

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : COSD

Thème

Cycles limites se bifurquant d'un centre dégénéré

Présentée par :
Lecheheb Karima

Soutenu publiquement le : 02/07/2025

Devant le jury composé de :

Mimia Benhadri	M.C.A,	Université de Skikda	Président
Amel Boulfoul	M.C.A,	Université de Skikda	Encadrant
Nassima Debz	M.C.B,	Université de Skikda	Examineur

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

En premier lieu et avant tout, je remercie
« **ALLAH** » qui m'a donné la force, la patience, la
volonté et le courage pour réaliser ce travail.

Je remercie vivement << **Dr. Amel
Boufoul**>> pour sa patience, sa rigueur et sa
disponibilité durant notre préparation de ce
mémoire.

Je remercie les membres de jury << **Dr.
Nassima Debz**>> et << **Dr. Mimia Benhadri**>>
pour avoir accepté d'examiner de ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de
loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.



Dédécace

DÉDÉCACE

Je voudrais remercier mes parents ,
mon mari << **Chaib Djalel** >> ,
mes enfants << **Mohammed** >> ,
<< **farah** >> , << **Rawane** >> , << **Aryame** >> ,
mes frères , mes soeurs , ma famille << **Lecheheb** >> ,
mes amis, aussi toutes les personnes qui ont
participé de près ou de loin à mes recherches
et à l'élaboration de ce mémoire .

Merci à toutes

ملخص

تهدف هذه المذكرة الى دراسة العدد الاقصى للحلول الدورية المعزولة (الدورات الحدية) التي يمكن ان تتفرع من مركز متدهور في نظام تفاضلي متجانس متعدد الحدود من الدرجة

الثالثة :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2). \end{cases}$$

باضطراب هذا المركز بفتة من الانظمة التفاضلية متعددة الحدود التكميية و باستعمال

نظرية المتوسط نجد ان الحد الاقصى لعدد الدورات الحدية هو ثلاثة [5].

كلمات مفتاحية:

نظام تفاضلي، حل دوري، طريقة المتوسط، مركز المتدهور.

Le but de ce mémoire est d'étudier le nombre maximal de solutions périodiques isolées (cycles limites) qui peuvent bifurquer à partir d'un centre dégénéré dans un système différentiel polynomial homogène de degré trois :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2). \end{cases}$$

En perturbant ce centre par une classe de systèmes différentiels polynomiaux cubique et en utilisant la méthode de moyennisation, on trouve que le nombre maximal de cycles limites est trois [5].

Mots clés :

Système différentiel, solution périodique, méthode de moyennisation, centre dégénéré.

The aim of this memory is to study the maximum number of isolated periodic solutions (limit cycles) that can bifurcate of from a degenerate center of third ordre homogeneous polynomial differential system :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2). \end{cases}$$

By perturbing this center with a class of cubic polynomial differential systems and using the averaging method, we find that the maximum number of limit cycles is three [5] .

Key words :

Differential system, periodic solution, averaging method, degenerate center.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	8
1 Notions préliminaires	12
1.1 Introduction	12
1.2 Systèmes différentiels polynomiaux	12
1.3 Systèmes dynamiques	13
1.4 Flot d'un système différentiel	13
1.5 Point d'équilibre	14
1.6 linéarisation	14
1.7 Nature des points d'équilibre	14
1.8 Portrait de phase dans le plan	16
1.9 Orbites périodiques et cycles limites	17
1.10 Stabilité des points d'équilibre	19
1.10.1 Stabilité au sens de Lyapunov	19
1.10.2 Théorie de Cetaev	21
2 Théorie de moyennisation	23

2.1	Méthode de moyennisation du premier ordre	23
2.2	Méthode de moyennisation du deuxième ordre	26
2.3	Une autre méthode de moyennisation du deuxième ordre	29
2.4	Différents types de centre	31
3	Bifurcation des cycles limites d'un centre dégénéré cubique	32
3.1	Cycles limites obtenus à partir d'un centre dégénéré	33
3.2	Théorème 3.1.1	33
3.3	Théorème 3.1.2	33
3.4	Démonstration du théorème 3.1.1	34
3.5	Exemples	43
3.5.1	Exemple avec 3 cycles limites	43
3.5.2	Exemple avec 2 cycles limites	44
3.5.3	Exemple avec 1 cycle limite	45
3.5.4	Exemple avec zéro cycle limite	46
	Annexe A	46
	Annexe B	55

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un système dynamique est un modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Il est souvent formulé à l'aide d'équations différentielles (dans le cas continu) ou d'équations aux différences (dans le cas discret). Ces systèmes apparaissent naturellement dans de nombreux domaines comme la physique, la biologie, l'économie ou encore l'ingénierie.

L'étude des systèmes dynamiques vise à comprendre comment l'état d'un système évolue selon des conditions initiales, à analyser la stabilité des équilibres (points fixes), à identifier des comportements périodiques ou chaotiques et à prévoir l'évolution à long terme du système.

Ce domaine joue un rôle fondamental dans la modélisation et l'analyse de phénomènes complexes dépendant du temps.

Le **16^e** problème de Hilbert [2], présenté en **1900**, comporte volets. Le deuxième concerne la théorie qualitative des équations différentielles dans le plan, en particulier le nombre et la disposition des cycles limites dans un système différentiel polynomial réel. Hilbert a posé la question suivante :

pour un système différentiel polynomial plan de degré n , combien de cycles limites (trajec-

toires fermées isolées) peut-il exister aux maximum ?

Considérons un système de degré n de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

L'objectif du problème est de déterminer :

- (1) Le nombre maximal de cycles limites en fonction de degré n .
- (2) La position relative et la topologie de ces cycles. Notons que même pour système quadratiques ($n=2$), la question reste ouverte.

Pour traiter ce problème, il existe plusieurs méthodes pour étudier le nombre de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre comme :

- L'application de retour de Poincaré [1].
- L'intégrale de Melnikov [4].
- Facteur intégrant inverse [9].
- Théorie de moyennisation [8].

Le méthode de moyennisation est une technique puissante utilisée pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires en particulier l'apparition des cycles limites dans des équations différentielles. Elle est souvent appliquée lorsqu'on cherche à détecter des cycles limites qui apparaissent par bifurcation à partir d'un centres.

Pour d'état actuel du **2^{ème}** partie du **16^{ème}** problème de Hilbert :

- . pour $n = 1$ (systèmes linéaires) : par de cycle limite.
- . pour $n = 2$ (systèmes quadratiques) : le cas est encore non résolu complément. On conjecture que le nombre maximal est trois, mais cela reste à prouver (conjecture de Smale).
- . Pour $n \geq 3$: très peu de résultats précis, sauf des bornes très générales (et non optimales).

Le travail réalisé dans ce mémoire se divisé en trios chapitre :

Le premier chapitre : Notions préliminaires est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de ce mémoire. On présentera la définition d'un système dynamique et d'un point d'équilibre. Ensuite on donnera la définition d'orbite périodique et d'un cycles limites. Enfin, on citera la stabilité et la stabilité au sens de Lyapunov et théorie de Cetaev.

Le deuxième chapitre : La théorie de moyennisation où l'on introduira un rappel sur la méthode de moyennisation.

Le troisième chapitre : Bifurcation des cycles limites d'un centre dégénéré cubique. Dans ce chapitre on étudié le nombre maximal de solutions périodiques isolées qui peuvent bifurquer à partir d'un centre dégénéré dans un système différentiel polynomial de degré trois en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre deux.

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notions de base sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

1.2 Systèmes différentiels polynomiaux

Définition 1.2.1 *On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

- Si P et Q sont des polynômes à coefficients réelles, on dit que (1.1) est un système différentiel polynômial.
- Si les fonctions P et Q sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1) le nombre $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Supposons que les fonctions P et Q de classe \mathbb{C}^1 (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)).

1.3 Systèmes dynamiques

Définition 1.3.1 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(., \mathbf{x}) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
- $U(t + s, \mathbf{x}) = U(t, U(s, \mathbf{x}))$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

1.4 Flot d'un système différentiel

Définition 1.4.1 Soit le système :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

où $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, et $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ la solution de (1.1). L'ensemble des application $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0),$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.2).

Remarque 1.4.1 *Le flot est dit autonome si \mathbf{f} ne dépend pas explicitement du temps, sinon il est dit non autonome*

1.5 Point d'équilibre

Définition 1.5.1 *Le point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point d'équilibre ou point critique du système (1.2) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*

1.6 linéarisation

Définition 1.6.1 *On appelle linéarisé du système (1.2) au voisinage du point d'équilibre \mathbf{x}_0 , le système*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1.3}$$

où $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ est la jacobienne de \mathbf{f} au point \mathbf{x}_0

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \tag{1.4}$$

Définition 1.6.2 *Le point d'équilibre \mathbf{x}_0 est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ sont à partie réelle non nulle.*

1.7 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibre.

Définition 1.7.1 *Soit le système différentiel linéaire planaire (1.3) où \mathbf{A} une matrice d'ordre 2, λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice \mathbf{A} .*

- Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un selle, il est toujours instable.
- Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe.
 - (1) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un noeud stable.
 - (2) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un noeud instable.
 - (3) Si $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda$, le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.
- Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées c-à-d $\forall j = \overline{1, 2}, \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ avec $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$, alors le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, et instable si $\text{Re}(\lambda_j) > 0$.
- Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) = 0, \forall j = \overline{1, 2}$ alors le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est un centre et il est stable.

Diagramme de Poincaré : La classification des portraits de phase dans le plan ($\det \mathbf{A}, \text{Tr} \mathbf{A}$) est illustré par la figure 1.1.

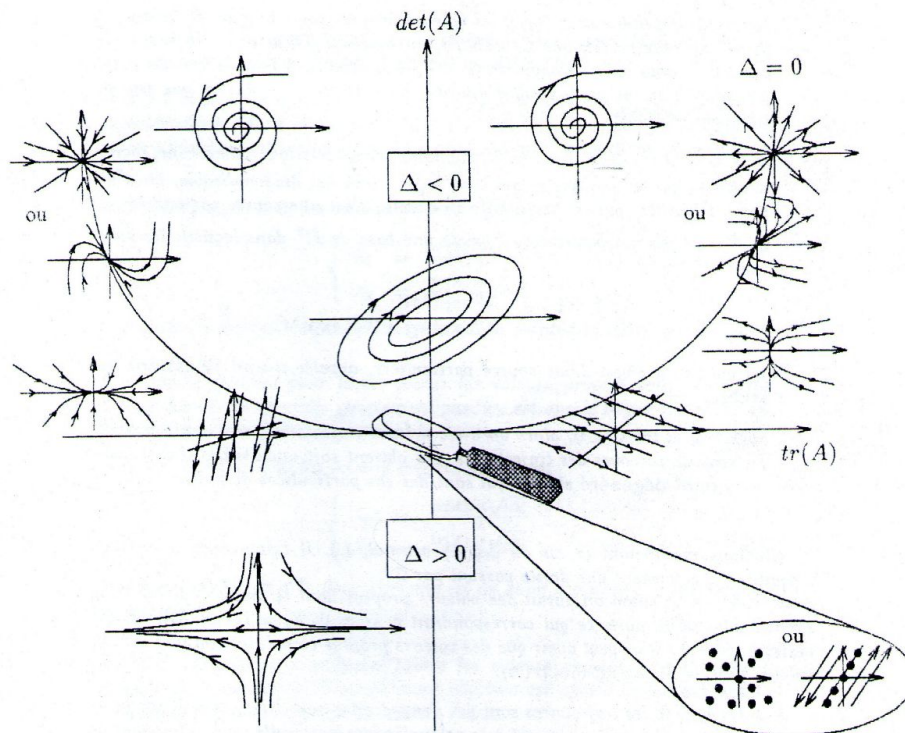


FIGURE 1.1:

1.8 Portrait de phase dans le plan

Définition 1.8.1 Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.5)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.5) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.9 Orbites périodiques et cycles limites

Définition 1.9.1 On appelle solution périodique toute solution $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{t})$ de l'équation (1.2) telle qu'il existe un nombre $\mathbf{T} > \mathbf{0}$ vérifiant

$$\phi(\mathbf{t} + \mathbf{T}) = \phi(\mathbf{t}), \quad (1.6)$$

le plus petit réel $\mathbf{T} > \mathbf{0}$ qui vérifie (1.5) est appelé période.

Une solution périodique du système (1.2) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.9.2 Un cycle limite $\Gamma(\mathbf{t})$ est une orbite périodique isolée. Ceci signifie que les trajectoires proches ne sont pas fermées mais elles spiralent en approchant ou en s'éloignant du cycle limite. De plus aucun point d'équilibre n'est sur $\Gamma(\mathbf{t})$.

Définition 1.9.3 (Classification des cycles limites)

(1) Si toutes les trajectoires voisines de Γ convergent vers Γ lorsque $\mathbf{t} \rightarrow +\infty$, le cycle limite Γ est stable.

(2) Si toutes les trajectoires voisines de Γ divergent quand $\mathbf{t} \rightarrow +\infty$, le cycle Γ est instable.

(3) S'il existe dans son voisinage des trajectoires convergentes et d'autres divergentes, le cycle limite semi-stable.

