

# وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N<sup>o</sup> : U.S/F.S/D.M/...../2022

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

# Contrôle Optimal d'un Problème de l'obstacle Bilatéral

Option : Commande Optimale et Systèmes Dynamiques

Par :

*KHELFAOUI Bouchra*

Encadré par : NOURI Ibtissam

M.C.B

U.SKIKDA

Soutenu devant le jury :

Président : TILBI Djahida

M.C.B

U. SKIKDA

Examineur : BELYACINE Zahia

M.C.B

U.SKIKDA

Année universitaire : 2021/2022

# **Remerciements**

*A la fin de ce travail, je ne manque d'adresser mes sincères Remerciements à mon **Dieu** le grand créateur qui ma a guidé dans mes pats pour arriver à ce niveau.*

*La réalisation de ce travail n'aurait pu être menée à terme sans le support constant de mon encadreur Docteur **NOURI Ibtissam**. Je désire lui adresser un merci tout particulier, ses précieux commentaires et ses conseils pertinents m'ont grandement aidé tout au long des différentes étapes inhérentes au processus de recherche et à l'élaboration de ce mémoire.*

*Nombreuses sont les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail, auxquelles je dois avec plaisir, présenter mes remerciements.*

*Je voudrais également remercier les membres de jury, pour avoir bien voulu lire, commenter et débattre mon travail.*

*Je remercie toute personne, qui de près ou de loin ayant généreusement contribué à l'élaboration de ce travail.*

*En fin, un grand merci à mon père, ma mère, mes sœurs et mes frères pour leur amour, leur conseils ainsi que leur soutiens inconditionnel, qui m'a permis de réaliser ce mémoire.*

**KHELFAOUI BOUCHRA**

# *Dédicace*

*A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi*

*Mon cher père **ABBES**.*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.*

*Ma chère mère **LOUIZA**.*

*A mes Frères **FAYÇAL, KHALED** et mes sœurs **MERIEM, SOUMIA**.*

*Merci pour m'avoir toujours supporté dans mes décisions. Merci pour tout votre amour et votre confiance, pour m'avoir aidé à ranger mon éternel désordre et pour votre énorme support pendant la rédaction de mon projet!*

*Je vous aime beaucoup.*

*A mes chers neveux **SIRADJE EDDINE, IYAD, AMIR, ASSIL, ABD-RAOUF, ABD-RAHMEN, ANES, ABD-ALLAH**.*

*Et mes belles nièces **CHAIMA et LINA**.*

*A mes **grands-mères, mes grands-pères, mes tantes** que dieu leur fasse miséricorde.*

*A mes chères amies **NOURHANE, RANIA, KHADIDJA.LKL** et **BESMA** qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.*

***KHELFAOUI BOUCHRA***

## ملخص

في هذا العمل، نعتبر مشكلة التحكم الأمثل في عقبة متراجعة التغير الثنائية، حيث وظيفة التحكم هي العقبة، سنقوم باستخدام طريقة التقريب لجعل مشكلة التحكم الأمثل للمتراجعة تقترب من مشكلة التحكم لمجموعة معادلات، علينا ان نثبت وجود التحكم الأمثل و نعطي منظومة الظروف اللازمة المثالية بالتقريب.

الكلمات المفتاحية: متراجعة التغير الثنائية، التحكم الأمثل، مشكلة العقبات الإهليجية.

Dans ce travail, nous considérons un problème de contrôle optimal de l'obstacle d'une inéquation variationnelle bilatérale, où la fonction contrôle est l'obstacle. On utilise une méthode d'approximation afin de ramener l'inéquation variationnelle à une famille de problèmes approchés gouvernés par une équation semi-linéaire, on démontre l'existence de contrôle optimal et on donne un système des conditions nécessaires d'optimalités .

**Mots clés :** Inéquation variationnelle bilatérale, contrôle optimal, problème de l'obstacle elliptique.

## ABSTRACT

In this work, we consider an optimal control problem for a bilateral obstacle inequality where the obstacle function is assumed to be the control, we use an approximation methode to introduce a family of approximate problems gouverned by a semilineaire equation, we prove optimal solutions existence and give the optimality conditions.

**Keywords :** Bilateral variational inequality, Optimal control, elliptic obstacle problem.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
1.1	Introduction . . . . .	8
1.2	Problème de contrôle optimal . . . . .	10
1.2.1	Formulation générale . . . . .	10
1.3	Notions préliminaires . . . . .	12
1.4	Présentation du problème . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Existence de Contrôle optimal</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Problème approché</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Conditions d'optimalité</b>	<b>29</b>
4.1	Système d'optimalité du problème approché . . . . .	29
4.2	Système d'optimalité du problème initial . . . . .	39
	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

## 1.1 Introduction

Le contrôle optimal des équations aux dérivées partielles et des inéquations variationnelles est un domaine important du mathématiques appliquées qui ont des applications différentes dans des domaines différents. Les inéquations variationnelles et les problèmes de contrôle optimal associés ont été largement étudiés pendant des décennies et les références qu'ils contiennent où le système est gouverné par une inéquation variationnelle de l'obstacle est très riche.

Ces problèmes ont été largement étudiés durant les dernières années par de nombreux auteurs, qui ont étudié ces problèmes de contrôle optimal de l'obstacle, où l'obstacle est une fonction connue et le contrôle apparaît dans l'inéquation variationnelle. En d'autre terme, les contrôles ne changent pas l'obstacle, où ce genre de problème peut être appelé problème indirect de contrôle optimal de l'obstacle. Récemment, les problèmes de contrôle optimal de l'obstacle des inéquations variationnelles ont été considérés dans de nombreux aspects différents. L'un de ces aspects le plus important est de prendre l'obstacle comme contrôle.

Ce cas peut être appelé problème direct de contrôle optimal de l'obstacle.

Dans ce mémoire, nous étudions les problèmes de contrôle optimal de l'obstacle gouvernés par des inéquations variationnelles, ces problèmes sont intéressants les résultats d'existence et d'unicité sont nombreux. En ce qui concerne les conditions d'optimalité, plusieurs difficultés se présentent, la difficulté principale est que l'application  $\tau$  : contrôle  $\longrightarrow$  état n'est pas Gâteaux différentiable.

Nous pouvons alors adopter plusieurs points de vue. L'idée étant toujours de se ramener à un problème gouverné par une équation variationnelle. La technique de base est l'approximation de l'opérateur  $\tau$  qui peut se faire de plusieurs manières à peu près équivalentes.

Le mémoire se compose de quatre chapitres qui se présente comme suit : dans le premier, on donne d'une part une introduction générale, et d'autre part on cite quelques notations et notions utilisées dans l'étude de ce genre de problèmes. Dans le deuxième chapitre, on démontre un théorème d'existence de contrôle optimal. Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème approché. Dans le dernier chapitre, on donne les conditions nécessaires d'optimalité du problème approché et on passe à la limite avec  $\delta$  tend vers  $\mathbf{0}$  et on trouve le système d'optimalité du problème initial.

