

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Application de la théorie du semi groupe d'opérateurs linéaires
pour l'étude de l'existence et l'unicité de certains problèmes de
mathématique**

Option : AFA

Par :
Boutaghane Ferial & Kermouz Chadiya

Encadré par : Leulmi Soumya

M.C.B.U.SKIKDA

Devant le jury :

Présiden : LALLOUCHE. AbdAllah
Examineur: Toumi Habiba

M.C.A. U. SKIKDA
M.A.A. U. SKIKDA

Année : 2022/2023

TABLE DES MATIÈRES

Résumé en anglais	iv
Résumé en français	v
Résumé en Arabe	vi
Remerciements	vii
Dédicace	viii
Notations générales	ix
Introduction générale	1
1 Quelques notions préliminaires	5
1.1 Les espaces de Sobolev	5
1.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$:	5
1.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$:	6
1.2 Certaines inégalités fonctionnelles utiles	7
1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz	7

1.2.2	Inégalité de Young	7
1.2.3	Inégalité de Holder	8
1.2.4	Inégalité de Poincaré	8
1.3	Rappel sur les opérateurs	8
1.3.1	L'ensemble résolvant et la résolvante	9
1.3.2	Opérateur fermé	9
1.3.3	Opérateurs m -dissipatifs	10
1.4	Théorème de Lax-Milgram	10
2	Semi groupe d'opérateurs linéaires bornés	5
2.1	Définition d'un semi groupe fortement continue	6
2.2	Générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe	6
2.3	Théorème de Hille-Yosida	7
2.4	Théorème de Lumer-Phillips	8
2.5	Problème de Cauchy abstrait	8
2.5.1	L'existence de la solution	9
2.5.2	L'unicité de la solution	11
2.5.3	Régularité des solutions	11
3	Théorie des semi groupe et Application	23
3.1	Equations de Schrodinger	23
3.1.1	Position du problème	24
4	Système des poutres laminées avec un frottement amortissement	31
4.0.2	position du problème :	31
4.0.3	Existence et unicité :	32
	Conclusion général	47

Bibliographie	48
----------------------	-----------

In this work , we are intersted in the study of existence and uniqueness of the solution of some mathematical problems using semi-group theory. Firstly, introduce the Schrodinger problem, then we present a mathematical study of the elastic system modeled on highly laminated beams .We write each of the precendent problems in the form of an abstract cauchy problem under appropriate assumptions on the data.

Key words : Schrodinger equation, existence and uniqueness of the solution, Cauchy problem, semigroup, elastic system modeled on highly laminated beams, Lumer Philips theorem.

Résumé en français

Dans ce mémoire, On s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de quelques problèmes mathématique en utilisant la théorie du semi groupe. On considère premièrement le problème de Schrodinger puis on étudie le système élastique modélisent des pourtes laminées avec un forttement amortissement. On écrit chaque problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait. Sous des hypothèses appropriées sur les données, on utilise le théorème de Lumer Philips pour prouver l'existence et l'unicité et la régularité de chaque problème.

Mots clés : Equation des Schrodinger, existence et unicité de la solution, problème de Cauchy, semi groupe, système poreux-élastique amorti, théorème de Lumer Philips.

Résumé en Arabe

Remerciements

Nous remercions Allah qui nous a donné la force et la patience pour terminer ce travail

nous tiendrons à exprimer notre reconnaissance et nos remerciements les plus profonds à notre

encadreur "Dr Soumya Leulmi".

nous lui exprimons notre profonde gratitude pour tous les efforts, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi que le soutien très précieux tout au long de cette étude.

nous voudrions aussi présenter notre sincère reconnaissance aux membres de jury et l'ensemble

des enseignants du département de mathématique

et spécialement pour Dr "L.Bouzettouta" pour tous les efforts dans notre parcours .

nos parents pour leur contribution pour chaque travail que nous avons effectué .

En fin, nous remercierons aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire .

Nous dédions ce mémoire

A nos parents Houcine et Sousou qu'Allah les protège appartiennent à l'étudiante Ferial, Ahmed et Halima Allah yarhmha appartiennent à l'étudiante Chadia pour leur inestimable, leur confiance en nous, leurs soutien, pour les valeurs qu'ils ont su m'incliner,

A nos encadreur "Soumya Leulmi" pour toutes les choses qu'elle nous a donnée,

A nos soeurs Nour et Biba appartiennent à l'étudiante Ferial, Hadjer et Rafika et Djahida appartiennent à l'étudiante Chadia pour tendresses leurs complicité

A nos frères Imad Eddine et Abd Raouf appartiennent à l'étudiante Ferial, Abd Elghani et Mourad et Makhlof appartiennent à l'étudiante Chadia pour leurs présence en tout moment à nos cotés.

Et à nos amis ainsi que tout ceux qui nous ont aidé de près de près ou de loin pour pouvoir mener ce travail à terme.

Notations générales

X	Espace de Banach.
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires continues de X à valeurs dans Y .
$\ \cdot\ $	Norme de X .
I	L'opérateur identité sur X .
$D(A)$	Le domaine de définition de l'opérateur linéaire A .
$H^1(R); H_0^1(R)$	Espaces de Sobolev.
$\langle \cdot \rangle$	Désigne le produit scalaire.
ImA	L'image de l'opérateur A .
m -dissipatif	Maximal dissipatif.
A	Opérateur.
∂	L'opérateur de différentiation partielle.
$L^1(R)$	Espaces vectoriel des fonctions sommables sur l'ensemble R .
$L^2(R)$	Espace vectoriel des fonctions de carré sommables sur l'ensemble R .
Δ	Le laplacien.
∇	Le gradient de la fonction $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T$.
$C(I; E)$	La famille des fonctions holderiennes sur I d'exposant E .

Introduction générale

Beaucoup de phénomènes rencontrés en nature ont trouvé dans la théorie des équations ou des systèmes différentielles.

Dans notre mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de quelques problèmes de telles équations.

La théorie de semi groupe est l'un des outils mathématiques les plus importants qui donne une réponse à la question de l'existence et l'unicité.

Cette théorie devient un moyen indispensable dans beaucoup de problèmes de l'analyse moderne, ainsi que dans d'autres domaines scientifiques (physiques et mécaniques).

La théorie des semi groupe d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach a commencé au début de 19^{ème} siècle. Elle a connu ses premiers développements grâce aux travaux de Yosida en 1948 avant d'atteindre son sommet avec l'édition de "semigroups and functional analysis" de Carl Einar Hille et Ralph Saul Phillips en 1957.

Dans les années (1970 – 1980) et grâce aux efforts de plusieurs écoles, la théorie a atteint un certain degré de perfection. Aujourd'hui les semi-groupes sont présents dans la majorité des disciplines mathématiques. On trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement au domaines

classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques mais elles deviennent un outil très puissant dans la résolution des équations intégrales et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie.

Après ce bref historique sur les semi groupes, le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de l'équation de certains problèmes mathématiques comme l'équation de Schrodinger

En utilisant la théorie de semi groupe plus précisément le théorème du Lumer Philips. On écrit les problèmes précédent sous forme d'un problème de Cauchy abstrait puis on utilise les semi groupes. d'une introduction avec trois chapitre et conclusion.