Exemple 1.9.1 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

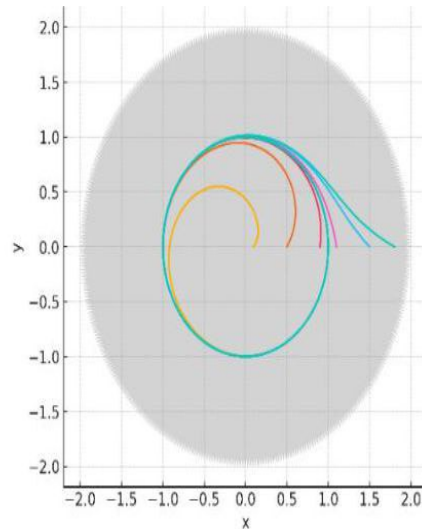


FIGURE 1.2: Cycle limite de l'exemple (1.9.1)

où que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

on a : $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 1$.

Pour $r = 1$. On a l'orbite périodique :

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)) \quad \text{avec} \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Cette orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombre des orbites périodiques et il n'ya pas de cycle limite (Voir figure(1.2)).

1.10 Stabilité des points d'équilibre

Définition 1.10.1 On dit qu'un point d'équilibre \mathbf{x}_0 est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, si

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \implies \|\phi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.10.2 On dit qu'un point d'équilibre \mathbf{x}_0 est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage de \mathbf{x}_0 tel que tout \mathbf{x} dans ce voisinage, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$.

Théorème 1.10.1 Soit le système linéaire (1.3). Le point d'équilibre $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de \mathbf{A} sont de partie réelle strictement négative. Si \mathbf{A} a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ est instable.

1.10.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition 1.10.3 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n avec $\mathbf{O} \in U$. Une fonction V est dite définie positive sur U si

$$\square V(\mathbf{0}) = 0,$$

$$\square V(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}.$$

V est dite définie négative sur U si

$$\square V(\mathbf{0}) = 0,$$

$$\square V(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}.$$

Définition 1.10.4 Une fonction V de classe \mathcal{C}^1 , $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$, avec U est un ouvert de \mathbb{R}^n est dite semi-définie positive (resp semi-définie négative) sur U si

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U, \quad (\text{resp } V(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U).$$

Théorème 1.10.2 Si $\mathbf{0}$ est un point d'équilibre du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et s'il existe une fonction $V \in \mathbb{C}^1$ défini positive sur un voisinage U de $\mathbf{0}$, alors on a :

□ Si $\frac{dV}{dt} \leq 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}$, alors $\mathbf{0}$ est un équilibre stable.

□ Si $\frac{dV}{dt} < 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}$, alors $\mathbf{0}$ est un équilibre asymptotiquement stable.

□ Si $\frac{dV}{dt} > 0, \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}$, alors $\mathbf{0}$ est un équilibre instable.

Exemple 1.10.1 Étude de stabilité de $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x^3, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2. \end{cases}$$

Ce système est non linéaire, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un équilibre. On a :

$$Df(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 0$. Donc $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un équilibre non hyperbolique on va chercher une fonction de Lyapunov $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de classe \mathbb{C}^1 de la forme :

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a\mathbf{x}^\alpha + b\mathbf{y}^\beta, \quad a, b, \alpha \text{ et } \beta > 0, \text{ où}$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha a \mathbf{x}^{\alpha-1} \dot{\mathbf{x}} + \beta b \mathbf{y}^{\beta-1} \dot{\mathbf{y}} = \alpha a \mathbf{x}^{\alpha-1} (2\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{x}^3) + \beta b \mathbf{y}^{\beta-1} (-\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2).$$

Si on choisit :

$$\begin{cases} \alpha = 2 \longrightarrow \alpha = 2 \\ \beta - 1 = 1 \longrightarrow \beta = 2 \\ b\beta = 2a\alpha \longrightarrow b = 2a \quad (\text{Exp} : a = 1, b = 2) \end{cases}.$$

$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{y}^2$ et $\frac{dV}{dt} = -2(\mathbf{x}^4 + 2\mathbf{y}^2)$, est définie négative donc d'après le théorème

de Lyapunov le point $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est asymptotiquement stable.

1.10.2 Théorie de Cetaev

Théorème 1.10.3 Soit U un voisinage ouvert suffisamment "petit" de l'origine.

S'il existe un ouvert Ω et une fonction de classe \mathbb{C}^1 $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

□ L'origine est un point de la frontière de Ω .

□ $V(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cap U$.

□ $V(\mathbf{x}) > 0$ et $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega \cap U$.

Alors l'origine est un point instable.

Exemple 1.10.2 Soit le système suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - xy, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$$

Ce système est non linéaire, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un équilibre. On a :

$$Df(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 0$. Donc $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un équilibre non hyperbolique et le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Soit la fonction $V(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$.

$$\dot{V}(x, y) = 6\alpha x^4 + (4\beta - 3\alpha)x^3 y + (2\gamma - \beta)x^2 y^2 + \gamma x y^3 + 3\delta y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \implies \begin{cases} 3\delta = 1 \\ 4\beta - 3\alpha = 4 \\ 2\gamma - \beta = 6 \\ \gamma = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \\ \delta = \frac{1}{3} \end{cases} .$$

$$\dot{V}(x, y) = 8x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 = 7x^4 + (x + y)^4 > 0.$$

$$\dot{V}(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + 4xy^2 + \frac{1}{3}.$$

Vérification des conditions du théorème de Cetaev.

(1) $V(x, y)$ définie sur \mathbb{R}^2 donc on peut prendre pour $D = \{X/\|X\| \leq r\}$ n'importe que cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r .

(2) Si $x = 0$, $V(x, y) = \frac{y^3}{3} > 0$

Donc il existe des points aussi près que l'on veut de l'origine pour lesquels $V(x, y)$ est strictement positive.

(3) $\dot{V} > 0$ sur $D - 0$.

(4) $V(0, 0) = 0$.

Donc l'origine est instable.

CHAPITRE 2

THÉORIE DE MOYENNISATION

La théorie de la moyennisation est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires dépendant d'un petit paramètre, en particulier, de leurs orbites périodiques. Dans ce chapitre nous allons introduire les résultats principaux sur la théorie de moyennisation utilisés pour accomplir les travaux de ce mémoire.

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

Le théorème suivant donne une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques de certains systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.1.1 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{R}(t, \mathbf{x}, \varepsilon). \quad (2.1)$$

Où $\mathbf{F}_1 : \mathbb{R} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{R} : \mathbb{R} \times \mathbf{D} \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la première variable et \mathbf{D} est un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous définissons

$F_{10} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds. \quad (2.2)$$

Supposons que :

(i) F_1 et R sont localement lipschitziennes par rapport à x .

(ii) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $F_{10}(z) \neq 0$, pour tout $z \in V/\{a\}$ et $\det(D_z F_{10}(a)) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.1) T -périodique isolée telle que $\varphi(0, \varepsilon) \longrightarrow a$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Exemple 2.1.1

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^3 - y). \end{cases} \quad (2.3)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, le système perturbé (2.3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(-1 + r^2 \sin^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon(\cos(\theta) \sin(\theta) - r^2(\cos(\theta) \sin(\theta) + \cos^3(\theta) \sin(\theta))). \end{cases} \quad (2.4)$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^3), \quad |x| < 1 \quad (2.5)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r \sin^2(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) + 1 - r^2) + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{2.6}$$

De (2.2) on obtient

$$\begin{aligned}F_{10}(r) &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) + 1 - r^2) d\theta \\ &= \frac{-1}{8} r(3r^2 - 4).\end{aligned}$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.3) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{-1}{8} r(3r^2 - 4) = 0.\tag{2.7}$$

On a

$$F_{10}(r) = 0 \implies r = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 0,$$

et

$$F_{10}(r) = \frac{-9}{8} r^2 + \frac{1}{2} \implies F'_{10}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème (2.1.1) le système (2.3) possède un seul cycle limite, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit (Voir figure(2.1)) .

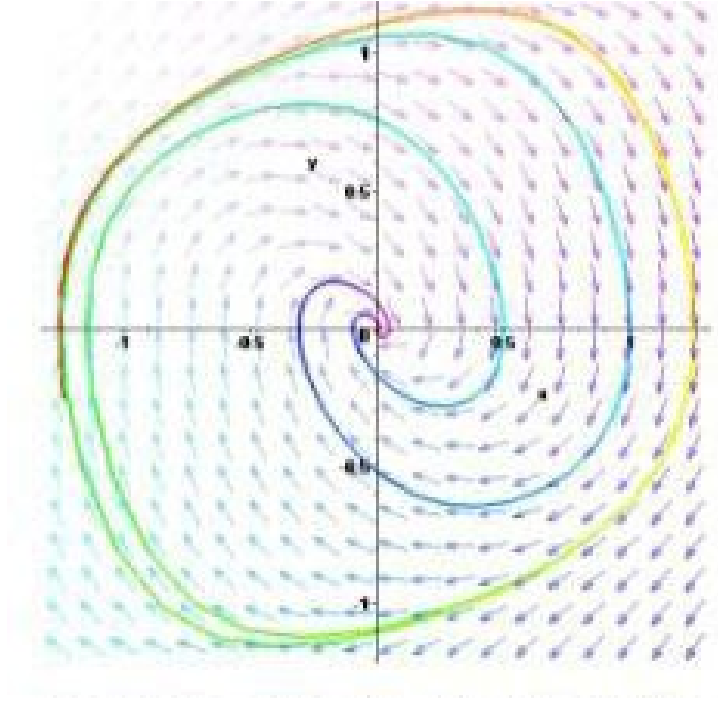


FIGURE 2.1: Cycle limite de l'exemple (2.1.1)

2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant donne une approximation du deuxième ordre pour les solutions périodiques d'un certain systèmes différentiels.

Théorème 2.2.1 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon). \quad (2.8)$$

Où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t . D est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On définit $F_{10}, F_{20} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.9)$$

et

$$\mathbf{F}_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z \mathbf{F}_1(s, z) \int_0^s \mathbf{F}_1(t, s) dt + \mathbf{F}_2(s, z)] dz. \quad (2.10)$$

Supposons que :

(i) Pour tout $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{C}^1$, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{R}$ et $D_z \mathbf{F}_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à \mathbf{x} . \mathbf{R} est différentiable par rapport à ε .

(ii) Pour $\mathbf{V} \subset \mathbf{D}$, un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n , et $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[$, il existe $\mathbf{a}_\varepsilon \in \mathbf{V}$ tel que $:\mathbf{F}_{10}(\mathbf{a}_\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{F}_{20}(\mathbf{a}_\varepsilon) = \mathbf{0}$, et $\mathbf{J}(\mathbf{F}_{10}, \mathbf{F}_{20})(\mathbf{a}_\varepsilon) \neq \mathbf{0}$, ou \mathbf{J} désigne le Jaccobien.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.8) T -périodique isolée telle que $\varphi(\mathbf{0}, \varepsilon) \longrightarrow \mathbf{a}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Exemple 2.2.1

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(4x^2 + \frac{8}{3}xy) + \varepsilon^2(3x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.11)$$

En écrivant le système (2.11) en coordonnées polaires (r, θ) , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(4r^2 \cos^3(\theta) + \frac{8}{3}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2 3r \cos^2(\theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(-4r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{8}{3}r \cos^3(\theta) - \frac{8}{3}r \cos(\theta)) - \varepsilon^2(3 \cos(\theta) \sin(\theta)). \end{cases}$$

On a :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \mathbf{F}_1(t, x) + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2(t, x) + o(\varepsilon^3),$$

Où :

$$\mathbf{F}_1(\theta, r) = -4r^2 \cos^3(\theta) - \frac{8}{3}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)$$

$$F_2(\theta, r) = r(-4r^2 \cos^3(\theta) - \frac{8}{3}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \\ \times (-4r \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{8}{3}r \cos^3(\theta) - \frac{8}{3}r \cos(\theta)) - 3r \cos^2(\theta)$$

On applique le théorème(2.2.1), donc nous avons :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -4r^2 \cos^3(\theta) d\theta.$$

et

$$\frac{d}{dr} F_1(\theta, r) = -8r \cos^3(\theta) - \frac{16}{3}r \cos^2(\theta) \sin(\theta). \\ \int_0^\theta F_1(\psi, r) d\psi = \int_0^\theta (-4r^2 \cos^3(\psi) - \frac{8}{3}r^2 \cos^2(\psi) \sin(\psi)) d\psi \\ = \frac{-8}{9}r^2 - \frac{4}{3}r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{8}{3}r^2 \sin(\theta) + \frac{8}{9}r^2 \cos^3(\theta).$$

Donc la fonction F_{20} est :

$$F_{20} = \frac{4}{3}r^3 - \frac{3}{2}r.$$

$$F_{20} = 0 \implies \frac{4}{3}r^3 - \frac{3}{2}r = 0.$$

L'unique racine positive de $F_{20}(r)$ est $r = 3\frac{\sqrt{2}}{4}$. D'autre part $F'_{20}(r) = 4r^2 - \frac{3}{2}$.

Donc $F'_{20}(3\frac{\sqrt{2}}{4}) = 3 \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.11)

T -périodique isolée telle que $\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}$ quand $\varepsilon \rightarrow \mathbf{0}$ (Voir figure(2.2)).

