REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE 20 AOUT 1955 SKIKDA
FACULTE DES SCIENCE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de

Master II

DOMAINE : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : ANEDP

STABILITÉ EXPONENTIELLE D'UN SYSTÈME LORD-SHULMAN THERMOÉLASTIQUE AVEC AMORTISSEMENT POREUSE ET UN TERME DE RETARD

Présenté par : Ziane Amel

- Encadré par : Lamine Bouzettouta M.C.A

Soutenu devant le jury composé de :

- Karek Chafia : M.C.B. Présidente
- Far Zina : M.A.A. Examinatrice

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Louange à ALLAH de nous avoir guidé dans le bon chemin en l'implorant dans nos prières afin de nous donner non seulement le courage ; la force et la patience de réaliser ce travail. Je tenais à présenter mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Dr. Bouzettouta Lamine pour son dévouement, sa grande gentillesse et pour la confiance qu'il m'avait témoigné pendant la réalisation de ce travail. Soyez assurés de nous une profonde gratitude. Mes sincères considérations et remerciements sont également exprimés aux membres du jury.

MCB. Karek Chafia , qui nous fait l'honneur par sa présence en qualité de président du jury.

MAA. Far Zina , pour avoir accepté examiner ce travail.

*****Ziane Amel*****

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Ma chère Maman : Si Dieu a mis le paradis sous les pieds des mères, ce n'est pas pour rien.Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Mon cher mari :Pour tout l'encouragement, le respect et l'amour que tu m'as offert, Je te dédis ce travail, qui n'aurait pas pu être achevé sans ton éternel soutien et optimisme tu es un modèle d'honnêteté et de loyauté , j'espère que te combler et te rendre toujours heureux.

Mon frère ALI et mes sœurs SOUMIA , CHAIMA , IMEN qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité .

Mes enfants Roeya , Abderahmen et Miral.

Mes neveux Menderet Raghed.

Ma belle-famille , mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons un système thermoélastique de LORD-SHULMAN a une dimension avec amortissement poreuse et un retard discret ; sous une hypothèse appropriée sur le poids du retard ; nous étudions le résultat d'existence et l'unicité de la solution par la méthode de semi-groupe et pour la stabilité en utilisant la méthode multiplicative qui repose sur un choix appropriées des fonctionnelle de Lyapounov dans le cas d'égalité des vitesses de propagation d'ondes.

Mots-clés : Systéme de LORD-SHULMAN, Stabilité Exponentielle, Thermoélasticité, Semi-groupe, fonctionelle de Lyapounov.

Abstract

In this dissertation , we consider a one-dimensional LORD-SHULMAN thermoelastic system with porous damping and a discrete delay ; under an appropriate assumption on the weight of delay ; we study the existence result and the uniqueness of the solution by the semi-group method and for the stability using the multiplicative method which relies on an appropriate choice of Lyapunov functionals in the case of equality of wave propagation velocities.

Key-words : LORD-SHULMAN system, Exponential stability, Thermoelasticity, Semi-group, Lyapunov functional.

الملخص

في هذه المذكرة ، نعتبر نظام المرونة الحرارية لورد شولمان أحادي البعد مع التخميد المسامي والتأخير الزمني ؛ في ظل فرضية مناسبة حول وزن التأخير ؛ ندرس نتيجة وجود ووحدانية الحل بطريقة شبه المجموعة و بالنسبة لدراسة الاستقرار الأسي، نستخدم طريقة المضاعفات التي تعتمد على الاختيار المناسب لداليات ليابونوف في حالة تساوي سرعات انتشار الموجة.

كلمات مفتاحية : نظام لوردشولمان ، الاستقرار الاسي، المرونة الحرارية، شبه المجموعة، دالية ليابونوف.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La modélisation de la conduction de la chaleur est principalement connue par la loi de Fourier, cependant cette loi présente une limite pertinente. Il existe de nombreux chercheurs dans la littérature qui se penchent sur la formulation de relations alternatives pour surmonter ce paradoxe. Nous rappelons que Lord et Shulman [41] ont étudié l'équation de conduction de la chaleur de Cattaneo-Maxwell [42] et l'ont combinée avec le système décrivant les vibrations élastiques d'un matériau. La thermoélasticité de Lord-Shulman a récemment suscité beaucoup d'attention de la part des scientifiques, et de nombreuses publications ont contribué à clarifier cette théorie. L'analyse d'un ensemble de quatre équations hyperboliques avec dissipation thermique est décrite. Dans cette situation, l'équation de la chaleur est également hyperbolique contrairement à l'équation parabolique obtenue avec la loi de Fourier.

D'autre part, au cours des siècles précédents et actuels, un intérêt croissant a été porté à l'étude des matériaux avec microstructure [37, 52]. Une classe de matériaux est particulièrement prise en considération lorsque des microtempératures [45] affectent la microstructure [44]. De nombreuses personnes s'intéressent à l'étude des matériaux élastiques avec microtempératures en raison de leur utilisation extensive de ces types de structures. Pour plus de détails, voir [43, 48, 54]. Il existe également des applications physiques intéressantes de la thermoélasticité avec des vides, telles que l'étude des solides avec de petites structures poreuses distribuées.

Dans le cas de la loi de Cattaneo-Maxwell, les équations d'évolution pour la thermo-poroélasticité avec microtempératures sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\rho_1 u_{tt} = t_x,} & \boldsymbol{J\varphi_{tt} = h_x + g,} \\ \boldsymbol{\rho_1 T_0 \eta_1 = q_x,} & \boldsymbol{\rho_1 e_t = P_x + q - Q,} \end{array} \tag{0.1}$$

Où $\boldsymbol{\rho_1}$ est la masse volumique, $\boldsymbol{J}$ est le produit de la masse volumique par l'inertie équilibrée, $\boldsymbol{T_0}$ représente une température de référence à l'équilibre, $\boldsymbol{t}$ est le tenseur de contrainte, $\boldsymbol{\eta_1}$ est l'entropie, $\boldsymbol{q}$ est le vecteur de flux de chaleur, $\boldsymbol{h}$ est la contrainte équilibrée, $\boldsymbol{g}$ est la force volumique équilibrée, $\boldsymbol{P}$ est le premier moment du flux de chaleur, $\boldsymbol{Q}$ est le flux de chaleur moyen et $\boldsymbol{e}$ est le premier moment d'énergie. Les variables $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ représentent respectivement le déplacement du matériau élastique solide et la fraction volumique. Les équations constitutives sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{t = (\lambda + 2\mu)u_x + \mu_0\varphi - \beta_0(\tau_1\theta_t + \theta),} & \boldsymbol{h = a_0\varphi_x - \mu_2(\tau_1 T_t = T),} \\ \boldsymbol{g = -\mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1(\tau_1\theta_t + \theta),} & \boldsymbol{\rho_1\eta_1 = \beta_0 u_x + \beta_1\varphi + a(\tau_1\theta_t + \theta),} \\ \boldsymbol{q = \kappa\theta_x + k_1 T,} & \boldsymbol{P = -k_2 T_x,} \\ \boldsymbol{Q = (\kappa - k_3)\theta_x + (k_1 - k_2)T,} & \boldsymbol{\rho_1 e = -b(\tau_1 T_t + T) - \mu_2\varphi_x.} \end{array} \tag{0.2}$$

Où $\boldsymbol{\theta}$ est la température, $\boldsymbol{T}$ est la microtempérature qui représente la variation de la température à l'intérieur du micro-élément, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont les paramètres de Lamé habituels, et $\boldsymbol{\tau_1}$ est le paramètre de relaxation, supposé être petit mais strictement positif. Les coefficients $\boldsymbol{\beta_0, \beta_1, \mu_0, \kappa, a_0}$ représentent respectivement le couplage entre le déplacement et la température, le couplage entre le déplacement et la fraction volumique, le couplage entre le déplacement et la porosité, la conductivité thermique et la capacité thermique. Les autres paramètres, $\boldsymbol{k_1, k_2, k_3, \xi}$ et $\boldsymbol{\mu_2}$, définissent les caractéristiques du matériau et, en particulier, ils définissent les couplages et satisfont les inégalités.

$$\boldsymbol{\mu_0^2 < \mu^* \xi,}$$

et

$$\boldsymbol{k_2^2 < \kappa k_1.}$$

Maintenant, en remplaçant l'équation (0.2) dans l'équation (0.1), nous obtenons le système suivant.

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\rho_1 u_{tt} = \mu^* u_{xx} + \mu_0 \varphi_x - \beta_0(\tau_1 \theta_{tx} + \theta_x),} & \text{dans } \boldsymbol{(0,1) \times (0,\infty)} \\
\boldsymbol{J\varphi_{tt} = a_0 \varphi_{xx} - \mu_2(\tau_1 T_{tx} + T_x) - \mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1(\tau\theta_t + \theta),} & \text{dans } \boldsymbol{(0,1) \times (0,\infty)} \\
\boldsymbol{a(\tau_1 \theta_t + \theta)_t = -\beta_0 u_{tx} - \beta_1 \varphi_t + \kappa\theta_{xx} + k_1 T_x,} & \text{dans } \boldsymbol{(0,1) \times (0,\infty)} \\
\boldsymbol{b(\tau_1 T_t + T)_t = k_2 T_{xx} - \mu_2 \varphi_{tx} - k_2 T - k_3 \theta_x,} & \text{dans } \boldsymbol{(0,1) \times (0,\infty)}
\end{array} \tag{0.3}$$

où $\boldsymbol{\mu^* = \lambda + 2\mu}$. Bazarra, Fernandez et Quintanilla [38] ont étudié le problème (0.3) par la théorie des semi-groupes en conjonction avec la méthode développée par Liu et Zheng [47] pour déterminer la décroissance exponentielle de la solution pour les conditions limites suivantes :

$$\boldsymbol{u(l,t) = u(0,t) = \varphi_x(l,t) = \varphi_x(0,t) = \theta_x(l,t) = \theta_x(0,t) = T(0,t) = T(0,t) = 0.}$$

Ces dernières années, le contrôle des EDP avec des effets de retard temporel est devenu un domaine de recherche actif, voir par exemple [39] et [46]. La présence de retard peut être une source d'instabilité du système, voir par exemple [50] et [55].