## 1.2 Problème de contrôle optimal

### 1.2.1 Formulation générale

Soit le problème générique suivant posé sous la forme

$$\min \{J(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \mathbf{u} \in U_{ad} \subset U, \mathbf{y} \in K \subset Y\}$$

où  $U$  est un espace de Hilbert,  $Y$  un espace de Banach,  $U_{ad}$  et  $K$  sont des ensembles convexes fermés non vides de  $U$  et  $Y$  respectivement,  $J$  est une fonction coût de  $Y \times U$  dans  $\mathbb{R} \cup \infty$  semi-continue inférieurement et convexe (en général).  $\mathbf{A}$  est un opérateur différentiel elliptique ou parabolique, linéaire ou non (par exemple  $\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := -\Delta \mathbf{y} - \mathbf{u}$ , qui est une équation en fonction de l'état et le contrôle), où la fonction  $\mathbf{y}$  est la fonction d'état et  $\mathbf{u}$  la fonction de contrôle. Ce problème peut être aussi vu comme un problème de programmation mathématique (c'est-à-dire un problème d'optimisation sous contraintes) dans des espaces. Souvent, d'après certaines hypothèses d'existence et d'unicité de la solution, l'équation d'état  $\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  admet une solution unique. On peut alors définir un opérateur  $\tau$  de  $U$  dans  $Y$  qui à  $\mathbf{u}$  associe  $\mathbf{y} = \tau(\mathbf{u})$ . Le problème de contrôle optimal s'écrit alors comme fonction de la seule variable  $\mathbf{u}$  sous la forme

$$\min\{J(\tau(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \mathbf{u} \in U_{ad}, \tau(\mathbf{u}) \in K\}$$

D'après la littérature mathématique, la démarche classique pour résoudre ce genre de problème est en général la suivante

- 1 . Établir l'existence et si possible, l'unicité de la solution de ce problème en faisant appel à des techniques d'estimation a priori et de compacité. Il faut, bien sûr, pour cela avoir une régularité minimale de l'opérateur  $\tau$  (par exemple, la continuité faible).

- 2 . On essaie ensuite de caractériser la ou les solutions, afin de trouver des conditions nécessaires d'optimalité. Souvent, ces conditions sont des conditions différentielles du premier ordre, ceci impose donc des propriétés de différentiabilité de  $\mathbf{J}$  et de  $\boldsymbol{\tau}$  (si la régularité le permet, on peut aussi établir des conditions suffisantes du second ordre).
- 3 . Enfin, on utilise les conditions précédentes pour établir des algorithmes permettant de calculer numériquement la ou les solutions.

### 1.3 Notions préliminaires

Nous présentons pour le moment les notations utilisées dans ce travail. On rappelle ici les espaces dans lesquels les solutions vont être cherchées, plus généralement tous les espaces utilisés pour l'étude mathématique du problème (propriétés de régularité, approximation, ...). Les notations utilisées pour les espaces de Sobolev sont classiques ainsi que les démonstrations peuvent être trouvées. Dans ce qui suit, nous désignons par  $\mathbf{x}$  le point générique de  $\Omega$  qui est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , à frontière  $\partial\Omega$  Lipschitzienne où  $N \leq 3$ . On rappelle que le dual  $D'(\Omega)$  de  $D(\Omega)$  est l'espace des distributions sur  $\Omega$ . On introduit également l'espace  $C^0(\Omega)$  des fonctions continues sur  $\Omega$ . Soit  $p$  tel que  $1 \leq p < +\infty$ . On note par  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $v$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  mesurables tel que

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

où  $\|v\|_{L^p(\Omega)}$  désigne la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \text{ si } p < +\infty$$

**Définition 1.3.1** On définit l'espace  $L^\infty(\Omega)$  comme suit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &= \inf \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \} \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.1** Pour  $p = 2$ , on définit l'espace  $L^2(\Omega)$  comme suit

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

L'espace  $L^2(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

et de produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v(x) w(x) dx$$

pour  $v$  et  $w$  dans  $L^2(\Omega)$

donc

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

et  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Notation :** Pour  $1 \leq p \leq \infty$ ; on note  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$ , pour  $p$  dans  $[1, \infty[$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , où encore  $p' = \frac{p}{p-1}$ , et évidemment  $1' = \infty$  et  $\infty' = 1$ .

### Inclusion des espaces $L^p(\Omega)$

Les espaces  $L^p(\Omega)$  sont décroissants, tel que  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Alors  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ . De plus, il existe  $C$  tel que  $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^q(\Omega)}$ ; pour tout  $f$  dans  $L^q(\Omega)$

**Théorème 1.3.1 (Inégalité de Yong)** Soient  $a, b \geq 0$ , et  $1 \leq p, p' \leq \infty$  deux exposants conjugués, alors

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

**Preuve.** Voir [5].

**Théorème 1.3.2 (Inégalité de Hölder)** Soit  $f$  dans  $L^p(\Omega)$  et  $g$  dans  $L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors  $f.g$  dans  $L^1(\Omega)$  et

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Preuve.** Voir [5].

**Théorème 1.3.3 (Inégalité de Minkowski)** Soit  $1 \leq p < \infty$ , et  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  dans  $L^p(\Omega)$ , alors  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  dans  $L^p(\Omega)$  et

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Preuve.** Voir [5].

**Rappel sur les espaces  $W^{m,p}(\Omega)$**

La théorie des distributions permet de définir, pour les espaces de  $L^p(\Omega)$  des dérivées d'ordre quelconque à valeur dans  $D'(\Omega)$  : pour tout  $\mathbf{d}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  de  $\mathbb{N}^d$  représente la longueur  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et on note  $\partial^\alpha$  la dérivée partielle d'ordre total  $|\boldsymbol{\alpha}|$  et d'ordre  $\alpha_j$  par rapport à la  $j$ -ème variable,  $1 \leq j \leq n$ .

**Définition 1.3.2** Soit  $p$  un nombre réel, tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ , et  $m$  un entier positif, on définit l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  par

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in L^p(\Omega); \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d, |\boldsymbol{\alpha}| \leq m, \partial^\alpha \mathbf{v} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

On note par  $W_0^{m,p}(\Omega)$  l'adhérence de l'espace  $D(\Omega)$  dans l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$ , on le munit de la norme.

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} |\partial^\alpha \mathbf{v}(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty \quad (1.1)$$

Il est facile de vérifier que l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach, réflexif lorsque  $1 \leq p \leq +\infty$ . Dans le cas particulier  $p = 2$ , l'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.1)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longrightarrow \int_{\Omega} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} (\partial^\alpha \mathbf{u})(x) (\partial^\alpha \mathbf{v})(x) dx.$$

**Corollaire 1.3.1** *Pour tout nombre réel  $p$ , tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ , et tout entier positif  $m$ , la semi-norme*

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^{\alpha} v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

*est une norme sur l'espace  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , équivalente à la norme  $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ .*

**Définition 1.3.3** *Soit  $p$  un nombre réel, tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ , et  $m$  un entier positif, on définit l'espace de Sobolev  $W_0^{1,2}(\Omega)$  par*

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\alpha}, |\alpha| \leq m, \partial^{\alpha} v \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

**Définition 1.3.4** *Soit  $p$  un nombre réel, tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ , et  $m$  un entier positif. On définit le nombre réel  $p'$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . On note par  $W^{-m,p'}(\Omega)$  le dual de l'espace  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , et on le munit de la norme duale*

$$\|f\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} := \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{W^{m,p}(\Omega)}}$$

