } K < i \leqslant N \\
\overline{u}^1(x,0) - \overline{\varphi}^1(x) = 0 & \text{sur } \Omega &
\end{array}$$

en appliquant le principe du maximum (Théorème 1.2.1) on obtient $0 \geqslant \overline{u}^1(x,t) - \overline{\varphi}^1(x) \leqslant 0$ d'où,

$$\overline{u}^1(x,t) = \overline{\varphi}^1(x). \quad (3.3.7)$$

Soient $h > 0$ et ψ fonction quelconque de $(0,T)$ dans $\mathbb{R}$, posons $\delta\psi(t) := \psi(t+h) - \psi(t)$. On démontre par récurrece sur n, que $\delta\underline{u}^n \leqslant 0$ et $\delta\overline{u}^n \geqslant 0$. Ceci est vraie quand $n = 0$, car $\underline{u}^0$ et $\overline{u}^0$ ne dépendent pas de t.

Supposons que $\delta\underline{u}^n \leqslant 0$ et $\delta\overline{u}^n \geqslant 0$ et montrons que $\delta\underline{u}^{n+1} \leqslant 0$ et $\delta\overline{u}^{n+1} \geqslant 0$ dans D_T. On a

$$\begin{array}{lll}
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right]\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,t) & = \delta f_i(x, \underline{u}_i^n(x,t), \overline{u}(t)^n) & \\
& +\overline{M}_i\delta\underline{u}_i^n(x,t) & \text{dans } D_T \\
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right]\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,t) & = \delta f_i(x, \overline{u}_i^n(x,t), \underline{u}(t)^n) & \\
& +\overline{M}_i\delta\overline{u}_i^n(x,t) & \text{dans } D_T \\
\delta\overline{u}_i^{n+1} = \delta\underline{u}_i^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\
\partial_x\delta\overline{u}_i^{n+1} = \partial_x\delta\underline{u}_i^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } K < i \leqslant N.
\end{array}$$

L'idée consiste à appliquer le principe du maximum fort sur $\delta\underline{u}_i^{n+1}$et $\delta\overline{u}_i^{n+1}$ $(i = 1,\ldots,N)$; pour cela, il suffit de montrer que :

1) $\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,0) \geqslant 0$ et $\delta\overline{u}_i^{n+1}(x,0) \leqslant 0$,

2) $\delta f_i(x, \underline{u}_i^n(x,t), \overline{u}^n) + \overline{M}_i \delta \underline{u}_i^n(x,t) \geqslant 0$ et $\delta f_i(x, \overline{u}_i^n(x,t), \underline{u}^n) + \overline{M}_i \delta \overline{u}_i^n(x,t) \leqslant 0$,

pour tout $x \in \Omega$, $t > 0$ et tout $i = 1, \ldots, N$.

En effet, de (3.3.5) et (3.3.7) on obtient

$$\begin{aligned} \underline{u}_i^{n+1}(x,h) - \underline{u}_i^{n+1}(x,0) &= \underline{u}_i^{n+1}(x,h) - \underline{u}_i^0(x) \geqslant 0 \\ \overline{u}_i^{n+1}(x,h) - \overline{u}_i^{n+1}(x,0) &= \overline{u}_i^{n+1}(x,h) - \overline{u}_i^1(x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

d'où pour tout $x \in \Omega$ et tout $i = 1, \ldots, N$,

$$\delta \underline{u}_i^{n+1}(x,0) \geqslant 0 \quad et \quad \delta \overline{u}_i^{n+1}(x,0) \leqslant 0. \tag{3.3.8}$$

En utilisant l'expression explicite de f on obtient

$$\begin{aligned} \delta f_i(x, \underline{u}_i^n(x,t), \overline{u}^n) + \overline{M}_i \delta \underline{u}_i^n(x,t) = &- \underline{u}_i^n(x,t) \left(\sum_{j=1, j\neq i}^N b_{ij} \delta \overline{u}_j^n(x,t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \int_0^x \delta \overline{u}_j^n(\xi,t) d\xi \right) + \\ &+ \delta \underline{u}_i^n(x,t) \Bigg(a_i - \sum_{j=1, j\neq i}^N b_{ij} \overline{u}_j^n(x,t+h) \\ &- b_{ii} \left(\underline{u}_i^n(x,t) + \underline{u}_i^n(x,t+h) \right) - \sum_{j=1}^N c_{ij} \int_0^x \overline{u}_j^n(\xi,t+h) d\xi + \overline{M}_i \Bigg) \end{aligned}$$

Comme $\delta \overline{u}^n \leqslant 0$, $\delta \underline{u}^n \geqslant 0$ (par l'hypothèse de récurrence) et $0 \leqslant \underline{u}^n, \overline{u}^n \leqslant M$,

$$-\underline{u}_i^n(x,t) \left(\sum_{j=1, j\neq i}^N b_{ij} \delta \overline{u}_j^n(x,t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \int_0^x \delta \overline{u}_j^n(\xi,t) d\xi \right) \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned} &\delta \underline{u}_i^n(x,t) \left(a_i - b_{ii} \left(\underline{u}_i^n(x,t) + \underline{u}_i^n(x,t+h) \right) - \sum_{j=1, j\neq i}^N b_{ij} \overline{u}_j^n(x,t+h) - \sum_{j=1}^N c_{ij} \int_0^x \overline{u}_j^n(\xi,t+h) d\xi + \overline{M}_i \right) \\ &\geqslant \delta \underline{u}_i^n(x,t) \left(a_i - 2b_{ii} M_i - \sum_{j=1, j\neq i}^N b_{ij} M_j - L \sum_{j=1}^N c_{ij} M_j + \overline{M}_i \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\delta f_i(x, t, \underline{u}_i^n(x,t), \overline{u}^n) + \overline{M}_i \delta \underline{u}_i^n(x,t) \geqslant 0 \tag{3.3.9}$$

de même, on démontre que

$$\delta f_i(x, t, \overline{u}_i^n(x,t), \underline{u}^n) + \overline{M}_i \delta \overline{u}_i^n(x,t) \leqslant 0, \tag{3.3.10}$$

donc de (3.3.8)-(3.3.10),

$$\begin{array}{lll}
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right]\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,t) \geqslant 0 & \text{dans } D_T & i = 1,\ldots,N \\
\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } 1\leqslant i\leqslant K \\
\partial_x\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } K < i\leqslant N \\
\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,0) \geqslant 0 & \text{sur } \Omega. &
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll}
\left[\partial_t - \mu_i\Delta + \overline{M}\right]\delta\overline{u}_i^{n+1}(x,t) \leqslant 0 & \text{dans } D_T & i = 1,\ldots,N \\
\delta\overline{u}_i^{n+1}(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } 1\leqslant i\leqslant K \\
\partial_x\delta\overline{u}_i^{n+1}(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) & \text{si } K < i\leqslant N \\
\delta\overline{u}_i^{n+1}(x,0) \leqslant 0 & \text{sur } \Omega. &
\end{array}$$

Ce qui implique en appliquant le principe du maximum fort que pour tout $(x,t) \in D_T$, $\delta\underline{u}_i^{n+1}(x,t) \geqslant 0$ et $\delta\overline{u}_i^{n+1}(x,t) \leqslant 0$ (où $i = 1,\ldots,N$). Ainsi on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta\underline{u}^n(x,t) \geqslant 0$ et $\delta\overline{u}^n(x,t) \leqslant 0$, ce qui signifie que $\partial_t\underline{u}^n(x,t) \geqslant 0$ et $\partial_t\overline{u}^n(x,t) \leqslant 0$

Comme les deux suites convergent dans $C^{2,1}(D_T)$; par passage à limite on obtient $\partial_t V = \partial_t\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\underline{u}^n\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}(\partial_t\underline{u}^n) \leqslant 0$. De même, $\partial_t U \geqslant 0$. □

Lemme 3.3.2. *La limite ponctuelle*

$$\lim_{t\to\infty}(U(x,t), V(x,t)) = \left(\hat{U}(x), \hat{V}(x)\right) \tag{3.3.11}$$

existe pour tout $x\in\Omega$ et $\left(\hat{U},\hat{V}\right)$ est une solution classique du système stationnaire correspondant à (3.3.1).

Preuve. On a $\alpha\phi^\star(x) = \underline{u}^0(x) \leqslant U(x,t) \leqslant V(x,t) \leqslant \overline{u}^0(x) = M$ et $\partial_t U \geqslant 0 \geqslant \partial_t V$ alors U est majoré par M et croissant en t ; V est minoré par $\alpha\phi^\star(x)$ et décroissant en t ce qui implique l'existence de la limite donnée par (3.3.11).

Considérons le problème elliptique linéaire ($i = 1\ldots,N$)

$$\left\{\begin{array}{lll}
-\mu_i\Delta w_i(x) + \overline{M}_i w_i(x) = & f_i(x,\hat{U}_i(x),\hat{V}) + \overline{M}_i\hat{U}_i(x) & p.p.\text{sur } \Omega \\
w_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1\leqslant i\leqslant K \\
\partial_x w_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i\leqslant N
\end{array}\right. \tag{3.3.12}$$

$\hat{U}(x)$ et $\hat{V}(x)$ sont bornées, alors $f_i(x,\hat{U}_i(x),\hat{V}) + \overline{M}_i\hat{U}_i(x) \in L^p(\Omega)$ ce qui entraîne d'après le Théorème 1.3.2, l'existence d'une unique solution $w_i \in W^{2,p}(\Omega)$. Soit $W_i = U_i - w_i$ alors

W_i satisfait les équations

$$\begin{cases} \left[\partial_t - \mu_i \Delta + \overline{M}\right] W_i(x,t) = & q_i(x,t) & p.p.\text{dans } D \\ W_i(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x W_i(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \\ W(x,0) = \underline{u}^0(x) - w_i(x) & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) & \end{cases}$$

où $q_i(x,t) = f_i(x, U_i(x,t), V) - f_i(x, \hat{U}_i(x), \hat{V}) + \overline{M}_i\left(U_i(x,t) - \hat{U}_i(x)\right)$
pour tout ω et $\sigma \in C(\overline{D})$ telles que $0 \leqslant \omega, \sigma \leqslant M$ on a $\left|f_i(x, \omega_i(x,t), \sigma) + \overline{M}_i \omega_i(x,t)\right| \leqslant M_i\left(a_i + \overline{M}_i\right)$; alors

$$\begin{aligned} |q_i(x,t)| &\leqslant \left|f_i(x, U_i(x,t), V) + \overline{M}_i U_i(x,t)\right| + \left|f_i(x, \hat{U}_i(x), \hat{V}) + \overline{M}_i \hat{U}_i(x)\right| \\ &\leqslant 2M_i\left(a_i + \overline{M}_i\right) \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

et de (3.3.11) on a $q_i(x,t) \to 0$ quand $t \to +\infty$; soit (τ_n) une suite réelle convergente vers 0 alors en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on en déduit que $q_i\left(x, \dfrac{1}{\tau_n}\right) \underset{n}{\to} 0$ dans $L^2(\Omega)$, et ce pour toute suite τ_n convergente vers 0 ; ce qui signifie (comme $\mathbb{R}$ et $L^{2(\Omega)}$ sont des espace métriques) que $q_i\left(x, \dfrac{1}{\tau}\right) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$, quand $\tau \to 0$ d'où

$$q_i(x,t) \to 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

Ceci implique d'après le Théorème 1.2.3 que $W_i(x,t) = U_i(x,t) - w_i(x) \to 0$ $(i = 1\ldots, N)$ dans $L^2(\Omega)$, quand $t \to +\infty$ donc

$$U \to w \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

on a $U(x,t)$ est uniformément borné par rapport à t et en tenant compte de (3.3.11), on procède de la même manière que pour $q(x,t)$, pour obtenir :

$$U \to \hat{U} \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

d'où $\hat{U} = w$ ce qui entraîne que $\hat{U} \in W^{2,p}(\Omega)$. De même, (en posant $q_i(x,t) = f_i(x, V_i(x,t), U) - f_i(x, \hat{V}_i(x), \hat{U}) + \overline{M}_i\left(V_i(x,t) - \hat{V}_i(x)\right)$), on démontre que $\hat{V} \in W^{2,p}(\Omega)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} -\mu_i \Delta \hat{V}_i(x) + \overline{M}_i \hat{V}_i(x) = & f_i(x, \hat{V}_i(x), \hat{U}) + \overline{M}_i \hat{V}_i(x) & p.p.\text{sur } \Omega \\ \hat{V}_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \partial_x \hat{V}_i(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N \end{cases} \tag{3.3.13}$$

et comme $\hat{U} = w$, il satisfait (3.3.12) d'où $\left(\hat{U}, \hat{V}\right)$ est une solution stationnaire forte de (3.3.1) dans$W^{2,p}(\Omega)$. Si on choisit $p > 1$, le résultat d'injection dans le Théorème 1.1.3 assure que $\hat{U}, \hat{V} \in C^{1+\alpha}(\Omega)$ pour $\alpha \in \left(0, 1 - \frac{1}{p}\right)$. Ceci implique que $f_i(x, \hat{U}_i(x), \hat{V}) + \overline{M}_i \hat{U}_i(x)$ et $f_i(x, \hat{V}_i(x), \hat{U}) + \overline{M}_i \hat{V}_i(x) \in C^{\alpha}(\Omega)$, du Théorème 1.3.2 on obtient $\hat{U}, \hat{V} \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ d'où $\left(\hat{U}, \hat{V}\right)$ est solution classique du système stationnaire correspondant à (3.3.1). $\square$

Lemme 3.3.3. *Soit* $\left(\hat{U}, \hat{V}\right)$ *la solution donnée par* (3.3.11)*, alors on a* $\hat{U} = \underline{\underline{\varphi}}$ *et* $\hat{V} = \overline{\overline{\varphi}}$.

