

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2021/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Méthodes de régularisation pour une classe de problèmes
mal posés**

Option : AFA

Par :

1. BOULOUMA Hadjer

Encadré par : KHELILI Besma

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Settara Loubna

MCB U. SKIKDA

Examineur: Belyacine Zahia

MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955-SKIKDA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER en Mathématiques

Par

BOULOUMA Hadjer

Directeur de Mémoire : KHELILI Besma

Méthodes de régularisation pour une classe de problèmes inverses mal posés

Jury :

SETTARA Loubna	Président	M.C.B	Univ.Skikda
Khelili Besma	Rapporteur	M.C.B	Univ.Skikda
Belyacine Zahia	Examineur	M.C.B	Univ.Skikda

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon Dieu Allah qui m'a donné la volonté et la force et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce rapport dans les conditions les plus favorables, en particulier j'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur Khelili Besma de m'avoir proposé ce sujet passionnant. Je le remercie vivement pour les heures d'encadrement qu'il m'a accordées et les remarques constructives qui m'ont été précieuses qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens également à remercier les membres de jury, d'avoir accepté de relire mon manuscrit et d'y consacrer une partie de leur temps.

Dédicace

Merci pour ce que nous sommes

Je dédie ce travail A l'homme que ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et bonheur , qui n'ajamais cessé de me soutenir , mon père **BOUKHEMIS**.

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur ,a vie maman que j'adore **BOUSSELIYOU RABIA**.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, mes frères et mes soeurs **AHMED, AYOUB, YACINE, CHAHER EDDIN, YASSMINA , NADIA , HAKIMA , ASMA** je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides et encouragements.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encoure , qui étaient toujours à mes côtés , et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures , mes aimables amis, collègues d'étude et frères de coeur toi **LOUBNA, MARWA, CHAIMA, KHADIJA**.

Merci à tous le monde

Résumé

Dans le présent mémoire, on traite deux classes de problèmes mal posés au sens de Hadamard. Pour neutraliser le caractère d'instabilité, des méthodes de régularisation sont proposées afin qu'on puisse tirer des informations significatives de ces modèles.

La première classe, est consacrée à l'étude d'un problème inverse qui consiste à l'identification de source dans l'équation de la chaleur posé sur une géométrie borné. En se basant sur la méthode de régularisation des conditions aux limites auxiliaires (Q.B.V. method), on construit une approximation de la solution et on établit certaines estimations d'erreurs.

Dans la deuxième classe on étudie un problème parabolique mal posé. En utilisant la méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée, on régularise le problème et on établit certains résultats de convergence.

Mots clés : *Problèmes inverses, Problèmes mal-posés, régularisation, méthode des conditions auxiliaires, la méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée.*

Abstract

In the present memory we investigate two classes of ill posed problems in the sense of Hadamard. To neutralize the instability character, regularization methods are proposed in order to be able to derive meaningful information from these models.

In the first class, we study the inverse problem of determining an unknown source in the heat equation posed on a bounded geometry. The quasi-boundary value method is proposed in order to construct an approximate solution and to establish error estimates.

In the second class, we study an ill-posed parabolic problem. By Using the simplified Tikhonov regularization method, we regularize the problem and we establish some convergence results.

Key words: *Inverse problems, ill-posed problems, regularization, quasi-boundary value method, the simplified Tikhonov regularization method.*

ملخص

تهدف هذه المذكرة الى دراسة فئتين من المشاكل المطروحة بشكل سيء بمفهوم هادا مار . من اجل استخلاص معلومات ذات معنى من هذه المسائل نقوم باقتراح طرق تعديل تمكننا من تغيير طبيعتهم السيئة الطرح والحصول على حلول تقريبية ومنتزعة للحلول الأصلية لهذه المشاكل. الصنف الأول هو مسألة عكسية نهتم فيها بتحديد المصدر في معادلة الحرارة المطروحة على هندسة محدودة. بالارتكاز على طريقة القيم الحدية المضافة من أجل انشاء حلا مقربا للمسألة المطروحة واستخلاص بعض تقديرات الأخطاء الناتجة عن استعمال الطريقة. في الصنف الثاني نقوم بدراسة مشكلة القطع المكافئ التي تم طرحها بشكل سيئ باستعمال طريقة تنظيم ثيخونوف المبسطة، نقوم بتسوية المشكلة ووضع بعض نتائج التقارب.

الكلمات المفتاحية. إشكاليات عكسية، إشكالية سيئة الطرح، التسوية، طريقة القيم الحدية المضافة، طريقة تنظيم ثيخونوف المبسطة.