*où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $W^{-m,p'}(\Omega)$  et  $W_0^{m,p}(\Omega)$ . Dans le cas particulier  $p = 2$ , on voit que  $p' = 2$ . On note respectivement  $H_0^m(\Omega)$  et  $H^{-m}(\Omega)$  les espaces  $W_0^{m,2}(\Omega)$  et  $W^{-m,2}(\Omega)$ , et on utilise la même notation pour les normes associées; on pose*

$$H^{-m}(\Omega) := (H_0^m(\Omega))'$$

*alors*

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega)$$

*où les inclusions précédentes sont considérées algébriquement et topologiquement.*

## Définitions et propriétés élémentaires

**Définition 1.3.5** *Soit  $Y$  un espace normé. Une fonction  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  est semi continue inférieurement (noté s.c.i) si*

pour tout  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_n$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f(\mathbf{x}_n) \geq f(\mathbf{x})$

**Définition 1.3.6** . On appelle suite minimisante de  $\mathbf{J}$  dans  $\mathbf{Y}$  une suite  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbf{Y}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{J}(\mathbf{x}_n) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{Y}} \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

**Définition 1.3.7** On dit que la suite  $(\mathbf{x}_n)$  de  $\mathbf{Y}$  converge faiblement vers  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbf{Y}$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Y}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Y}} \text{ pour tout } \mathbf{y} \text{ dans } \mathbf{Y}$$

**Définition 1.3.8** Soient  $\mathbf{E}$  un espace de Hilbert et  $\mathbf{A}$  dans  $\mathbf{L}(\mathbf{E})$  ensemble des applications linéaires continues de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{E}$ . Il existe un unique opérateur continu de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{E}$ , noté  $\mathbf{A}^*$  et appelé l'adjoint de  $\mathbf{A}$ , tel que

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} \rangle \text{ pour tout } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ dans } \mathbf{E}.$$

**Théorème 1.3.4 (Lions Stampachia)** Soit le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{K} \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \text{ pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{K} \end{cases}$$

Le problème admet une unique solution, ssi  $\mathbf{K}$  est convexe, forme bilinéaire  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  est coercive, continue et la forme linéaire  $\mathbf{f}$  continue.

**Preuve.** Voir [5]

**Théorème 1.3.5 (Théorème des accroissements finis sur  $\mathbb{R}$ )**

Soit  $\mathbf{f}$  une fonction continue sur un intervalle  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $] \mathbf{a}, \mathbf{b} [$ .

Alors, il existe  $\mathbf{c} \in ] \mathbf{a}, \mathbf{b} [$  tel que  $\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

où il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$\int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) d\theta = \int_0^1 \mathbf{f}'[\theta\mathbf{b} + (1 - \theta)\mathbf{a}] d\theta [\mathbf{b} - \mathbf{a}]$$

**Preuve.** Voir [4]

## 1.4 Présentation du problème

On considère un problème de contrôle optimal où la fonction état vérifie une inéquation variationnelle bilatérale et la fonction contrôle est l'obstacle.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière régulière  $\partial\Omega$  et  $\mathbf{z}$  dans  $L^2(\Omega)$  l'état désiré, pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  nous définissons

$$K(\varphi, \psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \varphi \leq v \leq \psi \text{ presque partout pour } x \text{ dans } \Omega\}$$

$K(\varphi, \psi)$  est un ensemble convexe et fermé non vide. Nous considérons le problème de l'obstacle suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \text{ dans } K(\varphi, \psi) \text{ tel que} \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}, v - \mathbf{u}) \geq 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } v \text{ dans } K(\varphi, \psi) \quad (1.2)$$

$\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  c'est la forme bilinéaire définie dans  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  par

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c v dx$$

avec  $a_{i,j}, b_i, c$  dans  $L^\infty(\Omega)$

la forme bilinéaire  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, v)$  est continue dans  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\exists M > 0, \forall (\mathbf{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega); \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, v) \leq M \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

et coercive

$$\exists \alpha > 0 \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega); \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Soit  $\mathbf{A} \in L(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  l'opérateur linéaire associé avec  $\mathbf{a}$  tel que

$$\langle \mathbf{A}u, v \rangle = \mathbf{a}(u, v)$$

Il est bien connu que l'inéquation variationnelle (1.2) admet une solution unique  $\mathbf{u} = \tau(\varphi, \psi)$  qui appartient à  $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Tel que  $\tau$  c'est opérateur continue défini de  $(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  nous introduisons la fonctionnelle objective sous la forme

$$\mathbf{J}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau(\varphi, \psi) - z)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2) dx \quad (\varphi, \psi) \in U_{ad}$$

tel que  $U_{ad}$  l'ensemble des contrôles admissibles défini par

$$U_{ad} = \{(\varphi, \psi) \in (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \mid \varphi \leq \psi \mid \|\varphi\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq \mathbf{R}, \|\psi\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq \mathbf{R}\}$$

$\mathbf{R}$  est un nombre réel positif.

Par suite, on définit le problème de contrôle optimal sous la forme

$$\text{Problème (P)} \begin{cases} \text{Trouver } (\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \text{ dans } U_{ad} \text{ tel que} \\ \mathbf{J}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} \mathbf{J}(\varphi, \psi) \end{cases}$$

en d'autres termes, pour l'état désiré  $z$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  nous voulons trouver  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  dans  $U_{ad}$  tel que l'état correspondant  $\bar{\mathbf{u}} = \tau(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  soit proche de l'état désiré  $z$ .

Pour trouver les conditions nécessaires d'optimalité, il est connu qu'on doit dériver la fonction objectif  $\mathbf{J}(\varphi, \psi)$  qui dépend de  $\tau(\varphi, \psi)$ , mais l'application  $(\varphi, \psi) \longrightarrow \mathbf{u} = \tau(\varphi, \psi)$  n'est pas différentiable, alors et pour surmonter cette difficulté, nous pouvons introduire une famille du problème approché tel que  $(\varphi, \psi) \longrightarrow \tau_{\delta}(\varphi, \psi)$  admet une différentielle au sens faible.

## CHAPITRE 2

# EXISTENCE DE CONTRÔLE OPTIMAL

**Théorème 2.0.1** *Il existe une solution du **Problème (P)***

**Preuve.** Soit  $\{\varphi_k, \psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  dans  $U_{ad}$  une suite minimisante de  $J(\varphi, \psi)$ , tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k, \psi_k) = \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi)$$

soit  $\mathbf{u}_k = \tau(\varphi_k, \psi_k)$  la solution correspondante du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_k \text{ dans } \mathbf{K}(\varphi_k, \psi_k) \text{ tel que} \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v} - \mathbf{u}_k) \geq \mathbf{0}, \text{ pour tout } \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{K}(\varphi_k, \psi_k) \end{array} \right.$$

si on pose  $\mathbf{v} = \varphi_k$ , on obtient

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \varphi_k - \mathbf{u}_k) \geq \mathbf{0}$$

ainsi il vient

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \varphi_k) - \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) \geq \mathbf{0}$$

de plus

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \varphi_k) \geq \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k)$$

d'après la continuité et la coercivité de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ , on a

$$\alpha \|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq M \|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi_k\|_{H_0^1(\Omega)}$$

alors

$$\|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{M}{\alpha} \|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (2.1)$$

ainsi

$$\|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|\varphi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (2.2)$$

où

$$c = \frac{M}{\alpha}$$

si on pose  $\mathbf{v} = \psi_k$ , on obtient

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \psi_k - \mathbf{u}_k) \geq 0$$

ainsi il vient

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \psi_k) - \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) \geq 0$$

de plus

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \psi_k) \geq \mathbf{a}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k)$$

d'après la continuité et la coercivité de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$

$$\alpha \|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq M \|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)}$$

alors

$$\|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{M}{\alpha} \|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (2.3)$$