Dans le présent mémoire, notre objectif est d'étendre l'étude de Boudeliou et Bouraoui [40] en présence du terme poreux avec retard temporel ajouté à la deuxième équation du système, en supposant que l'effet de micro-température n'est pas pris en compte.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre 01 :

Nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles.

Chapitre 02 :

Nous prouvons que le système (2.1)-(2.3) , et nous donnons des résultats d'existence et d'unicité en utilisant la théorie des semi groupe qi repose sur le théorème de HILLE-YOSIDA.

Chapitre 03 :

Nous prouvons à l'aide de la méthode des multiplications que notre système est exponentiellement stable.

CHAPITRE 1

ESPACES FONCTIONNELLES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant l'analyse fonctionnelle et les résultats des quelques inégalités qu'on utilisera ultérieurement. Ensuite, nous donnons brièvement, les définitions et les théorèmes qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail. De plus, en utilisant la théorie du semi groupe qui nous serons très utiles pour la suite de notre travail. On désignera par un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

1.1 Notion d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces Fonctionnelles :

Espace Complet

Définition 1

Un espace normé $(E; ||.||_E)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.

Espace de Banach

Définition 2

Un espaces vectoriel normé **complet** s'appelle espace de **Banach**.

Espace de Hilbert

Définition 3

Un espace de **Hilbert** est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire(u, v) et qui est **complet** pour la norme

$$(u, u)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.2 Espace de Sobolev :

Commençons par les espaces $L^p(\Omega)$.

Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 4

on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{mesurables telles que} \tag{1.1}$$

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty, \text{ si } 1 \leq P < \infty \text{ et } supess|f(x)| < +\infty, \text{ si } p = +\infty\}$$

Théorème 1

Les espace $L^p(\Omega)$, muni des normes suivantes

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \text{pour} \quad 1 \leq p \leq +\infty \quad \text{et} \quad ||f||_{L^\infty} = supess|f(x)|, \tag{1.2}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert .

Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Théorème 2

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev où

$$H^m(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega)/\forall\alpha, |\alpha| \leq m \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tel que } v_\alpha = \vartheta^\alpha u \text{ au sens faible } \Big\} \tag{1.3}$$

On introduit sur H^m le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \sum_{\alpha_l eqm} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle, \tag{1.4}$$

et la norme associée $\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, u\rangle}_m$

Théorème 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni de produit scalaire (1.4) est un espace de Hilbert séparable.

Dans le cas $m = 1$ on utilise la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ pour définir l'espace de Sobolev suivant :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\} \tag{1.5}$$

H désigne un espace de Hilbert, H' son dual.

1.2 Certaines inégalités algébrique

Nous allons donner ici quelques inégalités algébrique importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliqués et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

1.2.1 Inégalité de Hölder

Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors le produit $f.g$ est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q dx\right)^{1/q},$$
$$||fg||_{L^1} \leqslant ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

Remarque 2

L'inégalité de Cauchy Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de

Hölder avec $p = q = 2$.

1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

soient f et g deux fonction dans $L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.3 Inégalité de Young

Soit a,b deux réels positifs et p,q deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} b^q.$$

on utilisera parfois la forme

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q \quad \text{avec} \quad C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}}$$

Si $p = q = 2$ on a :

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 \quad \text{où} \quad ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

1.2.4 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

1.3 Quelques théorèmes utiles

Théorème 4

Un opérateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ linéaire non bornée dans H est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(\mathcal{A}) : \quad \langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0.$$

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximale monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe une fonction

$$u \in C^1([0, \infty], H) \cap C([0, \infty], D(\mathcal{A}))$$

.
unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{sur} \quad [0, \infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale)} \end{cases} \tag{1.6}$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad |\frac{du}{dt}(t)| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| \quad \forall t \geq 0.$$

1.3.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 5

Soit H un espace de Hilbert , A une forme bilinéaire continue et coercive et $\varphi \in \boldsymbol{H}$.
Il existe une unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}$, vérifiant :

$$\boldsymbol{A(u,v) = \langle \varphi, v\rangle, \quad \forall v \in H}$$

Si $\boldsymbol{A}$ est symétrique, alors $\boldsymbol{u}$ est caractérisé par :

$$\boldsymbol{u \in H} \text{ et } \boldsymbol{\frac{1}{2}A(u,u) - \langle \varphi, u\rangle = Min_{v\in H} \left(\frac{1}{2}A(v,v) - \langle \varphi, v\rangle\right)}$$

Remarque 3

Une forme bilinéaire $\boldsymbol{A : H \times H} \to \mathbb{R}$

1. Continue s'il existe $\boldsymbol{C \geq 0}$ tq pour tout $\boldsymbol{u, v \in H}$:

$$\boldsymbol{|A(u,v)| \leq C|u||v|.}$$

2. Coercive s'il existe $\boldsymbol{\alpha > 0}$ tq pour tout $\boldsymbol{u \in H}$:

$$\boldsymbol{A(u,u) \geq \alpha ||u||^2.}$$

3. A est symétrique si :

$$\boldsymbol{\forall u, v \in H, A(u,v) = A(v,u);}$$

1.3.3 Théorème de Fubini

On suppose que $\boldsymbol{F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2), (\Omega_1 \times \Omega_2)} \in \mathbb{R}^2$ ouvert
Alors,pour presque tout $\boldsymbol{x \in \Omega_1}$

$$\boldsymbol{F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)}$$

De même pour presque tout $\boldsymbol{y \in \Omega_2}$

$$\boldsymbol{F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L^1_y(\Omega_2)}$$

De plus on a

$$\boldsymbol{\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy}$$

1.3.4 Inégalité Intégrable

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet,plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants :

Lemme 1

Soient $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $\boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que :
$\boldsymbol{\psi(0) = 0}$ et $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \boldsymbol{\psi(t) = +\infty}$. Supposant que : $\exists \boldsymbol{p \geq 0}$ et $\boldsymbol{d > 0}$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \psi'^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \quad \forall s > 0. \tag{1.7}$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0) \exp^{1-d\psi(t)} & \forall t > 0 \quad \text{si} \quad p = 0 \\ E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pd\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}} & \forall t > 0 \quad \text{si} \quad p > 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

dans le cas particulier où $\boldsymbol{\psi(t) = t}$ on déduit les inégalités suivantes :

$$\text{a)} \quad E(t) \leq E(0) \exp^{1-dt} \quad \forall t > 0 \quad si \quad p = 0 \tag{1.9}$$

$$\text{b)} \quad E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pd\psi(t)}\right)^{\frac{1}{p}} \forall t > 0 \quad \text{si} \quad p > 0$$

appelées respectivement , estimation exponentielle et estimation polynomiale.

Lemme 2

Soit $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue (décroissante) vérifiant

$$\int_s^{+\infty} \psi(E(t)) dt \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s > 0, \tag{1.10}$$

où $\boldsymbol{d}$ est un réel strictement positif et $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\boldsymbol{\psi(0) = 0}$. Alors il existe trois réels strictement positifs $\boldsymbol{t_0, c_0}$ et $\boldsymbol{c_1}$ tels que

$$E(t) \leq \psi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\right), \quad \forall \leq t_0, \tag{1.11}$$

où $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\psi(t)} dt, \quad \forall s > 0. \tag{1.12}$$

1.4 Théorie des semi-groupes

Définition 6

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire (non borné). $\mathcal{A}$ est appelé dissipatif si $\Re(\mathcal{A}v, v)_x \leq 0, \forall v \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur dissipateur $\mathcal{A}$ est appelé m-dissipatif si $(\lambda I - \mathcal{A})$ est surjective pour tout $\lambda > 0$.

Théorème 5

Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est dissipatif si et seulement si

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})_x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \forall x \in D(\mathcal{A}), \lambda > 0, \tag{1.13}$$

Preuve :
Supposons que $\mathcal{A}$ est dissipatif et fixe $x \in d(\mathcal{A})$ et $\lambda > 0$.alors

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \Re((\lambda - \mathcal{A})x, x)_X$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous concluons que

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \|(\lambda - \mathcal{A})x\|_X \|x\|_X,$$

Qui conduit directement à (1.13) . a l'inverse supposer que (1.13) tient et fixe $x \in D(\mathcal{A})$,
alors pour tout $\lambda > 0$,on a

$$\lambda^2 \|x\|_X^2 \leq \lambda^2 \|x\|_X - 2\lambda \Re(\mathcal{A}x, x)_x^2 + \|\mathcal{A}x\|_X^2.$$

En divisant cette inégalité par 2λ, on obtient équivalemment

$$\Re(\mathcal{A}x, x)_x \leq \frac{1}{2\lambda} \|\mathcal{A}x\|_X^2, \lambda > 0.$$

Passer à la limite lorsque λ passer à l'infini donner la dissipativité de $\mathcal{A}$. On peut maintenant prouver certaines propriétés utiles des opérateur m-dissipatifs.

Théorème 6

soit $\mathcal{A}$ est un Opérateur m-dissipatif. ensuite, les propriétés suivantes sont conservées.

1. $\mathcal{A}$ est fermé.

2. pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur X. de plus $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur linéaire borné tel que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{1}{\lambda}$$

3. $D(\mathcal{A})$ est dense dans X.