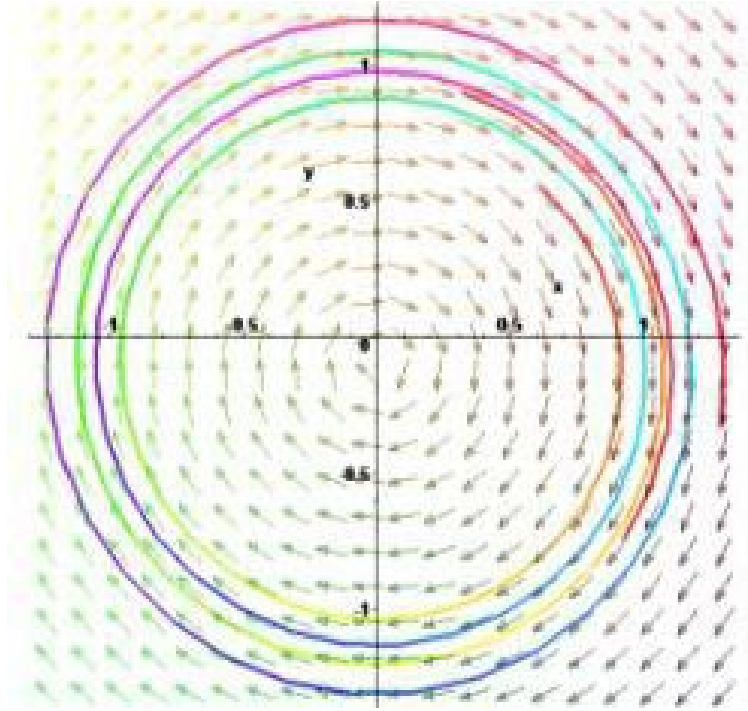


FIGURE 2.2: Cycle limite de l'exemple (2.2.1)

2.3 Une autre méthode de moyennisation du deuxième ordre

Considérons l'équation différentielle analytique

$$\frac{dr}{d\theta} = G_0(\theta, r) + \sum_{k=1}^2 \varepsilon^k G_k(\theta, r), \quad (2.12)$$

avec $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathcal{S}_1$ et $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 une petite valeur réelle positive et les fonctions $G_k(\theta, r)$ sont 2π -périodiques. Notons que pour $\varepsilon = 0$, le système (2.12) n'est pas perturbé.

Soit $r_s(\theta, r_0)$ la solution du système (2.12) avec $\varepsilon = 0$ satisfaisant $r_s(0, r_0) = r_0$ et $r_s(\theta, r_0)$ est 2π périodique pour $r_0 \in I$ avec I un interval réel ouvert.

Nous nous intéressons aux cycles limites de l'équation (2.12) qui bifurquent des orbites périodiques du système non perturbé avec la condition initiale $r_0 \in I$.

Définissons donc $\mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0)$ la solution de l'équation (2.12) satisfaisant $\mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0$.

Dans ce qui suit, on note $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0)$ la solution de l'équation variationnelle

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{G}_0}{\partial \mathbf{r}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0))\mathbf{u},$$

satisfaisant $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0) = 1$.

On définit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0) &= \int_0^\theta \frac{\mathbf{G}_1(\phi, \mathbf{r}_s(\phi, \mathbf{r}_0))}{\mathbf{u}(\phi, \mathbf{r}_0)} d\phi = \int_0^\theta \frac{\mathbf{G}_1(\mathbf{w}, \mathbf{r}_s(\mathbf{w}, \mathbf{r}_0))}{\mathbf{u}(\mathbf{w}, \mathbf{r}_0)} d\mathbf{w}, \\ \mathbf{G}_{10}(\mathbf{r}_0) &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{G}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0))}{\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0)} d\boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{G}_{20}(\mathbf{r}_0) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0))}{\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0)} + \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \mathbf{r}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0))\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_0}{\partial \mathbf{r}^2}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0))\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0) \right) d\boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Théorème 2.3.1 *Supposons que la solution $\mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0)$ de l'équation non perturbée (2.12) telle que $\mathbf{r}_s(\mathbf{0}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0$ est 2π -périodique pour $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{I}$ avec \mathbf{I} un interval ouvert. Si $\mathbf{G}_{10}(\mathbf{r}_0)$ est identiquement nulle dans \mathbf{I} et $\mathbf{G}_{20}(\mathbf{r}_0)$ n'est pas identiquement nulle dans \mathbf{I} , alors pour chaque racine simple $\mathbf{r}^* \in \mathbf{I}$ de $\mathbf{G}_{20}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$ il existe une solution périodique $\mathbf{r}_s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}_0)$ de (2.12) telle que $\mathbf{r}_s(\mathbf{0}, \mathbf{r}_0) \longrightarrow \mathbf{r}^*$ quand $\varepsilon \longrightarrow \mathbf{0}$.*

Preuve (Voir [3]).

2.4 Différents types de centre

$$(A) \begin{cases} \dot{x} = -y + F_1(x, y) \\ \dot{y} = x + F_2(x, y) \end{cases}, (B) \begin{cases} \dot{x} = y + F_1(x, y) \\ \dot{y} = F_2(x, y) \end{cases}, (C) \begin{cases} \dot{x} = F_1(x, y) \\ \dot{y} = F_2(x, y) \end{cases} .$$

Où F_1 et F_2 sont des polynômes réels non linéaire (c'est-à-dire sans termes linéaires ni constants).

Dans le cas (A) le centre est dit centre linéaire.

Dans le cas (B) le centre est dit centre nilpotent.

Dans le cas (C) le centre est dit centre dégénéré.

CHAPITRE 3

BIFURCATION DES CYCLES LIMITES D'UN CENTRE

DÉGÉNÉRÉ CUBIQUE

Dans la théorie qualitative des équations différentielles, le problème du centre dégénéré des systèmes plans est un problème complexe. Nous étudions dans ce chapitre le nombre maximal de cycles limites pouvant bifurquer à partir d'un centre dégénéré d'un système différentiel polynomial homogène cubique :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2), \end{cases} \quad (3.1)$$

en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre deux voir [5].

Notons que le système (3.1) admet une intégrale première non rationnelle :

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp\left(-\frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right).$$

3.1 Cycles limites obtenus à partir d'un centre dégénéré

3.2 Théorème 3.1.1

Théorème 3.2.1 *Nous considérons le système différentiel homogène cubique (3.1), perturbé donné par :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} b_{ij} x^i y^j \right), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij} x^i y^j \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} d_{ij} x^i y^j \right), \end{cases}$$

ce système a au plus trois cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre dégénéré du système (3.1) en utilisant la théorie de moyennisation de deuxième ordre. De plus, il existe des exemples avec 3,2,1 et 0 cycles limites.

3.3 Théorème 3.1.2

Le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} b_{ij} x^i y^j \right), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij} x^i y^j \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} d_{ij} x^i y^j \right), \end{cases}$$

a au plus un cycle limite.

Preuve

Voir [6]

3.4 Démonstration du théorème 3.1.1

Nous allons appliquer le théorème 2.3.1 pour démontrer le théorème 3.1.1.

Le système (3.1) s'écrit en coordonnées polaires sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} = -2r^3 \cos(\theta) \sin(\theta), \\ \dot{\theta} = r^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $x^2 + y^2 = r^2$.

En prenant θ comme nouvelle variable indépendante, (3.2) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = -2r \cos(\theta) \sin(\theta),$$

sa solution est $r_s(\theta, r_0) = r_0 \exp(-\sin^2(\theta))$ vérifiant $r_s(0, r_0) = r_0$.

Maintenant, nous perturbons le système (3.1) par des polynômes de degré trois.

C-à-d :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} b_{ij} x^i y^j \right) \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij} x^i y^j \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 3} d_{ij} x^i y^j \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Écrivons (3.3) en coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -2r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + \varepsilon \left[\sum_{0 \leq i+j \leq 3} r^{i+j} (a_{ij} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) \right. \\ \quad \left. + c_{ij} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta)) \right] + \varepsilon^2 \left[\sum_{0 \leq i+j \leq 3} r^{i+j} (b_{ij} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) \right. \\ \quad \left. + d_{ij} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta)) \right] \\ \dot{\theta} = r^2 + \frac{1}{r} \varepsilon \left[\sum_{0 \leq i+j \leq 3} r^{i+j} (a_{ij} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + c_{ij} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta)) \right] \\ \quad + \frac{1}{r} \varepsilon^2 \left[\sum_{0 \leq i+j \leq 3} r^{i+j} (b_{ij} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + d_{ij} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta)) \right]. \end{array} \right.$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve :

$$\frac{dr}{d\theta} = G_0(\theta, r) + \varepsilon G_1(\theta, r) + \varepsilon^2 G_2(\theta, r) + o(\varepsilon^3),$$

avec

$$G_0(\theta, r) = -2r^3 \cos(\theta) \sin(\theta),$$

$$G_1(\theta, r) = g_{1,1}(\theta) \frac{1}{r^2} + g_{1,2}(\theta) \frac{1}{r} g_{1,3}(\theta) + g_{1,4}(\theta) r,$$

$$G_2(\theta, r) = g_{2,1}(\theta) \frac{1}{r^5} + g_{2,2}(\theta) \frac{1}{r^4} + g_{2,3}(\theta) \frac{1}{r^3} + g_{2,4}(\theta) \frac{1}{r^2} + g_{2,5}(\theta) \frac{1}{r} + g_{2,6}(\theta) + g_{2,7}(\theta) r,$$

où les expressions des coefficients $g_{1,i}(\theta)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $g_{2,j}(\theta)$ pour $j = 1, 2, \dots, 7$ sont données dans l'annexe A. Considérons l'équation variationnelle

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial G_0}{\partial r}(\theta, r_s(\theta, r_0)),$$

qui admet la solution $u_s(\theta) = \exp(-\sin^2(\theta))$ satisfaisant la condition $u(0, r_0) = 1$.

Définissons les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^{2\pi} \exp(2 \sin^2(\theta)) \cos^4(\theta) d\theta = 3.572403292\dots, \\ I_2 = \int_0^{2\pi} \exp(2 \sin^2(\theta)) \cos^2(\theta) d\theta = 5.985557563\dots, \\ I_3 = \int_0^{2\pi} \exp(2 \sin^2(\theta)) d\theta = 21.62373221\dots \end{cases} \quad (3.4)$$

Lemme 3.4.1 *Considérons les intégrales définies I_1, I_2, I_3 . Alors pour $\mathbf{a}_{10} = -(I_3 - 2I_1 + I_2)/(2I_1 - I_2)\mathbf{c}_{01}$ et $\mathbf{a}_{30} = -2\mathbf{c}_{03} - \mathbf{c}_{21}$ nous trouvons que la fonction $G_{10}(\mathbf{r}_0)$ définie dans (2.13) est identiquement nulle.*

Preuve du lemme 3.1.1 :

On a

$$\frac{G_1(\theta, r_s(\theta, r_0))}{u(\theta, r_0)} = A(\theta) \frac{1}{r_0^2} + B(\theta) \frac{1}{r_0} + C(\theta) + D(\theta)r_0,$$

avec

$$A(\theta) = [\sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)\mathbf{c}_{00} + \cos(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))\mathbf{a}_{00}]e^{3 \sin^2(\theta)},$$

$$\begin{aligned} B(\theta) = & [\cos(\theta) \sin(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))\mathbf{a}_{01} + \cos^2(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))\mathbf{a}_{10} \\ & - (-\cos^2(\theta) + 2 \cos^4(\theta) - 1)\mathbf{c}_{01} + \cos(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\ & + 1)\mathbf{c}_{10}]e^{2 \sin^2(\theta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\theta) = & [-\cos(\theta)(-3 \cos^2(\theta) + 1 + 2 \cos^4(\theta))\mathbf{a}_{02} + \cos^3(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))\mathbf{a}_{20} \\ & + \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))\mathbf{a}_{11} + \sin^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)\mathbf{c}_{02} \\ & + \cos^2(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)\mathbf{c}_{20} - \cos(\theta)(-\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) \\ & - 1)\mathbf{c}_{11}]e^{\sin^2(\theta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(\theta) = & \cos(\theta) \sin^3(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{03} + \cos^4(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{30} \\
 & + \cos^3(\theta) \sin(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{21} - \cos^2(\theta)(-3 \cos^2(\theta) \\
 & + 1 + 2 \cos^4(\theta))a_{12} \\
 & + (1 - 3 \cos^4(\theta) + 2 \cos^6(\theta))c_{03} + \cos^3(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{30} \\
 & - \cos^2(\theta)(-\cos^2(\theta) + 2 \cos^4(\theta) - 1)c_{21} \\
 & + \cos(\theta) \sin^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{12}.
 \end{aligned}$$

En calculant \mathbf{G}_{10} , on trouve que

$$\mathbf{G}_{10}(r_0) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{G}_1(\theta, r_s(\theta, r_0))}{u(\theta, r_0)} d\theta = \int_0^{2\pi} (A(\theta) \frac{1}{r_0^2} + B(\theta) \frac{1}{r_0} + C(\theta) + D(\theta)r_0) d\theta,$$

tenant compte du le changement de coordonnées $\theta = \phi + \pi$ dans l'intervall $[0, 2\pi]$ et les relations symétriques suivantes :

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta), \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta). \quad (3.5)$$

Nous savons que

$$\int_0^{2\pi} A(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi) d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} C(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} C(\phi) d\phi = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{10}(r_0) &= \int_0^{2\pi} \frac{B(\theta)}{r_0} d\theta + \int_0^{2\pi} D(\theta)r_0 d\theta \\
 &= [(2a_{10} - 2c_{01})I_1 + (c_{01} - a_{10})I_2 + c_{01}I_3] \frac{1}{r_0} \frac{\pi}{2} + (2c_{03} + a_{30} + c_{21})r_0,
 \end{aligned}$$

alors $\mathbf{G}_{10} = 0$ si

$$a_{10} = -\frac{I_3 - 2I_1 + I_2}{2I_1 - I_2} c_{01} = 17.65322447..c_{01}, \quad a_{30} = -2c_{03} - c_{21}.$$

Ceci complète la preuve du lemme.