Ainsi

$$\|\mathbf{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (2.4)$$

d'autre part on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k, \psi_k) = \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi)$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\varphi_k, \psi_k) - z)^2 + (\Delta\varphi_k)^2 + (\Delta\psi_k)^2\} dx &= \\ \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\varphi, \psi) - z)^2 + (\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2\} dx &= d \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\varphi_k, \psi_k) - z)^2\} dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{(\Delta\varphi_k)^2 + (\Delta\psi_k)^2\} dx &= \\ \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\varphi, \psi) - z)^2\} dx + \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2\} dx &= d \end{aligned}$$

et on a  $\|\varphi\|$  et  $\|\psi\|$  sont borné dans  $H^2(\Omega)$  donc, il existe  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  dans  $U_{ad}$ , tel que

$$\Delta\varphi_k \text{ converge faiblement vers } \Delta\bar{\varphi} \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$\Delta\psi_k \text{ converge faiblement vers } \Delta\bar{\psi} \text{ dans } L^2(\Omega)$$

et d'après (2.2) et (2.4), il existe  $\bar{\mathbf{u}} = \tau(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$\mathbf{u}_k \text{ converge faiblement vers } \bar{\mathbf{u}} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

Dans la suite, on veut montrer que  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  une solution de **Problème (P)**, on sait que  $\Delta\varphi_k$  et  $\Delta\psi_k$  converge faiblement vers  $\Delta\bar{\varphi}$  et  $\Delta\bar{\psi}$  dans  $L^2(\Omega)$ , et d'après la semi continuité des normes, on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \{(\Delta\varphi_k)^2 + (\Delta\psi_k)^2\} dx \geq \int_{\Omega} \{(\Delta\bar{\varphi})^2 + (\Delta\bar{\psi})^2\} dx$$

ainsi

$$\inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k, \psi_k)$$

$$\inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\varphi_k, \psi_k) - z)^2\} dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{(\Delta \varphi_k)^2 + (\Delta \psi_k)^2\} dx$$

$$\inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\varphi_k, \psi_k) - z)^2\} dx + \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{(\Delta \varphi_k)^2 + (\Delta \psi_k)^2\} dx$$

$$\inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\tau(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) - z)^2\} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\Delta \bar{\varphi})^2 + (\Delta \bar{\psi})^2\} dx$$

$$\inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J(\varphi, \psi) \geq J(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$$

Donc  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  est une solution du **Problème (P)**.

## CHAPITRE 3

## PROBLÈME APPROCHÉ

Dans cette section nous introduisons une famille des problèmes approchés.

Soit

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -r^2 & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ r + \frac{1}{4} & \text{si } r < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

où pour tout  $r$  dans  $\mathbb{R}$ ; on a

$$r \wedge 0 = \min\{r; 0\} \leq \beta(r) \leq 0$$

et  $\beta$  est dans  $C^1(\mathbb{R})$  par morceaux, on définit également  $\beta'(r)$  par

$$\beta'(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -2r & \text{si } r \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 & \text{si } r < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on introduit l'équation elliptique semi-linéaire suivante, qui est l'approximation du problème de l'obstacle bilatérale (1.2)

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{u}^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) + \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^\delta = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\delta$  supérieur à  $\mathbf{0}$  et tends vers  $\mathbf{0}$ .

Il est connu que l'équation précédente admet une unique solution

$$\mathbf{u}^\delta \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \text{tel que } \mathbf{u}^\delta = \tau^\delta(\varphi, \psi)$$

ainsi, notre problème de contrôle optimal approché s'écrit sous la forme

$$\text{Problème}(P^\delta) \begin{cases} \text{Trouver } (\varphi^\delta, \psi^\delta) \text{ dans } U_{ad} & \text{tel que} \\ J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) = \inf_{(\varphi, \psi) \in U_{ad}} J_\delta(\varphi, \psi) \end{cases}$$

avec

$$J_\delta(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau_\delta(\varphi, \psi) - z)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2 dx \quad (3.2)$$

**Théorème 3.0.2** *Soit  $(\varphi, \psi) \in U_{ad}$ , si  $\mathbf{u}^\delta = \tau_\delta(\varphi, \psi)$  est solution du problème (3.1)*

*alors, il existe  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tel que*

$$\tau_\delta(\varphi, \psi) \text{ converge faiblement vers } \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ dès que, } \delta \text{ tend vers } \mathbf{0}^+.$$

*où  $\mathbf{u} = \tau(\varphi, \psi)$ , alors on a*

$$\| \mathbf{u}^\delta \|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_1 \| \varphi^\delta \|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \quad (3.3)$$

Et

$$\| \mathbf{u}^\delta \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \| \psi^\delta \|_{H_0^1(\Omega)} \quad (3.4)$$

**Preuve.** On commence par démontrer les inéquations (3.3) et (3.4). Pour tout  $(\varphi, \psi)$  dans  $U_{ad}$ , il existe  $\tau_\delta(\varphi, \psi) = \mathbf{u}^\delta$  solution du problème (3.1) et  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{K}(\varphi, \psi)$ , en multipliant l'équation (3.1) par  $(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta)$  et en considérant la formulation faible de l'équation (3.1), on trouve que

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} \mathbf{u}^\delta (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} (\beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) + \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} = 0$$

où encore

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} \mathbf{u}^\delta (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} = -\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

où bien

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) = -\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} - \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} \quad (3.6)$$

Concernant l'égalité  $\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x}$  deux cas se présentent

**Cas 01 :** Si on pose  $\mathbf{u}^\delta \geq \varphi$  alors ,  $\mathbf{u}^\delta - \varphi \geq 0$  d'après la définition de  $\beta(\cdot)$ , on a

$$\beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) = 0$$

ainsi, on déduit que

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{K}(\varphi, \psi) \quad (3.7)$$

**Cas 02 :** Si on pose  $\mathbf{u}^\delta \leq \varphi$  alors  $\mathbf{u}^\delta - \varphi \leq 0$  donc d'après la définition de  $\beta(\cdot)$ , on a

$$\beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi) \leq \mathbf{0}$$

Par suite, concernant  $\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta$ , on a  $\mathbf{u}^\delta \leq \varphi$ , alors  $-\mathbf{u}^\delta \geq -\varphi$ , donc

$$\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta \geq \mathbf{v} - \varphi$$

comme  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{K}(\varphi, \psi)$  alors  $\mathbf{v} \geq \varphi$  presque par tout dans  $\Omega$  et  $\mathbf{v} - \varphi \geq \mathbf{0}$  donc

$$\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta \geq \mathbf{v} - \varphi \geq \mathbf{0}$$

ainsi, on déduit que

$$\int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi)(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

par suite, d'après le **Cas 2**, en peut avoir que

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi)(\mathbf{v} - \varphi) d\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3.8)$$

donc d'après l'équation (3.6) et (3.7) on conclut que

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\mathbf{u}^\delta - \varphi)(\mathbf{v} - \varphi) d\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ pour tout } \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{K}(\varphi, \psi) \quad (3.9)$$