Preuve :
Commençons par le point **1**. comme $\mathcal{A}$ est un opérateur m-dissipatif,il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$,donc par (1.13) il en résulte que $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ a une inverse bornée.Comme $(\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ est borné,il est également fermé. Alors $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ est fermé et donc $\mathcal{A}$ également.
Pour prouver le point**2**, il suffit de prouver que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$ pour tout $\lambda > 0$ Pour cela, nous introduisons l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in (0, 1) \quad \text{tel que} \quad R(\lambda I - \mathcal{A}) = X\}$$

Première Λ est un ouvert. en effet (1.13) implique queΛ est un sous-ensemble de l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. comme $\rho(\mathcal{A})$ est un ouvert, pour tout $\lambda \in \Lambda$,il existe un voisinage de λ inclus dans $\rho(\mathcal{A})$. L'intersection de ce voisinage avec la droit réelle est clairement inclus dans Λ, ce qui prouve que Λ est ouvert. Montrons aussi que Λ est fermé. Soit une séquence.$(\Lambda_n)_n$ d'élément de Λ tel que

$$\lambda_n \to \lambda > 0 \quad \text{comme} \quad n \to \infty$$

Ensuite, pour un élément quelque $y \in X$ et tout n, il existe $x_n \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$(\lambda_n I - \mathcal{A})_{x_n} = y \tag{1.14}$$

En raison de (1.13), il en résulte que

$$\|x_n\|_X \leq \lambda_n^{-1}\|y\|_X \tag{1.15}$$

Et donc la suite $(x_n)_n$ est bornée. Nous appliquons maintenant (1.13) avec $x_n - x_m$ et λ_m on obtient

$$\lambda_m\|x_n - x_m\|_X \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - \mathcal{A}(x_n - x_m)\|_X$$

et par l'utilisation (1.14) on en déduit que

$$\lambda_m\|x_n - x_m\|_X \leq |\lambda_m - \lambda_n|\|x_n\|_X.$$

et par $(\mathbf{1.15})$, On déduit qu'il existe $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ tel que $\boldsymbol{x_n}$ converge vers $\boldsymbol{x}$ dans $\boldsymbol{X}$. Mais $(\mathbf{1.14})$ Alors implique $\boldsymbol{\mathcal{A}x_n}$ converge vers $\boldsymbol{\lambda x - y}$ et puisque $\boldsymbol{A}$ est fermé, on conclut que $\boldsymbol{x \in D(\mathcal{A})}$ avec $\boldsymbol{\lambda x - \mathcal{A}x = y}$. Cela montre que $\boldsymbol{\lambda}$ appartient $\boldsymbol{\Lambda}$ et que la fermeture de $\boldsymbol{\Lambda}$ est prouvée. En conclusion,$\boldsymbol{\Lambda}$ est un sous-ensemble ouvert, fermé et non vide de $\boldsymbol{(0,\infty)}$.Terminons par le point**3**. Soit $\boldsymbol{y \in X}$ tel que

$$\boldsymbol{(y, x)_x = 0, x \in D(\mathcal{A})} \tag{1.16}$$

Si nous montrons que

$$\boldsymbol{(y, \mathcal{A}x)_x = 0, x \in D(\mathcal{A})} \tag{1.17}$$

alors nous allons obtenir ce

$$\boldsymbol{(y, x - \mathcal{A}x)_x = 0, x \in D(\mathcal{A})}$$

Et puisque $\boldsymbol{R(I - \mathcal{A}) = X}$, on déduit que $\boldsymbol{y = 0}$.
il reste alors à montrer$(\mathbf{1.16})$. soit $\boldsymbol{x \in D(\mathcal{A})}$ est fixé, puis par le point **2**, il existe une suite $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ tel que $\boldsymbol{x_n \in D(\mathcal{A})}$ et

$$\boldsymbol{x = x_n - \frac{1}{n}\mathcal{A}x_n, \forall n \in \mathbb{N}} \tag{1.18}$$

Ceci implique que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}x_n = n(x_n - x)}$$

et de la régularité $\boldsymbol{x, x_n \in D(\mathcal{A})}$, on déduit que $\boldsymbol{x_n}$ appartient à $\boldsymbol{D(\mathcal{A}^2)}$ et que la prochaine identité

$$\boldsymbol{\mathcal{A}x = \mathcal{A}\Big(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\Big)x_n.}$$

Ou équivalent

$$\boldsymbol{\mathcal{A}x_n = \mathcal{A}\Big(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\Big)^{-1}\mathcal{A}x.}$$

Du point**2**, nous savons que

$$\boldsymbol{\Big\|\Big(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1}$$

et donc

$$\boldsymbol{\|\mathcal{A}x_n\|_X \leq \|\mathcal{A}x\|_X.}$$

De plus, comme X est un espace de Hilbert, il existe une sous-suite $(\mathcal{A}x_{nk})$ et $(\mathcal{A}x_n)_n$ et $z \in X$ tel que $\mathcal{A}x_{nk}$ Converge faiblement vers z Ceci implique que la suite de paires $((x_{nk}, \mathcal{A}x_{nk}))_k$ Converge faiblement vers (x, z) dans $X \times X$. Ainsi, par le lemme de Ma-zur, il existe une autre suite $((\tilde{x}_l, z_l))_l$ fait de combinaisons convexes de $(x_{nj}, \mathcal{A}x_{nj})$ assurent ($z_l = \mathcal{A}\tilde{x}_l$) tel que $(\tilde{x}_l, z_l) = (\tilde{x}_l, \mathcal{A}\tilde{x}_l)$ converge fortement vers(x, z) dans $X \times X$ comme l va à ∞. comme $\mathcal{A}$ est fermé, nous en déduisons $z = \mathcal{A}x$. Enfin par (1.16) et (1.18) on a

$$(y, \mathcal{A}x_{nk})_X = n_k(y, x_{nk} - x) = 0$$

et en passant à limite en k, nous trouvons que (1.17) passons maintenant à la notation de semi-groupes linéaires.

Définition 7

soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné.on dit que A est monotone si

$$(Av, v) \geq 0, \forall v \in D(A) \tag{1.19}$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \quad \text{tel que} \quad u + Au = f \tag{1.20}$$

Remarque 4

si A est un maximal monotone, alors λA est aussi maximal monotone pour tout $\lambda > 0$. Par contre si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones alors $A + B$ défini sur $D(A) \cap D(B)$ n'est pas nécessairement maximal monotone.

Définition 8

Une famille à un seul paramètre $(S(t))_{t\geq 0}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ est un semi-groupe des opérateurs linéaires bornés sur X si

1. $$S(0) = Id_x,$$

2. $$S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0.$$

L'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ défini par :

$$\boldsymbol{D(\mathcal{A}) = \left\{ z \in X;\ \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} \text{existe} \right\}}$$

et

$$\boldsymbol{\mathcal{A}z = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t}, \forall z \in D(\mathcal{A})}$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $\boldsymbol{(S(t))_{t\geq 0}}$ et $\boldsymbol{D(\mathcal{A})}$ est appelé le domaine de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.
Un semi-groupe $\boldsymbol{(S(t))_{t\geq 0}}$ des opérateurs linéaires bornés est appelée une suite fortement continue(ou un $\boldsymbol{C_0}$-semi-groupe) si

$$\boldsymbol{\lim_{t\to 0^+} S(t)z = z, \forall z \in X.} \tag{1.21}$$

Un fortement continue $\boldsymbol{(S(t))_{t\geq 0}}$ sur $\boldsymbol{X}$ satisfaisant

$$\boldsymbol{\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1, \forall t \geq 0,}$$

est appelé $\boldsymbol{C_0}$-Semi-groupe de contractions. Montrons maintenant quelques propriétés utiles de $\boldsymbol{C_0}$-semi-groupe de contractions.

Théorème 7

soit $\boldsymbol{(S(t))_{t\geq 0}}$ est un $\boldsymbol{C_0}$-semi-groupe de contraction sur$\boldsymbol{X}$. alors

1. pour tout $\boldsymbol{x \in X}$, l'application $\boldsymbol{t \to S(t)x}$ est un fonction continue de $\boldsymbol{[0,\infty)}$ dans $\boldsymbol{X}$.

2. pour tout $\boldsymbol{x \in X}$ et tout $\boldsymbol{t \geq 0}$,
$$\boldsymbol{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)xds = S(s)x.} \tag{1.22}$$

3. pour tout $\boldsymbol{x \in X}$ et tout $\boldsymbol{t > 0}$, l'élément $\boldsymbol{\int_0^t S(s)xds}$ appartient à $\boldsymbol{D(\mathcal{A})}$, et
$$\boldsymbol{\mathcal{A}\left(\int_0^t S(s)xds \right) = S(t)x - x} \tag{1.23}$$

4. pour tout $\boldsymbol{x \in D(\mathcal{A})}$ et tout $\boldsymbol{t > 0}$, l'élément $\boldsymbol{S(t)x}$ appartient à $\boldsymbol{D(\mathcal{A})}$, et $\boldsymbol{t \to S(t)x}$ est une fonction différentiable continue de $\boldsymbol{(0,\infty)}$ dans $\boldsymbol{X}$ et
$$\boldsymbol{\frac{d}{dt} S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x, \forall t \geq 0.}$$

5. pour tout $\boldsymbol{x \in D(\mathcal{A})}$et tout $\boldsymbol{t \geq 0}$,on a
$$\boldsymbol{S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(u)\mathcal{A}xdu = \int_s^t \mathcal{A}S(u)xdu.}$$

Preuve :
pour le point $\mathbf{1}$, par $(\mathbf{1.21})$, La propriété de continuité tient trivialement à $\boldsymbol{t = 0}$. maintenant fixer $\boldsymbol{x \in X}$ et prendre un arbitraire $\boldsymbol{t > 0}$ alors pour $\boldsymbol{h \geq 0}$, on a

$$\boldsymbol{S(t+h)x - S(t)x = S(t)(S(h)x - x),}$$

1.5 Théorie de la stabilité de Lyapunov

L'étude de la stabilité pour les systèmes évolutives est souvent liée à la construction des fonctionnelles de Lyapunov. La méthode générale de la construction des fonctions de Lyapunov ont proposée par $\boldsymbol{V}$.Kolmanovskii et L.Shaikhet et déjà utilisée avec succès pour les équations différentielles, pour les équations de différence à temps discret, pour les équations de différence à temps continu, est utilisé ici pour étudier la stabilité des équations évolutive à retard, en particulier, des équations différentielles partielles. On a l'équation

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} A(t, u(t)) + f_1(t, u_t), t > 0 \\ u(s) = \Psi(s), s \in [-h, 0] \end{cases} \tag{1.24}$$

Notons par $\boldsymbol{U(t, \Psi)}$ la solution de l'équation $(\mathbf{1.24})$ correspondant à la condition initiale $\boldsymbol{\Psi}$.