Preuve. On commence par montrer que $\underline{\underline{\varphi}} \leqslant \hat{U}$ et $\hat{V} \leqslant \overline{\overline{\varphi}}$. Pour cela, nous proposons de démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underline{\varphi}^n \leqslant \hat{U}$ et $\hat{V} \leqslant \overline{\varphi}^n$; ce qui est vraie pour $n = 0$ (par passage à limite dans (3.3.6) lorsque $t \to +\infty$). Supposons que $\underline{\varphi}^{n-1} \leqslant \hat{U}$ et $\hat{V} \leqslant \overline{\varphi}^{n-1}$ alors

$$\begin{aligned}
\left[\partial_t - \mu_i \Delta + \overline{M}\right] \left(\underline{\varphi}^n - \hat{U}\right)(x,t) &= f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \overline{\varphi}^{n-1}) - f_i(x, \hat{U}_i(x), \hat{V}) + \overline{M}_i \left(\underline{\varphi}_i^{n-1} - \hat{U}_i\right)(x) \\
&\leqslant f_i(x, \underline{\varphi}_i^{n-1}(x), \hat{V}) - f_i(x, \hat{U}_i(x), \hat{V}) + \overline{M}_i \left(\underline{\varphi}_i^{n-1} - \hat{U}_i\right)(x) \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{lll}
\left[-\mu_i \Delta + \overline{M}\right] \left(\underline{\varphi}_i^n - \hat{U}_i\right)(x) \leqslant 0 & \text{dans } \Omega & (i = 1 \ldots, N) \\
\left(\underline{\varphi}_i^n - \hat{U}_i\right)(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant K \\
\partial\left(\underline{\varphi}_i^n - \hat{U}_i\right)(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } K < i \leqslant N
\end{array}$$

ce qui implique en appliquant le principe du maximum fort (Théorème 1.3.1) que $(\underline{\varphi}_i^n - \hat{U}_i) \leqslant 0$. De même, on démontre que $\left(\hat{V} - \overline{\varphi}^n\right) \leqslant 0$, par passage à limite on obtient $\underline{\underline{\varphi}} \leqslant \hat{U}$ et $\hat{V} \leqslant \overline{\overline{\varphi}}$. Pour les inégalitées inverse $\underline{\underline{\varphi}} \geqslant \hat{U}$ et $\hat{V} \geqslant \overline{\overline{\varphi}}$, il suffit de remarquer que $\left((\alpha\phi^\star, \underline{\underline{\varphi}}), (\overline{\overline{\varphi}}, M)\right)$ est paire de sous- et sur-solutions pour le système (3.3.1) alors d'après le Théorème 2.2.1 on en déduit que $\alpha\phi^\star \leqslant U \leqslant \underline{\underline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\varphi}} \leqslant V \leqslant M$ alors par passage à la limite lorsque $t \to +\infty$, on trouve que $U \leqslant \underline{\underline{\varphi}}$ et $\overline{\overline{\varphi}} \leqslant V$. d'où $\hat{U} = \underline{\underline{\varphi}}$ et $\hat{V} = \overline{\overline{\varphi}}$. $\square$

Maintenant on a tous les outils pour introduire la démonstration du Théorème 3.3.1 :

Preuve. [Preuve du Théorème 3.3.1]

i) On peut facilement vérifier que (U, V) la solution du système (3.3.1) est paire de sous- et sur-solution pour le système (3.1.1), en effet d'après le Lemme 3.3.1 on a $U \leqslant V$ sur D_T, et d'après (3.3.1) et l'hypothèse sur u_0 on a $U(x,0) = \alpha\phi^{\star} \leqslant u_0 \leqslant \overline{\varphi}^1 = V(x,0)$, et

$$\begin{array}{ll}
\partial_t U_i(x,t) - \mu_i \Delta U_i(x,t) \leqslant & U_i(x,t)\left(a_i - b_{ii}U_i(x,t) - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{ij}V_j(x,t) - \sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x V_j(\xi,t)d\xi\right) \\
\partial_t V_i(x,t) - \mu_i \Delta V_i(x,t) \geqslant & V_i(x,t)\left(a_i - b_{ii}U_i(x,t) - \sum\limits_{j=1}^{N} b_{ij}U_j(x,t) - \sum\limits_{j=1}^{N} c_{ij}\int\limits_0^x U_j(\xi,t)d\xi\right) \\
 & \text{dans } D_T \\
U_i \leqslant 0 \leqslant U_i & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) \quad \text{si } 1\leqslant i\leqslant K \\
\partial_x U_i \leqslant 0 \leqslant \partial_x V_i & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) \quad \text{si } K< i\leqslant N
\end{array}$$

donc (U,V) est paire de sous-et sur-solution pour le système (3.1.1) et comme u est unique dans $B_{0,M}$, alors u satisfait d'après le Théorème 2.2.1

$$U(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant V(x,t)$$

Par passage à limite quand $t\to+\infty$, on trouve que $\hat{U}(x) \leqslant \liminf\limits_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \limsup\limits_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \hat{V}(x)$ et d'après le Lemme 3.3.3 on a $\hat{U} = \underline{\underline{\varphi}}$ et $\hat{V} = \overline{\overline{\varphi}}$ d'où

$$\underline{\underline{\varphi}}(x) \leqslant \liminf_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \overline{\overline{\varphi}}(x)$$

ii) Si $\underline{\underline{\varphi}} = \overline{\overline{\varphi}} = \Phi$ alors $\Phi(x) \leqslant \liminf\limits_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \limsup\limits_{t\to+\infty} u(x,t) \leqslant \Phi(x)$ d'où

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \Phi(x).$$

□

Nous introduisons ici un résultat particulier d'attraction, dans le cas sclaire, considérons le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll}
\partial_t v_i - \mu_i \Delta v_i = v_i(a_i - b_{ii}v_i) & \text{sur } D_T \\
v_i = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_x v_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) \\
v_i(x,0) = u_{0i}(x) & \text{sur } \Omega
\end{array}\right. \tag{3.3.14}$$

Ce problème représente le cas scalaire ($N=1$) du système (2.1.1), avec $c=0$. D'après le Théorème 2.2.2 ce problème possède une unique solution positive bornée v_i vérifiant $v_i > 0$ dans D_T. Supposons à présent que $u_{0i} > 0$ alors il existe α tel que $\alpha_i\phi_i^{\star} \leqslant u_{0i}$. Nous appliquons, pour ce problème, le processus itératif (3.3.4) sauf que, comme nous l'avons fait pour le problème (3.2.19), nous allons remplacer M_i, $\overline{M}_i$ et φ_i^1 par C_i, $\overline{C}_i = 2b_{ii}C_i - a_i$ et ψ_i^1 ; on peut vérifier d'une manière analogue, que les résultats donnés par le Théorème 3.3.1 et le

Corollaire 3.3.1 restent vrais dans ce cas ; choisissons $C_i \geqslant \max(2\left\|u_{0i}\right\|_{\Omega}^2, \frac{\mu_i+a_i}{2b_{ii}}, \frac{a_i}{b_{ii}})$ nous avons

$$\begin{aligned}\left(-\mu_i\Delta+\overline{C}_i\right)\left(\psi_i^1-u_{0i}\right) &\geqslant C_i\left(a_i-b_{ii}C_i\right)+\overline{C}_iC_i-\overline{C}_i\left\|u_{0i}\right\|_{\Omega}^2\\ &\geqslant b_{ii}C_i^2-2b_{ii}\left\|u_{0i}\right\|_{\Omega}^2C_i\\ &\geqslant \left(C_i-2\left\|u_{0i}\right\|_{\Omega}^2\right)b_{ii}C_i\\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases}\left(-\mu_i\Delta+\overline{C}_i\right)\left(\psi_i^1-u_{0i}\right)\geqslant 0 & \text{sur } \Omega\\ \left(\psi_i^1-u_{0i}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \partial_x\left(\psi_i^1-u_{0i}\right)=0 & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

en appliquant le principe du maximum fort on en déduit que $\psi_i^1 \geqslant u_{0i} \geqslant \alpha_i\phi_i^\star$; ce qui entraine d'après le Corollaire 3.2.1 et le Théorème 3.3.1 ii), que $v_i(x,t) \to \Psi(x)$ lorsque $t \to +\infty$. Maintenant on suppose que la condition $u_{0i} > 0$ n'est pas vérifiée ; comme la solution $v_i \in$ est bornée, $v_i > 0$ dans D_T, et comme α_i et C_i sont arbitrairement petit et grand respectivement, on peut donc les choisir de sort que $\alpha_i\phi_i^\star(x) \leqslant v_i(x,t^\star) \leqslant C_i$ (où $C_i \geqslant \max(2\left\|v_i(\cdot,t^\star)\right\|_{\Omega}^2, \frac{\mu_i+a_i}{2b_{ii}}, \frac{a_i}{b_{ii}})$) pour un certain $t^\star > 0$; d'où on obtient $v_i(x,t^\star) \leqslant \psi_i^1(x)$, ce qui implique d'après le corollaire 3.3.1 que $v_i(x,t) \to \Psi(x)$ lorsque $t \to +\infty$ pour tout u_{0i} bornée positive non nulle . Le corollaire suivant conclue le résultat obtenu.

Corollaire 3.3.2. *Pour toute donnée initiale u_0 positive non nulle satisfaisante l'hypothèse (H2), la solution v_i du problème (3.3.14) satisfait*

$$\lim_{t\to+\infty} v_i(x,t) = \Psi_i(x)$$

où Ψ_i est l'unique solution de (3.2.19).

Chapitre 4

Résolution numérique du problème inlérgodifférentiel

Le but dans ce chapitre est de résoudre numériquement le problème intégrodifférentiel (2.1.1), on se limite au condition au bord Dirichlet homogène pour toutes les N équations du système. Pour la discrétisation spatiale, nous proposons la méthode des différences finies qui donne une approximation du laplacien et la méthode des trapèzes pour approcher l'intégrale apparaissant au second membre. On obtient ainsi un problème semi-discret constitué d'un système d'équations différentielles ordinaires. On utilise ensuite la méthode de Crank-Nicholson pour discrétiser le nouveau système et aboutir finalement à un système d'équations algébriques nonlinéaires qui est notre problème discret et pour lequel on discute l'existence de l'unique solution positive bornée, ainsi que la convergence (dans un sens à préciser) de cette solution vers la solution exacte du système intégrodifférentiel .

4.1 Construction du schéma numérique

4.1.1 Discrétisations et approximations

Soient $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_P < x_{P+1} = L$ les noeuds (points) d'une discrétisation uniforme de $\Omega =]0, L[$ (déscrétisation spatiale) de pas $h = \frac{L}{P+1}$, alors on a pour tout $j = 0, \ldots, P$

$$x_{j+1} = x_j + h..$$

Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ une discrétisation uniforme dans $\mathbb{R}^+$ (discrétisation temporelle), alors pour tout $n \leqslant m$

$$t_{n+1} = t_n + k, \quad t_n = nk$$

tel que k est le pas de cette discrétisation.

Soit $u = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ la solution du système intégrodifférentiel (2.1.1). On note par $u_{ij}(t)$ (resp. u_{ij}^n) une valeur approchée de u_i au point (x_j, t) (resp. au point (x_j, t_n)). De même, $\hat{u}_{ij}(t)$ (resp.$\hat{u}_{ij}^n$) pour la valeur exacte au point (x_j, t) (resp. (x_j, t_n)).

Commençons d'abord par discrétiser le Laplacien ainsi que le terme intégral figurant dans le membre droit de l'équation (2.1.1).

Soit $t > 0$, le développement de Taylor d'ordre 4 de u_i $(i = 1, ..N)$ au voisinage de x_j donne une approximation par différences finies du Laplacien

$$\Delta u_i (x_j, t) \approx \frac{1}{h^2} \left(\hat{u}_{ij-1}(t) - 2\hat{u}_{ij}(t) + \hat{u}_{ij+1}(t) \right)$$

dont l'erreur que l'on notera par $D_{ij}(t)$ est d'ordre 2 en h. Plus précisément, il existe $\eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ et $\theta_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tels que

$$\begin{aligned} D_{ij}(t) =& \frac{1}{24} \left(\partial_x^4 u_i (\eta_j, t) + \partial_x^4 u_i (\theta_j, t) \right) h^2 \\ |D_{ij}(t)| \leqslant& Ch^2 \end{aligned}$$

Où C est un constante indépendante de t et de l'indice j, à condition que $u_i \in C^{4,0} \left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \right)$

En utilisant la méthode des trapèzes on approche l'intégrale $\int\limits_0^{x_j} u_j(\xi, t) d\xi$ par précision d'ordre 2 en h c'est à dire

$$\int\limits_0^{x_j} u_i(\xi, t) d\xi \approx I_j(u_i(t)) := h \left(\frac{1}{2} \hat{u}_{i0}(t) + \sum\nolimits_{r=1}^{J-1} \hat{u}_{ir}(t) + \frac{1}{2} \hat{u}_{ij}(t) \right)$$

en tenant compte de la condition au bord on obtient $\hat{u}_{i0}(t) = 0$ d'où

$$I_j(u_i(t)) := h \left(\sum\nolimits_{r=1}^{J-1} \hat{u}_{ir}(t) + \frac{1}{2} \hat{u}_{ij}(t) \right)$$

L'erreur d'approximation est donnée (en supposant que $u_i \in C^{2,0} \left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \right)$) par

$$\begin{aligned} &T_{ij}(t) = \left[\tfrac{x_j}{12} \partial_x^2 u_i (\varepsilon_j, t) \right] h^2, \quad \varepsilon_j \in [0, x_j] \\ &|T_{ij}(t)| \leqslant Ch^2 \end{aligned}$$

Où C est une constante indépendante de t et j

Le lemme suivant rassemble ces estimations des erreurs

Lemme 4.1.1. *On note* $D_{ij}(t_n)$ *et* $T_{ij}(t_n)$ *par* D_{ij}^n *et* T_{ij}^n *respectivement. Si la fonction* $u \in C^{4,0}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+\right)$ *alors les erreurs* $\left|D_{ij}^n\right|$ *et* $\left|T_{ij}^n\right|$ *sont majorées par* Ch^2 *où* C *ne dépend que* u.

Ces approximations suggèrent d'approcher le problème original par le problème suivant :
Trouver $(u_{ij}(t))_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant P}}$ tels que

$$\begin{cases} \partial_t u_{ij}(t) - \frac{\mu_i}{h^2}\left(u_{ij-1}(t) - 2u_{ij}(t) + u_{ij+1}(t)\right) = u_{ij}(t)\left(a_i - \sum_{q=1}^{N} b_{iq}u_{qj}(t) - \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(u_q(t))\right) \\ u_{ij}(0) = u_{0i}(x_j) \\ \quad t > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant P \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $u_{i0}(t) = u_{iP+1}(t) = 0$ (ceci correspond à la condition de Dirichlet homogène).
Le problème (4.1.1) est un problème semi discret qu'on propose de résoudre numériquement parla méthode de Crank-Nicholson. Cette méthode consiste à considérer l'approximation

$$\frac{1}{2}\partial_t u_i(x_j, t_{n-1}) + \frac{1}{2}\partial_t u_i(x_j, t_n) \approx \frac{\hat{u}_{ij}^n - \hat{u}_{ij}^{n-1}}{k}$$

telle que l'erreur commise lors de cette approximation (en supposant que $u_i \in C^{0,3}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+\right)$) est d'ordre 2 en k, et qui est donnée par

$$\begin{array}{l} N_{ij}^n = \left[\partial_t^3 u_i(x_j, \tau_n)\right] k^2, \quad \tau_n \in [t_{n-1}, t_n] \\ \left|N_{ij}^n\right| \leqslant Ck^2 \end{array}$$

Lemme 4.1.2. *Si la fonction* $u \in C^{0,3}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+\right)$ *alors* $\left|N_{ij}^n\right| \leqslant Ck^2$ *où* C *est une constante qui ne dépend que* u.