Concernant l'égalité  $-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x}$  deux cas se présentent

**Cas 01** : Si on pose  $\psi \geq \mathbf{u}^\delta$  alors ,  $\psi - \mathbf{u}^\delta \geq \mathbf{0}$  d'après la définition de  $\beta(\cdot)$  , on a

$$\beta(\psi - \mathbf{u}^\delta) = \mathbf{0}$$

ainsi, on déduit que

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

**Cas 02** : Si on pose  $\psi \leq \mathbf{u}^\delta$ , alors  $\psi - \mathbf{u}^\delta \leq \mathbf{0}$ , donc d'après la définition de  $\beta(\cdot)$  , on a

$$\beta(\psi - \mathbf{u}^\delta) \leq \mathbf{0}$$

par suite, concernant  $\psi \leq \mathbf{u}^\delta$  alors  $-\psi \geq -\mathbf{u}^\delta$

donc

$$\mathbf{v} - \psi \geq \mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta$$

et on a

$$\mathbf{v} \in \mathbf{K}(\varphi, \psi)$$

alors

$$\mathbf{v} \geq \psi \text{ presque par tout dans } \Omega \text{ et } \mathbf{v} - \psi \geq \mathbf{0}$$

donc

$$\mathbf{v} - \psi \geq \mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta \geq \mathbf{0}$$

ainsi, on déduit que

$$\int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

par suite, d'après le **Cas 2**, en peut avoir que

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3.11}$$

donc d'après l'équation (3.10) et (3.11) on conclut que

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(\psi - \mathbf{u}^\delta)(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) d\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ pour tout } \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{K}(\varphi, \psi) \tag{3.12}$$

Par suite, en utilisant (3.10) et (3.12), l'équation (3.6) devient

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \mathbf{v} - \mathbf{u}^\delta) \geq \mathbf{0} \text{ pour tout } \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{K}(\varphi, \psi)$$

Maintenant, si on prend  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}$  on obtient

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}^\delta) \geq 0$$

donc

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \mathbf{u}^\delta) \geq 0$$

alors

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \boldsymbol{\varphi}) \geq \mathbf{a}(\mathbf{u}^\delta, \mathbf{u}^\delta)$$

d'après la continuité et la coercivité de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  on trouve

$$\alpha \|\mathbf{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq M \|\mathbf{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\alpha \|\mathbf{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\|\mathbf{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\|\mathbf{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

De même, en utilisant  $\boldsymbol{\varphi} \leq \boldsymbol{\psi}$ , on trouve l'estimation suivante

$$\|\mathbf{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \|\boldsymbol{\psi}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Donc  $\mathbf{u}^\delta$  est borné dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors il existe  $\mathbf{u}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\mathbf{u}^\delta \text{ converge faiblement vers } \mathbf{u} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

## CHAPITRE 4

## CONDITIONS D'OPTIMALITÉ

Dans ce chapitre; on va caractériser la solution optimale de notre problème, en commençant par définir les conditions d'optimalité approchées. En suite, en passant à la limite avec  $\delta$  tend vers  $\mathbf{0}$  et on donne le système limite. On commence par dériver l'application  $\tau(\varphi, \psi) \rightarrow u$ .

### 4.1 Système d'optimalité du problème approché

**Lemme 4.1.1** *L'application  $(\varphi, \psi) \longrightarrow u^\delta = \tau^\delta(\varphi, \psi)$  est différentiable dans le sens suivant*

*Soit  $(\varphi, \psi)$  dans  $U_{ad}$ ,  $\forall(\xi, \eta)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , il existe  $v^\delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$  tel que*

$$\frac{\tau^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - \tau^\delta(\varphi, \psi)}{t}$$

*converge faiblement vers  $v^\delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , dès que  $t$  tends vers  $\mathbf{0}$ , alors  $v^\delta$  est la solution de l'équation*

$$\begin{cases} Av^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi) + \beta'(\psi - u^\delta))v^\delta = \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi)\xi + \beta'(\psi - u^\delta)\eta) & \text{dans } \Omega \\ v^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

**Preuve.** Soit l'équation donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{A}u^\delta = -\frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta - \varphi) + \beta(\psi - u^\delta)) & \text{dans } \Omega \\ u^\delta = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \mathbf{A}u^\delta(\varphi, \psi) = -\frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta(\varphi) - \varphi) + \beta(\psi - u^\delta(\psi))) & \text{dans } \Omega \\ u^\delta(\varphi, \psi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{A}u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) = -\frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta(\varphi + \xi t) - (\varphi + t\xi)) + \beta(\psi + t\eta - u^\delta(\psi + t\eta))) & \text{dans } \Omega \\ u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

par suit, d'après les deux égalités (4.2) et (4.3), on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{A}u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - \mathbf{A}u^\delta(\varphi, \psi) = & \text{dans } \Omega \\ -\frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta(\varphi + \xi t) - (\varphi + t\xi)) + \beta(\psi + t\eta - u^\delta(\psi + t\eta))) - \frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta(\varphi) - \varphi) + \beta(\psi - u^\delta(\psi))) & \\ u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \mathbf{A}u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - \mathbf{A}u^\delta(\varphi, \psi) = & \text{dans } \Omega \\ -\frac{1}{\delta}\beta[u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - (\varphi + \xi t, \psi + t\eta)] - \frac{1}{\delta}\beta[u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi)] & \\ u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, on trouve

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\delta}\beta[u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - (\varphi + \xi t, \psi + t\eta)] - \frac{1}{\delta}\beta[u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi)] \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{\delta}\beta'[\theta u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - (\varphi + t\xi, \psi + t\eta) + (1 - \theta)(u^\delta(\varphi, \psi) - \\ & \quad (\varphi, \psi))]d\theta[u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - (\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi)] \end{aligned}$$

$$= - \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta' [\theta u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - (\varphi + t\xi, \psi + t\eta) + (1 - \theta)(u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi))] d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) - t(\xi, \eta)]$$

donc

$$\begin{cases} Au^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - Au^\delta(\varphi, \psi) = & \text{dans } \Omega \\ - \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta' [\theta u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - (\varphi + t\xi, \psi + t\eta) + (1 - \theta)(u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi))] d\theta \\ [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) - t(\xi, \eta)] \\ u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

en multipliant (4.4) par  $u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A[u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)][u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)] dx \\ &= - \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta' [\theta u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - (\varphi + t\xi, \psi + t\eta) + (1 - \theta)(u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi))] d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) - t(\xi, \eta)] [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)] dx \end{aligned}$$

d'après la coercivité de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A[u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)][u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)] dx \\ &= \mathbf{a}(u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi), u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)) \\ &\geq \alpha \| u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \| u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq -\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \int_0^1 \beta'(\cdot) d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)]^2 dx + \end{aligned}$$

$$(\xi, \eta) \int_{\Omega} t \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta'(\cdot) d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)] dx \quad (4.5)$$

d'après les propriétés de  $\beta'(\cdot)$ , on sait que  $\beta'(r) \geq 0$  pour tout  $r$  dans  $\mathbb{R}$ , et il est connu que

$$[u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)]^2 \geq 0$$

ainsi, on déduit que

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \int_0^1 \beta'(\cdot) d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)]^2 dx \geq 0$$