Dans ce esprit ce travail est composé de trois chapitre.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les espaces de Sobolev et les résultats de quelques inégalités, qu'on utilisera ultérieurement. Aussi, nous donnons brièvement, les définitions et quelques lemmes qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail. Et on donne des applications de la théorie des semi groupes et l'étude du problème de Cauchy abstrait dans la résolution de quelques problèmes de mathématiques tel que l'équation des Schrodinger, le système de Timoshenko dans le troisième chapitre.

Enfin, on termine par une conclusion.

CHAPITRE 1

Quelques notions préliminaires

Dans ce chapitre, on collecte certaines outils de base qui seront nécessaires tout au long de ce travail. On donne les notions essentielles sur les espaces de Sobolev, quelques théorèmes utiles et quelques inégalités importantes, qu'on utilisera ultérieurement.

1.1 Les espaces de Sobolev

1.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$:

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adapté à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1 [3] L'espace de Sobolev, noté $W^{1,p}(\Omega)$, est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont la dérivées au sens des distributions, s'identifie à une

fonction de $L^p(\Omega)$. La définition précédente s'écrit donc comme ceci :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_I u \dot{\varphi} = \int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{1,2}(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.1 1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme définie par :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

est un espace de Banach.

2. L'espace $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2},$$

est un espace de Hilbert.

Corollaire 1.1 Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega)$

et

$$(uv)' = u'v + u v'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'(z) v(z) dz = u(y) v(y) - u(x) v(x) - \int_x^y u(z) v'(z) dz, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

1.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Définition 1.2 [3] Etant donné $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ l'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme introduite par $W^{1,p}$, l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

Théorème 1.1 Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Ce théorème explique le rôle important joué par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$. En effet, les équations aux dérivées partielles sont couplées avec des conditions aux limites, c'est à dire que la valeur de u est prescrite sur $\partial\Omega$.

1.2 Certaines inégalités fonctionnelles utiles

1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 1.3 [3] Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive [i.e. $(u, v) \geq 0, \forall u \in H$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].

Donc, l'espace H est un espace de Hilbert.

Proposition 1.2 [3] Soit H un espace de Hilbert. Le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

1.2.2 Inégalité de Young

Proposition 1.3 [3] Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q \cdot \varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g|^q dx.$$

Si $p = q = 2$, on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g|^2 dx.$$

1.2.3 Inégalité de Holder

Proposition 1.4 [3] Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors :

$$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) : \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \text{ et } f.g \in L^1$$

1.2.4 Inégalité de Poincaré

Proposition 1.5 [3] On suppose que Ω est borné. Alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \|u'\|_{L^p} \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}$.

1.3 Rappel sur les opérateurs

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés

Définition 1.4 Une application $A : X \longrightarrow Y$ est dit opérateur linéaire si et seulement si A satisfait les deux conditions suivantes :

1. Additivité :

$$A(x + y) = Ax + Ay \quad \forall x, y \in X;$$

2. Homogénéité :

$$A(\lambda x) = \lambda Ax \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.5 L'opérateur $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné s'il existe un $C > 0$ tel que

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.6 On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés.

Définition 1.7 On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés, définis de X vers Y .

Définition 1.8 Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ la norme de A est donnée par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup \{ \|Ax\|_Y, x \in H, \|x\|_X = 1 \}.$$

1.3.1 L'ensemble résolvant et la résolvante

Définition 1.9 On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble de points réguliers de l'opérateur A . On le note par

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \subset X \longrightarrow Y, \text{ inversible} \}$$

Définition 1.10 L'application

$$\begin{aligned} R(\cdot, A) & : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ \lambda & \longrightarrow R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}, \end{aligned}$$

s'appelle la résolvante de A .

Théorème 1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert non vide.

1.3.2 Opérateur fermé

Définition 1.11 On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite (x_n) d'éléments de $D(A)$ converge vers x telle que la suite (Ax_n) soit convergente vers y alors, on a

$$x \in D(A) \text{ et } y = Ax.$$

1.3.3 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.12 Un opérateur linéaire non borné dans X est un couple $(A, D(A))$ où $D(A)$ un sous-espace vectoriel de X et A est une application linéaire de $D(A)$ dans X . Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A . [i.e : pour tout $u, v \in D(A)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k} : A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$].

Définition 1.13 Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X est dissipatif si

$$\forall v \in D(A), \operatorname{Re}(Av, v) \leq 0.$$

Définition 1.14 Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H , est m-dissipatif si :

1. A est dissipatif,
2. $\operatorname{Im}(I - A) = H$; e

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u - Au = f.$$

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et dérivées partielles linéaires.

Définition 1.15 Une forme bilinéaire est une application qui à un couple de vecteurs associe un scalaire, et qui a la particularité d'être linéaire en ses deux arguments..

Définition 1.16 Soit a une forme bilinéaire sur H . On dit que a est continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \forall u, v \in H,$$

Définition 1.17 On dit que a est coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in H.$$

Théorème 1.3 << *Lax-Milgram* >> Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

CHAPITRE 2

Semi groupe d'opérateurs linéaires bornés

Ce chapitre est consacré à une étude générale des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés dans un \mathbb{C} -espace de Banach avec quelques propriétés, ainsi la notion de générateur infinitésimal voire des résultats liant ces deux notions : des conditions (nécessaires et suffisantes) pour qu'un opérateur linéaire génère un semi groupe, comme les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips qui jouent un rôle important pour l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles. On donne aussi l'importance de la théorie des semi-groupes pour établir le problème de l'existence et l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy abstrait.

2.1 Définition d'un semi groupe fortement continue

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni d'une norme notée $\|\cdot\|_x$.

Définition 2.1 Une famille d'opérateurs $(T(t))_{t \geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est un semi-groupe fortement continu ou un C_0 -semi groupe ou un semi groupe de classe C_0 sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1. $T(0) = I_X$ où I_X est l'opérateur identique de X dans X ,
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $s \geq 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$ pour tout $x \in X$.

Proposition 2.1 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi groupe fortement continue sur X , alors il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}^+$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \text{ pour } \forall t \geq 0.$$

Définition 2.2 (Semi groupe de contraction) Si $\omega = 0$ le semi-groupe est dit uniformément borné. Si de plus $M = 1$ le semi-groupe est dit de contraction. un semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifie :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0.$$

2.2 Générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe

Soit X un espace de Banach.

Définition 2.3 [6] Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi groupe sur X , on appelle générateur infinitésimale du semi groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ l'opérateur A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ pour tout } x \in D(A).$$

Théorème 2.1 [6] Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi groupe sur X et A son générateur infinitésimal . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Pour tout $x \in X$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x.$$

2) Pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$:

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A) \text{ et } A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x.$$

3) Si $x \in D(A)$ alors :

$$T(t)x \in D(A) \text{ et } \frac{d}{dt}T(t) = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4) Si $x \in D(A)$ alors $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\sigma)Ax \, d\sigma = \int_s^t AT(\sigma)x \, d\sigma.$

5) l'opérateur A est un opérateur fermé à domaine dense dans X .

6) soit B le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, Si $A = B$ alors $S(t) = T(t)$ pour tout $t \geq 0$. <<l'unicité de lengendrement>>.

2.3 Théorème de Hille-Yosida

On introduit maintenant un résultat très important concernant les semi-groupe, il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caracté-

risation pour les opérateurs qui sont générateur infinitésimal.

Théorème 2.2 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si :*

1) *A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.*

2) *Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2.4 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 2.3 *Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = H$ alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contraction si et seulement si*

1. *A est dissipatif*

2. *il existe $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$.i.e (A est maximal).*

2.5 Problème de Cauchy abstrait

Dans cette section, on étudie des résultats d'existence et d'unicité de solution du problème de Cauchy linéaire abstrait homogène et non homogène.