La méthode de Crank-Nichoson appliquée au système semi-discret (4.1.1) donne le problème discret suivant :
trouver $\left\{u_{ij}^n : \ 1 \leqslant i \leqslant N, \ 1 \leqslant j \leqslant P \ \right\}$: tels que

$$\begin{cases} u_{ij}^{n} = & \frac{k}{2}\left[\frac{\mu_i}{h^2}\left(u_{ij-1}^{n}-2u_{ij}^{n}+u_{ij+1}^{n}\right)+u_{ij}^{n}\left(a_i-\sum\limits_{q=1}^{N}b_{iq}u_{qj}^{n}-\sum\limits_{s=1}^{N}c_{iq}I_j(u_q^n)\right)\right]+ \\ & u_{ij}^{n-1}+\frac{k}{2}\left[\frac{\mu_i}{h^2}\left(u_{ij-1}^{n-1}-2u_{ij}^{n-1}+u_{ij+1}^{n-1}\right)+u_{ij}^{n-1}\left(a_i-\sum\limits_{q=1}^{N}b_{iq}u_{qj}^{n-1}-\sum\limits_{q=1}^{N}c_{iq}I_j(u_q^{n-1})\right)\right] \\ u_{ij}^{0} = & u_{0i}\left(x_j\right) \\ & 1\leqslant i\leqslant N,\quad 1\leqslant j\leqslant P,\quad 0<n\leqslant m \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Avec :

$u_{i0}^0 = u_{iP+1}^0 = 0$ qui correspond à la condition de compatibilité imposée sur la donnée initial (hypothèse (H2) au chapitre 2),

$u_{i0}^n = u_{iP+1}^n = 0, \quad n \leqslant m$ correspond à la condition aux bords de type Dirichlet homogènes.

4.1.2 Consistance

Une fois le problème discret est obtenu, la première question qui se pose est celle de la consistance entre les problèmes approché et continu. Cette propriété se voit en estimant le résidu si on remplace l'inconnu dans le problème discret par la solution exacte du problème continue. Si ce résidu devient arbitrairement petit lorsque le pas de discrétisation est suffisamment petit, on dit que le problème discret est consistant. Alors on donne la définition de consistance pour notre problème (Ici on a appliqué une définition générale de consistance dans [21])

Définition 4.1.1. L'erreur de consistance de (4.1.2) au point (x_j, t_n) $(1 \leqslant j \leqslant P, \quad 0 < n \leqslant m)$ est donné par

$$\begin{aligned} R_j^n \in & \mathbb{R}^N, \\ R_{ji}^n = & \frac{\hat{u}_{ij}^n - \hat{u}_{ij}^{n-1}}{k} - \frac{\mu_i}{2h^2}\left(\hat{u}_{ij-1}^n - 2\hat{u}_{ij}^n + \hat{u}_{ij+1}^n\right) - \frac{1}{2}\hat{u}_{ij}^n\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}\hat{u}_{qj}^n - \sum_{s=1}^N c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n)\right) \\ & - \frac{\mu_i}{2h^2}\left(\hat{u}_{ij-1}^{n-1} - 2\hat{u}_{ij}^{n-1} + \hat{u}_{ij+1}^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\hat{u}_{ij}^{n-1}\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1} - \sum_{s=1}^N c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right). \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

On dit que le schéma numérique est consistant d'ordre p en espace et q en temps s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\left|R_{ji}^n\right| \leqslant C\left(h^p + k^q\right)$

(C ne dépend pas des indices i, j et n).

Théorème 4.1.1. *Si la solution exacte* $u \in C^{4,3}\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^+\right)$, *alors le schéma numérique* (4.1.2) *est consistant d'ordre 2 en espace et en temps.*

Preuve. Montrons qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\left|R^n_{ji}\right| \leqslant C\left(h^2+k^2\right)$

Soient $1 \leqslant i \leqslant N,\quad 1 \leqslant j \leqslant P,\quad 0 < n \leqslant m.$

On a alors d'après ce qui précède

$$\frac{\hat{u}^n_{ij}-\hat{u}^{n-1}_{ij}}{k} = \frac{1}{2}\partial_t u_i\left(x_j,t_{n-1}\right)+\frac{1}{2}\partial_t u_i\left(x_j,t_n\right)+N^n_{ij}$$

et pour $l = n-1, n$ on a

$$-\frac{\mu_i}{2h^2}\left(\hat{u}^l_{ij-1}-2\hat{u}^l_{ij}+\hat{u}^l_{ij+1}\right) = -\frac{\mu_i}{2}\Delta u_i\left(x_j,t_l\right)+\frac{\mu_i}{2}D^l_{ij}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\hat{u}^l_{ij}\left(a_i-\sum_{q=1}^{N}b_{iq}\hat{u}^l_{qj}-\sum_{q=1}^{N}c_{iq}I_j(\hat{u}^l_q)\right) = &-\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_l\right)\left(a_i-\sum_{q=1}^{N}b_{iq}u_q\left(x_j,t_l\right)\right.\\ &\left.-\sum_{j=1}^{N}c_{iq}\int_0^{x_j}u_q(\xi,t_l)d\xi\right)+\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_l\right)\sum_{q=1}^{N}c_{iq}T^l_{qj}.\end{aligned}$$

Or u est la solution exacte du système intégrodifférentiel, donc u vérifie

$$\frac{1}{2}\partial_t u_i\left(x_j,t_l\right)-\frac{\mu_i}{2}\Delta u_i\left(x_j,t_l\right)-\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_l\right)\left(a_i-\sum_{q=1}^{N}b_{iq}u_q\left(x_j,t_l\right)-\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\int_0^{x_j}u_j(\xi,t_l)d\xi\right)=0 \tag{4.1.4}$$

en sommant membre à membre tous les égalités obtenues (pour $l = n-1$ et $l = n$) au départ, et en tenant compte de (4.1.4)

$$\begin{aligned}&\frac{\hat{u}^n_{ij}-\hat{u}^{n-1}_{ij}}{k}-\frac{\mu_i}{2h^2}\left(\hat{u}^n_{ij-1}-2\hat{u}^n_{ij}+\hat{u}^n_{ij+1}\right)-\frac{1}{2}\hat{u}^n_{ij}\left(a_i-\sum_{q=1}^{N}b_{iq}\hat{u}^n_{qj}-\sum_{s=1}^{N}c_{iq}I_j(\hat{u}^n_q)\right)\\ &-\frac{\mu_i}{2h^2}\left(\hat{u}^{n-1}_{ij-1}-2\hat{u}^{n-1}_{ij}+\hat{u}^{n-1}_{ij+1}\right)-\frac{1}{2}\hat{u}^{n-1}_{ij}\left(a_i-\sum_{q=1}^{N}b_{iq}\hat{u}^{n-1}_{qj}-\sum_{s=1}^{N}c_{iq}I_j(\hat{u}^{n-1}_q)\right)\\ =\;& N^n_{ij}+\frac{\mu_i}{2}D^{n-1}_{ij}+\frac{\mu_i}{2}D^n_{ij}+\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_{n-1}\right)\sum_{s=1}^{N}c_{iq}T^{n-1}_{qj}+\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_n\right)\sum_{s=1}^{N}c_{iq}T^n_{qj}\end{aligned}$$

alors

$$R_{ji}^{n}=N_{ij}^{n}+\frac{\mu_i}{2}\left(D_{ij}^{n-1}+D_{ij}^{n}\right)+\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_{n-1}\right)\sum_{s=1}^{N}c_{iq}T_{qj}^{n-1}+\frac{1}{2}u_i\left(x_j,t_n\right)\sum_{s=1}^{N}c_{iq}T_{qj}^{n}$$

On a trouvé que la solution exacte est bornée $(0\leqslant u_i\leqslant M_i):=max(\frac{a_i}{b_{ii}},\|u_{i,0}\|_{\Omega})$ c'est-à-dire

$$0\leqslant u_i\left(x_j,t_l\right)\leqslant M_i$$

et des Lemmes 4.1.1 et 4.1.2, sous l'hypothèse $u\in C^{4,3}\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{+}\right)$ on a

$$\left|N_{ij}^{n}\right|\leqslant C_1k^2,\quad \left|D_{ij}^{n-1}\right|\leqslant C_2h^2,\quad \left|D_{ij}^{n}\right|\leqslant C_2h^2,$$

$$\left|T_{qj}^{n-1}\right|\leqslant C_3h^2,\quad \left|T_{qj}^{n-1}\right|\leqslant C_3h^2\quad (q=1,\ldots,N)\,.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left|R_{ji}^{n}\right| &\leqslant C_1k^2+\mu_iC_2h^2+M_i\left(\sum_{s=1}^{N}c_{iq}\right)C_3h^2\\ &\leqslant \max\left(C_1,\max_{1\leqslant i\leqslant N}(\mu_iC_2+M_i(\sum_{s=1}^{N}c_{iq})C_3)\right)\left(h^2+k^2\right)\end{aligned}$$

d'où la consistance est d'ordre 2 en espace et en temps. □

4.1.3 Expression matricielle et résultats préliminaires

A fin de simplifier l'écriture du problème discret on veut l'exprimer sous une forme matricielle. Pour cela, introduisons les notations suivantes :

Rappelons que P désigne le nombre des noeuds intérieurs dans la discrétisation spatiale.

e^p $(p\in\mathbb{N})$ est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ ayant toutes les composantes égales à 1 et pour $p=P$, on notera $e:=e^P$

Soit M une matrice quelconque, on notera par M_{ij} le coefficient de M situé sur la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne et par $M_{(i)}$ ou simplement M_i (s'il n'y a pas de confusion) la $i-ème$ ligne de M.

Pour deux matrices M,N de même taille, $M\star N$ dénote le produit de Hadamard de M et N

défini par $(M \star N)_{ij} = M_{ij}N_{ij}$. Il est claire que le produit de Hadamard ainsi définie est une loi commutative et si $M \in \mathbb{R}^p, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha M = \alpha e^p \star M$

$$b, c \in M_P(\mathbb{R}) : \quad b = (b_{pq})_{1 \leqslant p,q \leqslant N}, \quad c = (c_{pq})_{1 \leqslant p,q \leqslant N}$$

$$\acute{b} \in M_P(\mathbb{R}), \acute{b} = \begin{cases} b_{pq} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases}$$

alors $\acute{b}$ est définie à partir de b en remplaçant les coefficients diagonaux par zéros ;

soit $M \in M_{N \times P}(\mathbb{R})$, on a

$b_{ii}M_i + \acute{b}_i M = b_{ii}M_i + \sum_{q=1}^{N} \acute{b}_{iq}M_q = b_{ii}M_i + \sum_{q=1, q \neq i}^{N} b_{iq}M_q = \sum_{q=1}^{N} b_{iq}M_q = b_i M$

alors

$$b_{ii}M_i + \acute{b}_i M = b_i M$$

Pour tout $\quad i = 1, \ldots, N, \quad n \leqslant m,$

$$u_i^n := (u_{i1}^n, \ldots, u_{iP}^n) \in \mathbb{R}^P.$$

$$u^n \in M_{N \times P}(\mathbb{R}), \quad u^n = \begin{pmatrix} u_{11}^n & \cdots & u_{1P}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1}^n & \cdots & u_{NP}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

$$u := (u^n)_{n \leqslant m}$$

$$A \in M_P(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S \in M_P(\mathbb{R}), \quad S = h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Soient $u, U \in M_{N \times P}(\mathbb{R}) : U_{qp} = I_p(u_q)$ alors U s'exprime en fonction de S comme suite

$$U = uS$$

Soient $u, v \in M_{N\times P}(\mathbb{R})$ tels que $0 \leqslant u \leqslant v$ alors $U_{qp} = I_p(u_q) \leqslant I_p(v_q)$ et $I_p(u_q) \leqslant hP \|u_q\|_\infty \leqslant L\|u_q\|_\infty$, c'est-à-dire que si $0 \leqslant u \leqslant v$ alors

$$0 \leqslant uS \leqslant vS$$

et

$$\begin{aligned} (uS)_q &\leqslant L\|u_q\|_\infty e \\ I_p(u_q) &\leqslant L\|u_q\|_\infty \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression matricielle du problème discret (4.1.2) sera donnée comme suite : trouver $u := (u^n)_{1\leqslant n\leqslant m} \in (M_{N\times P}(\mathbb{R}))^m$ tel que

$$\begin{cases} u_i^n\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = & \frac{k}{2}a_i u_i^n - \frac{k}{2}u_i^n \star (b_i u^n + c_i u^n S) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star (b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1} S) \\ u_i^0 = (u_{0i}(x_j))_j & \\ 1 \leqslant i \leqslant N & 0 < n \leqslant m \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Remarque 4.1.1. Le problème (4.1.5) est un système d'équations algébriques nonlinéaires qui servent à déterminer la solution approchée $u := (u^n)_{1\leqslant n\leqslant m}$, par la relation de récurrence entre u^{n-1} et u^n $(1 \leqslant n \leqslant m)$ et la donnée u^0. En effet, pour u^{n-1} donné, on remarque que u^n est solution du système suivant (dont $v \in M_{N\times P}(\mathbb{R})$ est l'inconnu) :

$$\begin{cases} v_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = & \frac{k}{2}a_i v_i - \frac{k}{2}v_i \star (b_i v + c_i vS) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star (b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1} S) \\ 1 \leqslant i \leqslant N & \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Dans le chapitre 2, on a démontré l'existence et l'unicité d'une solution (exacte) positive et bornée du problème intégrodifférentiel (2.1.1) ; ceci nous conduit à la recherche de la solution approchée qui satisfait les même propriétés de la solution exacte ; donc on démontre que (4.1.6) admet une unique solution positive bornée pour toute donnée de $0 \neq u^{n-1} \geqslant 0$ $(0 < n \leqslant m)$

Définition 4.1.2. On dit que la matrice $M \in M_q(\mathbb{R})$ conserve la positivité si pour tout $v \in \mathbb{R}^q$ tel que $vM \geqslant 0$ on a $v \geqslant 0$.

On dit que M est monotone si M est inversible et $M^{-1} \geqslant 0$

Remarque 4.1.2. Les inégalités s'entendent composante par composante.

