

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم  
قسم الرياضيات

N<sup>o</sup> : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

# ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES FRACTIONNAIRES

Option : COSD

Par :

*1. Imen Mokrane*

Encadrée par : *Salima BENSEBAA*

MCB ENSTI.ANNABA

Devant le jury :

Présidente : *Ghania KHENNICHE*

MCB U.SKIKDA

Examineur : *Lamine BOUZETTOUTA*

MCA U.SKIKDA

Année : 2022/2023

## *REMERCIEMENTS*

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir donné la volonté et la force  
de faire ce travail.

Je remercie également mes parents qui sont un modèle de la patience et de l'abnégation, des traits qui ont su me les transmettre.

Je tiens également à remercier mon encadrante

Dr.Salima Bensebaa.

Pour ses précieux conseils, je lui exprime ma gratitude pour son aide et son soutien indéfectible.

Je tiens également à remercier Mme Ghania KHENNICHE qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que Mr Lamine BOUZETTOUTA pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leur temps.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire sans oublier les gens que j'ai rencontrés au département de mathématiques à l'université de SKIKDA.

## *Dédicace*

Au nom de dieu le clément et le miséricordieux à Allah le tout puissant.

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissance et de remerciement :

A mes chers parents,                      qui m'ont aidé.

    À ma chère sœur                      Amani.

    À mes chers frères                  Houcem Haythme.

À toutes mes chers amis,              prés et de loin.

    À toute ma famille, qui porte le nom Mokrane.

A tous ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et  
tous ceux

qui nous sont chers.

---



## *Résumé*

Notre objectif principal est d'adapter les outils classiques de l'analyse à l'étude de l'existence de la solution de certains problèmes aux limites fractionnaires.

---

**Mots clés:** calcul fractionnaire, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, principe de contraction de Banach, théorème de Guo-Krasnoselskii dans un cône, fonction de Green.

## *Summary*

Our main objective is to adapt the classic tools of the analysis to the study of the existence of the solution of certain problems to fractional limits.

---

**Key words:** fractional calculus, Leray-Schauder nonlinear alternative, Banach contraction principle, Guo-Krasnoselskii theorem in a cone, Green's function.



هدفنا الرئيسي هو تكيف الأدوات الكلاسيكية للتحليل  
لدراسة وجود حل لبعض المشاكل  
التفاضلية الكسرية.

---

**الكلمات المفتاحية:** حساب التفاضل والتكامل الكسري ، بديل ليراي-شودر غير الخطي ،  
مبدأ انكماش باناخ ، نظرية غو-كراسنوسيلسكي في المخروط ، دالة جرين.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1 Espace fonctionnel . . . . .	4
1.2 Fonction spécifique pour la dérivation fractionnaire . . . . .	5
1.2.1 Fonction Gamma . . . . .	5
1.2.2 Fonction Bêta . . . . .	6
1.3 Intégration et dérivation fractionnaire . . . . .	6
1.3.1 L'approche de Riemann-Liouville . . . . .	6
1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	8
1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	12
1.4 Quelques résultats de la théorie du point fixe . . . . .	15
1.4.1 Théorème de Banach . . . . .	16
1.4.2 Théorème de Krasnoselskii . . . . .	16
<b>2 Existence et unicité de la solution d'un problème aux limites frac-</b>	
<b>tionnaire</b>	<b>18</b>

<b>2.1</b> Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	19
<b>3</b> Existence de la solution positive d'un problème aux limites frac- tionnaire	25
3.1 Existence de la solution positive . . . . .	27
<b>Conclusion</b>	32
<b>Bibliographie</b>	33

# Introduction

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques qui étudie la généralisation de la dérivation et l'intégration d'ordre entier  $n$  à un ordre non entier disons fractionnaire. Le concept de ces opérateurs différentiels d'ordre non entier est devenu une question essentielle que de nombreux mathématiciens ont rapidement développée. La question des dérivées d'ordre non entier est évoquée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à de L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande à quel pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction  $x$ , Leibnitz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel(1823), Liouville (1832), Riemann (1847), ...

Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- La limite du taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement,
- L'intégration, opération inverse de la dérivation, mène, via la formule intégrale de Liouville, aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo,
- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par  $(i\omega)^\alpha$  ou  $p^\alpha$  avec  $\alpha$  non entier.

Récemment un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés. Par exemple un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des caoutchoucs et des gommés, en général toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations. Les dérivées fractionnaires ont été également utilisées en économie, en biologie, dans le traitement d'image, le traitement du signal, la commande automatique et robotique. Pour plus de connaissances et d'amples détails voir [3,13,15,22,28,31].