Définition 2.4 Les equations d'évolutions sont des equations qui s'écrivent sous la forme :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où $u = u(t)$, $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur d'un espace de Banach X vers X , x est la donnée initiale et f est une application dans X .

Définition 2.5 [6] Le problème (P_1) est appelé problème de Cauchy non homogène. Si $f = 0$, on a :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

C'est un problème de Cauchy homogène.

2.5.1 L'existence de la solution

Théorème 2.4 [6] Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach X . Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, alors le problème (P_2) possède une solution unique $u(t) = T(t)u_0$.

Définition 2.6 [6] (**solution forte**) une fonction u est appelée solution forte du problème (P_1) si :

- 1) $u \in C([0, +\infty[, D(A))$ c-à-d u est une fonction continue à valeurs dans $D(A)$ par rapport à la norme du graphe.
- 2) $u \in C^1([0, +\infty[, X)$ c-à-d u est continument dérivable tant que fonction à valeurs de X .
- 3) $\frac{du}{dt} = Au + f$ et $u(0) = u_0$ c-à-d u vérifie l'équation et la condition initiale du problème (P_1) .

Définition 2.7 [6] (**solution faible**) On dit que u est une solution faible du (P_1) si $u \in C^0([0, +\infty[, X)$ il existe une suite $(u_n)_n$ tel que :

$$(u_n)_n \subset C^0([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, X)$$

et

$$u_n \rightarrow u, \quad \frac{du_n}{dt} - Au_n \rightarrow f$$

et

$$u_n(0) \rightarrow u_0.$$

Remarque 2.1 [6] Toute solution forte est une solution faible.

Théorème 2.5 [6] Si $f \in C^1([0, +\infty[, X)$ et A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors, le problème (P_1) admet une solution forte s'écrit par :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Proposition 2.2 Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, alors pour tout $x \in X$, la fonction

$$u : t \mapsto u(t) = T(t)x$$

est l'unique solution généralisée du problème (P_2) .

Théorème 2.6 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, Soit $f \in L^1(0, T, X)$ continue sur $]0, T]$ et soit :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Le problème (P_1) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des condition suivante est satisfaite :

i) $v(t)$ est continument différentiable sur $]0, T[$.

ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t)$ est continue sur $]0, T[$.

Si le problème (P_1) admet une solution u sur $[0, T[$ pour certains $x \in D(A)$, alors v satisfait à la fois (i) et (ii).

Corollaire 2.1 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Si $f(s)$ est continument différentiable sur $[0, T]$, alors le problème (P_1) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$.

Corollaire 2.2 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, soit $f \in L^1(0, T, X)$ une fonction continue sur $]0, T[$. Si $f(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Af(t) \in L^1(0, T, X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (P_1) admet une solution u sur $[0, T[$.

2.5.2 L'unicité de la solution

Théorème 2.7 Si A est un générateur infinitésimale d'un C_0 -semi groupe $(s(t))_{t \geq 0}$ et si u une solution forte du problème (P_1) , alors :

$$u(t) = s(t)u_0 + \int_0^t s(t-s)f(s)ds.$$

2.5.3 Régularité des solutions

On constate que la régularité est étroitement liée au choix de la condition initiale on fonction du domaine A de définition il est donc naturel de penser qu'en imposant plus de "régularité" a u_0 on obtienne plus de régularité sur les solutions.

Plus précisément, on définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}), Av \in D(A^{k-1})\}, \quad k \text{ entier } \geq 2.$$

on peut vérifier aisément que $D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^k (A^j u; A^j v);$$

la norme correspondante est :

$$|u|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^k |A^j u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.8 *Si $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème (P_2) est de classe $C^k([0; \infty[; X)$ et $C^{k-j}([0; \infty[; D(A^j))$. C'est à dire :*

$$u \in C^k([0; \infty[; X) \cap C^{k-j}([0; \infty[; D(A^j)), \quad \text{pour } j = 0, 1 \dots k$$

CHAPITRE 3

Théorie des semi groupe et Application

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et l'unicité de quelques problèmes mathématiques par la théorie de semi groupe. Plus précédemment on utilise des conséquences du théorème de Hille-Yosida et la théorie du problème de Cauchy abstrait pour montrer l'existence et l'unicité. On divise en deux sections. Dans la première section on achevé notre travail par l'application du théorème de Lumer Philips sur l'équation de Schrodinger, en déduisant que cette équation conserve la régularité des données initiales, ensuite, on s'intéresse à étudier l'existence et l'unicité du système non-linéaire de Timoshenko.

3.1 Equations de Schrodinger

L'équation de Schrodinger est une équation fondamentale de la mécanique quantique il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps d'une particule massive non relativiste et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en

mécanique classique.

3.1.1 Position du problème

On considère l'équation de schrodinger non homogène qui est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - i\Delta u(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbb{Q}, \\ u(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Pour montrer existence et l'unicité du problème (1, 1), On va appliquer le théorème (1, 1) qui est une conséquence du théorème de Hille Yosida.

Pour cela on transforme le systeme (1, 1) sous forme d'un problème de Cauchy abstrait puis on prouve que l'opérateur A qu'on a trouvé est une générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue.

Forme abstrait de Cauchy du système (1, 1)

Soient $t \geq 0$ et $x \in \Omega$. de la première équation du système (1, 1) on trouve :

On pose

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = i\Delta u(x, t)$$

Ce qui donne

$$v(0) = u(0, x) = u_0(x)$$

Alors, le problème (1, 1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv(t)}{dt} = i\Delta v(t) \\ v(0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

On introduit l'opérateur A définit par :

$$\begin{aligned} A & : D(A) \subset H \longrightarrow H \\ v & \longrightarrow Av = i\Delta v(t) \end{aligned}$$

tel que : $H = L^2(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} D(A) & = \{v \in H_0^1(\Omega) : \Delta v \in H\} \\ & = \{v \in H_0^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\} \\ & = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Maintenant ,on montre que A engendre un semi groupe fortement continue.

Pour cela ,on va utiliser le théoreme de lumer philips sur l'espace $H = L^2(\Omega)$ qui muni du produit scalaire suivant

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} u v \, dx$$

C'est à dire ,on prouve que A est un opérateur m-dissipatif

On sait que A est m-dissipatif si et seulement si A est maximal dissipatif
 premièrement ,On prouve que A est dissipatif

On a : A est dissipatif si et seulement si :

$$\forall v \in D(A) : \operatorname{Re} \langle Av, v \rangle \leq 0$$

Soit $v \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle & = \langle i\Delta v, v \rangle \\ & = i \langle \Delta v, v \rangle \\ & = i \int_{\Omega} \Delta v v \, dx \end{aligned}$$

D'après la formule de green , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta v v \, dx & = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{dv}{d\eta} \, dx \\ & = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \end{aligned}$$

Donc

$$\langle Av, v \rangle = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

Donc $\langle Av, v \rangle$ est un nombre complexe imaginaire pure

Donc

$$\operatorname{Re} \langle Av, v \rangle = 0$$

Donc A est dissipatif

Deuxiément , on prouve que A est maximal

Pour cela , on montre que l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$