On a

$$\frac{G_{10}(0, r_s(0, r_0))}{u(\theta, r_0)} = A_5(\theta) \frac{1}{r_0^5} + A_4(\theta) \frac{1}{r_0^4} + A_3(\theta) \frac{1}{r_0^3} + A_2(\theta) \frac{1}{r_0^2} + A_1(\theta) \frac{1}{r_0} + A_0(\theta) + \tilde{A}_1(\theta)r_0,$$

avec $A_5(\theta)$, $A_4(\theta)$, $A_3(\theta)$, $A_2(\theta)$, $A_1(\theta)$, $A_0(\theta)$ et \tilde{A}_1 sont donnés dans l'annexe *B*.

On remarque que

$$\int_0^{2\pi} A_4(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} A_2(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} A_0(\theta) d\theta = 0.$$

Donc nous avons

$$\int_0^{2\pi} \frac{G_{10}(0, r_s(0, r_0))}{u(\theta, r_0)} d\theta = \frac{1}{r_0^5} \int_0^{2\pi} A_5(\theta) d\theta + \frac{1}{r_0^3} \int_0^{2\pi} A_3(\theta) d\theta + \frac{1}{r_0} \int_0^{2\pi} A_1(\theta) d\theta + \left(\int_0^{2\pi} \tilde{A}_1(\theta) d\theta \right) r_0.$$

Et

$$\int_0^{2\pi} A_5(\theta) d\theta = (-4 \int_0^{2\pi} e^{6 \sin^2(\theta)} \cos^4(\theta) d\theta + 2 \int_0^{2\pi} e^{6 \sin^2(\theta)} \cos^2(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} e^{6 \sin^2(\theta)} d\theta) a_{00} c_{00} = 665.2264930..a_{00} c_{00},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A_3(\theta) d\theta = & 239.0000390..a_{01} c_{01} + 97.83745135..a_{00} c_{02} \\ & + 97.83745135..a_{02} c_{00} - 257.2692783..c_{01} c_{10} \\ & + 12.93483815..a_{00} c_{20} - 7.99641945..a_{00} a_{11} \\ & + 12.93483815..a_{20} c_{00} - 28.92767705..c_{00} c_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A_1(\theta) d\theta = & 1.159249021..b_{10} + 20.46448319..d_{01} \\ & + 2.318498043..a_{11} c_{11} - 4.73165232..c_{02} c_{11} \\ & + 2.318498043..a_{20} c_{02} + 2.318498045..a_{02} c_{20} \\ & - 3.761715750..c_{11} c_{20} + 14.47892563..a_{02} c_{02} \\ & - 1.253905250..a_{02} a_{11} + 0.189312456..a_{20} c_{20} \\ & + 0.094656226..a_{11} a_{20} + 0.647510463..a_{21} c_{01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5.110277230\dots c_{03}c_{10} + 2.318498043\dots a_{12}c_{10} \\
& + 2.22384182\dots a_{01}c_{21} + 36.6143963\dots a_{03}c_{01} \\
& - 3.95102821\dots c_{10}c_{21} - 1.25390525\dots a_{01}a_{12} \\
& - 45.6606188\dots c_{01}c_{12} - 7.1036910\dots c_{01}c_{30} \\
& + 14.28961317\dots a_{01}c_{03}, \\
\int_0^{2\pi} \tilde{A}_1(\theta)d\theta = & -0.3926990817\dots c_{30}c_{21} + 0.1963495408\dots c_{30}a_{12} \\
& + 2.159844949\dots a_{03}c_{03} - 0.1963495408\dots a_{03}a_{12} \\
& - 0.7853981634\dots c_{12}c_{21} + 0.3926990817\dots a_{03}c_{21} \\
& - 1.178097245\dots c_{03}c_{12} + 0.3926990817\dots c_{12}a_{12} \\
& + 0.9817477042\dots c_{03}c_{30} + 1.570796327\dots d_{21} \\
& + 3.141592654\dots d_{03} + 1.570796327\dots b_{30}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.4.1 *En utilisant les expressions de A_3 , A_1 , \tilde{A}_1 , nous pouvons avoir les valeurs exacte des coefficients numériques qui apparaissent dans les intégrales précédentes.*

Ainsi, par exemple

$$239.0000390 = - \int_0^{2\pi} \frac{e^{4\sin^2(\theta)}(\cos^2(\theta) - 1)(2I_1 - 4I_3 \cos^4(\theta) + 2I_3 \cos^2(\theta) - I_2)}{2I_1 - I_2} d\theta,$$

et I_1 , I_2 , I_3 satisfaisant les relations (3.4).

(b) Tous les calculs de ce problème ont été vérifiés avec le manipulateur Maple.

Nous avons aussi

$$\frac{\partial G_1}{\partial r}(\theta, r_s(\theta, r_0)) = B_0(\theta) + \frac{B_1(\theta)}{r_0^2} + \frac{B_2(\theta)}{r_0^3},$$

avec

$$\begin{aligned}
 B_0(\theta) = & \cos^2(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta) - 4 \cos^4(\theta))c_{21} + (-2 \cos^6(\theta) + 1 - \cos^4(\theta))c_{03} \\
 & + \cos(\theta)(\sin(\theta) \cos^2(\theta) - 2 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta))c_{12} + \cos^3(\theta)(\sin(\theta) \\
 & + 2 \cos^2(\theta) \sin(\theta))c_{30} + \sin(\theta) \cos(\theta)(3 \cos^2(\theta) - 1 - 2 \cos^4(\theta))a_{03} \\
 & + \cos^2(\theta)(-1 + 3 \cos^2(\theta) - 2 \cos^4(\theta))a_{12} + \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-1 \\
 & + 2 \cos^2(\theta))a_{21}, + \cos^2(\theta)(-1 + 3 \cos^2(\theta) - 2 \cos^4(\theta))a_{12} + \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
 & (-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{21},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_0(\theta) = & (-1 - 18.65322447... \cos^2(\theta) + 37.30644894... \cos^4(\theta))e^{2 \sin^2(\theta)}c_{01} \\
 & - \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)e^{2 \sin^2(\theta)}c_{10} + \sin(\theta) \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
 & + 1)e^{2 \sin^2(\theta)}a_{01},
 \end{aligned}$$

$$B_2(\theta) = -2 \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{00} + 2(-2 + e^{3 \sin^2(\theta)} \cos(\theta))a_{00}.$$

Maintenant, nous calculons

$$\frac{G_1(w, r_s(w, r_0))}{u(w, r_0)} = \frac{C_2(w)}{r_0^2} + \frac{C_1(w)}{r_0} + C_0(w) + \tilde{C}_1(w)r_0.$$

avec

$$C_2(w) = e^{3 \sin^2(w)}[\cos(w)(2 \cos^2(w) - 1)a_{00} + \sin(w)(1 + 2 \cos^2(w))c_{00}],$$

$$\begin{aligned}
 C_1(w) = & [\cos(w) \sin(w)(-1 + 2 \cos^2(w))a_{01} + (1 + \frac{I_3}{2I_1 - I_2}(\cos^2(w) \\
 & - 2 \cos^4(w))c_{01} + \cos(w) \sin(w)(1 + 2 \cos^2(w))c_{10}]e^{2 \sin^2(w)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_0(w) = & [\cos^3(w)(2 \cos^2(w) - 1)a_{20} - \cos w(-3 \cos^2(w) + 2 \cos^4(w) + 1)a_{02} \\
 & \sin(w) \cos^2(w)(2 \cos^2(w) - 1)a_{11} + \sin(w) \cos^2(w)(1 \\
 & + 2 \cos^2(w))c_{20} + c_{02} \sin^3(w)(1 + 2 \cos^2(w)) - \cos(w)(2 \cos^4(w) \\
 & - 1 - \cos^2(w))c_{11}]e^{\sin^2(w)},
 \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_1(w) = -(\cos^4(w) + 2 \cos^6(w) - 1)c_{03} + \sin^3 \cos(w)(1 + 2 \cos^2(w))c_{12}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos^2(w)(-1 - 2\cos^2(w) + 4\cos^4(w))c_{21} + \cos^3(w)\sin(w)(1 \\
 & + 2\cos^2(w))c_{30} + \sin^3(w)\cos(w)(2\cos^2(w) - 1)a_{03} + \sin^2(w)\cos^2(w) \\
 & (2\cos^2(w) - 1)a_{12} + \cos^3(w)\sin(w)(2\cos^2(w) - 1)a_{21}.
 \end{aligned}$$

De (2.13), nous obtenons :

$$u_1(\theta, r_0) = \frac{1}{r_0^2} \int_0^\theta C_2(w)dw + \frac{1}{r_0} \int_0^\theta C_1(w)dw + \int_0^\theta C_0(w)dw + r_0 \int_0^\theta \tilde{C}_1(w)dw,$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_1}{\partial r}(\theta, r_s(\theta, r_0))u_1(\theta, r_0) &= s_5(\theta)\frac{1}{r_0^5} + s_4(\theta)\frac{1}{r_0^4} + s_3(\theta)\frac{1}{r_0^3} \\
 &+ s_2(\theta)\frac{1}{r_0^2} + s_1(\theta)\frac{1}{r_0} + s_0(\theta) + \tilde{s}_1(\theta)r_0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Puisque $\frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} = \mathbf{0}$ de (2.13), nous avons

$$G_{20}(r_0) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{G_2(\theta, r_s(\theta, r_0))}{u(\theta, r_0)} + \frac{\partial G_1}{\partial r}(\theta, r_s(\theta, r_0))u_1(\theta, r_0) \right) d\theta.$$

Nous obtenons donc

$$r_0^5 G_{20}(r_0) = v_6 r_0^6 + v_4 r_0^4 + v_2 r_0^2 + v_0.$$

Où

$$\begin{aligned}
 v_6 &= -0.3926990800\dots c_{21}c_{30} + 0.1963495397\dots a_{12}c_{30} + 2.159844949\dots a_{03}c_{03} \\
 &- 0.1963495365\dots a_{03}a_{12} - 0.7853981634\dots c_{12}c_{21} + 0.3926990817\dots a_{03}c_{21} \\
 &- 1.178097245\dots c_{03}c_{12} + 0.3926990817\dots a_{12}c_{12} + 0.9817477042\dots c_{03}c_{30} \\
 &+ 1.570796327\dots d_{21} + 3.141592654\dots d_{03} + 1.570796327\dots b_{30}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_4 = & -3.155691751\dots a_{21}c_{01} + 6.612510180\dots c_{03}c_{10} + 1.786201647\dots a_{12}c_{10} \\
 & + 2.413154277\dots a_{01}c_{21} + 38.88726613\dots a_{03}c_{01} - 1.253905255\dots c_{10}c_{21} \\
 & - 1.206577137\dots a_{01}a_{12} - 68.30745733\dots c_{01}c_{12} - 38.88726635\dots c_{01}c_{30} \\
 & + 13.27234849\dots a_{01}c_{03} + 2.318498043\dots a_{11}c_{11} - 4.73165232\dots c_{02}c_{11} \\
 & + 2.318498043\dots a_{20}c_{02} + 2.318498045\dots a_{02}c_{20} - 3.761715750\dots c_{11}c_{20} \\
 & + 14.47892563\dots a_{02}c_{02} - 1.253905250\dots a_{02}a_{11} + 0.189312456\dots a_{20}c_{20} \\
 & + 0.094656226\dots a_{11}a_{20} + 1.159249021\dots b_{10} + 20.46448319\dots d_{01}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 = & 95.95703341\dots a_{00}c_{02} + 105.7377762\dots a_{02}c_{00} + 239.0000390\dots a_{01}c_{01} \\
 & - 7.649140220\dots a_{00}a_{11} + 16.68739736\dots a_{00}c_{20} - 110.9164314\dots c_{20}c_{11} \\
 & - 257.2692783\dots c_{01}c_{10} - 0.000001\dots c_{01}^2 - 31.79348852\dots a_{20}c_{00}.
 \end{aligned}$$

$$v_0 = 665.2264933\dots a_{00}c_{00}.$$

Les coefficients v_6 , v_4 , v_2 et v_0 sont indépendants car d_{03} n'apparaît que dans v_6 et b_{10} apparaît uniquement dans v_4 . Le coefficient $a_{00}c_{02}$ apparaît uniquement dans v_2 et $a_{00}c_{00}$ apparaît uniquement dans v_0 . Nous allons maintenant utiliser le théorème de

Descartes :

Théorème 3.4.1 (*Théorème de Descartes*). *Considérons le polynôme réel $p(x) = a_{i_1}x^{i_1} + a_{i_2}x^{i_2} + \dots + a_{i_r}x^{i_r}$ avec $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ et $a_{i_j} \neq 0$ constantes réelles pour $j \in 1, 2, \dots, r$. Quand $a_{i_j}a_{i_{j+1}} < 0$, on dit que a_{i_j} et $a_{i_{j+1}}$ ont une variation de signe.*

Si le nombre des variations des signes est m , alors $p(x)$ a au plus m racines réelles positives.

De plus, il est toujours possible de choisir les coefficients de $p(x)$ de telle manière que $p(x)$ admet exactement $r - 1$ racines positives.

Donc, à partir du théorème de Descartes, nous pouvons choisir v_6 , v_4 , v_2 et v_0 afin que le G_{20} dispose de **3**, **2**, **1** ou **0** racines réelles positives. Ceci termine la preuve du théorème.

Nous fournissons des exemples de (3.3) avec **3**, **2**, **1** et **0** cycles limites.