Table des matières

Introduction	1
0.1 Problématique	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	4
1.1 Eléments de la théorie spectrale	4
1.1.1 Propriétés des espaces de Hilbert :	5
1.1.2 Base Hilbertienne	5
1.1.3 Opérateur linéaire :	6
1.2 Opérateur linéaire borné	7
1.3 Le spectre et résolvante d'un opérateur	9
1.3.1 Le spectre d'un opérateur non borné	10
1.4 Opérateur Compact	10
1.5 Décomposition spectrale des Opérateurs auto-adjoint	11
1.6 Théorie de Riez-Fredholm	12
1.6.1 Diagonalisation de l'opérateur auto-adjoint compact	12
1.6.2 Famille spectrale et résolution de l'identité	13
1.7 Les propriétés spectrale des opérateurs auto-adjoint	13
1.7.1 L'adjoint d'un Opérateur	14
2 Problèmes inverses et problèmes mal posé et théorie de la régularisation	15
2.1 Problème inverse et problème mal posé	15
2.2 Problème direct et problème inverses en EDP	15
2.2.1 Exemples des problèmes mal posés	16
2.2.2 Décomposition en valeur singulière (dimension infinie) :	21

2.3	La théorie de régularisation :	22
2.3.1	<i>La méthode de Tikhonov</i> :	24
3	La méthode de régularisation des conditions aux limites auxiliaires	33
3.1	Formulation du problème	33
3.2	Analyse du problème	34
3.2.1	Caractère mal-posé du problème inverse	34
3.2.2	Quelques résultats auxiliaires	36
3.3	La méthode de régularisation des conditions aux limites auxiliaires et l'esti- mation d'erreur	38
4	La méthode de régularisation de Tikhonov simpli- fiée	43
4.1	Formulation du problème	43
4.2	Quelques résultats auxiliaires :	43
4.3	La méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée . . .	48
	Conclusion	53

Introduction

0.1 Problématique

Problèmes mal-posés

En 1923, le mathématicien français J. HADAMARD a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [20]. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique¹ mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Dans ce même livre J. HADAMARD laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. PETROVSKY²) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique [28].

Par la suite on considéra longtemps que les problèmes ne vérifiant pas les conditions citées ci-dessus n'ont pas de valeur pratique et ne peuvent modéliser de manière correcte un phénomène physique. Pour cette classe, on parla de problèmes mal posés [39]. L'opinion de Hadamard s'avéra inexacte et on sait maintenant que beaucoup de problèmes à caractère théorique ou d'ordre pratique mènent dans leur résolution à des problèmes mal-posés et ceci explique l'intérêt grandissant pour cette classe de problèmes [39]. Un problème mal-posé est donc un problème pour lequel l'une au moins des trois conditions n'est pas vérifiée ; mais la plus grande difficulté réside dans la non satisfaction de la troisième condition. Il s'agit donc de problèmes pour lesquels une légère perturbation des données peut provoquer un changement important de la solution [39].

Les problèmes mal-posés apparaissent dans de nombreuses branches de la science et d'ingénieurs comme des problèmes géophysiques, le problème du corps supersonique, le contrôle

¹J.HADAMARD, Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs, Yale University Press, New Haven (1923).

²I.G. PETROVSKY, Lecture on Partial Differential Equations, New York : International Publishers (1954).

non destructif, la corrosion, l'imagerie médicale, traitement d'images, et d'autres domaines pratiques. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posés de certains problèmes pratiques est reconnu et se manifeste dans une classe de problème très large classe de problèmes, dite "Problèmes inverses"³, et motive de nombreuses recherches en mathématiques [26],[6].

PROBLÈMES INVERSES

Les problèmes inverses sont un domaine trop vaste pour que nous puissions en donner un exposé exhaustif. D'après J.B Keller un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de l'autre appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

RÉGULARISATION

En mathématique, la régularisation est une procédure qui consiste à modifier un problème non régulier par une autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés rendant son étude théorique et numérique plus faciles.[35]

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains problème mal posés de Hadamard. Parmi citer :

- **La méthode itérative alternative** : Initialement proposée par Kozlov et al.[31] : Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes bien-posé dont la solution converge, pour des données appartenant à certaines classes admissibles, vers la solution du problème original.
- **La méthode de quasi-réversibilité** : Initialement introduite par Lattés & Lions (1969) [36] consiste à transformer le problème de Cauchy mal-posé d'ordre 2 en un problème bien-posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre (terme de correction). Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre quelque problème inverse elliptique, notamment Kilbanov & Santosa [32] et plus récemment Bourgeois [4].
- **La méthode de régularisation de Tikhonov** [45] : est la méthode de régularisation la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original mal-posé en un problème de minimisation.
- **La méthode de régularisation par les condition aux limites auxiliaires (Q.B.V.methode)** :

³Un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

a été introduite par Abdulkerimov [3]. L'idée dans Cette méthode est de remplacer le problème mal-posé par un problème bien posé, où on perturber la condition finale en la remplacent par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre α . A été utilisée par plusieurs auteurs dont D.N. Hào, V.D. Nguyen and H. Sahli [21], Samariski [42].