Les équations différentielles fractionnaires constituent un domaine de recherche d'actualité. En effet, de nombreux articles sont apparus traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la multiplicité des solutions positives de ce type d'équations. D'une manière générale, nous ne disposons d'aucune méthode d'investigation assez puissante pour répondre à ces questions. Les méthodes existantes sont de plusieurs sortes, nous citerons à titre d'exemples la méthode du degré topologique [29], la méthode du point fixe [9], et la méthode du sûr et sous-solutions [8]. D'autre part on trouve des théorèmes importants qui donnent l'existence et la multiplicité des solutions, par exemple le théorème de Krasnosel'skii [24] et le théorème de Avery et Peterson [4].

Ce mémoire a pour objet l'étude d'une classe d'équations différentielles d'ordres fractionnaires, elle est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude du problème fractionnaire :

$${}^c D_{0+}^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < t < 1,$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}u(0) &= 0, \\u'(0) + u''(0) &= 0, \\u'(1) + u''(1) &= 0.\end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de la solution sont établis en utilisant le principe de contraction de Banach.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence de la solution positive du problème fractionnaire :

$$D_{0+}^q u(t) + \lambda a(t) f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0.$$

Où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données,  $2 < q < 3$ .

Tout d'abord, nous transformons notre problème en un problème de point fixe. Par la suite, nous établissons la fonction de Green et ses propriétés ainsi que le cône approprié. En se basant sur le théorème de Krasnoselskii un résultat d'existence de la solution positive a pu être prouvé. Enfin, nous terminons par deux exemples d'applications.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Avant de présenter les définitions des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, il convient d'introduire les espaces fonctionnels suivants :

### 1.1 Espace fonctionnel

Soit  $\Omega = (a, b)$  ( $-\infty \leq a, b \leq +\infty$ ) un intervalle fini ou infini de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.1** *Pour  $(1 \leq p \leq +\infty)$  et  $m \in \mathbb{N}$  on définit*

1. Pour  $1 \leq p < \infty$ , l'espace  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  des (classes de) fonctions  $f$  réelles ou complexes sur  $\Omega$  telles que  $f$  est mesurable et  $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$  muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

2.  $p = \infty$ , l'espace  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout sur  $\Omega$ , muni de la norme :

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{M \geq 0; |f(x)| \leq M, \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

**Définition 1.1.2** Soit  $\Omega = (a, b)$ , un intervalle fini de  $\mathbb{R}$ , alors l'espace des fonctions absolument continues noté  $AC(\bar{\Omega})$  est définie comme l'espace des primitives des fonctions  $\mathbb{L}^1(\Omega)$  i-e si  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ , alors  $f$  est dérivable presque partout sur  $\bar{\Omega}$  avec  $f' \in \mathbb{L}^1(\Omega)$  et l'on a :

$$f \in AC(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad x \in \Omega.$$

Pour  $n \geq 2$ , nous notons par  $AC^n(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que  $f^{(k)} \in C(\Omega)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  et  $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ .

## 1.2 Fonction spécifique pour la dérivation fractionnaire

### 1.2.1 Fonction Gamma

Dans ce paragraphe, nous présentons deux fonctions spéciales qui sont très utilisées dans le calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.

**Définition 1.2.1** La fonction Gamma est définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0,$$

où  $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ .

**Théorème 1.2.1** La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes

1. Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

2. On peut également représenter  $\Gamma(z)$  par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \Re(z) > 0.$$

La condition  $\Re(z) > 0$  peut être étendue à  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$

3. La fonction  $\Gamma(z)$  est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ .

## 1.2.2 Fonction Bêta

**Définition 1.2.2** *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad \Re(\omega) > 0.$$

*Cette fonction est liée à la fonction Gamma par :*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \forall z, w : \Re(z) > 0, \quad \Re(w) > 0.$$

## 1.3 Intégration et dérivation fractionnaire

### 1.3.1 L'approche de Riemann-Liouville

Historiquement, l'approche de Riemann-Liouville a été la première à être développée, et celle pour laquelle une théorie mathématique complète a pu être établie.

## Intégrale fractionnaire

**Définition 1.3.1** ([22]) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $C$ ,  $-\infty \leq a < b < \infty$ , est formellement définie par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < x < b.$$

Pour  $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_a^\alpha$  coïncide avec l'intégrale répétée  $n$ -fois de la forme

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

**Exemple 1.3.1** Considérons la fonction  $f(x) = (x-a)^\beta$ . Alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt,$$

En effectuant le changement de variable  $t = a + (x-a)\tau$  et en utilisant la fonction Bêta il résulte que

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \end{aligned}$$

donc

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = (x - a)^{\beta + \alpha} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}.$$

**Théorème 1.3.1** *Si  $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$ , avec  $a$  fini, alors  $I_a^\alpha f(x)$  existe pour presque tout  $x \in [a, b]$  et l'on a  $I_a^\alpha \in \mathbb{L}^1[a, b]$ .*

**Proposition 1.3.1** *L'opérateur d'intégration fractionnaire  $I_a^\alpha$  est borné dans  $\mathbb{L}^p[a, b]$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ).*

**Théorème 1.3.2** *Soient  $\alpha, \beta > 0$  pour toute fonction  $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$  on a :*

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha + \beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x), \quad (1.1)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$ . Si de plus  $f \in C[a, b]$  alors (1.1) est vraie pour tout  $x \in [a, b]$ .