et

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \int_0^1 \beta'(\cdot) d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)]^2 dx \leq 0$$

donc, on peut écrire (4.5) sous la forme

$$\begin{aligned} & \| u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & \leq t \int_{\Omega} (\xi, \eta) \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta'(\cdot) d\theta [u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)] dx \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, il vient

$$\| u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq t \| (\xi, \eta) \|_{L^2(\Omega)} \| u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) \|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc

$$\| u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) \|_{H_0^1(\Omega)} \leq t \| (\xi, \eta) \|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\left\| \frac{u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)}{t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \| (\xi, \eta) \|_{L^2(\Omega)} \quad (4.6)$$

donc

$$\left\| \frac{u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)}{t} \right\| \text{ est borné dans } H_0^1(\Omega), \text{ alors il existe } v^\delta \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

tel que

$\frac{u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)}{t}$  converge faiblement vers  $v^\delta$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , quand  $t$

tends vers 0

D'autre part, d'après (4.4) et pour tout  $w$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{A[u^\delta(\varphi + \xi t, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi)]}{t} w dx = \\ & = - \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta'[\theta u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - (\varphi + t\xi, \psi + t\eta) + (1 - \theta)(u^\delta(\varphi, \psi) - \\ & \quad (\varphi, \psi))] d\theta \left[ \frac{u^\delta(\varphi + t\xi, \psi + t\eta) - u^\delta(\varphi, \psi) - t(\xi, \eta)}{t} \right] w dx \end{aligned}$$

et dès que  $t$  tend vers 0, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A v^\delta w dx \\ & = - \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{1}{\delta} \beta'[\theta u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi) + (1 - \theta)(u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi))] d\theta [v^\delta - (\xi, \eta)] w dx \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} A v^\delta w dx = -\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'[u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi)] [v^\delta - (\xi, \eta)] w dx, \text{ pour tout } w \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

et

$$\int_{\Omega} A v^\delta w dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'[u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi)] [v^\delta - (\xi, \eta)] w dx = 0$$

il en résulte que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A v^\delta w dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'[u^\delta(\varphi, \psi) - (\varphi, \psi)] [v^\delta - (\xi, \eta)] w dx = 0 & \text{dans } \Omega \\ v^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \mathbf{A}v^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi) + \beta'(\psi - u^\delta))v^\delta = \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi)\xi + \beta'(\psi - u^\delta)\eta) & \text{dans } \Omega \\ v^\delta = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

**Théorème 4.1.1** Soit  $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})$  solution optimale du **Problème**  $(P^\delta)$  alors, il existe un état adjoint  $p^\delta$  tel que  $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, p^\delta)$  satisfait le système d'équation suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} Au^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta(\psi^\delta - u^\delta)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ A^*p^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))p^\delta = u^\delta - z & \text{dans } \Omega \\ \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \{ \beta'(u^\delta - \varphi^\delta)\xi p^\delta + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)\eta p^\delta + \Delta\varphi^\delta \Delta\xi + \Delta\psi^\delta \Delta\eta \} dx \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ p^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \psi^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.7)$$

**Preuve.** Soit  $(u^\delta, \varphi^\delta, \psi^\delta)$  solution optimale du **Problème**  $(P^\delta)$  soit  $(\xi, \eta)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  arbitraire, en remplaçant  $(\varphi, \psi)$  par  $(\varphi^\delta, \psi^\delta)$  dans (4.1) on trouve que

$$\left\{ \begin{array}{ll} Av^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))v^\delta = \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta)\xi + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)\eta) & \text{dans } \Omega \\ v^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.8)$$

pour simplifier la rédaction, on pose

$$Av^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))v^\delta = Mv^\delta$$

par suite, (4.8) peut s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} Mv^\delta = \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta)\xi + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)\eta) & \text{dans } \Omega \\ v^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

dans la suite, on va déterminer l'adjoint de l'opérateur  $M$  on a

$$M^*v^\delta = A^*v^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))v^\delta$$

Alors, on trouve que

$$\begin{cases} \mathbf{A}^* \mathbf{p}^\delta + \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) \mathbf{p}^\delta = u^\delta - z & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{p}^\delta = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

avec  $\mathbf{A}^*$  est l'adjoint de l'opérateur  $\mathbf{A}$ .

Par suit, si  $(u^\delta, \varphi^\delta, \psi^\delta)$  solution optimale du **Problème**  $(P^\delta)$  alors d'après la condition nécessaire d'optimalité on a

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} \geq 0 \quad (4.10)$$

tel que

$$J_\delta(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau(\varphi, \psi) - z)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2) dx$$

et

$$J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau(\varphi^\delta, \psi^\delta) - z)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi^\delta)^2 + (\Delta\psi^\delta)^2) dx$$

alors

$$J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) - z)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi^\delta)^2 + (\Delta\psi^\delta)^2) dx \quad (4.11)$$

$$J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi^\delta)^2 + (\Delta\psi^\delta)^2) dx$$

et

$$J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - z)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta(\varphi^\delta + t\xi))^2 + (\Delta(\psi^\delta + t\eta))^2) dx \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\varphi^\delta + t\Delta\xi)^2 + (\Delta\psi^\delta + t\Delta\eta)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi^\delta)^2 + t^2(\Delta\xi)^2 + \\ &\quad 2t\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + (\Delta\psi^\delta)^2 + t^2(\Delta\eta)^2 + 2t\Delta\psi^\delta\Delta\eta) dx \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + \\ &\quad t\eta) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi^\delta)^2 + t^2(\Delta\xi)^2 + 2t\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + (\Delta\psi^\delta)^2 + t^2(\Delta\eta)^2 + 2t\Delta\psi^\delta\Delta\eta) dx - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\Delta\varphi^\delta)^2 + (\Delta\psi^\delta)^2) dx \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) &= \frac{1}{2} \int_\Omega ((u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta))^2 - (u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta))^2 - 2z(u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta))) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_\Omega (t^2(\Delta\xi)^2 + 2t\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + t^2(\Delta\eta)^2 + 2t\Delta\psi^\delta\Delta\eta) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[ \left( (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta)) - (u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)) \right) \left( (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta)) + (u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)) \right) - \right. \\ &\quad \left. 2z \left( u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) \right) + (t^2(\Delta\xi)^2 + 2t\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + t^2(\Delta\eta)^2 + 2t\Delta\psi^\delta\Delta\eta) \right] dx \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} &= \\ \frac{1}{2} \int_\Omega \left[ \left( \frac{(u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta)) - (u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta))}{t} \right) \left( (u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta)) + (u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)) \right) - \right. \\ \left. 2z \left( \frac{u^\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} \right) + \frac{t^2(\Delta\xi)^2 + 2t\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + t^2(\Delta\eta)^2 + 2t\Delta\psi^\delta\Delta\eta}{t} \right] dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} &= \\ \frac{1}{2} \int_\Omega \{ 2v^\delta u^\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta) - 2zv^\delta + 2\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + 2\Delta\psi^\delta\Delta\eta \} dx \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} &= \\ \frac{1}{2} \int_\Omega \{ (v^\delta(2u^\delta(\varphi, \psi) - 2z) + 2\Delta\varphi^\delta\Delta\xi + 2\Delta\psi^\delta\Delta\eta) \} dx \end{aligned}$$

alors

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} = \int_\Omega \{ v^\delta(u^\delta(\varphi, \psi) - z) + \Delta\varphi^\delta\Delta\xi + \Delta\psi^\delta\Delta\eta \} dx \quad (4.13)$$

d'après (4.10) et (4.13) on déduit que

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} = \int_\Omega \{ v^\delta(u^\delta(\varphi, \psi) - z) + \Delta\varphi^\delta\Delta\xi + \Delta\psi^\delta\Delta\eta \} dx \geq 0 \quad (4.14)$$

en multipliant (4.9) par  $v^\delta$ , on trouve que

$$\left( Ap^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))p^\delta \right) v^\delta = v^\delta(u^\delta - z) \quad (4.15)$$