Soit $\lambda > 0$

On sait que $\lambda I - A$ est surjectif siet seulement si pour tout $f \in L^2(\Omega)$,il existe un $v \in D(A)$ tel que

$$(\lambda I - A)v = f$$

On a :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)v &= \lambda v - Av \\ &= \lambda v - i\Delta v \end{aligned}$$

Soit

On a

$$\begin{aligned} \langle (\lambda I - A)v, \omega \rangle &= \langle f, \omega \rangle \\ \langle (\lambda I - A)v, \omega \rangle &= \lambda \langle v, \omega \rangle - \langle Av, \omega \rangle \\ &= \lambda \langle v, \omega \rangle - \langle i\Delta v, \omega \rangle \\ &= \lambda \langle v, \omega \rangle - i \langle \Delta v, \omega \rangle \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\langle \Delta v, \omega \rangle = - \langle \nabla v, \nabla \omega \rangle$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle (\lambda I - A) v, \omega \rangle &= \lambda \langle v, \omega \rangle + i \langle \nabla v, \nabla \omega \rangle \\ &= \lambda \int_{\Omega} v \omega \, dx + i \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega \, dx \end{aligned}$$

et on a

$$\langle f, \omega \rangle = \int_{\Omega} f \omega \, dx.$$

De (1), (2) et (3), on obtient :

$$\lambda \int_{\Omega} v \omega \, dx - i \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega \, dx = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

Donc on a la formulation variationnelle suivante :

Trouver un $v \in H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ tel que :

$$\lambda \int_{\Omega} v \omega \, dx + i \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega \, dx = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

On pose

$$a(v, \omega) = \lambda \int_{\Omega} v \omega \, dx + i \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega \, dx$$

et

$$b(\omega) = \int_{\Omega} f \omega \, dx$$

Donc la résolution du système est équivalente à

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \text{ telle que} \\ a(v, \omega) = b(\omega) \text{ pour tout } v \in H \end{cases}$$

Maintenant, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de problème précédent on utilise le théorème de Lax-Milgram.

Pour cela , On prouve que :

- H est une espace de Hilbert.
- La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur H .
- La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur H .
- La forme linéaire $b(.)$ est continue sur H

Il est clair que est une espace de Hilbert.

★ La continuité de la forme bilinéaire a :

On sait que a est une forme bilinéaire continue sur si et seulement s'il existe un $\alpha > 0$ telque :

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|v\|_H \|\omega\|_H, \quad \text{pour tout } v, \omega \in H.$$

Soient $v, \omega \in H$, ona :

$$\begin{aligned} |a(v, \omega)| &= \left| \lambda \int_{\Omega} v \omega dx - i \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega dx \right| \\ &\leq \left| \lambda \int_{\Omega} v \omega dx \right| + \left| i \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega dx \right| \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} |v \omega| dx + \int_{\Omega} |\nabla v \nabla \omega| dx. \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |a(v, \omega)| &\leq \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(\lambda, 1) \left[\|v\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\leq 2 \max(\lambda, 1) [\|v\|_H \|\omega\|_H] \end{aligned}$$

On prend $\alpha = 2 > 0$ alors, il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$|a(v, \omega)| \leq \alpha \|v\|_H \|\omega\|_H.$$

Donc $a(.,.)$ est continue sur $H \times H$.

★ La coercivité de la forme bilinéaire a :

On a $a(.,.)$ est coercive sur H , si et seulement s'il existe un $\beta > 0$ telque :

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_H^2, \quad \text{pour tout } v \in H.$$

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \lambda \int_{\Omega} (v)^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \\ &\geq \min(\lambda, 1) \left[\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\geq \min(\lambda, 1) \|v\|_H^2 \end{aligned}$$

On prend $\beta = \min(\lambda, 1)$ alors, il exist $\beta > 0$ telle que :

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_H^2.$$

Donc $a(., .)$ est coercive sur H .

★ **La continuité de la forme linéaire b :**

On a $b(.)$ est continue sur H , s'iln existe un $c > 0$ telque :

$$|b(\omega)| \leq c \|\omega\|_H, \text{ pour tout } v \in H.$$

Soit $v \in H$, on a :

$$\begin{aligned} |b(\omega)| &= \left| \int_{\Omega} f \omega dx \right|, \\ &\leq \int_{\Omega} |f| dx + \int_{\Omega} |\omega| dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |b(\omega)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega\|_H \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\omega\|_H \end{aligned}$$

On pend $c = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} \right)$ alors, il existe $c > 0$ telque :

$$|b(\omega)| \leq c \|\omega\|_H.$$

Donc $b(.)$ est continue sur H .

D'après le théorème de Lax-Milgram il existe une solution unique $u \in H$ telle que :

$$a(v, \omega) = b(\omega), \quad \forall v \in H.$$

★ La régularité de la solution

D'après l'équation de schrodinger , On a :

$$\lambda \int_{\Omega} v \omega dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \omega dx = \int_{\Omega} f \omega dx.$$

En utilisant une intégration par partie, on obtient :

$$\lambda \int_{\Omega} v \omega dx - \int_{\Omega} i \Delta v \omega dx = \int_{\Omega} f \omega dx.$$

Alors

$$\int_{\Omega} (v - i \Delta v - f) \omega dx = 0,$$

tel que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors

$$u - i \Delta u_1 - f = 0$$

donc

$$u - i \Delta u_1 = f.$$

Donc, il existe $u \in D(A)$ solution de $(I - iA)u = (f)$ pour tout $(f) \in E$, c-à-d $\text{Im}(I - iA) = E$ alors $I - iA$ est surjectif. Donc A est maximal.

Comme A est dissipatif et maximal alors l'opérateur A est m-dissipatif. Et comme $D(A)$ dense dans E . Alors d'après le théorème de Lumer-Phillips A est le générateur infinitésimal d'un C_0 - semi groupe.

De théorème (2.5) on arrive à montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de schrodinger qui donnée par :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

tel que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$.

CHAPITRE 4

Systeme des poutres laminées avec un frottement amortissement

Cette section est consacré a prouvé l'existence et l'unicité de la solution d'un système Timoshenko non-linéaire de avec certaines conditions qui est publié par Tijani A. Apalara , Carlos A. Raposo, and Carlos A.S. Nonato [5]. Dans la quelle on va appliquer le théorème de Lumer-Phillips avec l'utilisation du théorème de Lax-Milgram et les inégalités du Young et Cauchy-Schwarz.

4.0.2 position du problème :

considérons le système qui modélise des poutres laminées avec une seule commande sous la forme d'un amortissement par frottement dans la seconde équation. qui s'écrit sous la forme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho w_{tt} + G(\psi - \omega_x) x = 0 \\ I_p (3s_{tt} - \psi_{tt}) - D(3s_{xx} - \psi_{xx}) - G(\psi - \omega_x) + \delta(3s - \psi_t) = 0 \\ 3I_p s_{tt} - 3D s_{xx} + 3G(\psi - \omega_x) + 4\gamma s = 0 \end{array} \right.$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \omega(x, 0) = w_0; \psi(x, 0) = \psi_0; s(x, 0) = s_0 \\ \omega_t(x, 0) = w_1; \psi_t(x, 0) = \psi_1; s_t(x, 0) = s_1 \end{cases}$$

et les conditions aux limites suivants

$$\omega(0, t) = \psi(0, t) = s(0, t) = \omega(1, t) = \psi(1, t) = s(1, t) = 0$$

où D, G, I_P, p, γ sont des constantes positives

$w = v(x, t)$ est le déplacement transversal

$\psi = \psi(x, t)$ est l'angle de rotation

$s = s(x, t)$ est proportionnel à la quantité de glissement le long de l'interface