**Théorème 1.3.3** *Soit  $\alpha > 0$  et soit  $(f_k)_{k=1}^\infty$  une suite uniformément convergente de fonctions continues sur  $[a, b]$ . Alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de R-L et le signe limite comme suit :*

$$\left( I_a^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (x) = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} I_a^\alpha f_k \right) (x).$$

En particulier, la suite  $(I_a^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$  est uniformément convergente.

### 1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.3.2** *Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n - 1 \leq \alpha < n$ , la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L) d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f$  est formellement définie par :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

où  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ .

En particulier, pour  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} D_a^0 f(x) &= DI_a^1 f(x) = f(x), \\ D_a^m f(x) &= D^{m+1} I_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} I_a^1 f(x) = D^m f(x). \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de R-L coïncide avec la dérivée usuelle pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.3.1** Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction  $f(x)$  en un point qui ne dépend que de l'allure de  $f(x)$  au voisinage restreint de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de R-L d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de  $f(x)$  dans l'intervalle  $(a, x)$ . On dit qu'elle est à caractère non-local.

**Proposition 1.3.2** Soit  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , alors pour tout entier  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m > \alpha$  on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(x).$$

**Remarque 1.3.2** En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante à titre d'exemple si  $p > 0$  est non entier alors

$$D^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}.$$

**Exemple 1.3.2** Considérons maintenant la fonction  $f(t) = (t-a)^\alpha$ . Soit  $p \geq 0$  et  $\alpha > -1$ , alors on a :

$$D^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (t-a)^\alpha d\tau,$$

il s'ensuit que si  $p - \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ , alors

$$D^p f(t) = 0,$$

et si  $p - \alpha \notin \{1, 2, \dots, n\}$ , on trouve

$$D^p f(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p}.$$

Le résultat suivant établit une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha f$ .

**Proposition 1.3.3** *Soient  $\alpha \geq 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n[a, b]$  alors la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha f$  existe presque partout sur  $[a, b]$ , en plus elle est donnée par :*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1 + k - \alpha)} (x - a)^{k - \alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}}.$$

**Corollaire 1.3.1** *Si  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in AC[a, b]$  alors :*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left[ \frac{f(a)}{(x - a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t) dt}{(x - t)^\alpha} \right].$$

### Propriétés

Nous présentons maintenant quelques propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

**Linéarité** Par analogie à la dérivation usuelle, l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de R-L est linéaire.

**Théorème 1.3.4** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de*

*R-L existent. Pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors  $D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$  existe et l'on a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \mu D_a^\alpha g(x).$$

**Lois de composition** On constate tout d'abord que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

**Lemme 1.3.1** *Soit  $\alpha > 0$  et  $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$ , alors l'égalité*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x),$$

*est vraie pour presque tous  $x \in [a, b]$ .*

**Théorème 1.3.5** *Soient  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $m - 1 \leq \beta < m$  ( $n, m \in \mathbb{N}^*$ ), alors on a :*

*a) Si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$  la relation*

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x),$$

*est vraie presque partout sur  $[a, b]$ .*

*b) Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et si la dérivée fractionnaire  $D_a^{\beta-\alpha} f$  existe, alors on a :*

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x).$$

*c) S'il existe une fonction  $\varphi \in \mathbb{L}^1[a, b]$  telle que  $f = I_a^\alpha \varphi$ , alors :*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x),$$

*pour presque tout  $x \in [a, b]$ .*

d) Si  $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$  et  $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n[a, b]$  alors l'égalité

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{D^{n-k}[I_a^{n-\alpha} f](a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x - a)^{\alpha-k},$$

est vraie presque partout sur  $[a, b]$ . En particulier pour  $0 < \alpha < 1$

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_a^{1-\alpha} f(a).$$

e) Pour  $\alpha > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si les dérivées fractionnaires  $D_a^\alpha f$  et  $D_a^{k+\alpha} f$  existent alors :

$$D^k(D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x).$$

f) Pour  $f \in \mathbb{L}^1[a, b]$ , si  $I_a^{m-\beta} f \in AC^m[a, b]$  et  $\alpha + \beta < n$ , alors on a :

$$D_a^\alpha (D_a^\beta f(x)) = (D_a^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{k=1}^m \frac{D^{m-k}[I_a^{m-\beta} f](a)}{\Gamma(1 - \alpha - k)} (x - a)^{-k-\alpha}.$$

### 1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 1.3.3** Soit  $\alpha \geq 0$  tel que  $n = [\alpha] + 1$ . La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre  $\alpha \geq 0$  sur  $[a, b]$ , est définie par