Le but de ce travail est d'étudier quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problèmes mal-posés.

Le mémoire est composé d'une introduction et quatre chapitres. Dans l'introduction on décrit les motivations et les objectifs de l'étude abordée, on développe la problématique, et on donne une description détaillée du mémoire.

Le premier chapitre : est consacré à la présentation des concepts de base ainsi que le rappel des outils d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'étude proposée comme la théorie spectrale des opérateurs linéaires et la théorie de Riesz-Fredholm, semi groupe.

Dans le deuxième chapitre : On introduit les notions de problème mal posé et de problème inverse, avec une illustration de quelques exemples de problèmes mal posés. Par la suite, on suit une stratégie de régularisation.

Dans le troisième chapitre : On traite un problème inverse d'identification de source, défini sur une géométrie non bornée. On montre tout d'abord que le problème est mal-posé. Pour stabiliser le caractère mal posé du problème considéré, on adopte la méthode des conditions aux limites auxiliaires. On démontre la convergence des solutions régularisées produite par cette méthode, et on établit aussi quelques estimations d'erreur sous certaines conditions de régularité de la solution du problème original.

Quant au chapitre quatre : Il est consacré à l'étude d'un problème inverse d'identification de source à partir de données pour l'équation de la chaleur. Pour régulariser le problème proposé, on utilise la méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée, qui nous permet de construire une solution approchée stable.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Éléments de la théorie spectrale

Définition 1.1.1 [25] [48] [47] Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} . Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}^+ telle :

1. $\forall x \in E$ $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\|\alpha x\|_E = |\alpha| \cdot \|x\|_E$;
3. $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\|_E + \|y\|_E$;

Un tel espace E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est dit espace vectoriel normé

Définition 1.1.2 [25] [48] [47] Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} . Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{k} telle que pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2$, on a :

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Théorème 1.1.1 [25] [48] [47] Dans un espace préhilbertien E , l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.1.3 [25] [48] [47] *Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

1.1.1 Propriétés des espaces de Hilbert :

Proposition 1.1.1 [25] [48] [47] *Inégalité de Cauchy Sharwtz*

Pour $(x, y) \in H^2$ on a l'inégalité :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H$$

Proposition 1.1.2 [25] [48] [47] *(Identité du parallélogramme). La norme induite par un produit scalaire satisfait l'égalité*

$$\text{pour } (x, y) \in H^2 \quad \|x + y\|_H^2 + \|x - y\|_H^2 = 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2)$$

Théorème 1.1.2 [25] [48] [47] *(de projection)*

Soit F une partie non-vide convexe fermée d'un espace de Hilbert H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe $x_0 \in F$ unique tel que

$$\|x - x_0\|_E = \inf \{\|x - a\|, a \in F\}$$

le point x_0 s'appelle la projection de x sur F .

1.1.2 Base Hilbertienne

Définition 1.1.4 [25] [48] [47] *On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert, toute suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :*

1. $\|e_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$

$$2. \langle e_n, e_m \rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m$$

L'espace vectoriel engendré par cette base est dense dans H . Alors, tout élément $u \in H$, s'écrit

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n.$$

Convergence

Définition 1.1.5 [25] [48] [47] On considère une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace normé E . On dit que

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fortement converge vers $x \in X$. si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. De Cauchy si $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ lorsque $n, m \rightarrow +\infty$.

Définition 1.1.6 [25] [48] [47] un espace normé E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

1.1.3 Opérateur linéaire :

Définition 1.1.7 [25] [48] [47] Soient E, F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{k} . On dit que l'application ou l'opérateur $A : E \mapsto F$ est linéaire si :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}, \quad A(x + y) &= Ax + Ay \\ A(\alpha x) &= \alpha Ax. \end{aligned}$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et $A(0) = 0$

cas particulier :

si A est bijectif alors, A est isomorphisme

si $E = F$ alors, A est endomorphisme de E

si A est isomorphisme de E dans E alors A est automorphisme

si $F = \mathbb{k}$ alors, A est une forme linéaire sur E .