4.0.3 Existence et unicité :

pour montrer l'existence et unicité de la solution du problème (1,1) on utilise la théorie du semi groupe ; on va appliquer une conséquence du théorème de hille_yosida pour cela , on transforme l'équation de timoshenko sous la forme d'un problème de cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = Au + f \\ \phi(0) = u_0 \end{cases}$$

Et on prouve que A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe et $f \in L^1(\Omega)$

soit $\phi = (\omega, \omega_t, h, h_t, s, s_t)^T$ on pose $u = \phi = (\omega, \omega_t, h, h_t, s, s_t)^T$ et $v = h_t$, $h = 3s - \psi$ alors : $u_t = \omega_{tt}$ et $v_t = h_{tt}$ de la première équation (1,1) on a : $\omega_{tt} = \frac{-G}{P} (\psi - \omega_x)_x$

donc :

$$u_t = \frac{-G}{P} (\psi - \omega_x)_x$$

Chapitre 4. Système des poutres laminées avec un frottement amortissement

dans la dernière en substituant $h = 3s - \psi$ et equation(1, 1) on trouve : $I_p h_{tt} -$

$$Dh_{xx} + G(\psi - \omega_x) + \delta h_t = 0$$

$$\text{donc : } h_{tt} = \frac{1}{I_p} (Dh_{xx} - \frac{G}{P}(\psi - \omega_x) - \delta h_t) = \frac{\delta}{I_p} h_t + \frac{D}{I_p} h_{xx} - \frac{G}{I_p} (\psi - \omega_x)$$

mais $v = h_t$ et $v_t = h_{tt}$ donc $\psi - \omega_x = 3s - \psi - \omega_x$ et :

$$v_t = \frac{1}{I_p} (Dh_{xx} - G(3s - h - \omega_x) - \delta v)$$

D'autre part de la troisième equation du système (1, 1) on trouve que : $S_{tt} = \frac{1}{I_p} (DS_{xx} - 3G(3S - h - \omega_x) - \frac{4\gamma}{3}S)$ alors ;

On pose $Z = S_t$ et $Z_t = S_{tt}$

Donc

$$Z_t = \frac{1}{I_p} \left(Ds_{xx} - 3G(3s - h - \omega_x) - \frac{4\gamma}{3}s \right)$$

donc on a le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_t = u \\ u_t = \frac{-G}{P} (\psi - \omega_x)_x \\ h_t = v \\ v_t = \frac{1}{I_p} (Dh_{xx} - G(3s - \psi - \omega_x) - \delta v) \\ s_t = Z \\ Z_t = \frac{1}{I_p} (Ds_{xx} - 3G(3s - h - \omega_x) - \frac{4\gamma}{3}s) \end{array} \right.$$

on pose maintenant $\phi = (\omega, u, h, v, S, z)^T$ on trouve :

$\frac{d\phi}{dt} = A\phi$ telque :

$$A\phi = \begin{pmatrix} u \\ \frac{-G}{P} (3s - h - \omega_x)_x \\ \frac{1}{I_p} (Dh_{xx} - G(3s - h - \omega_x) - \delta v) \\ \frac{1}{I_p} (Ds_{xx} - 3G(3s - h - \omega_x) - \frac{4\gamma}{3}s) \end{pmatrix}$$

et on a : $\phi(0) = (\omega(0), u(0), h(0), v(0), s(0), z(0))^T = (\omega_0, \omega_1, 3s_0 - \omega_0, 3s_1 - \psi_1, S_0, s_1)$

on pose $\phi(0) = \phi_0$

Donc , notre problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = A\phi \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases}$$

qui est la forme d'un problème de cauchy abstrait .maintenant ,on considère l'espace suivant :

$$H = [H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)]^3$$

il est facile de prouver que H est un espace de hilbert muni du produit scalaire suivant :

pour tout $\phi, \bar{\phi} \in H$ telque : $\phi = (\omega, u, h, v, s, z)^T$ et $\bar{\phi} = (\bar{\omega}, \bar{u}, \bar{h}, \bar{v}, \bar{s}, \bar{z})^T$ on a :

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_H = \rho \langle u, \bar{u} \rangle_{L^2} + D \langle h, \bar{h} \rangle_{L^2} + I_\rho \langle v, \bar{v} \rangle_{L^2} + 3D \langle s_x, \bar{s}_x \rangle_{L^2} + 3I_\rho \langle z, \bar{z} \rangle_{L^2} + G \langle 3s - h - \omega_x, 3\bar{s} - \bar{h} - \bar{\omega}_x \rangle_{L^2}$$

le domaine de définition de l'opérateur A est donné par :

$$D(A) = [H_0^1(1, 0) \cap H^2(1, 0) \times H_0^1(1, 0)]^3$$

il est claire que $D(A)$ est dense dans H

Théorème 4.1 *soit $\phi \in H$, alors il existe une unique solution $\phi \in C(\mathbb{R}^+, H)$ du probleme (1, 1)*

Preuve. on va utiliser l'approche du semi groupe on va montrer que l'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe. Pour cela ,on prouve que A est un opérateur m-dissipatif ce qui veut dire qu'on montre que A est un opérateur dissipatif (*i.e* : pour tout $\phi \in D(A) = \langle A\phi, \phi \rangle_H \leq 0$) maximal (*i.e* : l'opérateur $I - A$ est surjectif) ■

premièrement ,Montrer que A est dissipatif :

Soit $\phi \in D(A)$, on prouve que $\langle A\phi, \phi \rangle_H \leq 0$ on pose $\phi = (\omega, u, h, v, s, z)^T$
 on a :On a

$$A\Phi = \left\langle u, \frac{G}{\rho}(3s - h - \omega_x)_x, v, \frac{1}{I\rho}(Dh_{xx} + G(3s - h - \omega_x) - \delta v), Z, \frac{1}{I\rho}(Ds_{xx} - G(3s - h - \omega_x) - \frac{4\gamma}{3}s)^t \right\rangle$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle A\Phi, \Phi \rangle &= \rho \left\langle -\frac{G}{\rho}(3S - h - \omega_x)_x, u \right\rangle + D \langle v_x, h_x \rangle \quad * \\ &+ I\rho \left\langle \frac{1}{I\rho}(Dh_{xx} + G(3S - h - \omega_x) - \delta v), v \right\rangle + 3D \langle Z_x, S_x \rangle \\ &+ 3I\rho \left\langle \frac{1}{I\rho}(Ds_{xx} - G(3s - h - \omega_x) - \frac{4}{3}\gamma S), Z \right\rangle + G \langle 3Z - v - u_x, 3s - h - \omega_x \rangle \end{aligned}$$

Mais on a : $Z = S_t, v = h_t$, et $u = \omega_t$

Donc

$$\begin{aligned} 3Z - v - u_x &= 3S_t - h_t - (\omega_t)_x \\ &= 3S_t - h_t - \omega_{tx} \\ &= (3s - h - \omega_x)_t. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle 3Z - v - u_x, 3s - h - \omega_x \rangle &= \langle (3s - h - \omega_x) \rangle \\ &= \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle \end{aligned}$$

a linéarité du produit scalaire on obtient :

$$\begin{aligned} \langle A\Phi, \Phi \rangle &= -G \langle (3s - h - \omega_x)_x, u \rangle + D \langle v_x, h_x \rangle + D \langle h_{xx}, v \rangle \quad (I) \\ &+ G \langle 3s - h - \omega_x, v \rangle - \delta \langle v, v \rangle + 3D \langle Z_x, S_x \rangle + 3D \langle s_{xx}, Z \rangle \\ &- 3G \langle 3s - h - \omega_x, Z \rangle - 4\gamma \langle S, Z \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle \end{aligned}$$