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(t) = D^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right],$$

où  $n = [\alpha] + 1$ , pour  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $n = \alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Exemple 1.3.3** Soit  $\alpha > 0$  tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$  et soit  $f(t) = (t - a)^\beta$  avec  $\beta > -1$ , alors on a :

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Si  $\beta \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  alors

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(t) = 0.$$

Si  $\beta > n-1$ , alors

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (s-a)^{\beta-n}.$$

En effectuant le changement de variable  $s = a + \tau(t-a)$ , ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) on aura

$$\begin{aligned} {}^c D_{a^+}^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau \\ &= \frac{B(n-\alpha, \beta-n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle

$${}^c D_{a^+}^\alpha C = 0.$$

**Théorème 1.3.6 ([22])** Soit  $\alpha \geq 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n[a, b]$ , la dérivée fractionnaire au sens de Caputo existe presque partout sur  $[a, b]$ .

a) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds.$$

b) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , on obtient

$${}^c D_{a^+}^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

*En particulier*

$${}^c D_{a^+}^0 f(t) = f(t).$$

### Quelques propriétés

Dans ce qui suit, nous donnons quelques propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

**Lemme 1.3.2** ([22]) *Soient  $\beta > \alpha > 0$ , alors pour toute  $f \in L^1([a, b])$ , on a :*

$${}^c D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f(t) = I_{0^+}^{\beta-\alpha} f(t),$$

*ainsi*

$${}^c D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(t) = f(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

**Théorème 1.3.7** ([22]) *Soit  $\alpha > 0$ , si  $f \in AC^n[a, b]$ , alors on a :*

$$I_{a^+}^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad \forall t \in [a, b].$$

**Lemme 1.3.3** ([22]) *Soient  $\alpha, \beta > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , ainsi les relations suivantes sont vérifiées :*

$${}^c D_{a^+}^\alpha t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > n$$

*et*

$${}^c D_{a^+}^\alpha t^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Lemme 1.3.4** ([22]) *Soit  $\alpha > 0$  et  $g(t) \in C([a, b])$ , alors l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^c D_{a^+}^\alpha g(t) = 0,$$

admet la solution

$$g(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + \dots + c_nt^{n-1},$$

où,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , et  $n = [\alpha] + 1$ .

## 1.4 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynôme ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Dans cette section, nous allons présenter les théorèmes de points fixes que nous allons utiliser tout au long de ce mémoire en vue d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

**Définition 1.4.1** Soit  $T$  une application d'un ensemble  $X$  dans lui-même. On appelle point fixe tout point  $x \in X$  tel que  $T(x) = x$ .

**Définition 1.4.2** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et l'application  $T : E \rightarrow E$ , on dit que  $T$  est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive  $k \geq 0$  telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments  $(x, y)$  de  $E$ , l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)).$$

Si  $k \leq 1$ , l'application  $T$  est appelée non expansive.

Si  $k < 1$ , l'application  $T$  est appelée contraction.

### 1.4.1 Théorème de Banach

Le théorème du point fixe de Banach est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction  $f$  admet sous certaines conditions un point fixe, il donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.

**Théorème 1.4.1** (*Principe de contraction de Banach*) Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et soit  $T : E \rightarrow E$  une contraction. Alors  $T$  admet un unique point fixe.

**Définition 1.4.3** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $U$  un ouvert de  $E$ . L'opérateur continu  $T : U \rightarrow F$  est complètement continu s'il transforme tout borné de  $E$  en une partie relativement compacte dans  $F$ . Il est dit compact si  $T(\overline{U})$  est relativement compacte.

**Théorème 1.4.2** (*Arzela-Ascoli*) Soient  $K$  un espace compact et  $X = C(K)$  l'espace des fonctions continues dans  $K$ . Un sous ensemble  $F \subset X$  est relativement compact si et seulement s'il est uniformément borné et équicontinu.

**Théorème 1.4.3** (*Alternative non-linéaire de Leray-Schauder*)[10]. Soit  $U$  un ensemble ouvert borné d'un espace de Banach  $E$  tel que  $0 \in U$  et  $T : \overline{U} \rightarrow E$  un opérateur complètement continu. Alors

- 1)  $T$  a un point fixe sur  $\overline{U}$  ou bien
- 2) il existe  $\lambda \in (0, 1)$  et  $u \in \partial U$  tel que :  $x = \lambda T(x)$

### 1.4.2 Théorème de Krasnoselskii

Krasnoselskii a combiné le théorème de point fixe de Banach et celui de Schauder et a établi un nouveau théorème de point fixe qui a porté son nom. Ce théorème a

été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

**Théorème 1.4.4** (*Théorème de Guo-krasnosel'skii*)[24]. Soit  $K$  un cône défini dans un espace de Banach  $E$ . Supposons que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux sous ensembles ouverts de  $E$  avec  $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ . Supposons que

$A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$  est un opérateur complètement continu tel que :

i)  $\|Au\| \leq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , et  $\|Au\| \geq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ , ou bien

ii)  $\|Au\| \geq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_1$ , et  $\|Au\| \leq \|u\|$ ,  $u \in K \cap \partial\Omega_2$ .