Proposition 4.1.1. *Soit $M \in M_q(\mathbb{R})$, alors M conserve la positivité si et seulement si M est monotone.*

Lemme 4.1.3. *Soit $\alpha > 0$ alors*

i) *La matrice $\left(\alpha I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right)$ conserve la positivité.*

ii) *La matrice $\left(\alpha I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right)$ est monotone .*

Preuve.

i) Soit $v \in \mathbb{R}^P$ tel que $v\left(\alpha I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) \geqslant 0$, montrons que $v \geqslant 0$.
Soit $v_p = \min\limits_{1 \leqslant r \leqslant P} v_r$. Si $2 \leqslant p \leqslant P-1$ alors $v\left(\alpha I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) \geqslant 0$ implique que

$$\alpha v_p + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(-v_{p-1} + 2v_p - v_{p+1}\right) \geqslant 0,$$

donc $\alpha v_p \geqslant \frac{\mu_i k}{2h^2}\left((v_{p-1} - v_p) + (v_{p+1} - v_p)\right)$. Or $v_p = \min\limits_{1 \leqslant r \leqslant P} v_r$ entraîne

$$v_{p-1} - v_p \geqslant 0, \quad v_{p+1} - v_p \geqslant 0,$$

Alors on obtient néssicairement, $\alpha v_p \geqslant 0$

ce qui implique que $v_p \geqslant 0$. De plus, comme

$$v_s \geqslant \min_{1 \leqslant r \leqslant P} v_r =: v_p \quad (s = 1, \ldots, P),$$

il résulte que $v \geqslant 0$

Si $p = 1$ alors $\left(\alpha I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) v \geqslant 0$ implique que

$$\alpha v_1 + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(2v_1 - v_2\right) \geqslant 0,$$

donc $\left(\alpha + \frac{\mu_i k}{2h^2}\right) v_1 \geqslant \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(v_2 - v_1\right)$. Or $v_1 = \min\limits_{1 \leqslant r \leqslant P} v_r$ entraîne $v_2 - v_1 \geqslant 0$, d'où il vient $\left(\alpha + \frac{\mu_i k}{2h^2}\right) v_1 \geqslant 0$ et donc $v \geqslant 0$

Le cas $p = P$ se traite d'une manière analogue à celui de $p = 1$.

ii) De Proposition 4.1.1 on en déduit que $\left(\alpha I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right)$ est monotone .

□

Lemme 4.1.4. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, $D \in M_P(\mathbb{R})$ *une matrice diagonale telle que les élément diagonaux* D_{pp} $(1 \leqslant p \leqslant P)$ *vérifient* $D_{pp} - 2\alpha \geqslant 0$. *Alors* $v \in \mathbb{R}^P$: $v \geqslant 0$ *entraîne* $v\,(D - \alpha A) \geqslant 0$.

Preuve. Soit $v \in \mathbb{R}^P$ tel que $v \geqslant 0$, alors si on démontre que $D - \alpha A \geqslant 0$ on obtient $v\,(D - \alpha A) \geqslant 0$.
Soient $p, q :\ 1 \leqslant p, q \leqslant P$, vérifions que $(D - \alpha A)_{pq} \geqslant 0$. On remarque que :
si $p \neq q$ on a $D_{pq} = 0$ et $(-\alpha A)_{pq} \geqslant 0$ alors dans ce cas on obtient $(D - \alpha A)_{pq} \geqslant 0$,
si $p = q$ on a $(D - \alpha A)_{pq} = (D - \alpha A)_{pp} = D_{pp} - 2\alpha \geqslant 0$
Alors $D - \alpha A \geqslant 0$. □

Considérons les applications f_i et g_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ de $\mathbb{R}^P \times M_{N\times P}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^P$ définies par :

$$f_i(u, v) = a_i u - b_{ii} u \star u - u \star \left(\acute{b}_i v + c_i v S\right)$$

$$g_i(u, v) = u\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) + \frac{k}{2} f_i(u, v)$$

On pose

$$\gamma_i = \max\left(\frac{a_i}{b_{ii}}, \left\|u_i^0\right\|_\infty\right)$$

$$M \in M_{N\times P}(\mathbb{R}) : M_i = \gamma_i e, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

$$\Gamma_i = -a_i + b_{ii}\gamma_i + \sum_{q=1}^{N} \left(b_{iq} + L c_{iq}\right)\gamma_q$$

$$\rho_i = a_i + M_i \sum\nolimits_{q=1}^{N} \left(b_{iq} + L c_{iq}\right).$$

Considérons les hypothèses sur h et k :

(H"1) $k < \frac{2h^2}{h^2 \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \Gamma_i + \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \mu_i}$.
(H"2) $k < \frac{2}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \rho_i}$.

Remarque 4.1.3. $M_i = \gamma_i e = \max\left(\frac{a_i}{b_{ii}}, \left\|u_i^0\right\|_\infty\right) e$ entraîne $M_i \geqslant 0$ et $(a_i e - b_{ii} M_i) \leqslant 0$.

Lemme 4.1.5. *Soit* $i = 1, \ldots, N$.

i) L'application $f_i(u,v) + \Gamma_i u$ *est croissante par rapport à* u *dans* $[0, M_i] \subset \mathbb{R}^P$*, pour tout* $v \in [0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R})$,

ii) $f_i(u,v)$ *est décroissante par rapport à* v *dans* $[0, M]$ *pour tout* $u \in [0, M_i]$.

Preuve.

i) En effet, soit $v \in [0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R})$ et $u, \acute{u} \in [0, M_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$ tels que $\acute{u} \leqslant u$

On a

$$\begin{aligned}
f_i(u,v) - f_i(\acute{u},v) &= a_i(u-\acute{u}) - b_{ii}(u+\acute{u}) \star (u-\acute{u}) - \left(\acute{b}_i v + c_i v S\right) \star (u-\acute{u}) \\
&= \left[a_i e - b_{ii}(u+\acute{u}) - \left(\acute{b}_i v + c_i v S\right)\right] \star (u-\acute{u}) \\
&\geqslant \left[a_i e - 2b_{ii}M_i - \left(\acute{b}_i M + c_i M S\right)\right] \star (u-\acute{u}) \\
&\geqslant \left[a_i e - b_{ii}\gamma_i e - \sum_{q=1}^{N}(b_{iq} + Lc_{iq})\gamma_q e\right] \star (u-\acute{u}) \\
&\geqslant \left[a_i - b_{ii}\gamma_i - \sum_{q=1}^{N}(b_{iq} + Lc_{iq})\gamma_q\right] e \star (u-\acute{u}) \\
&\geqslant \left[a_i - b_{ii}\gamma_i - \sum_{q=1}^{N}(b_{iq} + Lc_{iq})\gamma_q\right] (u-\acute{u}) \\
&\geqslant -\Gamma_i(u-\acute{u})
\end{aligned}$$

D'où on en déduit que si $u, \acute{u} \in [0, M]$ tels que $u \leqslant \acute{u}$ alors $f_i(u,v) + \Gamma_i u \leqslant f_i(\acute{u},v) + \Gamma_i \acute{u}$

C'est-à-dire pour tout $v \in [0, M]$ l'application $f_i(u,v) + \Gamma_i u$ est croissante par rapport à u dans $[0, M_i] \subset .\mathbb{R}^P$.

ii) Soient $u \in [0, M_i]$ et $v, \acute{v} \in [0, M]$ tels que $\acute{v} \leqslant v$. Alors $(\acute{v} - v) \leqslant 0$ et $u \geqslant 0$.

On a

$$\begin{aligned}
f_i(u,\acute{v}) - f_i(u,v) &= a_i u - b_{ii} u \star u - u \star \left(\acute{b}_i \acute{v} + c_i \acute{v} S\right) - a_i u + b_{ii} u \star u + u \star \left(\acute{b}_i v + c_i v S\right) \\
&= -u \star \left(\acute{b}_i(\acute{v} - v) + c_i(\acute{v} - v) S\right)
\end{aligned}$$

d'autre part on a $-u\star\left(\acute{b}_i(\acute{v} - v) + c_i(\acute{v} - v) S\right) \geqslant 0$ car $(\acute{v} - v) \leqslant 0$, $u \geqslant 0$ et b, c, S sont positives ; d'où on en déduit

$$f_i(u,\acute{v}) - f_i(u,v) \geqslant 0$$

C'est-à-dire pour tout $u \in [0, M_i]$ l'application $f_i(u, v)$ est croissante par rapport à v dans $[0, M]$. □

Lemme 4.1.6. *Sous l'hypothèse (H"1), pour tout* $i = 1, \ldots, N$,

i) L'application $g_i(u, v)$ *est croissante par rapport à* u *dans* $[0, M_i] \subset \mathbb{R}^P$, *pour tout* $v \in [0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R})$.

ii) L'application $g_i(u, v)$ *est décroissante par rapport à* v *dans* $[0, M]$, *pour tout* $u \in [0, M_i]$.

iii) $g_i(u, v) \geqslant 0$ *pour tout* $u \in [0, M_i]$ *et tout* $v \in [0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R})$.

Preuve.

i) Soient $v \in [0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R})$ et $u, \acute{u} \in [0, M_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$ tels que $\acute{u} \leqslant u$.

On a

$$\begin{aligned} g_i(u,v) - g_i(\acute{u},v) &= (u-\acute{u})\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}f_i(u,v) - \frac{k}{2}f_i(\acute{u},v) \\ &\geqslant (u-\acute{u})\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) - \frac{k}{2}\Gamma_i\,(u-\acute{u}) \\ &\geqslant (u-\acute{u})\left(\left(1-\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \end{aligned}$$

D'autre part, sous l'hypothèse (H"1), on a $k < \frac{2h^2}{h^2 \max\limits_{1\leqslant q\leqslant N}\Gamma_q + \max\limits_{1\leqslant q\leqslant N}\mu_q} \leqslant \frac{2h^2}{h^2\Gamma_i+\mu_i}$ implique que

$$\left(1-\frac{k}{2}\Gamma_i\right) - 2\frac{\mu_i k}{2h^2} > 0$$

alors d'après le Lemme 4.1.4, $(u-\acute{u}) \geqslant 0$ entraîne

$$(u-\acute{u})\left(\left(1-\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant 0$$

donc

$$g_i(u,v) - g_i(\acute{u},v) \geqslant 0$$

ce qui signifie que si $\acute{u} \leqslant u$ alors $g_i(\acute{u}, v) \leqslant g_i(u, v)$.

C'est-à-dire pour tout $v \in [0, M]$ l'application $g_i(u, v)$ est croissante par rapport à u dans $[0, M_i]$

ii) Soient $u \in [0, M_i]$ et $v, \acute{v} \in [0, M]$ tels que $\acute{v} \leqslant v$. Alors $f_i(u, \acute{v}) - f_i(u, v) \geqslant 0$.

d'autre part on a

$$g_i(u,\acute{v}) - g_i(u,v) = \frac{k}{2}\left(f_i(u,\acute{v}) - f_i(u,v)\right)$$

donc

$$g_i(u, \acute{v}) - g_i(u, v) \geqslant 0$$

ce qui signifie que pour tout $u \in [0, M_i]$ l'application $g_i(u, v)$ est croissante par rapport à v dans $[0, M]$.

iii) Comme $u \in [0, M_i]$; on a $0 \leqslant u$ ce qui implique que $g_i(0, v) \leqslant g_i(u, v)$. Or $g_i(0, v) = \frac{k}{2} f_i(0, v) = 0$; donc $g_i(u, v) \geqslant 0$. Ce qui signifie que $g_i(u, v) \geqslant 0$ pour tout $(u, v) \in [0, M_i] \times [0, M]$. □

4.2 Existence et unicité des solutions positives bornées

4.2.1 Unicité de la solution

Théorème 4.2.1. *Sous l'hypothèse (H"2), la solution* $u = (u^n)_{0<n\leqslant m}$ *du problème discret* (4.1.5) *si elle existe, est unique dans* $([0, M])^m$ $([0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R}))$.

Lemme 4.2.1. *Si pour tout* $u^{n-1} \in [0, M]$ $(0 < n \leqslant m)$ *le système* (4.1.6) *admet dans* $[0, M]$ *une solution unique* u^n, *alors la solution de* (4.1.5) *est unique dans* $([0, M])^m$.

Preuve. Soit w une solution quelconque de (4.1.5) dans $([0, M])^m$. on sait que w est déterminée par ses composantes w^n $(0 < n \leqslant m)$, tel que w^n est une solution du système (4.1.6) pour u^0 donné et $u^{n-1} = w^{n-1}$ $(1 < n)$. Donc on démontre par récurrence sur n que w^n se détermine d'une manière unique.
En effet, pour $n = 1$: comme $u^0 \in [0, M]$, alors sous l'hypothèse du lemme, le système (4.1.6) admet une solution unique $u^1 \in [0, M]$. D'où on en déduit que pour toute solution w de (4.1.5) dans $([0, M])^m$ on a $w^1 = u^1$.
Supposons que $w^{n-1} = u^{n-1} \in [0, M]$ (i.e. la $(n-1)-ème$ composante de toute solution w est égale à u^{n-1}) alors la solution u^n de (4.1.6)) est unique dans $[0, M]$.
D'où

$$w^n = u^n$$

pour toute solution w de (4.1.5)) dans $([0,M])^m$. □

Preuve. **(Preuve du Théorème 4.2.1)** D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout $u^{n-1} \in [0,M]$ $(0 < n \leqslant m)$ le système (4.1.6)) admet une solution unique $v \in [0,M]$.

En effet, Soit $u^{n-1} \in [0,M]$ $(0 < n \leqslant m)$ et soient $w, v \in [0,M]$ deux solutions du système (4.1.6), on démontre que $w = v$.