3.5 Exemples

3.5.1 Exemple avec 3 cycles limites

Pour $\varepsilon = 0.001$, le système (3.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon + \varepsilon^2(3570.576292x - 752.8823806x^3) \\ \quad = -y(3x^2 + y^2) + 0.001 + 0.003570576292x - 0.0007528823806x^3, \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon(1 - 37.74385845y^2) \\ \quad = x(x^2 - y^2) + 0.001 - 0.03774385845y^2. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Ce système a trois cycles limites. En effet, en calculant G_{20} , on trouve que :

$$G_{20}(r_0) = -1182.624878r_0 + 4139.187071\frac{1}{r_0} - 3621.788686\frac{1}{r_0^3} + 665.2264933r_0^5.$$

De $G_{20}(r_0) = 0$, nous obtenons les trois racines positives $r_0 = 0.5, 1, 1.5$.

(Voir figure(3.1)).

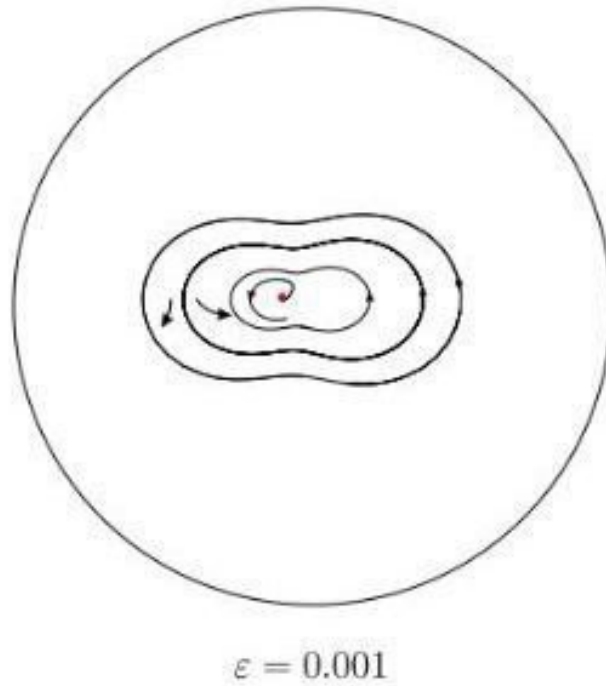


FIGURE 3.1: Pour $\varepsilon = 0.001$ le système perturbé (3.7), a trois cycles limites.

3.5.2 Exemple avec 2 cycles limites

Pour $\varepsilon = 0.001$ le système (3.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon(1 + y + x^2y) + \varepsilon^2(-856.6373973 + y^3) \\ \quad = -y(3x^2 + y^2) + 0.001 + 0.001y + 0.001x^2y - 0.0008566373973x \\ \quad \quad + 0.000001y^3, \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon(1 + y^2) + \varepsilon^2(x + 73.80732101y^3) \\ \quad = x(x^2 - y^2) + 0.001 + 0.001y^2 + 0.000001x + 0.00007380732101y^3, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Ce qui donne la fonction G_{20} suivante :

$$G_{20}(r_0) = 231.8725375r_0 - 993.0560642\frac{1}{r_0} + 95.95703341\frac{1}{r_0^3} + 665.22649331r_0^5.$$

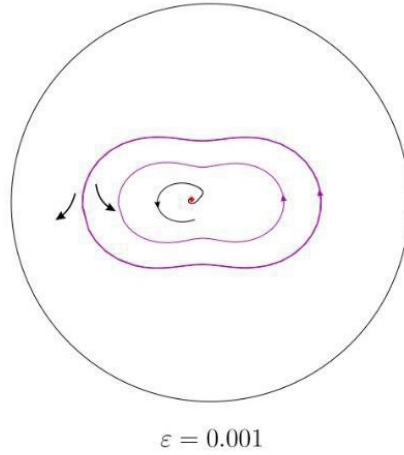


FIGURE 3.2: Deux cycles limites bifurquent à partir du centre dégénéré du système perturbé (3.8).

$G_{20}(r_0) = 0$ a les racines positives $r_0 = 1$ et $r_0 = 2$. Dans la figure (3.2) nous voyons les deux cycles limites bifurquant du centre dégénéré du système perturbé (3.8).

3.5.3 Exemple avec 1 cycle limite

Pour $\varepsilon = 0.001$ le système (3.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon(1 - 176.5322447x) + \varepsilon^2(x + x^3) \\ \quad = -y(3x^2 + y^2) + 0.001 - 0.1765312447x + 0.000001x^3, \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon(10 + 10y + xy) + \varepsilon^2(y - y^3) \\ \quad = x(x^2 - y^2) + 0.010 + 0.010001y + 0.005xy - 0.000001y^3, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

On a

$$G_{20}(r_0) = -1.570796327r_0 - 21.62373221\frac{1}{r_0} - 5545.821670\frac{1}{r_0^3} + 6652.264933\frac{1}{r_0^5}.$$

A partir de la relation $G_{20}(r_0) = 0$, on obtient :-1.097575824, 1.097575824, -5.725902515-5.148324797i, 5.725902515+5.148324797i, -5.725902515+5.148324797i, 5.725902515-

5.148324797i. Alors un seul cycle limite peut bifurquer depuis une orbite périodique du système perturbé (3.9).

3.5.4 Exemple avec zéro cycle limite

Maintenant pour $\varepsilon = 0.001$ on considère le système (3.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon + \varepsilon^2 x \\ \quad = -y(3x^2 + y^2) + 0.001 + 0.000001x, \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon(1 + y^2) + \varepsilon^2 y^3 \\ \quad = x(x^2 - y^2) + 0.001 + 0.0001y^2 + 0.000001y^3, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

avec

$$G_{20}(r_0) = 3.141592654r_0 + 1.159249021\frac{1}{r_0} + 95.9570334\frac{1}{r_0^3} + 6652.2264933\frac{1}{r_0^5}.$$

Nous avons que $G_{20}(r_0) = 0$ les solutions :-2.116012294-1.570359831i, 2.116012294+1.570359831i, -2.095699520i, 2.095699520i, -2.116012294 + 1.570359831i, 2.116012294 - 1.570359831i. Ainsi, aucun cycle limite ne peut se déduire du centre dégénéré.

(Voir figure 3.4)

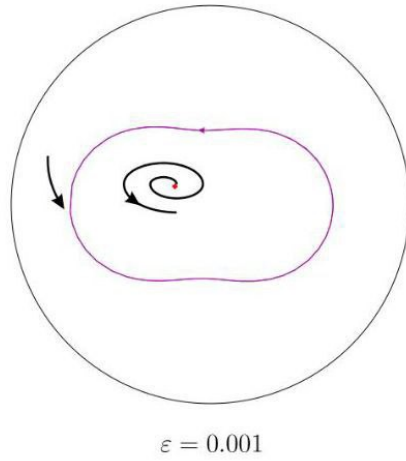


FIGURE 3.3: Le cycle limite bifurquant à partir du centre dégénéré du système perturbé (3.9).

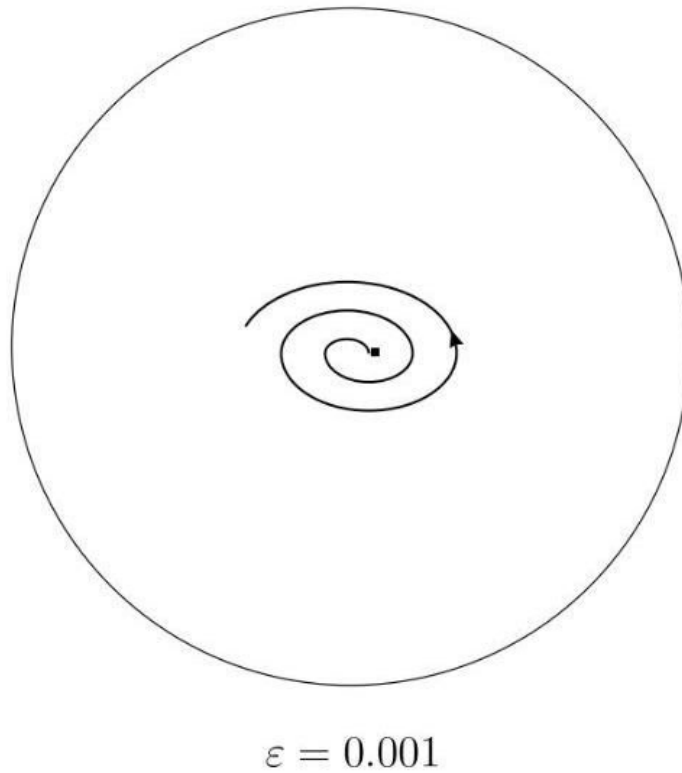


FIGURE 3.4: Aucun cycle limite ne bifurque à partir du centre dégénéré du système perturbé (3.10).

$$g_{1,1}(\theta) = \cos(\theta)(2 \cos^5(\theta) - 1)a_{00} + \sin(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))^2 c_{00},$$

$$g_{1,2}(\theta) = \sin^2(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{01} + \sin(\theta) \cos(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{10} \\ + \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{01} + \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{10},$$

$$g_{1,3}(\theta) = \sin^2(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{02} + (-2 \cos^5(\theta) + \cos^3(\theta) + \cos(\theta))c_{11} \\ + \cos^2(\theta) \sin(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{20} + (-2 \cos^5(\theta) + 3 \cos^3(\theta) \\ - \cos(\theta))a_{02} + \cos^2(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{11} \\ + \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{20},$$

$$g_{1,4}(\theta) = \sin^4(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{03} + \sin^3(\theta) \cos(\theta)(1 \\ + 2 \cos^2(\theta))c_{12} + \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{21} \\ + \sin(\theta) \cos^3(\theta)(1 + 2 \cos^2(\theta))c_{30} \\ + \sin^3(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{03} + \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{12} \\ + \sin(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{21} + \cos^4(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{30},$$

$$g_{2,1}(\theta) = (2 \cos^2(\theta) + 1 - 4 \cos^4(\theta))a_{00}c_{00} - c_{00}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{00}^2 \\ + \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{00}^2,$$

$$g_{2,2}(\theta) = -\cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta))c_{10}a_{00} - 2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\ + 1)c_{10}c_{00} + 2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)a_{10}a_{00} - \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta)$$