Alors,  $A$  admet un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ .

## Chapitre 2

# Existence et unicité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites fractionnaire (P1) suivant :

$$\begin{aligned}({}^c D_{0+}^\alpha u)(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in [0, 1], & \text{(P1)} \\ u(0) &= 0, \\ u'(0) + u''(0) &= 0, \\ u'(1) + u''(1) &= 0.\end{aligned}$$

Où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée,  $3 < \alpha < 4$ .

On établit l'existence et l'unicité de la solution par application du théorème du point fixe de Banach.

## 2.1 Résultat d'existence et d'unicité

**Lemme 2.1.1** Soient  $3 < \alpha < 4$  et  $y \in C([0, 1])$ . L'unique solution du problème fractionnaire :

$$({}^c D_{0+}^\alpha u)(t) = y(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u'(0) + u''(0) &= 0, \\ u'(1) + u''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Est donnée par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds, \quad t \in [0, 1],$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)}, & 0 \leq s < t \leq 1, \\ \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

**Preuve.** Par application du lemme 1.3.4, on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= (I_{0+}^\alpha y)(t) - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds - c_0 - c_1 t - c_2 t^2, \end{aligned}$$

la dérivation deux fois successives de  $u(t)$  donne

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} y(s) ds - c_1 - 2c_2 t, \\ u''(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} y(s) ds - 2c_2, \end{aligned}$$

d'après les conditions aux limites en (2.2), on trouve :

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_1 &= - [(I_{0+}^{\alpha-1}y)(1) + (I_{0+}^{\alpha-2}y)(1)], \\ c_2 &= \frac{1}{2} [(I_{0+}^{\alpha-1}y)(1) + (I_{0+}^{\alpha-2}y)(1)]. \end{aligned}$$

Donc,  $u(t)$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \\ &+ \frac{t}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds \\ &= \int_0^t \left[ \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} \right] y(s) ds \\ &+ \int_t^1 \left[ \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} \right] y(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t,s) y(s) ds, t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

■

Notons par  $A$  et  $M(s)$  les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)}, \\ M(s) &= \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-3}}{2\Gamma(\alpha-2)}. \end{aligned}$$

**Lemme 2.1.2** *Pour tous  $t, s \in [0, 1]$ , la fonction de Green  $G(t, s)$  vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $G(t, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$  et  $G(t, s) > 0$ ,
2.  $G(t, s) \leq M(s)$ ,  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Preuve.** D'après l'expression de  $G(t, s)$ , il est évident que  $G(t, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$  et  $G(t, s) > 0$ .

Montrons la deuxième propriété, pour  $s < t$ , on a

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} \\ &\leq \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-3}}{2\Gamma(\alpha-2)}. \\ &= M(s) \end{aligned}$$

et si  $t \leq s$  alors

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t-t^2/2)(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} \\ &\leq \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-3}}{2\Gamma(\alpha-2)} \\ &\leq M(s). \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Considérons l'opérateur  $T : E \rightarrow E$  défini par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Lemme 2.1.3** Soit  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la fonction  $u \in E$  est solution du problème fractionnaire (P1) si et seulement si  $Tu(t) = u(t), \forall t \in [0, 1]$ .

**Preuve.** Soit  $u$  la solution du problème (P1), alors en appliquant le théorème 1.3.7, on trouve

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds.$$

Inversement, nous supposons que  $u$  satisfait

$$u(t) = I_{0+}^{\alpha} f(t, u(t)) + \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds + \frac{t}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds \\ - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds.$$

Par application du lemme 1.3.4, on obtient

$${}^c D_{0+}^{\alpha} u(t) = {}^c D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(t, u(t)) + \frac{{}^c D_{0+}^{\alpha} t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds + \frac{{}^c D_{0+}^{\alpha} t}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds \\ - \frac{{}^c D_{0+}^{\alpha} t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds - \frac{{}^c D_{0+}^{\alpha} t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds.$$

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo  ${}^c D_{0+}^{\alpha} t$  et  ${}^c D_{0+}^{\alpha} t^2$  sont nulle, nous obtenons

$${}^c D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)).$$

Ainsi,  $u(t)$  est la solution du problème (P1). ■

**Théorème 2.1.1** *Supposons qu'il existe une fonction non négative  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ , telle que pour  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, 1]$  on a :*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq g(t) |x - y| \text{ et } A \|g\|_{L^1} \leq \frac{1}{2}, \\ A = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)}.$$