Définition 9

La solution triviale de l'équation $(\mathbf{1.24})$ est dite stable si pour tout $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ il existe $\boldsymbol{\delta > 0}$ tel que.

$$|u(t, \Psi)| < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t > 0, \text{si} \quad |\Psi|_{C_H} = \sup_{s \in [-h, 0]} |\Psi(s)| < \delta. \tag{1.25}$$

Définition 10

La solution triviale de l'équation $(\mathbf{1.24})$ est dite exponentiellement stable si elle est stable et il existe $\boldsymbol{\lambda > 0}$ une constante positive tel que pour tout $\boldsymbol{\Psi \in C(0, -h, H)}$ il existe $\boldsymbol{C}$ (qui peut dépendre sur $\boldsymbol{\Psi}$) tel que :

$$|u(t, \Psi)| \leq C \exp(-\lambda t) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

Maintenant, on va faire la démonstration de la théorème du stabilité. supposons qu'il existe une fonctionnelle $\boldsymbol{V(t, u_t)}$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites pour certains nombres positives $\boldsymbol{c_1, c_2}$ et $\boldsymbol{\lambda}$

Théorème 8

$$|u(t,u_t)| \leq c_1 \exp(\lambda t)|u(t)|^2, t \geq 0 \tag{1.26}$$

$$|u(0,u_0)| \geq c_2 |\Psi|^2_{cH} \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt} V(t,u_t) \leq 0, t \geq 0 \tag{1.28}$$

Alors la solution triviale de l'équation (1.24) est exponentiellement stable. Notons que le théorème .8. implique que l'étude de la stabilité de l'équation (1.24) peut être réduit à la construction appropriées de Lyapunov.Pour construire les fonctionnelles de Lyapunov on utilise des procédures formelles.

1.5.1 Le procédure des fonctionnelles de Lyapunov

Le procédure consiste en quatre étapes.

1.5.2 Etape1

pour transformer l'équation (1.24) sous la forme

$$\frac{dz(t,u_t)}{dt} A_1(t,u_t) + A_2(t,u_t) \tag{1.29}$$

où $z(t,.)$ et $A_2(t,.)$ sont des familles d'opérateurs non linéaire,

1. $z(t,0) = 0; A_2(t,0) = 0$, l'opérateur $A_1(t,.)$ dépendante de t et u_t mais indépendante pour les valeurs précidentes $u(t+s), s < 0$.

1.5.3 Etape2

supposons que la solution triviale de l'équation

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1(t,y(t))$$

est exponentiellement stable et il existe donc une fonctionnelle de Lyapunov $V(t,y(t))$, qui satisfait les conditions du théorème .8.

1.5.4 Etape3

La fonctionnelle de Lyapunov $V(t,u_t)$ pour l'équation (1.24) est écrit sous la forme $V = V_1 + V_2$, où $V_1(t,u_t) = V(t,z(t,u_t))$. L'élément y de la fonction $V(t,y)$ est remplacée la fonctionnelle $z(t,x_t)$ dans la partie gauche de l'équation (1.24).

1.5.5 Etape4

Généralement, la fonctionnelle $V_1(t,u_t)$ satisfait les conditions du théorème .8. Pour satisfait ces conditions, il est nécessaire de calculer $\frac{d}{dt}V_1(t,u_t)$ et de l'estimer. Ensuite, la fonctionnelle $V_2(t,u_t)$ peut être choisir de manière standard.

1.6 Problèmes à Retard

Dans cette section, nous introduisons des exemples de problèmes, anciens et nouveaux,qui sont traité à l'aide de la théorie générale des équations différentielles.Nous tentons de donner un description suffisant de la dérivation, de la solution et propriétés des solutions pour que le lecteur puisse apprécier une partie du goût du problème. Dans aucun des cas nous ne donnons un traitement complet du problème,mais offrent des références pour une étude plus approfondie.

1.6.1 Le contrôle d'un navire

Minorsky **(1962)** a conçu un dispositif de direction automatique pour le cuirassé New Mexico. ce qui suit est un esquisse du problème . Supposons que le gouvernail du navire ait une position angulaire $x(t)$ et supposons qu'il y ait une force de frottement proportionnelle à la vitesse, disons$-cx(t)$. Il y un instrument indiquant la direction qui point dans la direction de mouvement réelle et il ya instrument pointant dans la direction désirée. Ces deux sont reliés par un dispositif qui active un moteur électrique produisant une certaine force pour déplacer le gouvernial de manière à amener le navire sur trajectoire souhaitée. Il y a un décalage de temps entre le moment où le navire s'éloigne et le moment où le moteur électrique active le force de rappel. L'équation pour $x(t)$ est

$$x"(t) + cx'(t) + g(x(t-h)) = 0 \tag{1.30}$$

où $xg(t) > 0$ si $x \neq 0$ et c est un constant positive. L'objectif est de donner des conditions assurant que $x(t)$ restera prés de zéro pour que le navire suive son cours.

1.6.2 Epidémies (Cooke et Yorke)

Dans les travaux de Cooke et Yorke **(1973)**, l'hypothèse de Lotka est modifiée de sort que le nombre de naissances par unité de temps n'est fonction que de la taille de la population et non de la répartition par âge voir[2]. Dans cette hypothèse, on a $x(t)$ la taille de la population et on a le nombre de naissance $B(t) = g(x(t))$. Supposons que chaque individu a un durée de vie L de sorte que le nombre de décès par unité de temps soit $g(x\check{s}(t-L))$.

$$x'(t) = g(x(t)) - g(x(t-L)), \tag{1.31}$$

Où g est fonction différentiable. Nous notons que toute fonction constante est une solution de (**1.31**). Cooke et Yorke **(1973)** considèrent le modèle suivant pour la propagation de la gonorrhée. La population est divisée en deux classes : (a) S(t)=Le nombre de sujets susceptibles. (b) S(t)=Le nombre de maladies infectieuses. Le taux de nouvelle infection dépend uniquement des contacts entre les individus sensibles et infectieux.Puisque est égale à la population totale constante moins $x(t)$, la vitesse est une fonction $g(x(t))$. Supposons qu'une personne exposée est immédiatement infectieuse et reste infectieuse pendant une période L(le temps pour le traitement et la guérison). Alors x vérifie aussi (**1.31**). Or, à tout moment $t, x(t)$ est égal à la somme du capital produit au cours de la période $[t-L, t]$ plus une constante c désignant la valeur des actifs non déprécies. Ainsi :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^L P(s)g[x(t-s)]ds + c \\ &= \int_{t-L}^t P(t-u)g[x(u)]ds + c \end{aligned}$$

1.6.3 L'équation de Tournesol

Somolinos **(1978)** a considéré l'équation

$$\boldsymbol{x" + (a/r)x' + (b/R)\sin(t - r) = 0}$$

Et a obtenu des résultats intéressant sur l'existence des solutions périodiques. L'étude de ce problème remonte au début des années **1800** et a attiré beaucoup d'attention.Il implique le mouvement d'une plante de tournesol.

CHAPITRE 2

RÉSULTAT D'ÉXISTANCE ET D'UNICITÉ DE LA SOLUTION

Dans ce chapitre nous donnons des résultats d'existence et d'unicité pour le système (2.1)-(2.3) , et en utilisant la théorie des semi groupe.

Soit le système est écrit comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = \mu^* u_{xx} + \mu_0 \varphi_x - \beta_0(\tau_1 \theta_{tx} + \theta_x) & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ J\varphi_{tt} = a_0 \varphi_{xx} - \mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1(\tau\theta_t + \theta) - \gamma_1 \varphi_t - \gamma_2 \varphi_t(x, t-\tau) & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ a(\tau_1 \theta_t + \theta)_t = -\beta_0 u_{tx} - \beta_1 \varphi_t + \kappa \theta_{xx} & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \end{cases} \tag{2.1}$$

Nous incluons les conditions initiales fournies par le système ci-dessus.

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & x \in (0,1) \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in (0,1) \\ \varphi_t = f_0(x,t), & x \in (0,1), t \in (0,\tau) \end{cases} \tag{2.2}$$

ici, $u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, \theta_1$ sont des fonctions données, et f_0 est une fonction historique. ;

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(1,t) = \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0, & t > 0 \\ \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Dans le système, $\gamma_1 \varphi_t$ représente un terme poreux. Le retard temporel est donné par $\gamma_2 \varphi_t(x, t-\tau)$, où γ_1, γ_2, τ sont des constantes positives et que γ_1, γ_2 satisfont à

$$|\gamma_2| \leq \gamma_1 \tag{2.4}$$

À partir de la première équation de (2.1) et des conditions aux limites (2.3), on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t)dx = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.5}$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 u(x,t)dx = t \int_0^1 u_1(x)dx + \int_0^1 u_0(x)dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, si nous posons

$$\bar{u}(x,t) = u(x,t) - t\int_0^1 u_1(x)dx - \int_0^1 u_0(x)dx, \quad \forall t \geq 0, \; x \in [0,1],$$

nous obtenons finalement

$$\int_0^1 \bar{u}(x,t)dx = 0, \quad t \geq 0.$$

Ainsi, l'inégalité de Poincaré peut être appliquée à $\bar{u}$. De plus, une simple substitution montre que $(\bar{u}, \varphi, \theta)$ est la solution du problème (2.1)-(2.3) avec les données initiales pour $\bar{u}$ données comme suit :

$$\bar{u}_0(x) = u_0(x) - \int_0^1 u_0(x)dx \text{ et } \bar{u}_1(x) = u_1(x) - \int_0^1 u_1(x)dx.$$

Dans ce qui suit, nous travaillerons avec $\bar{u}$, mais pour plus de commodité, nous écrirons u au lieu de $\bar{u}$. Tout au long de ce travail, nous utilisons c_0 pour désigner une constante positive générale.