Chapitre 4. Système des poutres laminées avec un frottement amortissement

on utilise la formule d'intégration par partie pour calculer les termes $\langle -G(3s - h - \omega_x)_x, u \rangle$, $\langle h_{xx}, v \rangle$ et $\langle s_{xx}, Z \rangle$.

$$\bullet \langle -G(3s - h - \omega_x)_x, u \rangle = -G \int_0^1 (3s - h - \omega_x)_x u dx$$

Mais on a :

$$* f = u \longrightarrow f' = u_x$$

$$* g' = (3s - h - \omega_x)_x \longrightarrow g = (3s - h - \omega_x)$$

$$\begin{aligned} &= [u(3s - h - \omega_x)]_0^1 - \int_0^1 u_x (3s - h - \omega_x) dx \\ &= u(1, t)(3S(1, t) - h(1, t) - \omega_x(1, t)) - u(0, t)(3S(0, t) - h(0, t) - \omega_x(0, t)) \\ &\quad - \int_0^1 u_x (3s - h - \omega_x) dx \end{aligned}$$

Mais $u(1, t) = u(0, t) = 0$, car $u \in H_0^1(0, 1)$

Donc

$$\langle -G(3s - h - \omega_x)_x, u \rangle = +G \int_0^1 u_x (3s - h - \omega_x) dx$$

Donc

$$\langle -G(3s - h - \omega_x)_x, u \rangle = \langle +G(3s - h - \omega_x)u_x \rangle dx$$

$$\bullet \langle h_{xx}, v \rangle = \int_0^1 h_{xx} v dx$$

$$* f = v \longrightarrow f' = v_x$$

$$* g' = h_{xx} \longrightarrow g = h_x$$

$$\begin{aligned} &= [vh_x]_0^1 - \int_0^1 v_x h_x dx \\ &= v(1, t)h_x(1, t) - v(0, t)h_x(0, t) - \int_0^1 v_x h_x dx. \end{aligned}$$

Mais $v \in H_0^1$ donc $v(1, t) = v(0, t) = 0$.

Donc

$$\langle h_{xx}, v \rangle = - \int_0^1 v_x h_x dx = - \langle h_x, v_x \rangle = - \langle v_x, h_x \rangle \quad (1)$$

$$\bullet \langle S_{xx}, v \rangle = \int_0^1 S_{xx} v dx$$

Mais on a

$$* f = v \longrightarrow f' = v_x$$

$$* g' = S_{xx} \longrightarrow g = S_x$$

$$\begin{aligned} &= [v(S_x)]_0^1 - \int_0^1 v_x S_x dx \\ &= v(1, t) S_x(1, t) - v(0, t) S_x(0, t) - \int_0^1 S_x v_x dx. \end{aligned}$$

Mais $v \in H_0^1(0, 1)$ donc $v(1, t) = v(0, t) = 0$.

Donc

$$\langle S_{xx}, v \rangle = - \int_0^1 S_x v_x dx = \langle S_x, v_x \rangle \quad (2)$$

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \quad (3)$$

En substituant (1), (2) et (3) dans (I) on trouve :

$$\begin{aligned} \langle A\Phi, \Phi \rangle &= G \langle 3s - h - \omega_x, u_x \rangle + D \langle v_x, h_x \rangle - D \langle h_x, v_x \rangle + G \langle 3s - h - \omega_x, v \rangle - \delta \|v\|^2 \\ &\quad + 4\gamma \langle s, Z \rangle + 3D \langle Z_x, S_x \rangle - 3D \langle s_x, Z_x \rangle - 3G \langle 3s - h - \omega_x, Z \rangle \\ &\quad - 4\gamma \langle s, Z \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle \end{aligned}$$

on utilise

$$\begin{aligned}
 \langle A\Phi, \Phi \rangle &= G \langle 3s - h - \omega_x, u_x \rangle + G \langle 3s - h - \omega_x, v \rangle - \delta \|v\|^2 \\
 &\quad - 3G \langle 3s - h - \omega_x, Z \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle \\
 &= G \langle 3s - h - \omega_x, u_x + v + -3Z \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle - \delta \|v\|^2 \\
 &= G \langle 3s - h - \omega_x, \omega_{tx} + h_t + -3s_t \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle - \delta \|v\|^2 \\
 &= -G \langle (3s - h - \omega_x), (-\omega_x - h + +3s)_t \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle - \delta \|v\|^2 \\
 &= -G \langle 3s - h - \omega_x, (3s - h - \omega_x)_t \rangle + G \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle - \delta \|v\|^2 \\
 &= -\delta \|v\|^2
 \end{aligned}$$

car $\langle 3s - h - \omega_x, (3s - h - \omega_x)_t \rangle = \langle (3s - h - \omega_x)_t, 3s - h - \omega_x \rangle$ symétrique dans \mathbb{R} .

Comme $\delta > 0$ et $\|v\|^2 > 0$ alors $-\delta \|v\|^2 < 0$.

Donc :

$$\langle A\Phi, \Phi \rangle \leq 0.$$

Donc A est dissipatif.

On montre maintenant que A est manimal c'est à dire : on prouve que $I - A$ est un opération surjectif.

Pour cela on va démontrer que pour chaque $H \in \mathcal{H}$, il existe un $\phi \in D(A)$ tel que :

$$(I - A)\phi = H.$$

Soit $H \in \mathcal{H}$ avec $H = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$ on chercher un $\phi \in D(A)$ avec : $\phi = (\omega, u, \xi, v, s, z)^t$.

satisfaisant :

$$(I - A)\phi = H.$$

On a : $(I - A)\phi = H$ est equivalent à :

$$\begin{pmatrix} \omega - u \\ u - \frac{G}{\rho}(3s - \xi - \omega_x)_x \\ \xi - v \\ v - \frac{1}{I\rho}(D\xi_{xx} + G(3s - \xi - \omega_x) - \delta(v)) \\ s - z \\ z - \frac{1}{I\rho}\left(Ds_{xx} - G(3s - \xi - \omega_x) - \frac{4\gamma s}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}$$

Donc, on a :

$$(*) \begin{cases} \omega - u = h_1 \\ u - \frac{G}{\rho}(3s - \xi - \omega_x)_x = h_2 \\ \xi - v = h_3 \\ v - \frac{1}{I\rho}(D\xi_{xx} + G(3s - \xi - \omega_x) - \delta(v)) = h_4 \\ s - z = h_5 \\ z - \frac{1}{I\rho}\left(Ds_{xx} - G(3s - \xi - \omega_x) - \frac{4\gamma s}{3}\right) = h_6 \end{cases}$$

avec : $h_1, h_2, h_3 \in H_0^1(0, 1)$ et $h_4, h_5, h_6 \in L^2(0, 1)$.