Choisissons i, j tels que $\max\limits_{p,q} |w_{pq} - v_{pq}| = |w_{ij} - v_{ij}|$

alors pour tout p, q $(1 \leqslant p \leqslant N, \quad 1 \leqslant p \leqslant P)$ on a

$$\pm\left(w_{ij} - v_{ij}\right)\left(w_{pq} - v_{pq}\right) \leqslant \left(w_{ij} - v_{ij}\right)^2$$

de plus on a

$$\begin{array}{l} \left(w_{ij} - v_{ij}\right)\left(\left(w_{ij} - v_{ij}\right) - \left(w_{ij-1} - v_{ij-1}\right)\right) \geqslant 0 \\ \left(w_{ij} - v_{ij}\right)\left(\left(w_{ij} - v_{ij}\right) - \left(w_{ij+1} - v_{ij+1}\right)\right) \geqslant 0 \end{array}$$

ce qui implique que

$$\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(w_{ij} - v_{ij}\right)\left(-(w_{ij+1} - v_{ij+1}) + 2(w_{ij} - v_{ij}) - \left(w_{ij-1} - v_{ij-1}\right)\right) \geqslant 0$$

on a w, v vérifient

$$\begin{aligned} v_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) =& \frac{k}{2}a_i v_i - \frac{k}{2}v_i \star \left(b_i v + c_i v S\right) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star \left(b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1} S\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) =& \frac{k}{2}a_i w_i - \frac{k}{2}w_i \star \left(b_i w + c_i w S\right) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star \left(b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1} S\right) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left(w_i - v_i\right)\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) =& \frac{k}{2}a_i w_i - \frac{k}{2}w_i \star \left(b_i w + c_i w S\right) - \frac{k}{2}a_i v_i + \frac{k}{2}v_i \star \left(b_i v + c_i v S\right) \\ =& \frac{k}{2}a_i\left(w_i - v_i\right) - \frac{k}{2}\left(w_i - v_i\right) \star \left(b_i w + c_i w S\right) - \\ & \frac{k}{2}v_i \star \left(b_i\left(w - v\right) + c_i\left(w - v\right) S\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(w_{ij}-v_{ij})+&\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(-(w_{ij+1}-v_{ij+1})+2(w_{ij}-v_{ij})-(w_{ij-1}-v_{ij-1})\right)\\ =&\frac{k}{2}a_i\left(w_{ij}-v_{ij}\right)-\frac{k}{2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}w_{qj}+c_{iq}I_j\left(w_q\right)\right)-\\ &\frac{k}{2}v_{ij}\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}\left(w_{qj}-v_{qj}\right)+c_{iq}I_j\left(w_q-v_q\right)\right)\end{aligned}$$

En multipliant par $w_{ij}-v_{ij}$

$$\begin{aligned}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2+&\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\left(-(w_{ij+1}-v_{ij+1})+2(w_{ij}-v_{ij})-(w_{ij-1}-v_{ij-1})\right)\\ =&\frac{k}{2}a_i\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2-\frac{k}{2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}w_{qj}+c_{iq}I_j\left(w_q\right)\right)-\\ &\frac{k}{2}v_{ij}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}\left(w_{qj}-v_{qj}\right)+c_{iq}I_j\left(w_q-v_q\right)\right)\end{aligned}$$

on a

$$-\frac{k}{2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}w_{qj}+c_{iq}I_j\left(w_q\right)\right)\leqslant 0,$$

et par l'inégalité établie au départ

$$\begin{aligned}-\frac{k}{2}v_{ij}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}\left(w_{qj}-v_{qj}\right)+c_{iq}I_j\left(w_q-v_q\right)\right)&\leqslant\frac{k}{2}v_{ij}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}+Lc_{iq}\right)\\ &\leqslant\frac{k}{2}\gamma_i\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}+Lc_{iq}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2+&\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\left(-(w_{ij+1}-v_{ij+1})+2(w_{ij}-v_{ij})-(w_{ij-1}-v_{ij-1})\right)\\ &\leqslant\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\frac{k}{2}\left(a_i+\gamma_i\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}+Lc_{iq}\right)\right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\left(-(w_{ij+1}-v_{ij+1})+2(w_{ij}-v_{ij})-(w_{ij-1}-v_{ij-1})\right)\\ &\qquad\leqslant\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\left(-1+\frac{k}{2}\left(a_i+\gamma_i\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}+Lc_{iq}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Or on avait déjà

$$\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(w_{ij}-v_{ij}\right)\left(-(w_{ij+1}-v_{ij+1})+2(w_{ij}-v_{ij})-(w_{ij-1}-v_{ij-1})\right)\geqslant 0$$

alors

$$\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\left(-1+\frac{k}{2}\left(a_i+\gamma_i\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}+Lc_{iq}\right)\right)\right)\geqslant 0$$

et comme par l'hypothèse (H"2) on a $k<\frac{2}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\left(a_i+M_i\sum_{q=1}^{N}(b_{iq}+Lc_{iq})\right)}<\frac{2}{a_i+M_i\sum_{q=1}^{N}(b_{iq}+Lc_{iq})}$

on obtient

$$-1+\frac{k}{2}\left(a_i+M_i\sum_{q=1}^{N}\left(b_{iq}+Lc_{iq}\right)\right)\leqslant 0$$

d'où

$$\left(w_{ij}-v_{ij}\right)^2\leqslant 0$$

ceci signifie que $\max\limits_{p,q}|w_{pq}-v_{pq}|=|w_{ij}-v_{ij}|=0$

c'est-à-dire que

$$w=v.$$

$\square$

4.2.2 Existence de la solution par méthode monotone itérative

Définition 4.2.1. Soient $\underline{u}^n,\overline{u}^n\in M_{N\times P}(\mathbb{R})$ $(0<n\leqslant m)$.

On dit que $(\underline{u},\overline{u})=\left((\underline{u}^n)_{0<n\leqslant m},(\overline{u}^n)_{0<n\leqslant m}\right)$ constitue une paire de sous- et sur-solutions pour le problème discret (4.1.5) si $\overline{u}\leqslant\underline{u}$ et

$$\begin{aligned}\underline{u}_i^n\left(I+\tfrac{\mu_i k}{2h^2}A\right)&\leqslant\tfrac{k}{2}f_i\left(\underline{u}_i^n,\overline{u}^n\right)+g_i\left(\underline{u}_i^{n-1},\overline{u}^{n-1}\right)\\ \overline{u}_i^n\left(I+\tfrac{\mu_i k}{2h^2}A\right)&\geqslant\tfrac{k}{2}f_i\left(\overline{u}_i^n,\underline{u}^n\right)+g_i\left(\overline{u}_i^{n-1},\underline{u}^{n-1}\right)\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

pour tout $1\leqslant i\leqslant N$ et $0<n\leqslant m$.

Théorème 4.2.2. *On suppose que pour tout* $n=1,\ldots,m$, $\underline{u}^n=0$ *et* $\overline{u}^n=M$. *Alors* $(\underline{u},\overline{u})=\left((\underline{u}^n)_{0<n\leqslant m},(\overline{u}^n)_{0<n\leqslant m}\right)$ *est une paire de sous- et sur-solutions pour le problème discret* (4.1.5).

Preuve. Il est claire que $\overline{u} \leqslant \underline{u}$.

Soient $1 \leqslant i \leqslant N$ et $0 < n \leqslant m$,

On a $\underline{u}^{n-1} = \underline{u}^{n} = 0$ et $\overline{u}^{n-1} = \overline{u}^{n} = M$, alors en remplaçant dans (4.2.1) on trouve que la première inégalité est évidemment satisfaite, et il reste à montrer la deuxième inégalité

$$M_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant ka_iM_i - kb_{ii}M_i \star M_i + M_i\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right).$$

En effet, on a par calcul

$$M_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant M_i.$$

et

$$\begin{aligned} ka_iM_i - kb_{ii}M_i \star M_i + M_i\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) &\leqslant kb_{ii}\left(\frac{a_i}{b_{ii}}e - M_i\right) \star M_i + M_i \\ &\leqslant M_i \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$M_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant M_i \geqslant ka_iM_i - kb_{ii}M_i \star M_i + M_i\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right).$$

Donc

$$M_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant ka_iM_i - kb_{ii}M_i \star M_i + M_i\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right).$$

Ainsi, on en déduit que $(\underline{u}, \overline{u})$ est une paire de sous- et sur-solutions pour le problème discret.

□

Soit $u^{n-1} \in [0, M] \subset M_{N\times P}(\mathbb{R})$ $(n = 1, \ldots, m)$, posons $\underline{u}^{n(0)} = 0$, et $\overline{u}^{n(0)} = M$ dans $M_{N\times P}(\mathbb{R})$. On définit les suites $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ de $M_{N\times P}(\mathbb{R})$ par la relation de récurrence suivante

$$\underline{u}_i^{n(l)}\left(\left(1 + \frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = \frac{k}{2}\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i\underline{u}_i^{n(l-1)}\right] + g_i\left(u_i^{n-1}, u^{n-1}\right) \quad (4.2.2)$$

$$\overline{u}_i^{n(l)}\left(\left(1 + \frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = \frac{k}{2}\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i\overline{u}_i^{n(l-1)}\right] + g_i\left(u_i^{n-1}, u^{n-1}\right) \quad (4.2.3)$$

$(1 \leqslant i \leqslant N)$, ainsi $\underline{u}_i^{n(l)}$ (resp. $\overline{u}_i^{n(l)}$) est une solution d'un système linéaire, se détermine à partir des termes précédent $\overline{u}^{n(l-1)}$ et $\underline{u}^{n(l-1)}$ avec u^{n-1} donné, alors pour que ces suites soient bien définies il faut que la matrice $\left(\left(1 + \frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)$ soient inversibles ce qui est satisfait d'après le Lemme 4.1.3 ii) et la Proposition 4.1.1. On remarque que $\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)$ est à diagonale strictement dominant par ligne (et par colonne puisque cette matrice est symétrique) donc on peut utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour calculer les termes des suites $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$

Lemme 4.2.2. *Sous l'hypothèse (H"1), les suites* $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *possèdent la propriété de monotonie*

$$0=\underline{u}^{n(0)}\leqslant\underline{u}^{n(1)}\leqslant\cdots\leqslant\underline{u}^{n(l)}\leqslant\underline{u}^{n(l+1)}\leqslant\overline{u}^{n(l+1)}\leqslant\overline{u}^{n(l)}\leqslant\cdots\leqslant\overline{u}^{n(1)}\leqslant\overline{u}^{n(0)}=M$$

Preuve. On démontre par récurrence sur $l\in\mathbb{N}$, on pose

$$\begin{gathered}\underline{w}^{n(l)}=\underline{u}^{n(l+1)}-\underline{u}^{n(l)}\\ \overline{w}^{n(l)}=\overline{u}^{n(l)}-\overline{u}^{n(l+1)}\\ (0<n\leqslant m)\,.\end{gathered}$$

Montrons que

$$\begin{gathered}\underline{w}^{n(0)}=\underline{u}^{n(1)}-\underline{u}^{n(0)}=\underline{u}^{n(1)}\geqslant 0\\ \overline{w}^{n(0)}=\overline{u}^{n(0)}-\overline{u}^{n(1)}=M-\overline{u}^{n(1)}\geqslant 0\end{gathered}$$

Soit $i=1,\ldots,N$, on a

$$\begin{aligned}\underline{w}_i^{n(0)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)&=\underline{u}_i^{n(1)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)\\&=\frac{k}{2}f_i\left(\underline{u}_i^{n(0)},\overline{u}^{n(0)}\right)+\frac{k}{2}\Gamma_i\underline{u}_i^{n(0)}+g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right)\\&=\frac{k}{2}f_i\left(0,M\right)+g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right)\\&=g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right),\end{aligned}$$

de $u^{n-1}\in[0,M]$ on tire $u_i^{n-1}\in[0,M_i]$, d'après le Lemme 4.1.6 on a $g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right)\geqslant 0$ donc $\underline{w}_i^{n(0)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)\geqslant 0$, et du Lemme 4.1.3 i) ceci implique que $\underline{w}_i^{n(0)}\geqslant 0$ d'où $0=\underline{u}^{n(0)}\leqslant\underline{u}^{n(1)}$

$$\begin{aligned}\overline{w}_i^{n(0)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)&=\left(M_i-\overline{u}_i^{n(1)}\right)\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)\\&=M_i\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)-\frac{k}{2}\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l0)},\underline{u}^{n(l0)}\right)+\Gamma_i\overline{u}_i^{n(0)}\right]\\&\quad-g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right)\\&=M_i\left(I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)+\frac{k}{2}\Gamma_iM_i-\frac{k}{2}f_i\left(M,0\right)-\frac{k}{2}\Gamma_iM_i-g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right)\\&=M_i\left(I+\frac{\mu_i k}{2h^2}A\right)-\frac{k}{2}f_i\left(M,0\right)-g_i\left(u_i^{n-1},u^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Comme $u^{n-1} \in [0, M]$

$$u_i^{n-1} \leqslant M_i, \quad 0 \leqslant u^{n-1}$$

alors d'après le Lemme 4.1.6

$$g_i(M_i, 0) \geqslant g_i\left(M_i, u^{n-1}\right) \geqslant g_i\left(u_i^{n-1}, u^{n-1}\right).$$

Ceci implique que $g_i\left(u_i^{n-1}, u^{n-1}\right) \leqslant g_i(M_i, 0)$

d'où

$$\overline{w}_i^{n(0)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant M_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) - \frac{k}{2}f_i(M, 0) - g_i(M, 0)$$

Or les sous- et sur-solutions $0, M$ vérifient par définition (voir la prmière inégalité dans la définition)

$$M_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) - \frac{k}{2}f_i(M_i, 0) - g_i(M_i, 0) \geqslant 0$$

ce qui entraîne

$$\overline{w}_i^{n(0)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \geqslant 0,$$

d'après le Lemme 4.1.3 i), ceci implique que $\overline{w}_i^{n(0)} \geqslant 0$, d'où, $\overline{u}_i^{n(1)} \leqslant \overline{u}_i^{n(0)} = M_i$.

Montrons que $\underline{w}^{n(l)} \geqslant 0$ et $\overline{w}^{n(l)} \geqslant 0$ en supposant que

$$\underline{w}^{n(l-1)} = \underline{u}^{n(l)} - \underline{u}^{n(l-1)} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \overline{w}^{n(l-1)} = \overline{u}^{n(l-1)} - \overline{u}^{n(l)} \geqslant 0$$

alors

$$\overline{u}^{n(l-1)} \geqslant \overline{u}^{n(l)} \quad \text{et} \quad \underline{u}_i^{n(l)} \geqslant \underline{u}_i^{n(l-1)}$$

ce qui entraîne d'après le Lemme 4.1.5

$$-f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) \geqslant -f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l)}\right)$$

et

$$\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l)}, \overline{u}^{n(l)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l)}\right] - \left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l-1)}\right] \geqslant 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
\underline{w}_i^{n(l)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) &= \left(\underline{u}_i^{n(l+1)} - \underline{u}_i^{n(l)}\right)\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \\
&= \frac{k}{2}\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l)}, \overline{u}^{n(l)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l)}\right] - \frac{k}{2}\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l-1)}\right] \\
&\geqslant \frac{k}{2}\left(\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l)}, \overline{u}^{n(l)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l)}\right] - \left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l-1)}\right]\right) \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.1.3 i) ceci implique que $\underline{w}_i^{n(l)} \geqslant 0$.

de même, on démontre d'une manière analogue que $\overline{w}_i^{n(l)} \geqslant 0$:

de (4.2.2) on obtient

$$-f_i\left(\overline{u}_i^{n(l)}, \underline{u}^{n(l)}\right) \geqslant -f_i\left(\overline{u}_i^{n(l)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right)$$

et

$$\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l-1)}\right] - \left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l)}\right] \geqslant 0$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{w}_i^{n(l)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) &\geqslant \frac{k}{2}\left(\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l-1)}\right] - \left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l)}\right]\right) \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

ce qui implique d'après le Lemme 4.1.3 i) que $\overline{w}_i^{n(l)} \geqslant 0$.