On remplace (4.15) dans (4.14), on obtient

$$\begin{aligned} & \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta(\varphi^\delta + t\xi, \psi^\delta + t\eta) - J_\delta(\varphi^\delta, \psi^\delta)}{t} \\ &= \int_{\Omega} \left[ \mathbf{A}p^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))p^\delta \right] v^\delta + \Delta\varphi^\delta \Delta\xi + \Delta\psi^\delta \Delta\eta \Big] dx \geq 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

en suite, en multipliant (4.1) par  $p^\delta$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on trouve que

$$\int_{\Omega} \left( \mathbf{A}v^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))v^\delta \right) p^\delta dx = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \left( (\beta'(u^\delta - \varphi)\xi + \beta'(\psi - u^\delta)\eta) \right) p^\delta dx \quad (4.17)$$

et

$$\int_{\Omega} \left( \mathbf{A}v^\delta p^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))v^\delta p^\delta \right) dx = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \left( (\beta'(u^\delta - \varphi)\xi + \beta'(\psi - u^\delta)\eta) \right) p^\delta dx$$

comme

$$\langle M^* p^\delta, v^\delta \rangle = \langle p^\delta, M v^\delta \rangle$$

alors (4.17) peut s'écrire sous la forme

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}p^\delta v^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))p^\delta v^\delta dx = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} (\beta'(u^\delta - \varphi)\xi p^\delta + \beta'(\psi - u^\delta)\eta p^\delta) dx \quad (4.18)$$

on remplace (4.18) dans (4.16), on obtient

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \{ \beta'(u^\delta - \varphi)\xi p^\delta + \beta'(\psi - u^\delta)\eta p^\delta + \Delta\varphi^\delta \Delta\xi + \Delta\psi^\delta \Delta\eta \} dx \geq 0 \quad (4.19)$$

d'après (4.1), (4.9) et (4.19) notre système d'optimalité du **Problème** ( $P^\delta$ ) est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A}u^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta(\psi^\delta - u^\delta)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{A}^* p^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta))p^\delta = u^\delta - z & \text{dans } \Omega \\ \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \{ \beta'(u^\delta - \varphi^\delta)\xi p^\delta + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)\eta p^\delta + \Delta\varphi^\delta \Delta\xi + \Delta\psi^\delta \Delta\eta \} dx \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ p^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \psi^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

## 4.2 Système d'optimalité du problème initial

**Théorème 4.2.1** Soit  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{u})$  dans  $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$  une paire optimale du **Problème (P)**, alors il existe  $\bar{p}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $\bar{q}$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{u} = \tau(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) & \text{dans } \Omega \\ A^* \bar{p} + \bar{q} = \bar{u} - z & \text{dans } \Omega \\ \int_{\Omega} \{ \bar{q}_1 \xi + \bar{q}_2 \eta + \Delta \bar{\varphi} \Delta \xi + \Delta \bar{\psi} \Delta \eta \} dx \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{p} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{\varphi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{\psi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

**Preuve.** Pour passer à la limite dans le problème (4.7), il faut montrer les estimations à priori pour  $p^\delta$ , en multipliant l'équation suivante

$$A^* p^\delta + \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) = u^\delta - z$$

par une fonction test  $v = p^\delta$ , et en intégrant sur  $\Omega$ , en trouvant

$$\int_{\Omega} [A^* p^\delta + \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) p^\delta] p^\delta dx = \int_{\Omega} (u^\delta - z) p^\delta dx$$

donc

$$\int_{\Omega} A^* p^\delta p^\delta dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) (p^\delta)^2 dx = \int_{\Omega} (u^\delta - z) p^\delta dx$$

et

$$\langle A p^\delta, p^\delta \rangle + \int_{\Omega} \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) (p^\delta)^2 dx = \int_{\Omega} (u^\delta - z) p^\delta dx$$

d'après la coercivité de  $a(., .)$  on a

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) (p^\delta)^2 dx \leq \int_{\Omega} (u^\delta - z) p^\delta dx$$

ainsi

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq -\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) (p^\delta)^2 dx + \int_{\Omega} (u^\delta - z) p^\delta dx$$

Comme

$$(\mathbf{p}^\delta)^2 \geq \mathbf{0} \text{ et } \beta'(r) \geq \mathbf{0} \text{ pour tout } r \text{ dans } \mathbb{R}$$

alors

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) (\mathbf{p}^\delta)^2 dx \geq \mathbf{0}$$

donc

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) (\mathbf{p}^\delta)^2 dx \leq \mathbf{0}$$

ainsi

$$\| \mathbf{p}^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_{\Omega} (u^\delta - z) \mathbf{p}^\delta dx$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on trouve

$$\| \mathbf{p}^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \left( \int_{\Omega} (u^\delta - z)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (\mathbf{p}^\delta)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\| \mathbf{p}^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \| u^\delta - z \|_{L_2(\Omega)} \| \mathbf{p}^\delta \|_{L_2(\Omega)}$$

de plus

$$\| \mathbf{p}^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \| u^\delta - z \|_{L_2(\Omega)} \| \mathbf{p}^\delta \|_{H_0^1(\Omega)}$$

alors

$$\| \mathbf{p}^\delta \|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \| u^\delta - z \|_{L_2(\Omega)} \tag{4.20}$$

donc  $\mathbf{p}^\delta$  est borné dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors il existe  $\bar{\mathbf{p}}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\mathbf{p}^\delta \text{ converge faiblement vers } \bar{\mathbf{p}} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \tag{4.21}$$

Soit

$$\mathbf{q}^\delta = \frac{1}{\delta} (\beta'(u^\delta - \varphi^\delta) + \beta'(\psi^\delta - u^\delta)) \mathbf{p}^\delta$$

donc

$$\mathbf{q}^\delta = \frac{1}{\delta} \beta'(u^\delta - \varphi^\delta) \mathbf{p}^\delta + \frac{1}{\delta} \beta'(\psi^\delta - u^\delta) \mathbf{p}^\delta$$

de plus

$$\mathbf{q}^\delta = \mathbf{q}_1^\delta + \mathbf{q}_2^\delta$$

avec

$$\mathbf{q}_1^\delta = \frac{1}{\delta} \beta'(u^\delta - \varphi^\delta) \mathbf{p}^\delta$$

et

$$\mathbf{q}_2^\delta = \frac{1}{\delta} \beta'(\psi^\delta - u^\delta) \mathbf{p}^\delta$$