De la première équation du système (*) on obtient :

$$u = \omega - h_1 \tag{1}$$

De (1) et le deuxième équation du système (*) on trouve :

$$\omega - h_1 - \frac{G}{\rho}(3s - \xi - \omega_x)_x = h_2$$

mais :

$$\psi = 3s - \zeta$$

Donc :

$$\omega - h_1 - \frac{G}{\rho}(\psi - \omega_x)_x = h_2$$

Donc :

$$\omega - \frac{G}{\rho}\omega_{xx} = h_1 + h_2 - \frac{G}{\rho}\psi_x$$

on pose maintenant : $h = h_1 + h_2 - \frac{G}{\rho}\psi_x$ avec $h \in L^2(0, 1)$.

On obtient :

$$\omega - \frac{G}{\rho}\omega_{xx} = h \quad (2)$$

on multiplie l'équation (2) par une fonction teste $k \in H_0^1(0, 1)$ et on integre sur l'intervale $[0, 1]$ on a :

$$\int_0^1 \left(\omega - \frac{G}{\rho}\omega_{xx} \right) \cdot k dx = \int_0^1 h \cdot k dx. \quad (3)$$

Mais :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\omega - \frac{G}{\rho}\omega_{xx} \right) \cdot k dx &= \int_0^1 \left(\omega k - \frac{G}{\rho}\omega_{xx}k \right) dx \\ &= \int_0^1 \omega k dx - \frac{G}{\rho} \int_0^1 \omega_{xx}k dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'integration par partie pour calculer l'integrale $\int_0^1 \omega_{xx}k dx$ et comme $k \in H_0^1(0, 1)$ on arrive à :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_{xx}k dx &= [\omega_x k]_0^1 - \int_0^1 \omega_x k_x dx \\ &= - \int_0^1 \omega_x k_x dx \\ &= - \langle \omega_x, k \rangle_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 \left(\omega - \frac{G}{\rho}\omega_{xx} \right) \cdot k dx = \langle \omega, k \rangle_{L^2(0,1)} + \frac{G}{\rho} \langle \omega_x, k_x \rangle_{L^2(0,1)}$$

ce qui donne que l'équation (3) devient :

$$\langle \omega, k \rangle_{L^2(0,1)} + \frac{G}{\rho} \langle \omega_x, k_x \rangle_{L^2(0,1)} = \langle h, k \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Ainsi on définit le problème variationnelle suivant :

$$a(\omega, k) = l(k) \quad \text{pour tout } k \in H_0^1(0, 1) \quad (4)$$

telles que :

$$\begin{aligned} a : H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, k) &\rightarrow a(\omega, k) = \langle \omega, k \rangle_{L^2(0,1)} + \frac{G}{\rho} \langle \omega_x, k_x \rangle_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l : H_0^1(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\rightarrow l(k) = \langle h, k \rangle_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0, 1)$.

Il est évident que : a est une forme bilinéaire et l est une forme linéaire.

En appliquant maintenant le théorème de Lax-Milgram pour montrer que le problème variationnelle (4) admet une solution unique $\omega \in H_0^1(0, 1)$ pour tout $k \in H_0^1(0, 1)$.

Pour cela on va prouver que :

* a_2 est une forme bilinéaire et coercive.

* l_2 est une forme linéaire continue.

- H est une espace de Hilbert.

- La forme bilinéaire $a_2(\cdot, \cdot)$ est continue sur $H_0^1(0, 1)$.

- La forme bilinéaire $a_2(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $H_0^1(0, 1)$.

- La forme linéaire $l_2(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(0, 1)$

Il est clair que est une espace de Hilbert.

★ **La continuité de la forme bilinéaire a_2 :**

On sait que a_2 est une forme bilinéaire continue sur si et seulement s'il existe un $C > 0$ telque :

$$|a_2(\omega, k)| \leq C \|\omega\|_{H_0^1(0,1)} \|k\|_{H_0^1(0,1)}, \quad \text{pour tout } \omega, k \in H_0^1(0, 1).$$

Soient $\omega, k \in H_0^1(0, 1)$, on a :

$$\begin{aligned} |a_2(\omega, k)| &= \left| \langle \omega, k \rangle_{L^2(0,1)} + \frac{G}{\rho} \langle \omega_x, k_x \rangle_{L^2(0,1)} \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \omega k \, dx + \frac{G}{\rho} \int_0^1 \omega_x k_x \, dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |\omega k| \, dx + \frac{G}{\rho} \int_0^1 |\omega_x k_x| \, dx. \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |a_2(\omega, k)| &\leq \|\omega\|_{L^2(0,1)} \|k\|_{L^2(0,1)} + \frac{G}{\rho} \|\omega_x\|_{L^2(0,1)} \|k_x\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \max\left(1, \frac{G}{\rho}\right) \left[\|\omega\|_{L^2(0,1)} \|k\|_{L^2(0,1)} + \|\omega_x\|_{L^2(0,1)} \|k_x\|_{L^2(0,1)} \right] \\ &\leq C \left(\|\omega\|_{H_0^1(0,1)} \|k\|_{H_0^1(0,1)} \right) \left(\|\omega_x\|_{H_0^1(0,1)} \|k_x\|_{H_0^1(0,1)} \right) \\ &\leq C \|X\|_{H_0^1(0,1)} \|Y_x\|_{H_0^1(0,1)} \end{aligned}$$

On prend $C = \max\left(1, \frac{G}{\rho}\right)$ alors, il existe $C > 0$ telle que :

$$|a_2(\omega, k)| \leq C \|\omega\|_{H_0^1(0,1)} \|k\|_{H_0^1(0,1)}.$$

Donc $a_2(., .)$ est continue sur $H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

★ **La coercivité de la forme bilinéaire a_2 :**

On a $a_2(., .)$ est coercive sur $H_0^1(0, 1)$, si et seulement s'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$a_2(\omega, \omega) \geq \alpha \|\omega\|_{H_0^1(0,1)}^2, \quad \text{pour tout } \omega \in H_0^1(0, 1).$$

$$\begin{aligned} |a_2(\omega, k)| &= \left| \int_0^1 \omega^2 \, dx + \frac{G}{\rho} \int_0^1 \omega_x^2 \, dx \right| \\ &\geq \left| \int_0^1 \omega^2 \, dx \right| + \frac{G}{\rho} \left| \int_0^1 \omega_x^2 \, dx \right| \\ &\geq \min\left(1, \frac{G}{\rho}\right) \left[\|\omega\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\omega_x\|_{L^2(0,1)}^2 \right] \\ &\geq \alpha \left[\|\omega\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\omega_x\|_{H_0^1(0,1)}^2 \right] \geq \|X\|_{H_0^1(0,1)}^2 \end{aligned}$$

On prend $\alpha = \min\left(1, \frac{G}{\rho}\right)$ alors, il exist $\alpha > 0$ telle que :

$$a(\omega, \omega) \geq \alpha \|\omega\|_{H_0^1(0,1)}^2.$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $H_0^1(0, 1)$.

★ **La continuité de la forme linéaire l :**

On a $l_2(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(0, 1)$, s'iln existe un $\beta > 0$ telque :

$$|l_2(k)| \leq \beta \|k\|_{H_0^1(0,1)}, \quad \text{pour tout } k \in H_0^1(0, 1).$$

Soit $k \in H_0^1(0, 1)$, on a :

$$\begin{aligned} |l_2(k)| &= \left| \langle h, k \rangle_{L^2(0,1)} \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 h k \, dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |h k| \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant Point carré et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |l_2(k)| &\leq \|h\|_{L^2(0,1)} + \|k\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|h\|_{L^2(0,1)} + \|k\|_{H_0^1(0,1)} \\ &\leq \left(\|h\|_{L^2(0,1)} \right) \|k\|_{H_0^1(0,1)} \end{aligned}$$

On prend $\beta = \left(\|h\|_{L^2(0,1)} \right)$ alors, il existe $\beta > 0$ telque :

$$|l_2(k)| \leq \beta \|k\|_{H_0^1(0,1)}.$$

Donc $l_2(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(0, 1)$.