Ainsi, on a démontré que

$$0 = \underline{u}^{n(0)} \leqslant \underline{u}^{n(1)} \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}^{n(l)} \leqslant \underline{u}^{n(l+1)} \leqslant \cdots$$

et

$$M = \overline{u}^{n(0)} \geqslant \overline{u}^{n(1)} \geqslant \cdots \geqslant \overline{u}^{n(l)} \geqslant \overline{u}^{n(l+1)} \geqslant \cdots$$

Il reste à montrer que $w^{n(l)} = \overline{u}^{n(l)} - \underline{u}^{n(l)} \geqslant 0 \quad (l \in \mathbb{N})$.

On a déjà $w^{n(0)} = \overline{u}^{n(0)} - \underline{u}^{n(0)} = M \geqslant 0$. On suppose maintenant que

$$w^{n(l-1)} = \overline{u}^{n(l-1)} - \underline{u}^{n(l-1)} \geqslant 0$$

donc par le Lemme 4.1.5

$$f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) \geqslant f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right)$$

et

$$\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l-1)}\right] - \left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l-1)}\right] \geqslant 0$$

car $\overline{u}^{n(l-1)} \geqslant \underline{u}^{n(l-1)}$ et $\overline{u}^{n(l-1)} \geqslant \underline{u}^{n(l-1)}$ en particulier, donc on obtient

$$\begin{aligned}w_i^{n(l)}\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) &= \left(\overline{u}_i^{n(l)} - \underline{u}_i^{n(l)}\right)\left(\left(1+\frac{k}{2}\Gamma_i\right)I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) \\ &= \frac{k}{2}\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \underline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l-1)}\right] - \frac{k}{2}\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l-1)}\right] \\ &\geqslant \frac{k}{2}\left[f_i\left(\overline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \overline{u}_i^{n(l-1)}\right] - \frac{k}{2}\left[f_i\left(\underline{u}_i^{n(l-1)}, \overline{u}^{n(l-1)}\right) + \Gamma_i \underline{u}_i^{n(l-1)}\right] \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

ceci implique d'après le Lemme 4.1.3 i) que $w_i^{n(l)} \geqslant 0$. $\square$

Théorème 4.2.3. *Sous les hypothèses (H"1) et (H"2), les suites* $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite* u^n*. De plus, cette limite est l'unique solution du système discret* (4.1.6) *et* $u = (u^n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ *est l'unique solution de problème discret* (4.1.5) *.*

Preuve. La convergence des suites $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ découle du lemme précédent, sous les hypothèses (H"1) $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant N,\quad 1 \leqslant j \leqslant P$ la suite réelle $\left(\underline{u}_{ij}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est aussi croissante et majorée par γ_i, donc elle converge vers sa borne supérieur qu'on la note $\underline{\underline{u}}_{ij}^n$.
c'est-à-dire

$$\lim_{l\to\infty} \underline{u}_{ij}^{n(l)} = \underline{\underline{u}}_{ij}^n, \quad \underline{u}_{ij}^{n(l)} \leqslant \underline{\underline{u}}_{ij}^n \quad (l \in \mathbb{N})$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant N,\quad 1 \leqslant j \leqslant P$.
D'où, $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers $\underline{\underline{u}}^n$
c'est-à-dire

$$\lim_{l\to\infty} \underline{u}^{n(l)} = \left(\lim_{l\to\infty} \underline{u}_{ij}^{n(l)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant P}} = \left(\underline{\underline{u}}_{ij}^n\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant P}} = \underline{\underline{u}}^n, \quad \underline{u}^{n(l)} \leqslant \underline{\underline{u}}^n \quad (l \in \mathbb{N})$$

De même, comme la suite $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 ; elle converge vers une limite $\overline{\overline{u}}^n$

$$\lim_{l\to\infty} \overline{u}^{n(l)} = \overline{\overline{u}}^n, \quad \overline{\overline{u}}^n \leqslant \overline{u}^{n(l)} \quad (l \in \mathbb{N})$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \underline{u}^{n(l)} \leqslant \overline{u}^{n(l)} \leqslant M$ alors par passage à la limite $0 \leqslant \underline{\underline{u}}^n \leqslant \overline{\overline{u}}^n \leqslant M$ donc en particulier, on a $\overline{\overline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^n \geqslant 0$.
Par passage à la limite, dans (4.2.2) et (4.2.3) (lorsque $l \to +\infty$) on obtient

$$\underline{\underline{u}}_i^n \left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) = \frac{k}{2} f_i(\underline{\underline{u}}_i^n, \overline{\overline{u}}^n) + g_i\left(u_i^{n-1}, u^{n-1}\right),$$

$$\overline{\overline{u}}_i^n \left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) = \frac{k}{2} f_i\left(\overline{\overline{u}}_i^n, \underline{\underline{u}}^n\right) + g_i\left(u_i^{n-1}, u^{n-1}\right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\underline{\underline{u}}_i^n \left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) =& \frac{k}{2} a_i \underline{\underline{u}}_i^n - \frac{k}{2} b_{ii} \underline{\underline{u}}_i^n - \frac{k}{2} \underline{\underline{u}}_i^n \star \left(\acute{b}_i \overline{\overline{u}}^n + c_i \overline{\overline{u}}^n S\right) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2} A\right) + \frac{k}{2} a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2} u_i^{n-1} \star \left(b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1} S\right),\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\overline{\overline{u}}_i^n \left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = \frac{k}{2}a_i\overline{\overline{u}}_i^n - \frac{k}{2}b_{ii}\overline{\overline{u}}_i^n - \frac{k}{2}\overline{\overline{u}}_i^n \star \left(\acute{b}_i\underline{\underline{u}}^n + c_i\underline{\underline{u}}^n S\right) + u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star \left(b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1} S\right) \quad (4.2.5)$$

Soient $B,\ \ C \in M_{2N}(\mathbb{R}),\ \ \widetilde{\mu},\ \ \widetilde{a} \in \mathbb{R}^{2N},\ \ U^{n-1} \in M_{2N\times P}(\mathbb{R})$ définies par bloc comme suite

$$B = \begin{pmatrix} d & \acute{b} \\ \acute{b} & d \end{pmatrix},\ \ C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix},\ \ \widetilde{a} = \begin{pmatrix} a & a \end{pmatrix},\ \ \widetilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & \mu \end{pmatrix},\ \ U^{n-1} = \begin{pmatrix} u^{n-1} \\ u^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

où $d \in M_N(\mathbb{R})$ diagonale avec $d_{ii} = b_{ii}$.

Soit U^{n-1}donné, considèrons le problème suivant :

Resoudre dans $M_{2N\times P}(\mathbb{R})$ le système en V

$$\begin{cases} V_i\left(I + \frac{\widetilde{\mu}_i k}{2h^2}A\right) = & \frac{k}{2}\widetilde{a}_i V_i - \frac{k}{2}V_i \star (B_i V + C_i V S) + \\ & U_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}\widetilde{a}_i U_i^{n-1} - \frac{k}{2}U_i^{n-1} \star (B_i U^{n-1} + C_i U^{n-1} S) \\ 1 \leqslant i \leqslant 2N \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Les matrices $\widetilde{\mu},\ \widetilde{a},\ B$ et C sont positives. Le problème (4.2.7) est analogue à (4.1.6), la seule diférence est la taille du système. On a montré que sous l'hypothèse (H"2) $k < \frac{2}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\rho_i}$ alors le système (4.1.6) admet au plus une seule solution dans $[0, M]$. Alors de même, si $k < \frac{2}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2N}\widetilde{\rho}_i}$, alors (4.2.7) admet au plus une seule solution dans $\left[0, \widetilde{M}\right]$, tels que $\widetilde{M}$ et $\widetilde{\rho}_i$ sont définies d'une manière analogue :

$\widetilde{M} \in M_{2N\times P}(\mathbb{R}) : \widetilde{M}_i = \max\left(\frac{\widetilde{a}_i}{B_{ii}}, \|U_i^0\|_\infty\right) e$

$\widetilde{\rho}_i = \widetilde{a}_i + \widetilde{M}_i \sum_{q=1}^{2N} (B_{iq} + LC_{iq})\ (i = 1, \ldots, 2N)$

Par définition, $\widetilde{a}, B$ et U^0 vérifient pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$\widetilde{a}_i = \widetilde{a}_{i+N} = a_i,\quad B_{ii} = B_{(i+N)(i+N)} = d_{ii} = b_{ii},\quad U_i^0 = u_i^0,$$

alors

$$\widetilde{M}_i = \widetilde{M}_{i+N} = \max\left(\frac{a_i}{b_{ii}}, \left\|u_i^0\right\|_\infty\right) e = M_i.$$

Autrement dit,

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}$$

de même, $\widetilde{\rho}_i = \widetilde{\rho}_{i+N} = \rho_i$, donc on obtient $k < \frac{2}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\rho_i} = \frac{2}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\widetilde{\rho}_i}$

D'où on en déduit que le système (4.2.7) possède au plus une solution dans $[0, M]$.

Si on pose $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tel que $u, v \in M_{N\times P}(\mathbb{R})$, alors en tenant compte de (4.2.6), le système (4.2.7) s'écrit

$$\begin{cases} u_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = & \frac{k}{2}a_i u_i - \frac{k}{2}b_{ii}u_i - \frac{k}{2}u_i \star \left(\acute{b}_i v + c_i v S\right) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star \left(b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1}S\right) \\ v_i\left(I + \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) = & \frac{k}{2}a_i v_i - \frac{k}{2}b_{ii}v_i - \frac{k}{2}v_i \star \left(\acute{b}_i u + c_i u S\right) + \\ & u_i^{n-1}\left(I - \frac{\mu_i k}{2h^2}A\right) + \frac{k}{2}a_i u_i^{n-1} - \frac{k}{2}u_i^{n-1} \star \left(b_i u^{n-1} + c_i u^{n-1}S\right) \\ 1 \leqslant i \leqslant N & \end{cases}$$

d'où on peut noter la symétrie de toute solution de (4.2.7) c.-à-d. si $V^\star = \begin{pmatrix} u^\star \\ v^\star \end{pmatrix}$ est solution du système (4.2.7) on vérifie facilement que $\begin{pmatrix} v^\star \\ u^\star \end{pmatrix}$ est aussi solution de ce système. Par l'unicité, on en déduit que $\begin{pmatrix} u^\star \\ v^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^\star \\ u^\star \end{pmatrix}$ ce qui entraîne $v^\star = u^\star$. Or par (4.2.4) et (4.2.5), $\begin{pmatrix} \underline{\underline{u}}^n \\ \overline{\overline{u}}^n \end{pmatrix}$ est solution de (4.2.7)) ce qui implique d'après ce qui précède que $\underline{\underline{u}}^n = \overline{\overline{u}}^n$. Ainsi, une unique solution $u^n = \underline{\underline{u}}^n = \overline{\overline{u}}$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$ du système (4.1.6) (pour u^{n-1} donné) existe ce qui entraîne l'existence d'une solution $u = (u^n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ pour problème discret (4.1.5), cette solution est unique d'après le Théorème 4.2.1 . $\square$

4.3 Convergence vers la solution exacte

On définit sur $M_{N\times P}(\mathbb{R})$ la norme $\|\cdot\|$

$$u \in M_{N\times P}(\mathbb{R}) : \|u\| = \max_{\substack{1\leqslant q\leqslant N \\ 1\leqslant p\leqslant P}} |u_{qp}|$$

Rappelons que $u := (u^n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ est la solution approchée (solution de (4.1.5)) et $\hat{u} := (\hat{u}^n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ est la solution exacte (solution du problème intégrodifférentiel (2.1.1) aux pointes $(x_j, t_n)_{\substack{1\leqslant j\leqslant P \\ 1\leqslant n\leqslant m}}$. On note l'erreur $\|u^n - \hat{u}^n\|$ par E^n

Définition 4.3.1. On dit que la solution approchée u (la solution du problème discret) converge vers la solution exacte $\hat{u}$ si $\max\limits_{1\leqslant n\leqslant m} E^n$ tend vers 0 lorsque (h, k) tend vers 0.

Théorème 4.3.1. *Sous les hypothèses (H"1) et (H"2), la solution approchée u converge vers la solution exacte $\hat{u}$. si de plus, il existe θ tel que $k \leqslant \theta < \frac{2}{\rho}$ alors cette convergence est d'ordre 2 en espace et en temps.*

Preuve. Soit $\left|\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n\right| = \|\hat{u}^n - \hat{u}^n\| = E^n$.