Soit  $\phi$  dans  $H_0^1(\Omega)$  arbitraire, d'après l'égalité

$$\mathbf{A}^* \mathbf{p}^\delta + \frac{1}{\delta} \beta'(u^\delta - \varphi^\delta) \mathbf{p}^\delta + \frac{1}{\delta} \beta'(\psi^\delta - u^\delta) \mathbf{p}^\delta = u^\delta - z$$

nous obtenons

$$\frac{1}{\delta} \beta'(u^\delta - \varphi^\delta) \mathbf{p}^\delta + \frac{1}{\delta} \beta'(\psi^\delta - u^\delta) \mathbf{p}^\delta = u^\delta - z - \mathbf{A}^* \mathbf{p}^\delta$$

on a

$$\langle \mathbf{q}^\delta, \phi \rangle = \mathbf{q}^\delta(\phi) = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'(u^\delta - \varphi^\delta) \mathbf{p}^\delta \phi \, dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'(\psi^\delta - u^\delta) \mathbf{p}^\delta \phi \, dx$$

alors

$$|\mathbf{q}^\delta(\phi)| = \left| \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'(u^\delta - \varphi^\delta) \mathbf{p}^\delta \phi \, dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta'(\psi^\delta - u^\delta) \mathbf{p}^\delta \phi \, dx \right|$$

et

$$|\mathbf{q}^\delta(\phi)| = \left| \int_{\Omega} (u^\delta - z - \mathbf{A}^* \mathbf{p}^\delta) \phi \, dx \right|$$

$$|\mathbf{q}^\delta(\phi)| = \left| \int_{\Omega} (u^\delta - z) \phi \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{A}^* \mathbf{p}^\delta \phi \, dx \right|$$

$$|\mathbf{q}^\delta(\phi)| \leq \left| \int_{\Omega} (u^\delta - z) \phi \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \mathbf{A}^* \mathbf{p}^\delta \phi \, dx \right|$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et la continuité de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ , on trouve

$$|\mathbf{q}^\delta(\phi)| \leq \left( \int_{\Omega} (u^\delta - z)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (\phi)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{p}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Ainsi

$$|q^\delta(\phi)| \leq \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|p^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.22)$$

on a  $\phi$  dans  $H_0^1(\Omega)$  alors d'après les injections de Sobolev, on trouve que

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

en remplace dans (4.22), on trouve

$$|q^\delta(\phi)| \leq \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|p^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

en utilisant l'inégalité (4.20), on trouve

$$|q^\delta(\phi)| \leq \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + c \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

alors

$$|q^\delta(\phi)| \leq (1 + c) \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc

$$|q^\delta(\phi)| \leq c^* \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

où

$$c^* = 1 + c$$

on a

$$\|q^\delta\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \frac{\langle q^\delta, \phi \rangle}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} |q^\delta(\phi)|$$

donc

$$\|q^\delta\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega), \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} |q^\delta(\phi)| \leq c^* \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}$$

ainsi,  $q^\delta$  est borné dans  $H^{-1}(\Omega)$ , alors il existe  $\bar{q}$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  tel que

$$q^\delta \text{ converge faiblement étoile vers } \bar{q} \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

on a

$$q^\delta = q_1^\delta + q_2^\delta$$

Donc

$$q_1^\delta \text{ borné dans } H^{-1}(\Omega)$$

et

$$q_2^\delta \text{ borné dans } H^{-1}(\Omega)$$

alors

$$q_1^\delta \text{ et } q_2^\delta \text{ converge faiblement étoile vers } \bar{q}_1 \text{ et } \bar{q}_2 \text{ successivement dans } H^{-1}(\Omega) \quad (4.23)$$

et on a

$$\begin{aligned} u^\delta &\text{ converge faiblement vers } \bar{u} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \\ (\Delta\varphi^\delta, \Delta\psi^\delta) &\text{ converge faiblement vers } (\Delta\bar{\varphi}, \Delta\bar{\psi}) \text{ dans } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ p^\delta &\text{ converge faiblement vers } \bar{p} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Finalement, et par passage à la limite, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{u} = \tau(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) & \text{dans } \Omega \\ A^*\bar{p} + \bar{q} = \bar{u} - z & \text{dans } \Omega \\ \int_{\Omega} \{ \bar{q}_1 \xi + \bar{q}_2 \eta + \Delta\bar{\varphi} \Delta\xi + \Delta\bar{\psi} \Delta\eta \} dx \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{p} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{\varphi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{\psi} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Notre objectif initial dans ce mémoire est l'étude d'un problème de contrôle optimal de l'obstacle gouverné par une inéquation variationnelle elliptique bilatérale, en premier lieu, on à démontrer un théorème d'existence de la solution optimale de notre problème, en suite, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, où il faut dériver la fonction objectif  $J(\varphi, \psi)$  qui dépend de  $\tau(\varphi, \psi)$ , mais l'application  $(\varphi, \psi) \rightarrow u = \tau(\varphi, \psi)$  n'est pas différentiable même au sens faible, alors, on à introduit une famille de problèmes approchés, où il s'agit d'introduire un paramètre d'approximation  $\delta$  qui est censé tendre vers  $\mathbf{0}$ , tel que l'application  $(\varphi, \psi) \rightarrow \tau^\delta(\varphi, \psi)$  admet une différentielle au sens faible, par suite, on a obtenu un système d'optimalité approché (qui dépend du paramètre  $\delta$ ), en faisant tendre  $\delta$  vers  $\mathbf{0}$ , on a obtenu le système d'optimalité de notre problème.

**Les résultats principaux :**

- L'existence de la solution optimale de notre problème.
- La caractérisation de la solution optimale du problème approché.
- La détermination du système d'optimalité du problème.

Cependant, plusieurs questions restent ouvertes et méritent d'être traitées, par exemple :

- Établir des algorithmes permettant de calculer numériquement la solution.
- Étudier des problèmes de contrôle optimal non linéaire gouverné par une inéquation variationnelle bilatérale.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams D. R. HRynkiv V, and, S. Lenhart. *Optimal control of a biharmonique obstacle problem, Around the research of vladimir Maz'y II : 1-24, Int.Math.Ser.(N.Y), (13) springer, New York, (2010).*
- [2] Adams D.R, Lenhart S, and J. Yong. *optimal control of the obstacle for an elliptic variational inequality, Applied Mathematics and optimization (38) 121-140, (1998).*
- [3] Adams D.R, Lenhart S. *An obstacle control problem with a source term. Applied mathematics and optimization journal 47.79-95(2003).*
- [4] Bergounioux, M.and Lenhart, S. *Optimal control of bilateral obstacle problems, SIAMJ. On control 43(2004), 240-255.*
- [5] H. Brizis et Stampachia. *sur la régularité de la solution d'inéquation elliptique. Bulletin de société mathématique de France, (96) : 153-180, (1968).*
- [6] Lenhart Suzanne. *Optimal control of partail differential equations and variational inequalities(may 2006)*
- [7] R. Chanem. *Controle optimal de l'obstacle, 978-3-8381-7304-7. (2012), Presses Académiques Francophones*
- [8] Radouen Ghanem, Ibtissam Nouri. *Applied Mathematics and Optimization 76 (3), 465-500,2017*
- [9] Yuquan ye and Q chen. *Optimal control of the obstacle in a quasilinear elliptic variational inequality, J. Math, Anal, Appl, 294(2004)258-272.*