$$\begin{aligned}
& -1 + 4 \cos^4(\theta))c_{01}a_{00} - \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta))c_{00}a_{01} \\
& - \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta))c_{00}a_{10} + (4 \cos^5(\theta) - 2 \cos(\theta) \\
& - 2 \cos^3(\theta))c_{01}c_{00} + (6 \cos^3(\theta) - 4 \cos^5(\theta) - 2 \cos(\theta))a_{01}a_{00}, \\
g_{2,3}(\theta) = & (\cos^2(\theta) + 4 \cos^6(\theta) - 6 \cos^4(\theta) + 1)a_{01}c_{01} + (\cos^2(\theta) + 4 \cos^6(\theta) \\
& - 6 \cos^4(\theta) + 1)a_{00}c_{02} + (\cos^2(\theta) + 4 \cos^6(\theta) - 6 \cos^4(\theta) + 1)a_{02}c_{00} \\
& - c_{11}a_{00} \sin(\theta) \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{00}a_{11} \sin(\theta) \\
& \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - 2c_{20}c_{00} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& + 1) + 2a_{20}a_{00} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{02}a_{00} \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
& (2 \cos^2 - 1) - 2c_{02}c_{00} \sin^3(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - c_{10}a_{01} \sin(\theta) \\
& \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{01}a_{10} \sin(\theta) \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{20}a_{00} \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& - c_{00}a_{20} \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) + (-4 \cos^6(\theta) \\
& + 6 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta))a_{11}a_{00} + (4 \cos^6(\theta) \\
& - 2 \cos^2(\theta) - 2 \cos^4(\theta))c_{11}c_{00} - c_{10}a_{10} \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 \\
& + 4 \cos^4(\theta)) + (-4 \cos^6(\theta) + 6 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta))a_{10}a_{01} \\
& + (4 \cos^6(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 2 \cos^4(\theta))c_{10}c_{01} + a_{10}^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{01}^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& + a_{01}^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& - c_{10}^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1), \\
g_{2,4}(\theta) = & -c_{03}a_{00} \sin^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{00}a_{03} \sin^3(\theta) \\
& (-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{30}a_{00} \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 \\
& + 4 \cos^4(\theta)) - c_{00}a_{03} \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) + d_{00} \sin(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) + 1) + b_{00} \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{20}a_{10} \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{10}a_{20} \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_{02}a_{01} \sin^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{01}a_{02} \sin^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& -1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{21}a_{00} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& -c_{00}a_{21} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - 2c_{21}c_{00} \sin^3(\theta) \\
& \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - 2c_{30}c_{00} \cos^4(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& +1) + 2a_{12}a_{00} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{03}a_{00} \sin^4(\theta) \cos(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{30}a_{00} \cos^4(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{02}a_{01} \sin^4(\theta) \\
& \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - 2c_{10}c_{02} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& -2c_{20}c_{10} \cos^4(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) + 2a_{11}a_{01} \sin^3 \cos^2(\theta) \\
& (2 \cos^2 - 1) - c_{20}a_{01} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& +2a_{10}a_{01} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{20}a_{10} \cos^4(\theta) \\
& \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{11}a_{10} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 \\
& +4 \cos^4(\theta)) - c_{10}a_{11} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& -c_{01}a_{20} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - 2c_{11}c_{01} \sin^3(\theta) \\
& \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) + (4 \cos^7(\theta) - 6 \cos^5(\theta) + \cos^3(\theta) + \cos(\theta))c_{12}a_{00} \\
& +(4 \cos^7(\theta) - 6 \cos^5(\theta) + \cos^3(\theta) + \cos(\theta))c_{00}a_{12} + (-4 \cos^7(\theta) - 2 \cos^3(\theta) \\
& +6 \cos^5(\theta))a_{21}a_{00} + (-2 \cos^5(\theta) - 2 \cos^3(\theta) + 4 \cos^7(\theta))c_{21}c_{00} \\
& +(-2 \cos(\theta) + 6 \cos^5(\theta) - 4 \cos^7(\theta))c_{03}c_{00} + (4 \cos^7(\theta) - 6 \cos^5(\theta) + \cos^3(\theta) \\
& + \cos(\theta))c_{11}a_{01} + (4 \cos^7(\theta) - 6 \cos^5(\theta) + \cos^3(\theta) + \cos(\theta))c_{10}a_{02} \\
& +(4 \cos^7(\theta) - 6 \cos^5(\theta) + \cos^3(\theta) + \cos(\theta))c_{02}a_{10} + (4 \cos^7(\theta) - 6 \cos^5(\theta) \\
& + \cos^3(\theta) + \cos(\theta))c_{01}a_{11} + (-2 \cos(\theta) + 6 \cos^5(\theta) - 4 \cos^7(\theta))c_{02}c_{01} \\
& +(-4 \cos^7(\theta) - 2 \cos^3(\theta) + 6 \cos^5(\theta))a_{20}a_{01} + (-4 \cos^7(\theta) - 2 \cos^3(\theta) \\
& +6 \cos^5(\theta))a_{11}a_{10} + 6 \cos^5(\theta))a_{11}a_{10} + (-2 \cos^5(\theta) - 2 \cos^3(\theta) \\
& +4 \cos^7(\theta))c_{20}c_{01} + (-2 \cos^5(\theta) - 2 \cos^3(\theta) + 4 \cos^7(\theta))c_{11}c_{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{2,5}(\theta) = & -c_{10}a_{30} \cos^4(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{30}a_{10} \cos^4(\theta) \\
& (-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{02}^2 \sin^5(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& - c_{11}^2 \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2 + 1) - c_{20}^2 \cos^5(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& + 1) + a_{02}^2 \sin^5(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + (-7 \cos^4(\theta) + 1 - 4 \cos^8(\theta) \\
& + 10 \cos^6(\theta))a_{01}c_{03} + (-7 \cos^4(\theta) + 1 - 4 \cos^8(\theta) + 10 \cos^6(\theta))a_{03}c_{01} \\
& + (-7 \cos^4(\theta) + 1 - 4 \cos^8(\theta) + 10 \cos^6(\theta))a_{02}c_{02} + d_{10} \sin(\theta) \\
& \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) + b_{10} \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + d_{01} \sin^2(\theta^2) \\
& (2 \cos^2(\theta) + 1) + a_{11}^2 \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{01}a_{12} \sin^3(\theta) \\
& \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{30}a_{01} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& - c_{21}a_{10} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& - c_{20}a_{11} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{11}a_{20} \sin(\theta) \\
& \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) + 2a_{10}a_{03} \sin^4(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& - 1) - c_{10}a_{21} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{01}a_{30} \sin(\theta) \\
& \cos^3(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{12}a_{01} \sin^3(\theta) \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{03}a_{10} \sin^3(\theta) \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& - c_{02}a_{11} \sin^3(\theta) \cos(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta) - 2a_{12}a_{01} \sin^4(\theta) \\
& \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{11}a_{02} \sin^4(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& + a_{20}^2 \cos^5(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{21}a_{01} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& - 1) + 2a_{20}a_{02} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{30}a_{10} \cos^5(\theta) \\
& \cos^5(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - 2c_{30}c_{10} \cos^5(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& - 2c_{03}c_{01} \sin^5(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - c_{20}a_{20} \cos^4(\theta)(-2 \cos^2 - 1 \\
& + 4 \cos^4) - 2c_{21}c_{01} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - 2c_{20}c_{02} \sin^3(\theta) \\
& \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - 2c_{12}c_{10} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& + 2c_{12}c_{10} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{03}a_{01} \sin^5(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + (6 \cos^6(\theta) - 4 \cos^8(\theta) - 2 \cos^2(\theta))c_{10}c_{03} \\
& + (-4 \cos^8(\theta) - 2 \cos^4(\theta) + 6 \cos^6(\theta))a_{30}a_{01} + (-4 \cos^8(\theta) \\
& - 2 \cos^4(\theta) + 6 \cos^6(\theta))c_{21}a_{10} + (-4 \cos^8(\theta) - 2 \cos^4(\theta) \\
& + 6 \cos^6(\theta))a_{20}a_{11} + (\cos^2(\theta) - 6 \cos^6(\theta) + \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta)) \\
& c_{11}a_{11} + (\cos^2(\theta) - 6 \cos^6(\theta) + \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{01}a_{21} \\
& + (-2 \cos^6(\theta)2 \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{30}c_{01} + (-2 \cos^6(\theta) - 2 \cos^4(\theta) \\
& + 4 \cos^8(\theta))c_{21}c_{10} + (-2 \cos^6(\theta) - 2 \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{20}c_{11} \\
& + (\cos^2(\theta) - 6 \cos^6(\theta) + \cos^4(\theta) \\
& + 4 \cos^8(\theta))c_{20}a_{02} + (\cos^2(\theta) - 6 \cos^6(\theta) + \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{12}a_{10} \\
& + (\cos^2(\theta) - 6 \cos^6(\theta) + \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{10}a_{12} + (\cos^2(\theta) \\
& - 6 \cos^6(\theta) + \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{02}a_{20} + (\cos^2(\theta) - 6 \cos^6(\theta) \\
& + \cos^4(\theta) + 4 \cos^8(\theta))c_{21}a_{01} + (6 \cos^6(\theta) - 4 \cos^8(\theta) \\
& - 2 \cos^2(\theta))c_{12}c_{01} + (6 \cos^6(\theta) - 4 \cos^8(\theta) \\
& - 2 \cos^2(\theta))c_{11}c_{02} + b_{01} \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1), \\
g_{2,6}(\theta) = & -2c_{21}c_{11} \sin^3(\theta) \cos^4(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - 2c_{20}c_{12} \sin^3(\theta) \cos^4(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) + 1) - 2c_{30}c_{20} \cos^6(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - c_{20}a_{03} \\
& \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) + 2a_{21}a_{11} \sin^3(\theta) \\
& \cos^4(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + 2a_{20} \sin^3(\theta) \cos^4(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& - c_{30}a_{20} \cos^5(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{20}a_{30} \cos^5(\theta) \\
& (-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) + (\cos^3(\theta) + \cos(\theta) - 2 \cos^5(\theta))d_{11} \\
& + (-\cos(\theta) + 3 \cos^3(\theta) - 2 \cos^5(\theta))b_{02} + d_{02} \sin^3(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& - c_{20}a_{21} \cos^4(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& 2a_{21}a_{01} \sin^4(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& + 2a_{20}a_{03} \sin^4(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2a_{12}a_{11} \sin^4(\theta) \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) + a_{03}a_{02} \sin^6(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& -1) - 2c_{03}c_{02} \sin^6(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) + a_{11}a_{03} \sin^5(\theta) \cos^2(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) - 1) \sin^5(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) - 2c_{30}c_{02} \sin^3(\theta) \\
& \cos^4(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) + 2a_{12}a_{02} \sin^5(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& -c_{11}a_{30} \cos^4(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& -c_{11}a_{12} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& -c_{21}a_{02} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) \\
& +b_{20} \cos^3(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - 2c_{12}c_{02} \sin^5(\theta) \cos^2(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& -c_{12}a_{11} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{30}a_{11} \cos^4(\theta) \\
& \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{21}a_{20} \cos^4(\theta) \sin(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& -1 + 4 \cos^4(\theta)) + 2a_{30}a_{20} \cos^6(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{03}a_{20} \sin^3(\theta) \\
& \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) - c_{02}a_{21} \sin^3(\theta) \cos^2(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& -1 + 4 \cos^4(\theta)) + 2c_{30}a_{20} \sin^3(\theta) \cos^4(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& -c_{03}a_{02} \sin^5(\theta)(-2 \cos^2(\theta) - 1 + 4 \cos^4(\theta)) + d_{20} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& +1) + b_{11} \cos^2(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{02}a_{03} \sin^5(\theta)(\theta)(-2 \cos^2(\theta) \\
& -1 + 4 \cos^4(\theta)) + (\cos(\theta) + 10 \cos^7(\theta) - 7 \cos^5(\theta) - 4 \cos^9(\theta))c_{11}a_{03} \\
& +(\cos(\theta) + 10 \cos^7(\theta) - 7 \cos^5(\theta) - 4 \cos^9(\theta))c_{03}a_{11} + (\cos^5(\theta) \\
& -6 \cos^7(\theta) + 4 \cos^9(\theta) + \cos^3(\theta))c_{21}a_{11} + (\cos^5(\theta) - 6 \cos^7(\theta) + 4 \cos^9(\theta) \\
& + \cos^3(\theta))c_{11}a_{21} + (\cos^5(\theta) - 6 \cos^7(\theta) + 4 \cos^9(\theta) + \cos^3(\theta))c_{20}a_{12} \\
& +(\cos^5(\theta) - 6 \cos^7(\theta) + 4 \cos^9(\theta) + \cos^3(\theta))c_{12}a_{20} \\
& +(\cos^5(\theta) - 6 \cos^7(\theta) + 4 \cos^9(\theta) + \cos^3(\theta))c_{02}a_{30} \\
& +(\cos(\theta) + 10 \cos^7(\theta) - 7 \cos^5(\theta) - 4 \cos^9(\theta))c_{12}a_{02} + (\cos(\theta) + 10 \cos^7(\theta) \\
& -7 \cos^5(\theta) - 4 \cos^9(\theta))c_{02}a_{12} + (\cos^5(\theta) - 6 \cos^7(\theta) + 4 \cos^9(\theta) \\
& + \cos^3(\theta))c_{30}a_{02} + (-2 \cos^3(\theta) + 6 \cos^7(\theta) - 4 \cos^9(\theta))c_{21}c_{02}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2 \cos^3(\theta) + 6 \cos^7(\theta) - 4 \cos^9) c_{20} c_{03} + (-2 \cos^3(\theta) + 6 \cos^7(\theta) \\
& - 4 \cos^9(\theta)) c_{12} c_{11} + (-4 \cos^9(\theta) + 6 \cos^7(\theta) - 2 \cos^3(\theta)) a_{30} a_{11} \\
& + (-4 \cos^9(\theta) + 6 \cos^7(\theta) - 2 \cos^3(\theta)) a_{21} a_{20} + (4 \cos^9(\theta) - 2 \cos^5(\theta) \\
& - 2 \cos^7(\theta)) c_{30} c_{11} + (4 \cos^9(\theta) - 2 \cos^5(\theta) - 2 \cos^7(\theta)) c_{21} c_{20}, \\
g_{2,7}(\theta) = & -c_{21}^2 \sin^3(\theta) \cos^5(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& + a_{12}^2 \sin^5(\theta) \cos^3(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) \\
& - c_{03}^2 \sin^7(\theta) \cos(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) + a_{03}^2 \sin^7(\theta) \cos(\theta) (-1 \\
& + 2 \cos^2(\theta)) + a_{21}^2 \sin^3(\theta) \cos^5(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) \\
& - c_{12}^2 \sin^5(\theta) \cos^3(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) - c_{30}^2 \cos^7(\theta) \sin(\theta) (2 \cos^2(\theta) \\
& + 1) + 2 a_{30} a_{12} \sin^3(\theta) \cos^5(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) - c_{03} a_{12} \sin^5(\theta) \cos(\theta) \\
& (4 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{30} a_{21} \cos^5(\theta) \sin(\theta) (4 \cos^4(\theta) \\
& - 2 \cos^2(\theta) - 1) - 2 c_{21} c_{03} \sin^5(\theta) \cos^3(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& - 2 c_{12} c_{03} \sin^6(\theta) \cos^2(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) + 2 a_{30} a_{03} \sin^4(\theta) \cos^4(\theta) \\
& (-1 + 2 \cos^2(\theta)) + 2 a_{12} a_{03} (\sin(\theta))^6 \cos^2(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) \\
& + 2 a_{21} a_{12} \sin^4(\theta) \cos^4(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) - c_{21} a_{30} \cos(\theta)^5 \sin(\theta) \\
& (4 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{03} a_{30} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta) (4 \cos^4(\theta) \\
& - 2 \cos^2(\theta) - 1) - c_{21} a_{12} \sin^3(\theta) \cos^3(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& + b_{03} \sin^3(\theta) \cos(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) + b_{12} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) (-1 \\
& + 2 \cos^2(\theta)) - c_{30} a_{30} \cos^6(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 1) \\
& - a_{03} c_{03} \sin^6(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 1) + d_{12} \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) + 1) + d_{21} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) \\
& + d_{30} \sin(\theta) \cos^3(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) - 2 c_{30} c_{12} \sin^3(\theta) \cos^5(\theta) (2 \cos^2(\theta) \\
& + 1) + 2 a_{21} a_{03} \sin^5(\theta) \cos^3(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) - c_{12} a_{03} \sin^5(\theta) \\
& \cos(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta) - 1) + d_{03} \sin^4(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b_{30} \cos^4(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta)) + a_{30}^2 \cos^7(\theta) \sin(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta)) \\
& + (6 \cos^8(\theta) - 4 \cos^{10}(\theta) - 2 \cos^4(\theta))c_{30}c_{03} + (6 \cos^8(\theta) - 4 \cos^{10}(\theta) \\
& - 2 \cos^4(\theta))c_{21}c_{12} + (4 \cos^{10}(\theta) - 2 \cos^8(\theta) - 2 \cos^6(\theta))c_{30}c_{21} \\
& + b_{21} \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta)) + (-6 \cos^8(\theta) + 4 \cos^{10}(\theta) + \cos^6(\theta) \\
& + 4 \cos^{10}(\theta))c_{21}a_{21} + (-4 \cos^{10}(\theta) - 2 \cos^6(\theta) + 6 \cos^8(\theta))a_{30}a_{21} + (\cos^2(\theta) \\
& - 7 \cos^6(\theta) + 10 \cos^8(\theta) - 4 \cos^{10}(\theta))c_{03}a_{21} + (-6 \cos^8(\theta) + \cos^4(\theta) + \cos^6(\theta) \\
& + 4 \cos^{10}(\theta))c_{12}a_{30} + (\cos^2(\theta) - 7 \cos^6(\theta) + 10 \cos^8(\theta) - 4 \cos^{10}(\theta))c_{12}a_{12} \\
& + (-6 \cos^8(\theta) + \cos^4(\theta) + \cos^6(\theta) + 4 \cos^{10}(\theta))c_{30}a_{12} + (\cos^2(\theta) \\
& - 7 \cos^6(\theta) + 10 \cos^8(\theta) - 4 \cos^{10}(\theta))c_{21}a_{03}.
\end{aligned}$$