Si $\epsilon = \operatorname{sgn}\left(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n\right)$ alors $\left|\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n\right| = \epsilon\left(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n\right)$

D'après (4.1.3) (l'expression de l'erreur de consistance) on a

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{ij}^n + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(-\hat{u}_{ij-1}^n + 2\hat{u}_{ij}^n - \hat{u}_{ij+1}^n\right) \quad = \quad & \frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^n\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}\hat{u}_{qj}^n - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n)\right) + \\
& \hat{u}_{ij}^{n-1} + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(\hat{u}_{ij-1}^{n-1} - 2\hat{u}_{ij}^{n-1} + \hat{u}_{ij+1}^{n-1}\right) + \\
& \frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^{n-1}\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1} - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right) + kR_{ji}^n
\end{aligned}$$

u est solution de (4.1.2) alors

$$\begin{aligned}
u_{ij}^n + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(-u_{ij-1}^n + 2u_{ij}^n - u_{ij+1}^n\right) \quad = \quad & \frac{k}{2}u_{ij}^n\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}u_{qj}^n - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(u_q^n)\right) + \\
& u_{ij}^{n-1} + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(u_{ij-1}^{n-1} - 2u_{ij}^{n-1} + u_{ij+1}^{n-1}\right) + \\
& \frac{k}{2}u_{ij}^{n-1}\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}u_{qj}^{n-1} - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(u_q^{n-1})\right).
\end{aligned}$$

Puis on soustrait membre à membre les deux équations

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n\right) + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(-\hat{u}_{ij-1}^n + 2\hat{u}_{ij}^n - \hat{u}_{ij+1}^n\right) - \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(-u_{ij-1}^n + 2u_{ij}^n - u_{ij+1}^n\right) \\
&\quad = \frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^n\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}\hat{u}_{qj}^n - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n)\right) - \frac{k}{2}u_{ij}^n\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}u_{qj}^n - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(u_q^n)\right) + \\
&\qquad \hat{u}_{ij}^{n-1} + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(\hat{u}_{ij-1}^{n-1} - 2\hat{u}_{ij}^{n-1} + \hat{u}_{ij+1}^{n-1}\right) - u_{ij}^{n-1} + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(u_{ij-1}^{n-1} - 2u_{ij}^{n-1} + u_{ij+1}^{n-1}\right) + \\
&\qquad \frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^{n-1}\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1} - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right) - \\
&\qquad \frac{k}{2}u_{ij}^{n-1}\left(a_i - \sum_{q=1}^N b_{iq}u_{qj}^{n-1} - \sum_{q=1}^N c_{iq}I_j(u_q^{n-1})\right) + kR_{ji}^n
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$
\begin{aligned}
&(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) + \frac{\mu_i k}{2h^2}\left(\left[(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - (\hat{u}_{ij-1}^n - u_{ij-1}^n)\right] + \left[(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - (\hat{u}_{ij+1}^n - u_{ij+1}^n)\right]\right) + \\
&\frac{k}{2}(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n)\left(b_{ii}u_{ij}^n + \sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^n + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n)\right) \\
&\qquad = (\hat{u}_{ij}^{n-1} - u_{ij}^{n-1})\left[1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right)\right] + \\
&\qquad \frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij-1}^{n-1} - u_{ij-1}^{n-1}) + \frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij+1}^{n-1} - u_{ij+1}^{n-1}) + \\
&\qquad \frac{k}{2}a_i(\hat{u}_{ij}^{n-1} - u_{ij}^{n-1}) - \frac{k}{2}u_{ij}^{n-1}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}(\hat{u}_{qj}^{n-1} - u_{qj}^{n-1}) + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1} - u_q^{n-1})\right) + \\
&\qquad \frac{k}{2}a_i(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - \frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^n\left(\sum_{q=1, q\neq i}^{N} b_{iq}(\hat{u}_{qj}^n - u_{qj}^n) + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n - u_q^n)\right) + kR_{ji}^n.
\end{aligned}
$$

En multipliant par ϵ

$$
\begin{aligned}
&\epsilon(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) + \epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}\left[(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - (\hat{u}_{ij-1}^n - u_{ij-1}^n)\right] + \epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}\left[(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - (\hat{u}_{ij+1}^n - u_{ij+1}^n)\right] + \\
&\epsilon\frac{k}{2}(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n)\left(b_{ii}u_{ij}^n + \sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^n + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n)\right) \\
&\qquad = \epsilon(\hat{u}_{ij}^{n-1} - u_{ij}^{n-1})\left[1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right)\right] + \\
&\qquad \epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij-1}^{n-1} - u_{ij-1}^{n-1}) + \epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij+1}^{n-1} - u_{ij+1}^{n-1}) - \\
&\qquad \epsilon\frac{k}{2}u_{ij}^{n-1}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}(\hat{u}_{qj}^{n-1} - u_{qj}^{n-1}) + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1} - u_q^{n-1})\right) + \\
&\qquad \epsilon\frac{k}{2}a_i(\hat{u}_{ij}^{n-1} - u_{ij}^{n-1}) + \epsilon\frac{k}{2}a_i(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - \\
&\qquad \epsilon\frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^n\left(\sum_{q=1, q\neq i}^{N} b_{iq}(\hat{u}_{qj}^n - u_{qj}^n) + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n - u_q^n)\right) + \epsilon kR_{ji}^n
\end{aligned}
$$

On remarque que

$$\epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}\left(\left[(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - (\hat{u}_{ij-1}^n - u_{ij-1}^n)\right] + \left[(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) - (\hat{u}_{ij+1}^n - u_{ij+1}^n)\right]\right) \geqslant 0$$

et

$$\epsilon\left(b_{ii}u_{ij}^n + \sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^n + \sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n)\right)(\hat{u}_{ij}^n - u_{ij}^n) \geqslant 0$$

alors

$$\begin{aligned}\|\hat{u}^n - u^n\| = \epsilon(\hat{u}^n_{ij} - u^n_{ij}) \leqslant & \epsilon(\hat{u}^{n-1}_{ij} - u^{n-1}_{ij})\left[1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}^{n-1}_{qj} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^{n-1}_q)\right)\right] + \\ & \epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}^{n-1}_{ij-1} - u^{n-1}_{ij-1}) + \epsilon\frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}^{n-1}_{ij+1} - u^{n-1}_{ij+1}) - \\ & \epsilon\frac{k}{2}u^{n-1}_{ij}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}(\hat{u}^{n-1}_{qj} - u^{n-1}_{qj}) + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^{n-1}_q - u^{n-1}_q)\right) + \\ & \epsilon\frac{k}{2}a_i(\hat{u}^{n-1}_{ij} - u^{n-1}_{ij}) + \epsilon\frac{k}{2}a_i(\hat{u}^n_{ij} - u^n_{ij}) - \\ & \epsilon\frac{k}{2}\hat{u}^n_{ij}\left(\sum_{q=1, q\neq i}^{N} b_{iq}(\hat{u}^n_{qj} - u^n_{qj}) + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^n_q - u^n_q)\right) + \epsilon k R^n_{ji}\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

D'autre part comme $-a_i + b_{ii}\gamma_i \geqslant 0$ et $\hat{u}^{n-1} \in [0, M]$

$$-\frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}^{n-1}_{qj} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^{n-1}_q)\right) \geqslant -\frac{k}{2}\left(-a_i + b_{ii}\gamma_i + \sum_{q=1}^{N}(b_{iq} + Lc_{iq})\gamma_q\right)$$

donc

$$1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}^{n-1}_{qj} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^{n-1}_q)\right) \geqslant 1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(-a_i + b_{ii}\gamma_i + \sum_{q=1}^{N}(b_{iq} + Lc_{iq})\gamma_q\right)$$

d'après l'hypothèse (H"1) on a $k < \frac{2h^2}{h^2 \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\Gamma_i + \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\mu_i}$, alors

$$1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(-a_i + b_{ii}\gamma_i + \sum_{q=1}^{N}(b_{iq} + Lc_{iq})\gamma_q\right) > 0$$

d'où

$$1 - \frac{\mu_i k}{h^2} - \frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}^{n-1}_{qj} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^{n-1}_q)\right) > 0$$

on pose $C^n_i := 1 - \frac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}^{n-1}_{qj} + \sum_{q=1}^{N} c_{iq} I_j(\hat{u}^{n-1}_q)\right)$, alors

$$\frac{C^n_i - \frac{\mu_i k}{h^2}}{C^n_i}(\hat{u}^{n-1}_{ij} - u^{n-1}_{ij}) + \frac{\mu_i k}{2C^n_i h^2}(\hat{u}^{n-1}_{ij-1} - u^{n-1}_{ij-1}) + \frac{\mu_i k}{2C^n_i h^2}(\hat{u}^{n-1}_{ij+1} - u^{n-1}_{ij+1})$$

est combinaison convexe des coefficients de $\hat{u}^{n-1} - u^{n-1}$, ce qui entraîne

$$\epsilon\left(\left(C^n_i - \frac{\mu_i k}{h^2}\right)(\hat{u}^{n-1}_{ij} - u^{n-1}_{ij}) + \frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}^{n-1}_{ij-1} - u^{n-1}_{ij-1}) + \frac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}^{n-1}_{ij+1} - u^{n-1}_{ij+1})\right) \leqslant C^n_i \left\|\hat{u}^{n-1} - u^{n-1}\right\|$$

c'est-à-dire que

$$\epsilon\left[1-\tfrac{\mu_i k}{h^2}-\tfrac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1}+\sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right)\right](\hat{u}_{ij}^{n-1}-u_{ij}^{n-1})+$$
$$\epsilon\tfrac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij-1}^{n-1}-u_{ij-1}^{n-1})+\epsilon\tfrac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij+1}^{n-1}-u_{ij+1}^{n-1})$$
$$\leqslant C_i^n\left\|\hat{u}^{n-1}-u^{n-1}\right\|.$$

Or $0 < C_i^n \leqslant 1$, donc

$$\begin{aligned}&\epsilon\left[1-\tfrac{\mu_i k}{h^2}-\tfrac{k}{2}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}\hat{u}_{qj}^{n-1}+\sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1})\right)\right](\hat{u}_{ij}^{n-1}-u_{ij}^{n-1})+\\&\epsilon\tfrac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij-1}^{n-1}-u_{ij-1}^{n-1})+\epsilon\tfrac{\mu_i k}{2h^2}(\hat{u}_{ij+1}^{n-1}-u_{ij+1}^{n-1})\\&\leqslant\left\|\hat{u}^{n-1}-u^{n-1}\right\|.\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

on termine par

$$\begin{aligned}-\epsilon\tfrac{k}{2}u_{ij}^{n-1}\left(\sum_{q=1}^{N} b_{iq}(\hat{u}_{qj}^{n-1}-u_{qj}^{n-1})+\sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^{n-1}-u_q^{n-1})\right)+\epsilon\tfrac{k}{2}a_i(\hat{u}_{ij}^{n-1}-u_{ij}^{n-1})\\ \leqslant\tfrac{k}{2}\rho_i\left\|\hat{u}^{n-1}-u^{n-1}\right\|\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

et

$$\epsilon\frac{k}{2}a_i(\hat{u}_{ij}^n-u_{ij}^n)-\epsilon\frac{k}{2}\hat{u}_{ij}^n\left(\sum_{q=1,q\neq i}^{N} b_{iq}(\hat{u}_{qj}^n-u_{qj}^n)+\sum_{q=1}^{N} c_{iq}I_j(\hat{u}_q^n-u_q^n)\right)\leqslant\frac{k}{2}\rho_i\left\|\hat{u}^n-u^n\right\|\tag{4.3.4}$$

Posons

$$\rho := \max_{1\leqslant i\leqslant N}\rho_i$$

par (4.3.1) et en tenant compte de (4.3.2)-(4.3.4) on obtient

$$\left\|\hat{u}^n-u^n\right\|\leqslant\left\|\hat{u}^{n-1}-u^{n-1}\right\|+\frac{k}{2}\rho\left\|\hat{u}^{n-1}-u^{n-1}\right\|+\frac{k}{2}\rho\left\|\hat{u}^n-u^n\right\|+\epsilon kR_{ji}^n$$

En sommant de $n = 1$ jusqu'à $n = l < m$ on obtient

$$\left\|\hat{u}^l-u^l\right\|\leqslant\left\|\hat{u}^0-u^0\right\|+\frac{k}{2}\rho\left\|\hat{u}^0-u^0\right\|+\frac{k}{2}\rho\left\|\hat{u}^l-u^l\right\|+k\rho\sum_{q=1}^{l-1}\left\|\hat{u}^n-u^n\right\|+k\sum_{q=1}^{l}\left\|R^n\right\|$$

comme $\left\|\hat{u}^0-u^0\right\|=0$

alors $\left(1-\dfrac{k}{2}\rho\right)\left\|\hat{u}^l-u^l\right\|\leqslant k\rho\displaystyle\sum_{q=1}^{l-1}\left\|\hat{u}^n-u^n\right\|+\epsilon kR_{ji}^n$

par l'hypothèse (H"2) on a $1-\dfrac{k}{2}\rho>0$, donc

$$\left\|\hat{u}^l-u^l\right\|\leqslant\frac{2k\rho}{2-k\rho}\sum_{q=1}^{l-1}\left\|\hat{u}^n-u^n\right\|+\frac{2k}{2-k\rho}\sum_{q=1}^{l}\left\|R^n\right\|$$

Par l'inégalité de Granowall discrète [21] :

$$\left\|\hat{u}^l - u^l\right\| \leqslant \frac{2k}{2-k\rho}\sum_{q=1}^{l}\|R^n\|\exp\left(\frac{2k\rho\,(l-1)}{2-k\rho}\right)$$

d'après le Théorème 4.1.1 on a $\|R^n\| \leqslant C\left(h^2+k^2\right)$
alors $\left\|\hat{u}^l - u^l\right\| \leqslant \frac{2kl}{2-k\rho}C\left(h^2+k^2\right)\exp\left(\frac{2k\rho(l-1)}{2-k\rho}\right)$
par conséquent

$$\max_{1\leqslant l\leqslant m} E^l = \max_{1\leqslant l\leqslant m}\left\|\hat{u}^l - u^l\right\| \leqslant \frac{2km}{2-k\rho}C\left(h^2+k^2\right)\exp\left(\frac{2k\rho\,(m-1)}{2-k\rho}\right)$$

comme $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\frac{2km}{2-k\rho}C\left(h^2+k^2\right)\exp\left(\frac{2k\rho(m-1)}{2-k\rho}\right) = 0$
donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\max\limits_{1\leqslant l\leqslant m} E^l = 0$
ce qui signifie que la solution approchée u converge vers la solution exacte $\hat{u}$.
Si $k \leqslant \theta < \frac{2}{\rho}$ alors il est claire que $\frac{2km}{2-k\rho}\exp\left(\frac{2k\rho(m-1)}{2-k\rho}\right) \leqslant \frac{2\theta m}{2-\theta\rho}\exp\left(\frac{2\theta\rho(m-1)}{2-\theta\rho}\right)$
d'où

$$\max_{1\leqslant l\leqslant m} E^l \leqslant \acute{C}\left(h^2+k^2\right)$$

tel que $\acute{C} = C\left(\frac{2\theta m}{2-\theta\rho}\exp\left(\frac{2\theta\rho(m-1)}{2-\theta\rho}\right)\right)$
ainsi, la convergence est d'ordre 2 en espace et en temps. □

4.4 Exemple

Soient $u_{01}(x) = \sin x$ et $u_{02}(x) = x(\pi - x)$ les distributions initiales des densités cellulaires de types 1 et 2 respectivement, dans un sinusoïde hépatique de longueur π, et soient les paramètres $\mu = (1/10, 1, 20)$ $a = (7, 8)$ $b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ $c = 1/\pi \begin{pmatrix} 4 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$.
L'exécution de l'algorithme de résolution consiste à calculer les r premiers termes des suites $\left(\underline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{u}^{n(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ données par la relation de récurrence (4.2.2)-(4.2.3). Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, comme la solution approchée u satisfait $\underline{u}^{n(l)} \leqslant u \leqslant \overline{u}^{n(l)}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$; on a $\left|\overline{u}_i^{n(l)} - u_i\right| \leqslant \left|\overline{u}_i^{n(l)} - \underline{u}_i^{n(l)}\right|$ et $\left|\underline{u}_i^{n(l)} - u_i\right| \leqslant \left|\overline{u}_i^{n(l)} - \underline{u}_i^{n(l)}\right|$ donc le teste d'arrêt de l'algorithme est $\left|\overline{u}_i^{n(r)} - \underline{u}_i^{n(r)}\right| < \varepsilon$.On prend les pas de discrétisation $h = 0.0491$ et $k = 0.0108$:
Pour noter l'indépendance de l'état stationnaire de la donnée initiale, on va exécuter l'algorithme une deuxième fois pour la distribution initiale : $\acute{u}_{01}(x) = 2x(\pi - x)$ et $\acute{u}_{02}(x) = (x - \pi)(1 - \cos(x))$. Les résultat sont introduit par les graphes suivants où $u = (u_1, u_2)$ correspond à l'état initial u_0 et $\acute{u} = (\acute{u}_1, \acute{u}_2)$ correspond à $\acute{u}_0$