*Alors le problème (P1) admet une solution unique.*

**Preuve.** Pour la preuve de ce théorème, on a besoin de vérifier tout d'abord que  $T$  est une contraction.

Soit  $u, v \in E$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 |Tu(t) - Tv(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds - \int_0^1 G(t, s) f(s, v(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\
 &\leq \int_0^1 G(t, s) g(s) |u(s) - v(s)| ds \\
 &\leq \int_0^1 M(s) g(s) \max |u(s) - v(s)| ds \\
 &\leq A \max |u(s) - v(s)| \int_0^1 g(s) ds \\
 &\leq A \|u(s) - v(s)\| \|g\|_{L^1} \\
 |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|
 \end{aligned}$$

Alors (P1) admet solution unique. ■

**Exemple 2.1.1** *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases}
 {}^c D_{0+}^{\frac{17}{5}} u = \frac{t^4}{90} u + \cos t, & 0 < t < 1, \\
 u(0) = u''(0) = 0, \quad u'(1) = {}^c D_{0+}^{\frac{4}{5}} u(1).
 \end{cases}$$

Où

$$f(t, x) = \frac{t^4}{90} x + \cos t, \quad 3 < q = \frac{17}{5} < 4.$$

Nous avons

$$|f(t, x) - f(t, y, \bar{y})| \leq \frac{t^4}{90} |x - y|,$$

ainsi

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq g(t) |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1],$$

avec  $g(t) = \frac{t^4}{90}$ , un calcul simple donne

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1} &= 0,0025 \\ A &= \frac{1}{\Gamma(\frac{17}{5})} + \frac{1}{2\Gamma(\frac{14}{3})} + \frac{1}{2\Gamma(\frac{11}{3})} = 0,325276.. \\ A \|g\|_{L^1} &= 0,000813 < 0.5.\end{aligned}$$

Alors d'après le théorème 1.4.1, notre problème admet une solution unique  $u^*$  dans  $E$ .

# Chapitre 3

## Existence de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence de la solution positives du problème aux limites fractionnaire (P2) :

$$D_{0+}^q u(t) + a(t) f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (\text{P2})$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0,$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données,  $2 < q < 3$ . Nous introduisons quelques conditions suffisantes pour montrer l'existence de solutions positive du problème aux limites fractionnaire. Notre approche est basée sur les théorèmes de point fixe de Guo-krasnosel'skii.

Dans cette section, en se servant de la fonction de Green et ses propriétés, on établira la positivité de la solution du problème (P2), pour cela nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

**Lemme 3.0.4** *Soit  $y \in C([0, 1])$  et  $2 < q < 3$ . L'unique solution  $u$  du problème linéaire*

$$\begin{cases} D_{0+}^q u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

*est donnée par*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t, s)y(s)ds,$$

*où*

$$G(t, s) = \begin{cases} t^{q-1}(1-s)^{q-2}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ t^{q-1}(1-s)^{q-2} - (t-s)^{q-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Lemme 3.0.5** *Pour tout  $s, t \in [0, 1]$ , la fonction de Green  $G(t, s)$  est positive, continue et satisfait*

*i)  $G(t, s) \leq G(1, s)$ ,*

*ii)  $G(t, s) \geq t^{q-1}G(1, s)$ .*

**Preuve.** Il est facile de vérifier que  $G(t, s)$  est positive, continue satisfaisant (i).

D'autre part, pour  $s \leq t$  on trouve

$$\begin{aligned} G(t, s) &= t^{q-1}(1-s)^{q-2} - (t-s)^{q-1} \\ &\geq t^{q-1}(1-s)^{q-2} - t^{q-1}(1-s)^{q-1} \\ &= t^{q-1}G(1, s), \end{aligned}$$

pour  $t \leq s$  on a

$$G(t, s) \geq t^{q-1}G(1, s).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

### 3.1 Existence de la solution positive

On considère l'espace de Banach  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$ .

Définissons l'opérateur  $T : E \rightarrow E$  par

$$Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Lemme 3.1.1** *Soit  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et  $a \in C([0, 1], \mathbb{R})$  la fonction  $u \in E$  est solution du problème fractionnaire (P2) si et seulement si  $Tu(t) = u(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .*

**Preuve.** Soit  $u$  la solution du problème (P2), alors en appliquant le théorème 1.3.5, on trouve

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s)) ds.$$

Inversement, nous supposons que  $u$  satisfait

$$u(t) = -I_{0+}^q a(t) f(u(t)) + \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} a(s) f(u(s)) ds.$$

Par application du lemme 1.3.1, il s'ensuit que

$$D_{0+}^q u(t) = -D_{0+}^q I_{0+}^q a(t) f(u(t)) + \frac{D_{0+}^q t^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} a(s) f(u(s)) ds.$$

En utilisant le fait que la dérivée de  $D_{0+}^q t^{q-1}$  est nulle, nous obtenons

$$D_{0+}^q u(t) + a(t) f(u(t)) = 0.$$

Ainsi,  $u(t)$  est solution du problème fractionnaire (P2). ■

Introduisons les quantités  $A_0$  et  $A_\infty$  :

$$A_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u}, \quad A_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}.$$

On dit que  $f$  est superlinéaire respectivement sublinéaire lorsque  $A_0 = 0$  et  $A_\infty = \infty$  respectivement  $A_0 = \infty$  et  $A_\infty = 0$ .