Ici nous présentons les expressions de A_4 , A_2 , A_0 , A_5 , A_3 , A_1 , \tilde{A}_1 qui apparaissent dans l'équation (3.7)

$$\begin{aligned}
 A_4(\theta) = & e^{5 \sin^2(\theta)} \left[\left[- \frac{(4a_{01}c_{00}I_2 - 8I_1a_{01}ac_{00} - 8I_1c_{00}c_{10} - 4a_{00}c_{01}I_3 + 4c_{00}c_{10}I_2) \cos^4(\theta)}{I_2 - 2I_1} \right. \right. \\
 & - \frac{(-4I_1c_{00}c_{10} + 2a_{00}c_{01}I_3 - 2a_{01}c_{00}I_2 + 2c_{00}c_{10}I_2 + 4I_1a_{01}c_{00}) \cos^2(\theta)}{I_2 - 2I_1} \\
 & \left. \left. - \frac{(-a_{00}c_{00}I_2 + 2I_1a_{01}c_{00} + 2I_1a_{00}c_{01} - a_{00}c_{01}I_2)}{I_2 - 2I_1} \right] \sin(\theta) \right. \\
 & - \frac{(4c_{00}c_{01}I_3 + 4a_{00}c_{10}I_2 - 8I_1a_{00}a_{01} - 8I_1a_{00}a_{10} + 4a_{00}a_{01}I_2) \cos^5(\theta)}{I_2 - 2I_1} \\
 & - \frac{(12I_1a_{00}a_{01} + 4I_1a_{00}c_{10} - 2c_{00}c_{01}I_3 - 2a_{00}c_{10}I_2 - 6a_{00}a_{01}I_2) \cos^3(\theta)}{I_2 - 2I_1} \\
 & - \frac{(12I_1a_{00}a_{01} + 4I_1a_{00}c_{10} - 2c_{00}c_{01}I_3 - 2a_{00}c_{10}I_2 - 6a_{00}a_{01}I_2) \cos^3(\theta)}{I_2 - 2I_1} \\
 & \left. \left. - \frac{(-2c_{00}c_{01}I_1 + c_{00}c_{01}I_2 - 4I_1a_{00}a_{01} + 2a_{00}a_{01}I_2 + 2I_1a_{00}c_{10} - c_{00}c_{01}I_3 - a_{00}c_{10}I_2) \cos(\theta)}{I_2 - 2I_1} \right] \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2(\theta) = & [A_{2,7} \cos^7(\theta) + A_{2,6} \cos^6(\theta) \sin(\theta) + A_{2,5} \cos^5(\theta) + A_{2,4} \cos^4(\theta) \sin(\theta) \\
 & + A_{2,3} \cos^3(\theta) + A_{2,2} \cos^2(\theta) \sin(\theta) + A_{2,1} \cos(\theta) + A_{2,0} \sin(\theta)] \exp(3 \sin^2(\theta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{2,7} = & 4a_{03}a_{00} - 4a_{21}a_{00} - 4c_{30}a_{00} + 4c_{12}a_{00} - 4a_{20}a_{01} + 4a_{02}a_{01} + 4c_{11}a_{01} \\
 & - 4c_{10}a_{20} + 4c_{10}a_{02} + 4 \frac{a_{11}c_{01}I_3}{2I_1 - I_2} + 4c_{00}a_{12} + 4c_{03}c_{00} + 8c_{21}c_{00} + 4 \frac{c_{01}c_{20}I_3}{2I_1 - I_2} \\
 & - 4 \frac{c_{01}c_{02}I_3}{2I_1 - I_2} + 1c_{11}c_{10},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{2,6} = & -4a_{12}a_{00} - 4c_{03}a_{00} - 8c_{21}a_{00} - 4a_{11}a_{01} - 4c_{20}a_{01} + 4c_{02}a_{01} - 4 \frac{a_{20}c_{01}I_3}{2I_1 - I_2} \\
 & + 4 \frac{a_{02}c_{01}I_3}{2I_1 - I_2} - 4a_{11}c_{10} + 4a_{03}c_{00} - 4a_{30}c_{00} + 4c_{12}c_{00}
 \end{aligned}$$

$$+4 \frac{c_{01}c_{11}I_3}{2I_1-I_2} - 4c_{20}c_{10} + 4c_{10}c_{02},$$

$$\begin{aligned} A_{2,5} = & -10a_{03}a_{00} + 6a_{21}a_{00} + 2c_{30}a_{00} - 6c_{12}a_{00} + 6a_{20}a_{01} - 10a_{02}a_{01} \\ & -6c_{11}a_{01} + 2c_{10}a_{20} - 6c_{10}a_{02} - 6 \frac{a_{11}c_{01}I_3}{2I_1-I_2} - 6c_{00}a_{12} + 2c_{03}c_{00} - 4c_{21}c_{00} \\ & -2 \frac{c_{01}c_{20}I_3}{2I_1-I_2} + 6 \frac{c_{01}c_{02}I_3}{2I_1-I_2} - 2c_{11}c_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,4} = & 6a_{00}a_{12} - 2a_{00}c_{03} + 4a_{00}c_{21} - 6a_{01}a_{11} + 2a_{01}c_{20} - 6a_{01}c_{02} + 2 \frac{c_{20}c_{01}I_3}{2I_1-I_2} \\ & -6 \frac{a_{02}c_{01}I_3}{2I_1-I_2} + 2a_{11}c_{10} - 6a_{03}c_{00} + 2a_{21}c_{00} - 2c_{00}c_{30} - c_{00}c_{12} - 2 \frac{c_{01}c_{11}I_3}{2I_1-I_2} \\ & -2c_{10}c_{20} - 2c_{02}c_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,3} = & 2b_{00} + 8a_{00}a_{03} - 2a_{00}a_{21} + a_{00}c_{12} - 2a_{01}a_{20} + 8a_{01}a_{02} + a_{01}c_{11} + a_{20}c_{10} \\ & + a_{02}c_{10} - \frac{(-2I_3-I_2+2I_1)c_{01}a_{11}}{2I_1-I_2} + a_{12}c_{00} - 2c_{00}c_{03} - 3c_{00}c_{21} \\ & - \frac{(-I_2+2I_1+I_3)c_{01}c_{20}}{2I_1-I_2} + \frac{(2I_1-I_3-I_2)c_{02}c_{01}}{-I_2+2I_1} - 2c_{10}c_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,2} = & 2d_{00} - 2a_{00}a_{12} + a_{00}c_{03} + a_{00}c_{21} - 2a_{01}a_{11} + a_{01}c_{20} + a_{01}c_{02} + a_{20}c_{01} \\ & - \frac{(-2I_3-I_2+2I_1)c_{01}a_{02}}{2I_1-I_2} + a_{11}c_{10} + a_{03}c_{00} + a_{21}c_{00} - 2c_{00}c_{12} \\ & - \frac{(-I_2+2I_1+I_3)c_{11}c_{01}}{2I_1-I_2} - 2c_{02}c_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,1} = & -b_{00} - 2a_{00}a_{03} + a_{00}c_{12} - 2a_{01}a_{02} + a_{01}c_{11} + a_{02}c_{10} + a_{11}c_{01} + a_{12}c_{00} \\ & - 2c_{00}c_{03} - \frac{(-I_2+2I_1+I_3)c_{01}c_{02}}{2I_1-I_2}, \end{aligned}$$

$$A_{2,0} = a_{03}c_{00} + d_{00} + a_{00}c_{03} + a_{01}c_{02} + a_{02}c_{01}.$$

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} A_0(\theta) = & A_{0,9} \cos^9(\theta) + A_{0,8} \cos^8(\theta) + A_{0,7} \cos^7(\theta) + A_{0,6} \cos^6(\theta) + A_{0,5} \cos^5(\theta) \\ & + A_{0,4} \cos^4(\theta) + A_{0,3} \cos^3(\theta) + A_{0,2} \cos^2(\theta) + A_{0,1} \cos(\theta) + A_{0,0}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{0,9}(\theta) = & -(-4a_{21}c_{11} + 4c_{02}c_{03} + 8c_{02}c_{21} - 4c_{03}c_{20} + c_{11}c_{12} - 4c_{11}c_{30} - 8c_{20}c_{21} \\ & - 8a_{11}c_{21} + 4a_{12}c_{02} - 4a_{12}c_{20} + 4a_{20}a_{21} - 4a_{20}c_{12} + 4a_{20}c_{30} \\ & + 4a_{02}a_{03} - 4a_{02}a_{21} + 4a_{02}c_{12} - 4a_{02}c_{30} - 4a_{03}a_{20} + 4a_{03}c_{11} \\ & - 4a_{11}a_{12} - 4a_{11}c_{03}) e^{\sin^2(\theta)}, \end{aligned}$$

$$A_{0,8}(\theta) = -(-4a_{03}c_{20} + 4a_{11}a_{21} - 4a_{11}c_{12} + 4a_{12}a_{20} - 4a_{02}c_{03} - 8a_{02}c_{21}$$

$$\begin{aligned}
 & -4a_{03}a_{11} + 4a_{03}c_{02} - 8c_{11}c_{21} - 4c_{12}c_{20} + 4c_{20}c_{30} + 4a_{11}c_{30} \\
 & -4a_{02}a_{12} - 4a_{12}c_{11} + 4a_{20}c_{03} + 8a_{20}c_{21} - 4a_{21}c_{02} + 4a_{21}c_{20} \\
 & + 4c_{02}c_{12} - 4c_{02}c_{30} - 4c_{03}c_{11}) e^{\sin^2(\theta)} \sin(\theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0,7}(\theta) = & - (2c_{11}c_{30} + 4c_{20}c_{21} - 14a_{02}a_{03} + 10a_{02}a_{21} - 10a_{02}c_{12} + 6a_{02}c_{30} \\
 & + 10a_{03}a_{20} - 10a_{03}c_{11} + 10a_{11}a_{12} + 2a_{11}c_{03} + 12a_{11}c_{21} - 10a_{12}c_{02} \\
 & + 6a_{12}c_{20} - 6a_{20}a_{21} + 6a_{20}c_{12} - 2a_{20}c_{30} + 6a_{21}c_{11} - 2c_{02}c_{03} \\
 & - 12c_{02}c_{21} - 2c_{03}c_{20} - 6c_{11}c_{12}) e^{\sin^2(\theta)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0,6}(\theta) = & - (2c_{20}c_{30} + 2a_{02}c_{03} + 6a_{12}c_{11} + 2a_{20}c_{03} - 4a_{20}c_{21} + 6a_{21}c_{02} \\
 & - 2a_{21}c_{20} - 6c_{02}c_{12} + 2c_{02}c_{30} - 2c_{03}c_{11} + 4c_{11}c_{21} + 2c_{12}c_{20} \\
 & - 6a_{11}a_{21} + 6a_{11}c_{12} - 2a_{11}c_{30} - 6a_{12}a_{20} + 6a_{03}c_{20} + 12a_{02}c_{21} \\
 & + 10a_{03}a_{11} + 10a_{02}a_{12} - 10a_{03}c_{02}) e^{\sin^2(\theta)} \sin(\theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0,5}(\theta) = & - [-2b_{20} + 18a_{02}a_{03} - 8a_{11}a_{12} + 2b_{02} - a_{20}c_{12} - a_{20}c_{30} - a_{21}c_{11} \\
 & - 4c_{02}c_{03} + c_{02}c_{21} + 2c_{03}c_{20} + 2c_{11}c_{30} + 3c_{20}c_{21} + 3a_{11}c_{03} - 3a_{11}c_{21} \\
 & + 7a_{12}c_{02} - a_{12}c_{20} + 2a_{20}a_{21} + 7a_{02}c_{12} - a_{02}c_{30} + 2d_{11} - 8a_{02}a_{21} \\
 & - 8a_{03}a_{20} + 7a_{03}c_{11}] e^{\sin^2(\theta)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0,4}(\theta) = & - [7a_{03}c_{02} - a_{03}c_{30} - 8a_{03}a_{11} - a_{11}c_{30} + 2a_{12}a_{20} - a_{12}c_{11} - a_{11}c_{12} \\
 & - a_{20}c_{21} - a_{20}c_{21} - 8a_{02}a_{12} + 3a_{02}c_{03} - 3a_{02}c_{21} + 2c_{03}c_{11} + 3c_{11}c_{21} \\
 & + 2c_{12}c_{20} + 2a_{11}a_{21} - a_{20}c_{03} - 2b_{11} + d_{02} - 2d_{20} - 2c_{02}c_{30} \\
 & - a_{21}c_{02}) e^{\sin^2(\theta)} \sin(\theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0,3}(\theta) = & - [-a_{11}c_{21} - d_{11} - a_{12}c_{20} - 3b_{02} + b_{20} + 2a_{11}a_{12} + 3c_{03}c_{21} + 2c_{03}c_{20} \\
 & - a_{20}c_{12} - a_{21}c_{11} - 10a_{02}a_{03} + 2a_{02}a_{21} + 2c_{11}c_{12} + 2a_{03}a_{20} \\
 & - a_{02}c_{30}] e^{\sin^2(\theta)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{0,1}(\theta) = & - (2c_{02}c_{03} - a_{02}c_{12} + b_{02} - d_{11} + 2a_{02}a_{03} - a_{03}c_{11} - a_{11}c_{03} \\
 & - a_{12}c_{02}) e^{\sin^2(\theta)},
 \end{aligned}$$