2.1 Position du probléme

Dans cette section, nous donnons des résultats d'existence et d'unicité pour le système (2.1)-(2.3) en utilisant la théorie des semi-groupes.Nous définissons la nouvelle variable dépendante motivés par [49, 53] :

$$z(x,\rho,t) = \varphi_t(x, t-\tau\rho), \text{ dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty).$$

Alors, la fonction z satisfait l'équation suivante :

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, ; \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty).$$

Ainsi, les équations (2.1) sont transformées en :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = \mu^* u_{xx} + \mu_0\varphi_x - \beta_0(\tau_1\theta_{tx} + \theta_x) & \in (0,1)\times(0,\infty) \\ J\varphi_{tt} = a_0\varphi_{xx} - \mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1(\tau\theta_t + \theta) - \gamma_1\varphi_t - \gamma_2 z(x,1,t) & \in (0,1)\times(0,\infty) \\ a(\tau_1\theta_t + \theta)_t = -\beta_0 u_{tx} - \beta_1\varphi_t + \kappa\theta_{xx} & \in (0,1)\times(0,\infty) \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0 & \in (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty) \end{cases} \tag{2.6}$$

Les conditions initiales et aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} z(x,0,t) = \varphi_t(x,t) & & x\in(0,1), t\in(0,1) & \\ u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = u_1(x), & \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & x\in(0,1) \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), & \theta(x,0) = \theta_0(x), & x\in(0,1) & \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\tau\rho), & & x\in(0,1), t\in(0,\tau) & \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0, & \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

En introduisant la fonction vectorielle $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, \omega, z)^t$, où $v = u_t$, $\phi = \varphi$ et $\omega = \theta_t$, le système (2.6)-(2.7) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} U_t = AU \quad t > 0, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, \theta_1, f_0) \end{cases} \tag{2.8}$$

L'opérateur $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{D(A)} \subset \boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}}$ est défini par :

$$AU = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\mu^*}{\rho_1} u_{xx} + \frac{\mu_0}{\rho_1}\varphi_x - \frac{\beta_0}{\rho_1}(\tau_1\theta_{tx} + \theta_x) \\ \phi \\ \frac{a_0}{J}\varphi_{xx} - \frac{\mu_0}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\varphi + \frac{\beta_1}{J}(\tau_1\theta_t + \theta) - \frac{\gamma_1}{J}\varphi_t - \frac{\gamma_2}{J}z(x,1,t) \\ \omega \\ \frac{-1}{\tau_1}\theta_t - \frac{\beta_0}{a\tau_1}u_{tx} - \frac{\beta_1}{a\tau_1}\varphi_t + \frac{\kappa}{a\tau_1}\theta_{xx} \\ \frac{-1}{\tau}z_\rho(x,\rho,t) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

On considère les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L^2_*(0,1) &= \left\{\Psi \in L^2(0,1), \quad \int_0^1 \Psi(x)dx = 0\right\}, \\ H^2_*(0,1) &= \left\{\Psi \in H^2(0,1), \quad \Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0\right\}, \\ H^1_*(0,1) &= H^1(0,1) \cap L^2_*(0,1) \end{aligned}$$

et l'espace de Hilbert
$\mathcal{H} = \{H^1_*(0,1) \times L^2_*(0,1) \times H^1_0(0,1) \times L^2(0,1) \times H^1_0(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1; L^2(0,1))\}$
équipé du produit scalaire

$$\begin{aligned} \left\langle U, \widetilde{U} \right\rangle :=& \rho_1 \int_0^1 v\tilde{v}dx + J\int_0^1 \phi\tilde{\phi}dx + \mu_0 \int_0^1 (u_x\tilde{\varphi} + \varphi\tilde{u}_x)\, dx \\ &+ \xi \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx + a_0 \int_0^1 \varphi_x\tilde{\varphi}_x dx + a\int_0^1 (\theta + \tau_1\omega)\left(\tilde{\theta} + \tau_1\tilde{\omega}\right)dx \\ &+ \mu^* \int_0^1 u_x\tilde{u}_x dx + \tau_1\kappa \int_0^1 \theta_x\tilde{\theta}_x dx + \tau|\gamma_2| \int_0^1\int_0^x z\tilde{z}dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

pour $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, \omega, z)^T \in \mathcal{H}$ et $\left(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \tilde{z}\right)^T \in \mathcal{H}$
Le domaine de $\boldsymbol{A}$ est donné par

$$D(A) = \begin{pmatrix} U \in \mathcal{H}\backslash & u \in H^1_*(0,1) \cap H^2_*(0,1)\ ,\ v \in H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1), \\ & \varphi \in H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1)\ ,\ \phi \in H^1_0(0,1), \\ & \theta \in H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1)\ ,\ \omega \in H^1_0(0,1), \\ & z, z_\rho \in ((0,1), L^2(0,1)), \quad z(x,o) = \phi(x) \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Clairement, le domaine $\boldsymbol{D(A)}$ est dense dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.On a le résultat suivant d'existence et d'unicité :

Théorème 9

Soit $U_0 \in D(A)$, le problème (2.8) a une solution unique $U \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$. De plus, si $U_0 \in \mathcal{H}$, alors la solution $U \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$.

Démonstration. Le résultat découle du théorème de Lumer-Phillips à condition que $\boldsymbol{A}$ soit un opérateur dissipatif. Dans ce qui suit, nous prouvons que $\boldsymbol{A}$ est dissipatif. Pour tout $U \in D(A)$, en utilisant le produit scalaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} =& -\kappa\int_0^1 \theta_x^2 dx - \gamma_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{|\gamma_2|}{2}\int_0^1 z^2(x,1,t)dx \\ &+ \frac{|\gamma_2|}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \gamma_2 \int_0^1 z(x,1,t)\varphi_t dx \end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant l'inégalité de Young, le dernier terme de (2.12), on a

$$-\gamma_2 \int_0^1 z(x,1,t)\varphi_t dx \leqslant \frac{|\gamma_2|}{2} \int_0^1 z^2(x,1,t)dx + \frac{|\gamma_2|}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \tag{2.13}$$

Remplacer (2.13) dans (2.12) donne

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq -\kappa \int_0^1 \theta_x^2 dx - (\gamma_1 - |\gamma_2|) \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

Il s'ensuit que $\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$, sous l'hypothèse (2.4), ce qui implique que A est dissipatif. Prouvons ensuite que l'opérateur $I - A$ est surjectif. Soit $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7)^T \in \mathcal{H}$, on prouve qu'il existe $\Phi \in D(A)$ satisfaisant

$$U + AU = G; \tag{2.14}$$

c'est,

$$\begin{cases} u - v = g_1 \in H_*^1(0,1) \\ \rho_1 v - \mu_* u_{xx} - \mu_0 \varphi_x + \beta_0 (\tau_1 \omega_x + \theta_x) = \rho_1 g_2 \in L_*^2(0,1), \\ \varphi - \phi = g_3 \in H_0^1(0,1), \\ J\phi - a_0 \varphi_{xx} + \mu_0 u_x + \xi \varphi - \beta_1 (\tau_1 \omega + \theta) + \gamma_1 \phi + \gamma_2 z(x,1,t) = J g_4 \in L^2(0,1), \\ \theta - \omega = g_5 \in H_0^1(0,1), \\ a\tau_1 \omega + a\omega + \beta_0 v_x + \beta_1 \phi - \kappa \theta_{xx} = a\tau_1 g_6 \in L^2(0,1), \\ z_\rho + \tau z = \tau g_7 \in L^2((0,1) L^2(0,1)) \end{cases} \tag{2.15}$$

On remarque que la dernière équation de (2.15) avec $z(x,0,t) = \phi_t$, a une solution unique.

$$z(x,\rho,t) = \phi(x) e^{-\tau\rho} - e^{-\tau\rho} g_3(x) + \tau e^{-\tau\rho} \int_0^\rho e^{\tau s} g_7(x,s) ds.$$

En insérant $v = u - g_1, \phi = \varphi - g_3, \omega = \theta - g_5$ et (2.15) dans $(2.15)_2$, $(2.15)_4$, $(2.15)_6$, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_1 u - \mu^* u_{xx} - \mu_0 \varphi_x + \beta_0 (\tau_1 + 1) \theta_x = \hbar_1 \in L_*^2(0,1), \\ \eta \varphi - a_0 \varphi_{xx} + \mu_0 u_x - \beta_1 (\tau_1 + 1) \theta = \hbar_2 \in L^2(0,1), \\ a (\tau_1 + 1) \theta + \beta_0 u_x + \beta_1 \varphi - \kappa \theta_{xx} = \hbar_3 \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{2.16}$$

où

$$\eta = \left(J + \xi + \gamma_1 + \gamma_2 e^{-\tau}\right)$$
$$\hbar_1 = \rho_1 (g_1 + g_2) + \tau_1 \beta_0 g_{5x}$$
$$\hbar_2 = \left(J - \gamma_1 + \gamma_2 e^{-\tau}\right) g_3 - \beta_1 \tau_1 g_5 + J g_4 - \gamma_2 \tau e^{-\tau} \int_0^1 e^s g_7(x,s) ds$$
$$\hbar_3 = a\tau_1 (g_5 + g_6) + \beta_0 g_{1x} + \beta_1 g_3 + a g_5.$$

Pour résoudre (2.16) on considère

$$B\left((u,\varphi,\theta), \left(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}\right)\right) = L\left(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}\right), \tag{2.17}$$

où $B : \left[H_*^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} B\left((u,\varphi,\theta), \left(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}\right)\right) = & \rho_1 \int_0^1 u\tilde{u} dx + \eta \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + a(\tau_1 + 1)^2 \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx \\ & + \mu * \int_0^1 u_x \widetilde{u_x} dx + a_0 \int_0^1 \varphi_x \widetilde{\varphi_x} dx + \kappa (\tau_1 + 1) \int_0^1 \theta_x \widetilde{\theta_x} dx \\ & + \mu_0 \int_0^1 (\varphi \widetilde{u_x} + u_x \tilde{\varphi}) dx + \beta_0 (\tau_1 + 1) \int_0^1 \left(u_x \tilde{\theta} - \theta \widetilde{u_x}\right) dx \\ & + \beta_1 (\tau_1 + 1) \int_0^1 \left(\varphi \tilde{\theta} - \theta \tilde{\varphi}\right) dx \end{aligned}$$

et $\boldsymbol{L} : \left[\boldsymbol{H}_*^1(0,1) \times \boldsymbol{H}_0^1(0,1) \times \boldsymbol{H}_0^1(0,1) \right] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme linéaire

$$\boldsymbol{L}\left(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}\right) = \int_0^1 \hbar_1 \tilde{u} dx + \int_0^1 \hbar_2 \tilde{\varphi} dx + (\tau + 1) \int_0^1 \hbar_3 \tilde{\theta} dx.$$