**Lemme 3.1.2** *Soit  $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  et  $a \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$ , si  $u$  une solution du problème fractionnaire (P2) alors*

$$\min_{t \in [\tau, 1]} u(t) \geq \tau^{q-1} \|u\|.$$

**Preuve.** En vertu du lemme 3.0.5,  $u$  peut être exprimé par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s)) ds \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(1, s) a(s) f(u(s)) ds$$

il en résulte que

$$\|u\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(1, s) a(s) f(u(s)) ds.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(1, s) a(s) f(u(s)) ds \\ &\geq t^{q-1} \|u\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \tau^{q-1} \|u\|.$$

■

**Théorème 3.1.1** *Si  $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $a \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$ ,  $\int_0^1 G(1, s) a(s) ds \neq 0$  et*

$\int_0^1 G(1, s)ds \neq 0$ , alors le problème (P2) admet au moins une solution positive dans les cas super et sous linéaires.

**Preuve.** La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii dans un cône, pour cela on définit le cône  $P$  par

$$P = \left\{ u \in E, u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1, \min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \tau^{q-1} \|u\| \right\}.$$

Il est facile de vérifier que  $P$  est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de  $E$ , donc c'est un cône.

Soit  $u \in P$ , comme  $G$  et  $f$  sont positives et continues, on déduit que  $Tu \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , continu et  $T(P) \subset P$ .

i) Soit  $r > 0$  et  $B_r = \{u \in P, \|u\| \leq r\}$  un ensemble borné. Comme  $f$  et  $a$  sont continues, alors, il existe une constante  $k$  tel que

$$k = \max \{|a(t)f(u(t))| : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq r\}.$$

Par application du lemme 3.0.5, on a pour tout  $u \in B_r$

$$|Tu(t)| \leq \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(1, s)ds$$

d'où  $T(B_r)$  est uniformément borné.

Nous allons établir l'équicontinuité de  $T(B_r)$ .

Comme  $G(t, s)$  est continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ , alors elle est uniformément continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Soit  $s \in [0, 1]$ , on a pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $\delta \left( \frac{\varepsilon \Gamma(q)}{k \int_0^1 G(1, s)ds} \right) > 0$ ,

tel que pour  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ,  $|t_1 - t_2| < \delta$ , on a

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| \leq \frac{\varepsilon \Gamma(q)}{k \int_0^1 G(1, s) ds},$$

du fait que

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| a(s) f(u(s)) ds,$$

on obtient

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Par suite  $T(B_r)$  est équicontinu.

En vertu du théorème d'Arzela-Ascoli nous concluons que  $T$  est complètement continu.

Dans un premier temps, considérons le cas superlinéaire.

Comme  $A_0 = 0$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$ , telle que

$$f(u) \leq \varepsilon u,$$

pour tout  $0 < u \leq \delta$ .

Soit  $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < \delta\}$ , pour  $u \in P \cap \partial\Omega_1$  nous avons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s)) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon \|u\|}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(1, s) a(s) ds, \end{aligned}$$

en prenant

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(q)}{\int_0^1 G(1, s) a(s) ds},$$

alors

$$\|Tu\| \leq \|u\|.$$

Dans le cas  $A_\infty = \infty$ , nous avons pour tout  $A > 0$ , il existe  $\gamma > 0$ , telle que

$$f(u) \geq Au$$

pour  $u \geq \gamma$ .

Posant  $R = \max \left\{ 2\delta, \frac{1}{\tau^{q-1}}\gamma \right\}$  et notant par  $\Omega_2$  l'ensemble ouvert défini par

$$\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < R\},$$

ainsi  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$  et pour  $u \in P \cap \partial\Omega_2$  on a

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{\tau^{q-1}}{\Gamma(q)} A \|u\| \int_\tau^1 G(1, s)a(s)ds. \end{aligned}$$

En prenant  $A = \frac{\Gamma(q)}{\tau^{q-1} \int_\tau^1 G(1, s)a(s)ds}$ , on obtient  $\|Tu\| \geq \|u\|$  pour  $u \in P \cap \partial\Omega_2$ . Nous déduisons d'après le théorème 1.4.4 que  $T$  admet un point fixe dans  $P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$ , d'où l'existence de la solution positive du problème (P2) dans  $P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$ . Pour prouver le cas sous linéaire on procède d'une façon similaire au cas précédent. ■

**Exemple 3.1.1** *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$D_{0+}^{\frac{8}{3}} u(t) + (1-t) \frac{u^2}{4} = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi).$$

Comme  $\int_0^1 \left( (1-s)^{\frac{2}{3}} - (1-s)^{\frac{5}{3}} \right) ds = \frac{9}{40} \neq 0$ ,  $\int_0^1 \left( (1-s)^{\frac{2}{3}} - (1-s)^{\frac{5}{3}} \right) (1-s) ds = \frac{9}{88} \neq 0$ ,

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{4u} = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2}{4u} = \infty$ , d'après le théorème 1.4.4, on déduit qu'il existe aux moins une solution positive.