$$A_{0,0}(\theta) = -[-d_{02} - a_{02}c_{03} - a_{03}c_{02}]e^{\sin^2(\theta)} \sin(\theta).$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned}
 A_5(\theta) &= \left[\sin(\theta) \cos(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{00}^2 + (-4 \cos^4(\theta) + 2 \cos^2(\theta) + 1)c_{00}a_{00} \right. \\
 &\quad \left. - \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{00}^2 \right] e^{6 \sin^2(\theta)}, \\
 A_3(\theta) &= 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{00}a_{20} - 2 \cos(\theta) \sin(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(-1 \\
 &\quad + 2 \cos^2(\theta))a_{00}a_{02} - 2 \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{00}a_{11} \\
 &\quad - \cos^2(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{00}c_{20} + (\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 \\
 &\quad - 2 \cos^2(\theta))a_{00}c_{02} - \cos(\theta) \sin(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{11}c_{00} \\
 &\quad - \cos(\theta) \sin(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{01}^2 - (\cos^2(\theta) - 1) \\
 &\quad \frac{2I_1 - 4 \cos^4(\theta)I_3 + 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_2}{2I_1 - I_2} a_{01}c_{01} - \cos(\theta) \sin(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 \\
 &\quad - 2 \cos^2(\theta))c_{10}a_{01} - \cos^2(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{00}a_{20} \\
 &\quad + (\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{00}a_{02} \\
 &\quad - \cos(\theta) \sin(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{00}a_{11} \\
 &\quad - 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{00}c_{20} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta)(\cos^2(\theta) \\
 &\quad - 1)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{00}c_{02} \\
 &\quad + 2 \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{11}c_{00} \\
 &\quad - \cos(\theta) \sin(\theta)I_3 \frac{-I_1 - I_2 + \cos^2(\theta)I_3 - 2 \cos^4(\theta)I_3}{2I_1 - I_2} c_{01}^2 \\
 &\quad - \cos^2(\theta) \frac{2I_1 + I_3 + 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_2 - 4 \cos^4(\theta)I_3}{2I_1 - I_2} c_{10}c_{01} \\
 &\quad \left. - \cos^3(\theta) \sin(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{10}^2 \right] \exp(4 \sin^2(\theta)), \\
 A_1(\theta) &= \left[-\cos^4(\theta) \frac{2I_1 + I_3 + 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_2 - 4 \cos^4(\theta)I_3}{2I_1 - I_2} c_{01}c_{30} + \cos^4(\theta)(8 \cos^4(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - 3 - 4 \cos^2(\theta))c_{10}c_{21} + 2 \cos^2(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))(\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{02}a_{11} \right. \\
 &\quad \left. + \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{20}c_{02} \right. \\
 &\quad \left. + \sin(\theta) \cos(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))(\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{02}^2 - \sin(\theta) \cos^3(\theta)(\cos^2(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - 1)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{11}^2 - 2 \cos^4(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{11}a_{20} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{2\sin^2(\theta)} \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(8 \cos^4(\theta) - 4 \cos^2(\theta) - 1)c_{01}c_{21} + 2 \cos^2(\theta) \\
& (-1 + 2 \cos^2(\theta))(\cos^2(\theta) - 1)^2a_{01}a_{12} + \cos^2(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))b_{10} \\
& + \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{10}a_{12} + 2 \cos^4(\theta) \\
& (2 \cos^2(\theta) - 1)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{11}c_{20} - \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)(\cos^2(\theta) \\
& - 2 \cos^4(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(2 \cos^2(\theta) - 1)c_{11}c_{02} - 1)^2c_{02}^2 + \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
& (\cos^2(\theta) - 1)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{11}^2 + \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 \\
& - 2 \cos^2(\theta))c_{11}a_{11} + \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{02}c_{20} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)\frac{2I_1 - 4 \cos^4(\theta)I_3 + 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_2}{2I_1 - I_2}a_{12}c_{01} \\
& - \sin(\theta) \cos(\theta)\frac{-4 \cos^6(\theta)I_3 - I_2 + 2I_1 + 2 \cos^2(\theta)I_1 + \cos^2(\theta)I_3 + I_3 - 2 \cos^4(\theta)I_3 - \cos^2(\theta)I_2}{2I_1 - I_2}c_{01}c_{03} \\
& - \sin(\theta) \cos^5(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)c_{20}^2 - \sin(\theta) \cos^3(\theta)\frac{4 \cos^2(\theta)I_3 + 4I_1 - 8 \cos^4(\theta)I_3 + I_3 - 2I_2}{2I_1 - I_2} \\
& c_{01}c_{21} + 2 \cos^2(\theta)(\cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) - 1 + 2 \cos^6(\theta))c_{03}c_{10} + \sin(\theta) \cos^5(\theta)(-1 \\
& + 2 \cos^2(\theta))a_{20}^2 - \cos^4(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{20}c_{20} + (\cos^2(\theta) - 1)^2 \\
& \frac{2I_1 - 4 \cos^4(\theta)I_3 - 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_2}{2I_1 - I_2}a_{03}c_{01} - (\cos^2(\theta) - 1)(2 \cos^2(\theta) + 1)d_{01} \\
& + \sin(\theta) \cos(\theta)(2 \cos^2(\theta) + 1)d_{10} + \sin(\theta) \cos(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))b_{01} \\
& - \sin(\theta) \cos^3(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{11}c_{20} - \sin(\theta) \cos^3(\theta)(4 \cos^4(\theta) \\
& - 1 - 2 \cos^2(\theta))a_{01}c_{30} - (\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^6(\theta) + 2 \cos^4(\theta) - (\cos(\theta))^2 - 1) \\
& a_{01}c_{03} - \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)\frac{2I_1 - 4 \cos^4(\theta)I_3 + 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_1}{2I_1 - I_2}a_{21}c_{01} - (4 \cos^4(\theta) \\
& - 1 - 2 \cos^2(\theta))(\cos^2(\theta) - 1)^2a_{02}c_{02} - \sin(\theta) \cos^3(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 \\
& - 2 \cos^2(\theta))c_{11}a_{20} + \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)\frac{2I_1 + I_3 + 2 \cos^2(\theta)I_3 - I_2 - 4 \cos^4(\theta)I_3}{2I_1 - I_2}c_{12}c_{01} \\
& - \sin(\theta) \cos^3(\theta)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{10}a_{21} - 2 \sin(\theta) \cos^5(\theta)(2 \cos^2(\theta) \\
& + 1)c_{10}c_{30} + \sin(\theta) \cos(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{12}a_{01} \\
& - 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(-1 + 2 \cos^2(\theta))a_{01}a_{21} + \sin(\theta) \cos(\theta)(-1 \\
& + 2 \cos^2(\theta))(\cos^2(\theta) - 1)^2a_{01}a_{03} - 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)(-1 + 2 \cos^2(\theta))(\cos^2(\theta) \\
& - 1)a_{02}a_{20} + \sin(\theta) \cos(\theta)(\cos^2(\theta) - 1)(4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta))c_{11}a_{02}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin(\theta) \cos(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) a_{11} c_{02} + \sin(\theta) \\
 & \cos(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) c_{10} a_{03} + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
 & (\cos^2(\theta) - 1) (2 \cos^2(\theta) + 1) c_{12} c_{10} + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) \\
 & (2 \cos^2(\theta) + 1) c_{02} c_{20}] e^{2 \sin^2(\theta)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1(\theta) = & \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) + 2 \cos^8(\theta) + 3 \cos^6(\theta) - 1) c_{03}^2 \\
 & + 2 \cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) - 1) (\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{03} c_{03} - \cos^5(\theta) \sin(\theta) \\
 & (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) a_{21} c_{30} + \cos^6(\theta) (8 \cos^4(\theta) - 3 - 4 \cos^2(\theta)) \\
 & c_{21} c_{30} + 2 \cos^4(\theta) (\cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) - 1 + 2 \cos^6(\theta)) c_{03} c_{30} \\
 & + \cos^3(\theta) \sin(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) d_{30} + \cos^3(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) b_{21} \\
 & + 2 c_{21}^2 \cos^5(\theta) \sin(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) + a_{12}^2 \sin^5(\theta) \cos^3(\theta) \\
 & (-1 + 2 \cos^2(\theta)) - \cos^7(\theta) \sin(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) c_{30}^2 + (2 \cos^2(\theta) \\
 & + 1) (\cos^2(\theta) - 1)^2 d_{03} + \cos^3(\theta) \sin(\theta) (4 \cos^4(\theta) + 8 \cos^6(\theta) - 3 \\
 & - 3 \cos^2(\theta)) c_{03} c_{21} - \cos^2(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (2 \cos^2(\theta) + 1) d_{21} \\
 & - \cos^2(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) b_{12} + \cos^4(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) \\
 & b_{30} - \cos(\theta) \sin(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) (\cos^2(\theta) - 1)^3 a_{03}^3 + \cos^4(\theta) (\cos^2(\theta) \\
 & - 1) (4 \cos^4 - 1 - 2 \cos^2(\theta)) a_{12} c_{30} - 2 \cos^2(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (\cos^4(\theta) \\
 & - \cos^2(\theta) - 1 + 2 \cos^6(\theta)) c_{03} c_{12} - \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (2 \cos^2(\theta) \\
 & + 1) d_{12} - \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) b_{03} + 2 \cos^4(\theta) \\
 & (-1 + 2 \cos^2(\theta)) (\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{12} a_{21} + \cos^4(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (8 \cos^4(\theta) \\
 & - 4 \cos^2 - 1) a_{21} c_{21} + \cos^4(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (8 \cos^4(\theta) - 3 - 4 \cos^2) c_{12} c_{21} \\
 & - 2 \cos^2(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) (\cos^2(\theta) - 1)^3 a_{03} a_{12} - \cos^2(\theta) (8 \cos^4(\theta) \\
 & - 4 \cos^2 - 1) (\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{03} c_{21} - \cos^2(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 1 \\
 & - 2 \cos^2(\theta)) (\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) - 1) a_{21} c_{03} - \cos^5(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) \\
 & - 1) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) a_{21}^2 - \cos^3(\theta) \sin(\theta) (2 \cos^2(\theta) + 1) (\cos^2(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1)^2 c_{12}^2 + 2 \cos^5(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (2 \cos^2(\theta) + 1) c_{12} c_{30} \\
& + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) (-1 + 2 \cos^2(\theta)) (\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{03} a_{21} \\
& + \cos^3(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) a_{03} c_{30} \\
& + \cos^3(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) a_{21} c_{12} \\
& - \cos(\theta) \sin(\theta) (4 \cos^4(\theta) - 1 - 2 \cos^2(\theta)) (\cos^2(\theta) - 1)^2 a_{03} c_{12} \\
& + \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - 1) (4 \cos^6(\theta) + 2 \cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) - 1) a_{12} a_{03}.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T.R.Blows, L.M.Perko, bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems, SIAM. Rev. 36(1994), 341-376.
- [2] D. Hilbert, Mathematical Probleme, in : F.E. Browder(Ed.), Lecture at the Second International Congress of Mathematicians, Paris 1900 ; reprinted in Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems, in :Proc. Symp. Pure Math, Vol. 28, Amer. Soc, Providence, RI, 1976, pp. 1-34.
- [3] J. Giné, M. Grau, J. Llibre, Averaging theory at any order for computing periodic orbits, Physica D 250(2013) 58-65.
- [4] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and bifurcations of vector fields, Applied Mathematical Sciences, 42, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [5] J. Llibre and C. Pantazi :Limit cycles bifurcating from a degenerate center. Math. Comput. Simulation. 120, 2016, 1-11.
- [6] J. Llibre, M.A. Teixeira, J. Torregrosa, Limit cycles bifurcating from a K-dimensional isochronous centre contained in \mathbb{R}^n with $K \leq n$, Math. Phys. Anal. Geom. 10 (2007) 237-249.

- [7] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics
7. Third Edition Springer New York 2001.
- [8] J.A. Sanders, F. Verhulst, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, in :Appl.
Math. Sci, Vol. 59, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
- [9] M. Viano, J. Libre and H. Giacomini, Arbitrary order bifurcation for perturbed Ha-
miltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor. Nonlinear Anal.
48(2002), 117-136.