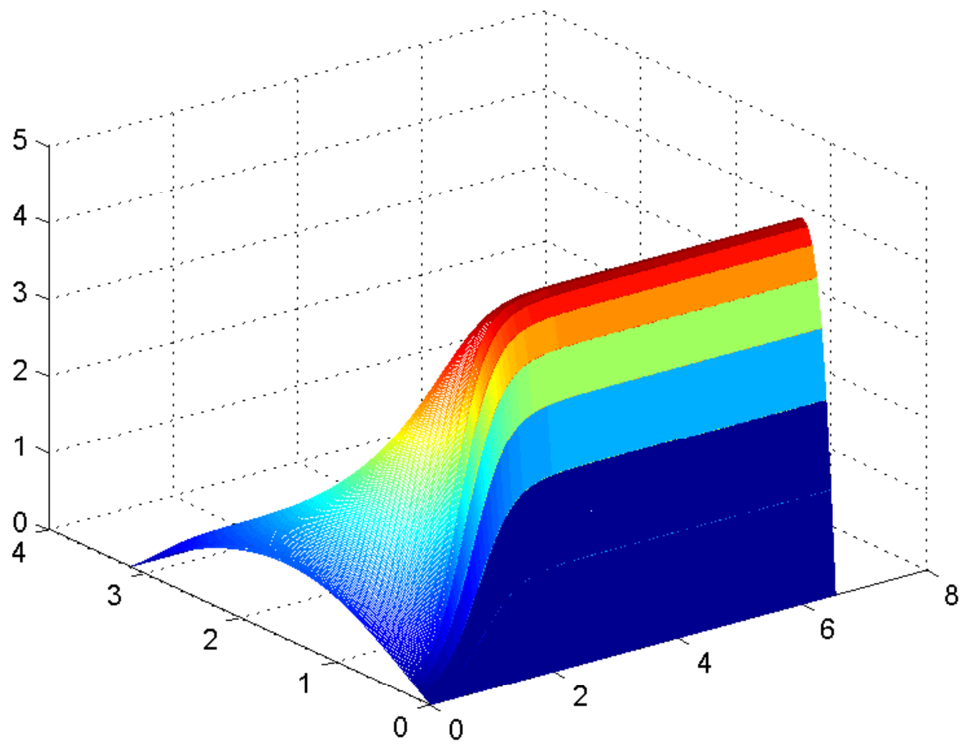

FIG. 4.1 – Graphe de u_1

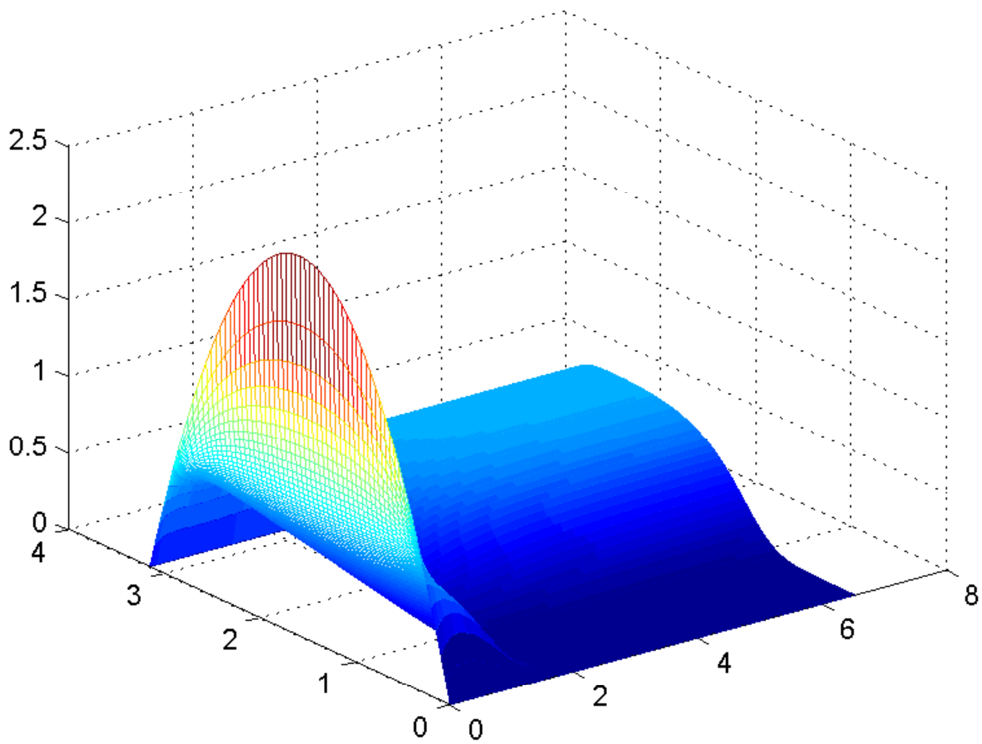

FIG. 4.2 – Graphe de u_2

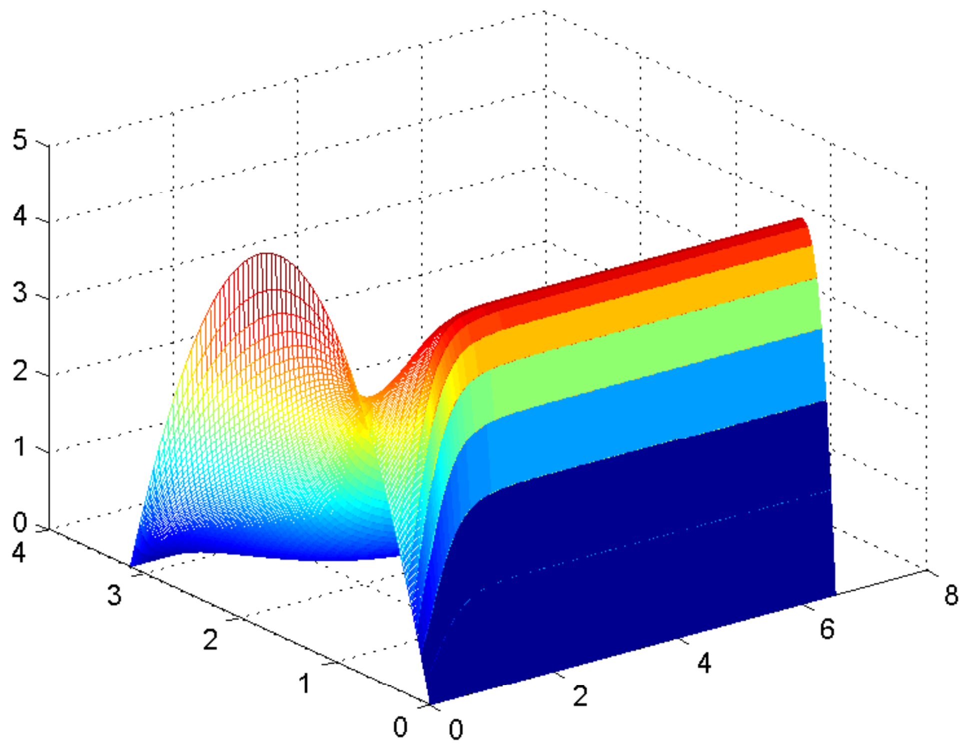

FIG. 4.3 – Graphe de $\acute{u}_1$

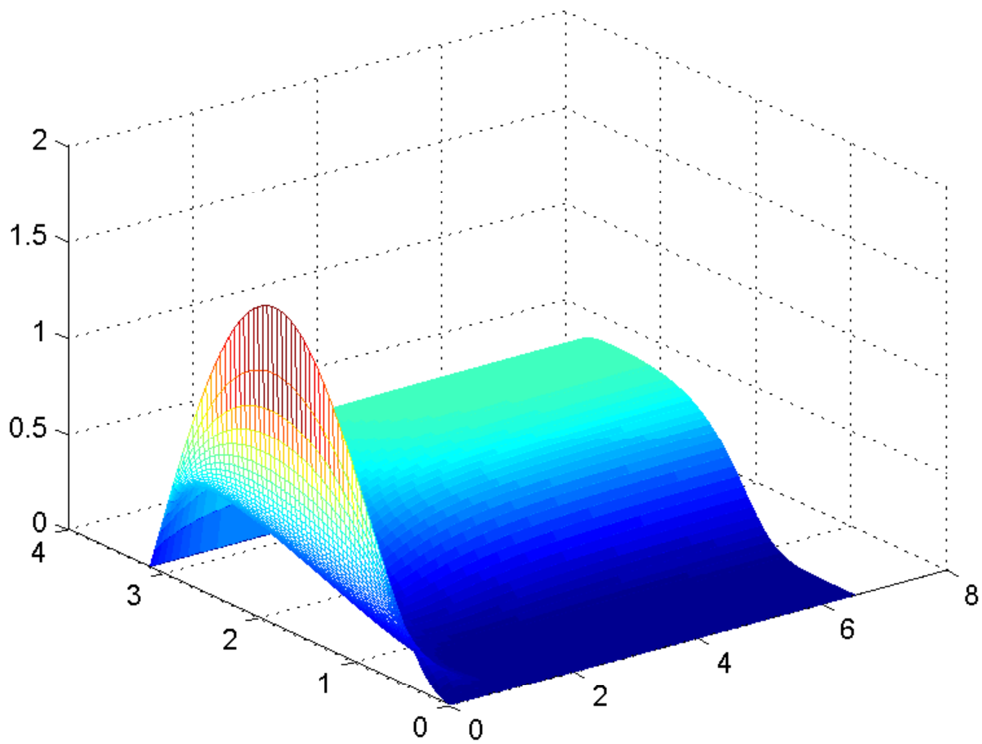

Fig. 4.4 – Graphe de $\acute{u}_2$

Conclusion

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude d'un système intégro-différentiel avec diffusion décrivant l'auto organisation de N types de cellules du foie, en tenant compte des mécanismes gouvernant l'évolution de la densité de ces cellules. Donc le modèle sert à décrire toutes les phénomènes soumis aux mêmes mécanismes.
Pour ce type de problèmes, la solution représente la distribution de la densité de chaque type de cellules en fonction du temps et de la position, donc seules les solutions positives sont acceptables ; c'est pourquoi le choix d'une paire de sous- et sur-solutions positives nous a été très utile dans la démonstration de l'existence et l'unicité de tel solution.

On s'est intéressé aussi au problème stationnaire correspondant, afin d'introduire quelques résultat concernant le comportement asymptotique de la solution lorsque $t \to +\infty$. Notre objectif était d'établir des conditions sur les paramètres pour que les espèces persistent (co-existent) ; c'est pourquoi qu'on a utilisé une paire de sous- et sur-solutions strictement positives à partir desquels on a construit deux suites limitant un secteur entre deux quasisolutions strictement positives sur $]0, L[$, vers lequel la solution $u(x,t)$ est attirée lorsque $t \to +\infty$; cependant, se résultat n'est valide que pour les solution ayant la donnée initiale u_0 satisfait $\alpha\phi^\star \leqslant u_0 \leqslant \overline{\varphi}^1$ ou $\alpha\phi^\star \leqslant u(\cdot,t^\star) \leqslant \overline{\varphi}^1$ pour un certain $t^\star > 0$. Ce résultat peut être généralisé aux solutions ayant une donnée initiale positive quelconque si on montre l'existence de $t^\star > 0$ satisfaisant $\alpha\phi^\star \leqslant u(\cdot,t^\star) \leqslant \overline{\varphi}^1$.

La discrétisation numérique a été également effectuée à l'aide de la méthode des différences finies de crank-Nicolson ; on a obtenu de bon résultats de convergence numérique grâce à l'utilisation des approximations dont l'ordre de précision est deux.

Bibliographie

[1] S. Ahmad, R. Rao, Stability of Volterra Diffusion Equations with Time Delays, Applied Mathematics and Computation 90, pp.143-154 (1998)

[2] L. Bass, A. J. Bracken, K. Holmaker and B. R. F. Jefferies, Integro-differential equations for the self-organisation of liver zones by competitive exclusion of celltypes.The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, 29, (1987), pp. 156-194.

[3] J.M. Bony, Principe du maximum dans les espaces de Sobolev, Gomptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie A, 265 A967), 333-336.

[4] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, (1987)

[5] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J., (1964)

[6] M. G. Garroni and J.-L. Menaldi, Green functions for second order parabolic integro-differential problems. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992

[7] M.G. Garroni, J.L. Menaldi, Second order elliptic integro-differential problems. Resaerch Lecture Notes in Mathematics, Vol.430, Champan an Hall, (2002)

[8] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, (1983)

[9] K. Holmaker, An Optimal Control Problem in the Study of Liver Kinetics, Journal of Optimization Theory and Applications : Vol. 48, No. 2, FEBRUARY 1986, pp. 289-302

[10] J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, 1955

[11] E.H. Kim, A steady state of morphogen gradients for semilinear elliptic systems.Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2005(2005), No. 62, pp. 1-9.

[12] P. Knabner, L. Angermann, Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, Inc. 2003

[13] M. Kouche, N.e. Tatar, Extinction and asymptotic behavior of solutions of a system arising in biology, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 23 (2004), 17-38.

[14] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uraltseva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Transl. Math. Monographs, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

[15] P.L. Lions, A remark on the Bony maximum principle, Proc. Am. Math. Soc, 88 A982), 503-508.

[16] R. Lüllmann-Rauch, Histologie. Bruxelles : Edition De Boeck Université, 2008.

[17] C. V. Pao, Finite difference reaction-diffusion systems with coupled boundary conditions and time delays, J. Math. Anal. Appl. 272(2) (2002), pp. 407-443.

[18] C.V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum, New. York, 1992.

[19] C.V. Pao, Quasisolutions and global attractor of reaction-diffusion systems. Nonlinear Analysis, 26(12), (1996), pp.1889-1903.

[20] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations. New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer-Verlag 1984.

[21] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Numerical Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2007

[22] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio, Calcul Scientifique. Cours, exercices corrigés et illustrations enMATLAB et Octave, Springer-Verlag Italia 2010

[23] R. Redlinger, Existence theorems for semilinear parabolic systems with functionals. Nonlinear Analysis 8(6) (1984), pp. 667-682.

[24] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, NewYork, 1983

[25] G.M. Troianiello, Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems, Plenum Press, New York, 1987.

[26] Z. Wu, J. Yin and C. Wang, Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.2006