Maintenant, pour $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{H}_*^1(0,1) \times \boldsymbol{H}_0^1(0,1) \times \boldsymbol{H}_0^1(0,1)$ équipé de la norme

$$\|(u, \varphi, \theta)\|_V^2 = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2 + \|\theta\|_2^2,$$

On peut facilement voir que $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{F}$ sont bornée. De plus, en utilisant intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
B\left((u, \varphi, \theta), (u, \varphi, \theta)\right) &= \rho_1 \int_0^1 u^2 dx + a(\tau_1 + 1)^2 \int_0^1 \theta^2 dx + a_0 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
&+ k(\tau_1 + 1) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\mu^* \left(u_x + \frac{\mu_0}{\mu_1} \varphi \right)^2 \right. \\
&\left. + \eta \left(\varphi + \frac{\mu_0}{\eta} u_x \right)^2 + \left(\mu^* - \frac{\mu_0^2}{\eta} \right) u_x^2 + \left(\eta - \frac{\mu_0^2}{\mu^*} \right) \varphi^2 \right] dx. \\
&\geq \alpha \|(u, \varphi, \theta)\|_V^2
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
\mu^* u_x^2 + \eta \varphi^2 + 2\mu_0 u_x \varphi &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\mu^* \left(u_x + \frac{\mu_0}{\mu_1} \varphi \right)^2 \right. \\
&\left. + \eta \left(\varphi + \frac{\mu_0}{\eta} u_x \right)^2 + \left(\mu^* - \frac{\mu_0^2}{\eta} \right) u_x^2 + \left(\eta - \frac{\mu_0^2}{\mu^*} \right) \varphi^2 \right] dx.
\end{aligned}$$

et en utilisant le fait $\mu_0^2 < \mu^* \xi$, on a

$$\mu^* u_x^2 + \eta \varphi^2 + 2\mu_0 u_x \varphi > 0.$$

Ensuite, pour un certain $\alpha > 0$. Ainsi, B est coercive. Par conséquent, selon le lemme de Lax-Milgram, le système (2.16) a une solution unique.

$$u \in H_*^1(0,1), \quad \varphi \in H_0^1(0,1), \quad \theta \in H_0^1(0,1).$$

Remplaçant $u, \varphi,$ et θ dans $(2.15)_1$,$(2.15)_3$,$(2.15)_5$et ϕ dans $(2.15)_7$ respectivement, on obtient

$$v \in H_*^1(0,1), \phi \in H_0^1(0,1), \omega \in H_0^1(0,1) \text{ et } z, z_\rho \in L^2\left((0,1), L^2(0,1)\right)$$

Maintenant, pour $\left(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}\right) = (0,0) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$ alors (2.17) se réduit à

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^1 u \tilde{u} dx + \mu^* \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + \mu_0 \int_0^1 \varphi \tilde{u}_x dx - \beta_0 (\tau + 1) \int_0^1 \theta \tilde{u}_x dx \\
= \int_0^1 \hbar_1 \tilde{u} dx, \quad \forall \tilde{u} \in H_*^1(0,1),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ce qui implique

$$\mu^* u_{xx} = -\mu_0 \varphi_x - \beta_0 (\tau + 1) \theta + \rho_1 u - \hbar_1 \in L^2(0,1) \tag{2.19}$$

Par conséquent, d'après la théorie de la régularité elliptique, il s'ensuit que

$$u \in H^2(0,1) \cap H_*^1(0,1)$$

De plus, (2.18) est également vrai pour tout $\Phi \in C^1([0,1]) \subset H_*^1(0,1)$. Par conséquent, on a

$$\mu^* \int_0^1 u_x \Phi dx + \int_0^1 (\mu_0 \varphi_x + \beta_0 (\tau + 1) \theta - \rho_1 u + \hbar_1) \Phi dx = 0$$

pour tout $\Phi \in C^1([0,1])$. Ainsi, en utilisant intégration par partie et en gardant à l'esprit (2.19), on obtient

$$u_x(1) \Phi(1) - u_x(0) \Phi(0) = 0, \quad \forall \Phi \in C^1([0,1]).$$

Ainsi, $u_x(1) = u_x(0) = 0.$ Par conséquent, on obtient

$$u \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1)$$

$\square$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \mu_0 u_x + \eta \varphi + \beta_1 (\tau_1 + 1) \theta - \hbar_2 \in L^2(0,1) \\ \kappa \theta_{xx} &= \beta_0 u_x + a (\tau_1 + 1) \theta - \beta_1 \varphi - \hbar_3 \in L^2(0,1) \end{aligned}$$

ainsi, on a

$$\varphi, \theta \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

Enfin, l'application de la théorie de la régularité pour les équations elliptiques linéaire garantit l'existence d'un unique $U \in D(A)$ tel que (2.14) est satisfait. Par conséquent, A est un opérateur dissipatif. Par conséquent, le résultat du théorème **.9** découle du théorème de de Lumer-Phillips (voir [47, 51]).

CHAPITRE 3

STABILITÉ EXPONENTIELLE

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode énergétique pour prouver que le système (2.6)-(2.7) est exponentiellement stable.

Théorème 10

Soit (u, φ, θ, z) une solution du problème déterminé par système (**2.6**), avec conditions initiales et conditions aux limites (**2.7**). Alors il existe des constantes positives a_1, a_2 telles que

$$E(t) \leq a_1 e^{-a_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

Tout d'abord, nous énonçons et prouvons quelques lemmes techniques nécessaires à la preuve de notre résultat.

Lemme 3

Soit (u, φ, θ, z) une solution de (2.6),(2.7). Alors l'énergie $E(t)$, définie par

$$\begin{aligned} E(t) =& \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\rho_1 u_t^2 + J\varphi_t^2 + a_0 \varphi_x^2 + a(\tau_1\theta_t + \theta)^2 + \tau_1 \kappa \theta_x^2 \\ &+ \left(\xi - \frac{\mu_0}{\mu^*}\right) \varphi^2 + \mu^* \left(\frac{\mu_0}{\mu^*}\varphi + u_x\right)^2 + \frac{\tau|\gamma_2|}{2} \int_0^1 z^2\left(x, \rho, t\right) d\rho \Big) dx \end{aligned}$$

satisfait

$$E'(t) \leq -\kappa \int_0^1 \theta_x^2 dx - (\gamma_1 - |\gamma_2|) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \tag{3.2}$$

Démonstration. Multiplier $(\mathbf{2.6})_1, (\mathbf{2.6})_2, (\mathbf{2.6})_3$ par u_t, φ_t, et $(\tau_1 \theta_t + \theta)$ respectivement, et en intégrant sur $(0, 1)$, en utilisant l'intégration par parties et la condition aux limites, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\rho_1 u_t^2+J\varphi_t^2+a_0\varphi_x^2\right.\\
&\left.+a\left(\tau_1\theta_t+\theta\right)^2+\tau_1\kappa\theta_x^2+\left(\xi-\frac{\mu_0^2}{\mu^*}\right)\varphi^2+\mu^*\left(\frac{\mu_0}{\mu^*}\varphi+u_x\right)^2 dx\right. \qquad (3.3)\\
&=-\gamma_1\int_0^1\varphi_t^2dx-\gamma_2\int_0^1 z\left(x,1,t\right)\varphi_t dx-\kappa\int_0^1\theta_x^2 dx.
\end{aligned}$$

Maintenant, en multipliant l'équation $(2.6)_4$ par $|\gamma_2|z$ et en intégrant sur $(0,1)\times(0,1)$, on obtient.

$$\frac{\tau|\gamma_2|}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1 z^2\left(x,\rho,t\right)d\rho dx=\frac{|\gamma_2|}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx-\frac{|\gamma_2|}{2}\int_0^1 z^2\left(x,1,t\right)dx \qquad (3.4)$$

Une combinaison de (3.3) et (3.4) est donné par

$$\begin{aligned}
&E'(t)=-\gamma_1\int_0^1\varphi_t^2dx-\kappa\int_0^1\theta_x^2dx+\frac{|\gamma_2|}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx-\frac{|\gamma_2|}{2}\int_0^1 z^2\left(x,1,t\right)dx\\
&-\gamma_2\int_0^1 z\left(x,1,t\right)\varphi_t dx \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Pendant ce temps, en utilisant l'inégalité de Young, on a

$$-\gamma_2\int_0^1 z\left(x,1,t\right)\varphi_t dx\leq\frac{\gamma_2}{2}\int_0^1 z^2\left(x,1,t\right)dx+\frac{\gamma_2}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx \qquad (3.6)$$

La substitution d'échantillon de (3.6) dans (3.5) et l'utilisation de $|\gamma_2|<\gamma_1$ donnent (3.2), qui conclut la preuve. □

Lemme 4

Soit (u,φ,θ,z) la solution de (2.6),(2.7). Alors la fonctionnelle

$$F_1(t):=\rho_1\int_0^1 u_t u dx-\beta_0\tau_1\int_0^1\theta u_x dx,\quad t\geq 0.$$

satisfait .

$$F_1'(t)\leq-\frac{\mu^*}{2}\int_0^1 u_x^2dx+c_0\int_0^1\left(\theta_x^2+u_t^2+\varphi^2\right)dx,\quad t\geq 0. \qquad (3.7)$$

Démonstration. En prenant la dérivation de $F1$, en utilisant $(2.2)_1$ et l'intégration par parties, on obtient

$$F_1'(t)=-\mu^*\int_0^1 u_x^2dx+\rho_1\int_0^1 u_t^2dx-\mu_0\int_0^1\varphi u_x dx-\beta_0\int_0^1\theta_x u dx+\beta_0\tau_1\int_0^1 u_t\theta_x dx. \qquad (3.8)$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, l'estimation (3.7) est établie. □

Lemme 5

Soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.6), (2.7). Alors la fonctionnelle

$$F_2(t) := J\int_0^1 \varphi_t \varphi dx - \frac{\beta}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx - \frac{\mu_0 \rho_1}{\mu^*}\int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi(y)dy\right) dx + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx \tag{3.9}$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -a_0 \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 (\tau_1 \theta_t + \theta)^2 dx \\ & + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\gamma_2^2}{2\mu_1}\int_0^1 z^2(x,1,t)\, dx \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\mu_1 = \left(\xi - \frac{\mu_0^2}{\mu^*}\right)$.