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires.

Tout d'abord on a rappelé dans le premier chapitre quelques notions des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, les outils de base du calcul fractionnaire et quelques théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Dans Le deuxième chapitre, on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution d'un problème pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec les conditions aux limites. Ces résultats ont été obtenus par le principe de contraction de Banach.

Enfin dans le troisième chapitre, nous avons étudié l'existence de la solution positive d'un autre problème fractionnaire. En se basant sur le théorème de Krasnoselskii un résultat d'existence de la solution positive a pu être prouvé. Nous avons terminé ce chapitre par un exemple d'application.

À l'avenir, ces problèmes fractionnaires pourront être appliqués à l'aide de la théorie de Darbo combinés avec la mesure de non-compacité d' Hausdorff.

# Bibliographie

- [1] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, *Abstract and applied analysis*, 2009, ID 494720, 9 pages, doi :10.1155/2009/494720.
- [2] B. Ahmad, S. Sivasundaram, On four-point nonlocal boundary value problems of nonlinear integro-differential equations of fractional order. *Appl. Math. Comput.* 217(2010), 480–487.
- [3] G.A. Anastassiou, On right fractional calculus. *Chaos Solitons Fract.* 42(2009), 365–376.
- [4] R.I. Avery, A.C. Peterson, Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, *Comput. Math. Appl.* 42(2001), 313-322.
- [5] Z. Bai, On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem, *Nonlinear Analysis*, 72(2010), 916–924.
- [6] M. Benchohra, S. Hammani, S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.* 71(2009), 2391–2396.
- [7] L. Bing, Positive solutions of a nonlinear three point boundary value problem, *Comput. Math. Appl.* 44(2002), 201-211.
- [8] J.Cronin, *Fixed Points and Topological Degree in nonlinear Analysis*, *Mathematical Surveys*, no. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1964.

- [9] C.De Coster and P.Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary values problems : classical and recent results, *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, F.Zanolin, ed., CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, New York 371(1996) 1-79.
- [10] k. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [11] S. Dugowson. *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Université Paris 13, Villetaneuse, France, 1994.
- [12] M. El-Shahed, Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation, Hindawi Publishing Corporation, *Abstract and Applied Analysis*, 2007, ID 10368, 8 page.
- [13] N. Engheta, On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, *IEEE Trans.* 44 (4)(1996), 554-556.
- [14] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [15] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publ.Co (2000). 4, 9
- [16] D. Jiang and C. Yuan, The positive properties of the Green function for Dirichlettype boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its application, *Nonlinear Analysis*, 72(2010), 710–719.
- [17] Q. Jinliang, Positive solutions for a nonlinear periodic boundary value problem with a parameter, *Electronic Journal of Differential Equations*, 133(2012) 1–10.
- [18] E. R. Kaufmann and N. Kosmatov, A Second-Order Singular Boundary Value Problem, *Comput. Math. Appl.* 47(2004), 1317–1326.
- [19] E. R. Kaufmann and N. Kosmatov, Singular Conjugate Boundary Value Problems on a Time Scale, *J. Difference Equ. Appl.* 10 (2004), No. 2, 119–127.

- [20] R.A. Khan, Existence and approximation of solutions of nonlinear problems with integral boundary conditions, *Dynam. Systems Appl.* 14(2005), 281-296.
- [21] R.A. Khan, M.R. Rehman, J. 5. Henderson, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, *Fractional Diff. eq.* 1 (1)(2001), 29–43.
- [22] A. Kilbas, Hari M. Srivastava, Juan J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, in : North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science, B.V. Amsterdam, 2006.
- [23] M. A. Krasnosel'skii, The Operator of translation Along the Trajectories of Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1968.
- [24] M. A. Krasnosel'skii, "Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators," , *Soviet Mathematics, Doklady*, 1(1960), 1285-1288.
- [25] R.W. Leggett, Williams, L.R., Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 7 (2000), 133-154.
- [26] A. Lion. On the thermodynamics of fractional damping elements, *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* 9(1997), 83–96.
- [27] F. Mainardi, *Fractals and fractional calculus in Continuum Mechanics*, Springer, New York, 1997.
- [28] R. Magin, Fractional calculus in bioengineering, *Crit. rev. Biom. Eng.* 32 (1)(2004), 1-104.
- [29] J. Mawhin-M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer Verlag, New York, 1989.
- [30] K. Nishimoto, *Fractional calculus and its applications*, Nihon University, Koriyama, 1990.

- [31] K. B. Oldham, Fractional Differential Equations in Electrochemistry, Advances in Engineering Software, 2009.
- [32] I. Podlubny, Fractional Differential Equations Mathematics in Sciences and Engineering, Academic Press, New York, London, Toronto, 1999.