D'après le théorème de Lax-Milgram il existe une solution unique $k \in H_0^1(0, 1)$ telle que :

$$a_2(\omega, k) = l_2(k), \quad \forall k \in H_0^1(0, 1).$$

la densité de $H_0^1(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ et on appliquant le théorème de Agmon-Douglis-Nirivbeg on trouve que $\omega \in H_0^1(0, 1)$, ainsi $\omega \in H_0^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$.

Donc ω est existe.

Maintenant à partir de la troisième équation du système (*) on a :

$$v = \xi - h_3$$

En substituant v dans la quatrième équation du système (*) on obtient :

$$\xi - h_3 - \frac{1}{I\rho}(D\xi_{xx} + G(3s - \xi - \omega_x) - \delta(v)) = h_4$$

Mais :

$$\psi = 3s - \xi.$$

Donc :

$$\xi - h_3 - \frac{1}{I\rho}(D\xi_{xx} + G(\psi - \omega_x) - \delta v) = h_4$$

Donc

$$\xi - \frac{D}{I\rho}\xi_{xx} = h_3 + h_4 - \frac{1}{I\rho}(G(\psi - \omega_x) - \delta v)$$

on pose maintenant :

$$h_3 + h_4 - \frac{1}{I\rho}(G(\psi - \omega_x) - \delta v) = \hat{h}$$

on trouve :

$$\xi - \frac{D}{I\rho}\xi_{xx} = \hat{h} \tag{5}$$

on peut reformuler l'équation (5) à un problème variationnelle comme suit :

on multiplie l'équation (5) par une fonction teste $\hat{k} \in H_0^1(0, 1)$ et en fait un intégration sur l'intervale $[0, 1]$ on arrive à :

$$\int_0^1 \left(\xi - \frac{D}{I\rho}\xi_{xx} \right) \hat{k} dx = \int_0^1 \hat{h} \hat{k} dx$$

Mais :

$$\int_0^1 \left(\xi - \frac{D}{I\rho}\xi_{xx} \right) \hat{k} dx = \int_0^1 \xi \hat{k} dx - \frac{D}{I\rho} \int_0^1 \xi_{xx} \hat{k} dx$$

par l'intégration par partie et comme $\hat{k} \in H_0^1(0, 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi_{xx} \hat{k} dx &= \left[\xi_x \hat{k} \right]_0^1 - \int_0^1 \xi_x \hat{k}_x dx \\ &= - \int_0^1 \xi_x \hat{k}_x dx \\ &= - \left\langle \xi_x, \hat{k}_x \right\rangle_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\xi - \frac{D}{I\rho} \xi_{xx} \right) \hat{k} dx = \left\langle \xi, \hat{k} \right\rangle_{L^2(0,1)} - \frac{D}{I\rho} \left\langle \xi_x, \hat{k}_x \right\rangle_{L^2(0,1)}$$

Ce qui donne le problème variationnelle suivant trouver un ξ tel que :

$$a_2(\xi, \hat{k}) = l_2(\hat{k}).$$

pour tout $\hat{k} \in H_0^1(0, 1)$.

avec :

$$\begin{aligned} a_2 : H_1^0(0, 1) \times H_1^0(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \hat{k}) &\rightarrow a_2(\xi, \hat{k}) = \left\langle \xi, \hat{k} \right\rangle_{L^2(0,1)} - \frac{D}{I\rho} \left\langle \xi_x, \hat{k}_x \right\rangle_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l_2 : H_1^0(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \hat{k} &\rightarrow l_2(\hat{k}) = \left\langle \hat{h}, \hat{k} \right\rangle_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0, 1)$.

Avec un raisonnement analogue à ce qui a été fait précédemment, on aura :

$$\xi \in H_0^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

ce qui implique que $s, \psi \in H_0^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$.

On note que : $\omega - u = h_1$ et $h_1 \in H_0^1(0, 1)$ ce qui implique que : $u \in H_0^1(0, 1)$.

De même manière, $\xi - v = h_3$ et $h_3 \in H_0^1(0, 1)$ implique que : $v \in H_0^1(0, 1)$.

Et d'après $v = (3s - \psi)$ et $v \in H_0^1(0, 1)$ alors $s_t, \psi_t \in H_0^1(0, 1)$.

Finalement ω, u, ξ, v, s et z existe et $(\omega, u, \xi, v, s, z) \in D(A)$.

Donc l'opérateur $I - A$ est surjectif.

Comme A est dissipatif et l'opérateur $(I - A)$ surjectif alors A est un opérateur m-dissipatif. D'après le théorème de Lumner Philips, A génère un C_0 -semi groupe de contraction $(s(t))_{t \geq 0}$.

Le problème (1.1) admet un solution unique s'écrit par $\phi(t) = T(t)\phi_0$.

S'intéressant à l'analyse de problèmes aux limites régis par des équations différentielles et des systèmes différentielles.

A travers le troisième chapitre, on a exposé l'utilisations de la théorie des semi groupes pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des Schrodinger, le système de Timoshenko , qui peuvent s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait.

Plus précisément, on a donné des conditions nécessaires pour que les problèmes précédents soit bien posé, en utilisant, la théorie des semi groupe.

On a montré aussi que les solutions des problèmes précédents définissent un semi groupe fortement continue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Y.Abdelbadie**, La théorie de Semi-Groupes et les équations aux dérivées partielles à retard, MiMOIRE DE MASTER, UNIVERSIT ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN, 2019.
- [2] **O.Bouanane,A.Boukezzoula** Système d'évolution à base du problème de Cauchy abstarit dans le cas hyperbolique en théorie des semi-groupe, Centre Universitaire Abdelhafide Boussouf Mila.
- [3] **H.BREZIS**, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983, ISBN :2-225-77198-7.
- [4] **F.Dardalhon,FedericoVerga**, le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problème d'évolution semi-linéaires mémoire encadré par Florence Hubert 7 juin 2006, 43-59,8.
- [5] **Tijani A. Apalara, Carlos A. Raposo and Carlos A.S. Nonato**,Exponential stability for laminated beams with a frictional damping, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- [6] **S.Leulmi**, Semi-Groupe, Note de cours, Université 20 Aout 1955 de Skikda, 2020.

Bibliographie

- [7] **L.D.LEMLE**, *Autour des propriétés des Semi-Groupe volume 31*, 99-145.
- [8] **I.Mazari**, EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Thierry Gal-
lay(cours) & Julien Vovelle (TD), Cours de MI-ENS de Lyon Année
scolaire 2014-2015.
- [9] **A.Moumen,D.Ouachenane,K.Bouhali and Y.Altayeb** Well-
Prosedness and Stability Results for a Damped Porous-Elastics System
with Infinite Memory and Disributed Delay Terms Mathematicul Ap-
plications 2021.
- [10] **A.pazy**, Semi-Groupe of lineair operators and Applications to Partial
Differential Equations,Grivat Ram 91904 jerusalem Israel,100-109.
- [11] **J.Pierre Raymond**, équation d'évolution, Université Paul Sabatier ,6-
11.