Démonstration. Une simple différentiation de F_2, en utilisant $(2.2)_2$, et une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) = & -a_0 \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left(\xi - \frac{\mu_0^2}{\mu^*}\right)\int_0^1 \varphi^2 dx + J\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\beta_1 - \frac{\beta_0 \mu_0}{\mu^*}\right)\int_0^1 (\tau_1\theta_t + \theta)\varphi dx \\ & - \frac{\mu_0\rho_1}{\mu^*}\int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi_t(y)dy\right) dx - \gamma_2 \int_0^1 z(x,1,t)\varphi dx + \beta\int_0^1 \varphi_t \varphi dx. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré avec $\varepsilon_1 \geq 0$, on obtient l'estimation (3.10). □

Lemme 6

Soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.6), (2.7). Alors, la fonctionnelle

$$F_3(t) := -a\int_0^1 \tau_1^2 \theta_t \theta dx - \frac{a\tau_1}{2}\int_0^1 \theta^2 dx.$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_2 \geq 0$,

$$F_3'(t) \leq \frac{-a}{2}\int_0^1 (\tau_1\theta_t + \theta)^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \theta_x^2 dx. \tag{3.11}$$

Démonstration. En différenciant F_3, alors en exploitant la troisième équation dans (2.6) et l'intégration par parties, on obtient

$$F_3'(t) = -a\tau_1^2 \int_0^1 \theta_t^2 dx - \beta_0 \tau_1 \int_0^1 u_t \theta_x dx + \beta_1 \tau_1 \int_0^1 \varphi_t \theta dx + \kappa\tau_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx \tag{3.12}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré avec $\varepsilon_2 \geq 0$, et le fait que

$$-\int_0^1 (\tau_1 \theta_t)^2 dx \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 (\tau_1\theta_t + \theta)^2 dx + \int_0^1 \theta_x^2 dx.$$

on obtient l'estimation (3.11). □

Lemme 7

Soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.6),(2.7). Alors la fonctionnelle

$$F_4(t) := \rho_1 a \int_0^1 \left(\int_0^x u_t dy \right) (\tau_1 \theta_t + \theta)\, dx. \tag{3.13}$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_3 \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_4'(t) \leq & \frac{-\beta_0 \rho_1}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx + c_0 \int_0^1 \varphi^2 dx + c_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + c_0 \int_0^1 \theta_x^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^1 (\tau_1 \theta_t + \theta)^2\, dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Démonstration. Les calculs directs utilisant l'intégration par parties et le fait que

$$\int_0^1 u dy = 0$$

on a

$$\begin{aligned} F_4'(t) = & -\beta_0 \rho_1 \int_0^1 u_t^2 dx + \beta_0 a \int_0^1 (\tau_1 \theta_t + \theta)^2\, dx + \kappa \rho_1 \int_0^1 u_t \theta_x dx \\ & - a\mu^* \int_0^1 u_x (\tau_1 \theta_t + \theta)\, dx - \mu_0 a \int_0^1 \varphi (\tau_1 \theta_t + \theta)\, dx + \beta_1 \rho_1 \int_0^1 \left(\int_0^x u_t dy \right) \varphi_t dx. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré avec $\varepsilon_3 \geq 0$, on obtient l'estimation (3.14). □

Lemme 8

Soit (u, φ, θ, z) la solution de (2.6), (2.7). Alors la fonctionnelle

$$F_5(t) := \tau \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2 (x, \rho, t)\, d\rho dx.$$

satisfait, pour une constante positive m,

$$F_5'(t) \leq -m \left(\int_0^1 z^2 (x, 1, t)\, dx + \tau \int_0^1 \int_0^1 z^2 (x, \rho, t)\, d\rho dx \right) + \int_0^1 |\varphi_t|^2 dx. \tag{3.15}$$

Démonstration. En différenciant F_5 et en utilisant la quatrième équation dans (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} F_5'(t) = & -2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau\rho} z (x, \rho, t)\, z_\rho (x, \rho, t)\, d\rho dx \\ = & -\frac{d}{d\rho} \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2 (x, \rho, t)\, d\rho dx - \tau \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2 (x, \rho, t)\, d\rho dx \\ = & -\int_0^1 \left(e^{-\tau} z^2 (x, 1, t) - z^2 (x, 0, t) \right) dx - \tau \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2 (x, \rho, t)\, d\rho dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $z(x, 0, t) = \varphi_t (x, t)$ et $e^{-\tau} \leq e^{-\tau\rho} \leq 1, \quad \forall \rho \in [0, 1]$, on a

$$F_5'(t) = e^{-\tau} \left(\int_0^1 z^2 (x, 1, t)\, dx + \tau \int_0^1 \int_0^1 z^2 (x, \rho, t)\, d\rho dx \right) + \int_0^1 |\varphi_t|^2 dx$$

posons $m = e^{-\tau}$ donne (3.15). □

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et à prouver le résultat de stabilité exponentielle suivant.

Lemme 9

pour N suffisamment grand, la fonctionnelle définie par

$$\ell(t) := NE(t) + N_1F_1(t) + N_2F_2(t) + N_3F_3(t) + N_4F_4(t) + N_5F_5(t) \tag{3.16}$$

où N_1 à N_5 sont des nombres réels positifs à choisir de manière appropriée ultérieurement, satisfait

$$b_1E(t) \leq \ell(t) \leq b_2E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.17}$$

pour deux constantes positives b_1 et b_2

Démonstration. On a

$$|\ell(t) - NE(t)| \leq N_1|F_1(t)| + N_2|F_2(t)| + N_3|F_3(t)| + N_4|F_4(t)| + N_5|F_5(t)|.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Young et Poincaré, on a

$$\begin{aligned}|\ell(t) - NE(t)| \leq & c\int_0^1 \left(u_t^2 + \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + (\tau_1\theta_t + \theta)^2 + \theta_x^2 + \varphi^2 + (\varphi + u_x)^2\right) dx \\ & + \int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx. \\ & \leq CE(t).\end{aligned}$$

Cela implique

$$(N - c)\, E(t) \leq \ell(t) \leq (N + c)\, E(t).$$

En choisissant N assez grand, on obtient l'estimation (3.17)

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et prouver le résultat principal de cette section. Par dérivation de (3.16) et rappelons (3.7), (3.10), (3.11), (3.14) et (3.15) on a

$$\begin{aligned}\ell'(t) \leq & -\left[N\kappa - N_1c_0 - N_3c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) - N_4c_0\right]\int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & - \left[N(\gamma_1 - |\gamma_2|) - N_2c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - N_3c_0 - N_4c_0\right]\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & - \left[N_1\frac{\mu^*}{2} - N_4\varepsilon_3\right]\int_0^1 u_x^2 dx - \left[N_2\frac{\mu_1}{2} - N_1c_0 - N_4c_0\right]\int_0^1 \varphi^2 dx \\ & - N_2a_0\int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left[N_4\frac{\beta_0\rho_1}{2} - N_1c_0 - N_2\varepsilon_1 - N_3\varepsilon_2 - N_5\right]\int_0^1 u_t^2 dx \\ & - \left[N_3\frac{a}{2} - N_2c_0 - N_4c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\right]\int_0^1 (\tau_1\theta_t + \theta)^2 dx \\ & - \left[N_2\frac{\gamma_2^2}{2\mu_1} - N_5m\right]\int_0^1 z^2(x,1,t)\, dx - N_5m\tau\int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx\end{aligned}$$

Maintenant ; soit $\varepsilon_1 = \frac{\beta_0\rho_1}{8}\frac{N_4}{N_2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\beta_0\rho_1}{4}\frac{N_4}{N_3}, \varepsilon_3 = \frac{\mu_*}{4}\frac{N_1}{N_4}$ et $m = e^{-\tau}$, on finit par

$$\begin{aligned}
\ell'(t) \leq & -\left[N\kappa - N_1c_0 - N_3c_0\left(1+\frac{4N_3}{\beta_0\rho_1N_4}\right) - N_4c_0\right]\int_0^1 \theta_x^2dx \\
& - \left[N\left(\gamma_1 - |\gamma_2|\right) - N_2c_0\left(1+\frac{8N_2}{\beta_0\rho_1N_4}\right) - N_3c_0 - N_4c_0\right]\int_0^1 \varphi_t^2dx \\
& - N_1\frac{\mu^*}{4}\int_0^1 u_x^2dx - \left[N_2\frac{\mu_1}{2} - N_1c_0 - N_4c_0\right]\int_0^1 \varphi^2dx \\
& - N_2a_0\int_0^1 \varphi_x^2dx - \left[N_4\frac{\beta_0\rho_1}{8} - N_1c_0\right]\int_0^1 u_t^2dx \\
& - \left[N_3\frac{a}{2} - N_2c_0 - N_4c_0\left(1+\frac{4N_4}{\mu^*N_1}\right)\right]\int_0^1 \left(\tau_1\theta_t + \theta\right)^2dx \\
& - \left[N_2\frac{\gamma_2^2}{2} - N_5m\right]\int_0^1 z^2\left(x,1,t\right)dx - N_5m\tau\int_0^1\int_0^1 z^2\left(x,\rho,t\right)d\rho dx.
\end{aligned}$$

Dans ce point, on choisissons N_4 suffisamment grand pour que

$$N_4\frac{\beta_0\rho_1}{8} - N_1c_0 > 0,$$

alors, on choisit N_2 assez grand pour que

$$\begin{aligned}
& N_2\frac{\mu_1}{2} - N_1c_0 - N_4c_0 > 0, \\
& N_2\frac{\gamma_2^2}{2\mu_1} - N_5m > 0,
\end{aligned}$$

de même, nous choisissons N_3 assez grand pour que

$$N_3\frac{a}{2} - N_2c_0 - N_4c_0\left(1+\frac{4N_4}{\mu^*N_1}\right) > 0,$$

Enfin, on choisit N assez grand pour que (3.17) reste valide et

$$\begin{aligned}
& N\kappa - N_1c_0 - N_3c_0\left(1+\frac{4N_3}{\beta_0\rho_1N_4}\right) - N_4c_0 > 0, \\
& N\left(\gamma_1 - |\gamma_2|\right) - N_2c_0\left(1+\frac{8N_2}{\beta_0\rho_1N_4}\right) - N_3c_0 - N_4c_0 > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on arrive à

$$\begin{aligned}
\ell'(t) \leq & -\lambda_1\int_0^1 \left(u_t^2 + u_x^2 + \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \varphi^2 + \theta_x^2 + \left(\tau_1\theta_t + \theta\right)^2 + z^2\left(x,1,t\right)\right. \\
& + \int_0^1 z^2\left(x,\rho,t\right)d\rho dx \\
\leq & -\lambda_2E(t).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où λ_1, λ_2 sont des constantes positives. Ayant à l'esprit la remarque sur l'équivalence de $E(t)$ et $\ell'(t)$ on en déduisons que

$$\ell'(t) \leq -\alpha_1\ell(t), \quad t > 0 \tag{3.19}$$

où $\alpha_1 = \frac{\lambda_2}{b_2} > 0.$ Une simple intégration de (3.19) donne

$$\ell(t) \leq \ell(0)e^{-\alpha_1 t}, \quad t > 0$$

qui donne le résultat souhaité (3.1) en utilisant à nouveau la relation d'équivalence. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. A .Apalara, *"On the stability of porous-elastic system with microtemperatures"*, J. Therm. Stresses, vol. 42, no. 2, 2019, 265-278.

[2] L. Bouzettouta, A. Djebabla, Exponential stabilization of the full von Kármán beam by a thermal effect and a frictional damping and distributed delay. J Math Phys. 2019 ;60 :041506. DOI :10.1063/1.5043615.

[3] H. Brézis, *"Analyse fonctionnelle :théorie et application"*, Dunod, PARIS- France, (1999). .

[4] S. Chiriță, M. Ciarletta and C. D'Apice, *"On the theory of thermoelasticity with microtemperatures"*, J. Math. Anal. Appl., vol. 397, no. 1, 2013, 349-361.

[5] P. S. Casas, and R. Quintanilla, *"Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures"*, J. Eng. Sci., vol. 43, 2005, no. 1-2, 33-47. .

[6] T. Cazenave, A. Hareaux, *"Introduction aux Problèmes d' évolution semi-linéaire"*, Ellipses,société de mathématiques appliques et industrielles. .

[7] S. C. Cowin, *"The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids"*, Elasticity, vol. 15, no. 2, 185-191, 1985. DOI :10.1007/BF00041992.

[8] S. C. Cowin, J. W. Nunziato, *"Linear elastic materials with voids"*, J. Elasticity, vol. 13, 1983, no. 2, 125-147.

[9] M. A. Goodman, and S. C. Cowin, *"A continuum theory for granular materials"*, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 44, no. 4, 1972, 249-266.

[10] M. Hachel, A. Djebabla, N. Tatar, *"On the decay of the energy for linear thermoelastic systems by thermal and microtemperature effects"*, Eurasian J. Math. Comput. Appl., 2018, vol. 6, 2018 , 29-37.

[11] D. Ieşan and R. Quintanilla, *"A theory of porous thermoviscoelastic mixtures"*, J. Thermal Stresses, vol. 30, no. 7, 2007, 693-714. .

[12] D. Iesan, *"Thermoelastic Models of Continua"*, Dordrecht : Springer, 2004.

[13] D. Ieşan, *"On a theory of micromorphic elastic solids with microtemperatures"*, J. Thermal Stresses, vol. 24, no. 8, 2001, 737-752.

[14] D. Ieşan, R. Quintanilla, *"On a theory of thermoelasticity with microtemperatures"*, J.Thermal Stresses, vol. 23, no. 3, 2000, 199-215.

[15] D. Ieşan, *"A theory of thermoelastic materials with voids"*, Acta Mech., vol. 60, no. 1-2, 1986, 67-89.

[16] H. E. Khochemane, L. Bouzettouta and A. Guerouah, Exponential decay and well-posedness for a one-dimensional porous-elastic system with distributed delay, Applicable Analysis, 10.1080/00036811.2019.1703958.

[17] H. E. Khochemane, L. Bouzettouta and S. Zitouni, General decay of a nonlinear damping porous-elastic system with past history, Annali dell'universita' di ferrara, 65(2) (2019), 249–275.

[18] Z. Liu, S. Zheng, *"Semigroups Associated with Dissipative Systems"*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 1999. .

[19] A. Magaña, and R. Quintanilla, *"On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials"*, Int. J. Solids Struct., vol. 43, 2006, 11-12, 3414-3427.

[20] M. I. Mustafa, *" A uniform stability result for thermoelasticity of type III with boundary distributed delay"*, J. Abstr. Diff. Equa. Appl., 2 (1) (2014), 1–13. .

[21] M. I. Mustafa, M. Kafini, *" Exponential decay in thermoelastic systems with internal distributed delay"*, Palestine J. Math. 2 (2), 287-299 (2013).

[22] A. S. Nicaise, C. Pignotti ; *"Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay"*, Diff. Int. Equs. 21 (9-10) (2008), 935-958.

[23] S. Nicaise, C. Pignotti, *" Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks"*, SIAM J. Control Optim., 45 (5) (2006), 1561–1585. .

[24] A. Pazy. *"Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations"*, Applied Math. Sciences, Springer-Verlag, New York, 44, 1983.

[25] Chandrasekharaiah, D. S. ; *Thermoelasticity with second sound : a review,* Appl. Mech. Rev., 39 (3), 355–376 (1986).

[26] Chandrasekharaiah, D. S. ; *Hyperbolic thermoelasticity : a review of recent literature,* Appl. Mech. Rev., 51 (12), 705–729 (1998).

[27] Coleman, B. D. ; Hrusa, W. J. ; Owen D. R. ; *Stability of equilibrium for a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound in solids,* Arch. Rational Mech. Anal. 94, 267–289 (1986).

[28] Datko, R. ; Lagnese, J. ; Polis, M. P. ; *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations,* SIAM J. Control Optim. 24 (1), 152–156 (1986).

[29] Messaoudi, S. A. ; Said-Houari, B. ; *Exponential stability in one-dimensional non-llinear ther- moelasticity with second sound,* Math. Meth. Appl. sci., 28 (2), 205-232 (2005).

[30] Racke, R. ; *Thermoelasticity with second sound–exponential stability in linear and nonlinear 1-d,* Math. Meth. Appl. Sci., 25 (5), 409–441 (2002).

[31] Racke, R. ; *Instability of coupled systems with delay,* Comm. Pure, Appl. Anal., 11 (5), (2012).

[32] Richard, J. P. ; *Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems, Automatica,* 39 (10), 1667–1694 (2003).

[33] Beuter, A. ; B élair, J. ; Labrie, C. ; *Feedback and delays in neurological diseases : a modeling study using dynamical systems,* Bull. Math. Bio., 55 (3), 525-541 (1993).

[34] Abdallah, C. ; Dorato, P. ; Benitez-Read, J. ; Byrne, R. ; *Delayed positive feedback can stabilize oscillatory system,* ACC. San Francisco, 3106–3107 (1993).

[35] Joseph, D. D. ; Preziosi, L. ; *Heat waves,* Reviews of Modern Physics 61 (1), 41–73 (1989).

[36] Tarabek, M. A. ; *On the existence of smooth solutions in one-dimensional nonlinear ther- moelasticity with second sound,* Quart. Appl. Math. 50 (4), 727–742 (1992).

[37] Aouadi, M., Ciarletta, M., Passarella, F. : Thermoelastic theory with microtemperatures and dissipative thermodynamics. J. Thermal Stress. 41, 522-542 (2018)

[38] Bazarra N, Fernández JR and Quintanilla R, Lord-Shulman thermoelasticity with microtemperatures. Appl Math Optim. (2020)

[39] Bouzettouta, L., et al. "Well-posedness and decay of solutions to Bresse system with internal distributed delay." Int. J. Appl. Math. Stat 56.4 (2017) : 1-12.

[40] Boudeliou, Marwa, Hamed Abderrahamne Bouraoui, and Abdelhak Djebabla. On the stability of Lord Shulman thermoelastic system with porous damping. (2022).

[41] Cattaneo, C. : On a form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, C. R. Acad. Sci. Paris 247 (1958) 431 ?433

[42] H. W. Lord, Y. Shulman, A generalized dynamical theory of thermoelasticity, J. Mech. Phys. Solids 15 (1967) 299 ?309

[43] Casas, P., Quintanilla, R. : Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures. Int. J. Eng. Sci. 43, 33 ?47 (2005)

[44] Eringen, A.C. : Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids. Springer, New York (1999)

[45] Grot, R. : Thermodynamics of a continuum with microstructure. Int. J. Eng. Sci. 7, 801 ?814 (1969)

[46] Khochemane, Houssem Eddine, Lamine Bouzettouta, and Amin Guerouah. "Exponential decay and well-posedness for a one-dimensional porous-elastic system with distributed delay." Applicable Analysis 100.14 (2021) : 2950-2964.

[47] Liu, Z ; Zheng, S. ; Semigroups Associated with Dissipative Systems, Chapman Hall/-CRC : Boca, Raton, (1999).

[48] Magaña, A., Quintanilla, R. : Exponential stability in type III thermoelasticity with microtemperatures. ZAMP Z. Angew. Math. Phys. 69(5), 129(1) ?129(8) (2018)

[49] NICAISE, Serge et PIGNOTTI, Cristina. Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. Differential and Integral Equations, 2008, vol. 21, no 9-10, p. 935-958.

[50] NICAISE, Serge et PIGNOTTI, Cristina. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, vol. 45, no 5, p. 1561-1585.

[51] Pazy, A. ; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag : New York, (1983)

[52] Riha, P. : On the theory of heat-conducting micropolar fluids with microtemperatures. Acta Mech. 23, 1-8 (1975)

[53] SAID-HOUARI, Belkacem et LASKRI, Yamina. A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback. Applied Mathematics and Computation, 2010, vol. 217, no 6, p. 2857-2869.

[54] Santos, M.L., Campelo, A.D.S., Almeida Júnior, D.S. : On the decay rates of porous elastic systems. J. Elast. 127, 79 ?101 (2017).

[55] XU, Gen Qi, YUNG, Siu Pang, et LI, Leong Kwan. Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control. ESAIM : Control, optimisation and calculus of variations, 2006, vol. 12, no 4, p. 770-785.