On a pour tout opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ tel que $D(A)$ est le domaine de définition de l'opérateur A on note :

$$\begin{aligned} G(A) &= \{(x, Ax), x \in D(A)\} \text{ le graphe de } A \\ N(A) &= \{x \in D(A), Ax = 0\} \text{ Noyaux de } A \\ \text{Im}(A) &= \{\forall y \in F, \exists x \in D(A), y = Ax\} \text{ Image de } A. \end{aligned}$$

1.2 Opérateur linéaire borné

Soient H_1, H_2 deux espaces vectoriels normés et $A : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur linéaire, le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.2.1 [25] [48] [47] *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. A est continu.
2. A est continu en 0.
3. $\exists c > 0$ tel que $\|Ax\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in E$.

un opérateur A est linéaire continu d'un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 est une application linéaire continue de H_1 dans H_2 c'est -à-dire qui vérifie :

1. $\forall x \in H_1, Ax \in H_2$
2. $\forall (x, y) \in H_1 \times H_1, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$
3. $\exists c > 0, \forall x \in H_1 \quad \|Ax\|_{H_2} \leq c \|x\|_{H_1}$

le plus petite nombre c qui vérifie le 3^{ème} point ci -dessus s'appelle La norme de l'opérateur A

$$\|A\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_{H_2}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_{H_2}$$

$$\|A\| = \inf \{c > 0, \forall x \in H_1 \quad \|Ax\|_{H_2} \leq c \|x\|_{H_1}\}$$

Théorème 1.2.2 (De Riesz)[25] [48] [47] Soit $\varphi : H_1 \longrightarrow \mathbb{k}$ une forme linéaire continue, il existe un unique vecteur $x_0 \in H_1$ tel que :

$$\varphi(x) = \langle x_0, x \rangle, \quad \forall x \in H_1$$

Théorème 1.2.3 (Théorème des isomorphismes de Banach)[25] [48] [47]

Toute application bijectif linéaire continue $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible.

Opérateur non borné

Un opérateur non borné est une application linéaire $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$, où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de H_1 .

Définition 1.2.1 [25] [48] [47] Un opérateur non borné A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$. i.e ;

pour toute suite $(u_n) \subset D(A)$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2 alors $u \in D(A)$ et $v = Au$.

L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $D(A)$ muni de la norme du graphe ($\|u\|_G = \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$) dans H_1 .

Théorème 1.2.4 [25] [48] [47] (Théorème du graphe fermé) Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1 , alors A est borné.

(A fermé et $D(A) = H_1$ alors A est borné).

1.3 Le spectre et résolvante d'un opérateur

Définition 1.3.1 [25] [48] [47] Soit $A \in L(E)$

1. On appelle spectre de A , l'ensemble

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}, (\lambda I - A) \text{ non inversible}\}$$

tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

Le rayon spectrale de A noté $r(A)$, est défini par :

$$r(A) = \sup \{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

2. Le premier sous-ensemble important du spectre est le spectre ponctuel

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}, (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif}\}$$

3. On appelle spectre continue de A l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}, (\lambda I - A) \text{ est injectif et } \text{Im}(\lambda I - A) \text{ est dense dans } E\}$$

4. On appelle spectre résiduel de A l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}, (\lambda I - A) \text{ est injectif, } \text{Im}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } E\}$$

et on a $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

5. On appelle l'ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{k}, (\lambda I - A) \text{ inversible}\}$$

$$\sigma(A) = \mathbb{k} \setminus \rho(A)$$

si $\lambda \in \rho(A)$, Alors on note $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L(E)$ la résolvante de A .

1.3.1 Le spectre d'un opérateur non borné

Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$. Un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense

On appelle ensemble résolvant de A

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid A_\lambda = \lambda I - A \text{ bijectif}\}$$

Le spectre de A c'est le complémentaire dans le plan complexe $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

-si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda, A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace est fermé. Cette opérateur est appelle la résolvante de A .

- $\rho(A)$ est ouvert du plan complexe et le spectre $\sigma(A)$ fermé.

-La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite Identité de la résolvante

$$R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A).$$

1.4 Opérateur Compact

Dans cette section on suppose que E et F deux espaces de Banach.

On dit qu'un opérateur $T \in L(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte.

On désigne par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E, E)$.

L'ensemble $K(E, F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $L(E, F)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L(E, F)}$.

soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'opérateur continue de rang finis de E dans F et soit $T \in L(E, F)$ tel que :

$$\|T_n - T\|_{L(E, F)} \longrightarrow 0 \text{ alors } T \in K(E, F)$$

tout opérateur de rang fini est compact.

Théorème 1.4.1 [25] [48] [47] (Schauder)

Si $T \in K(E, F)$ Alors $T^* \in K(F, E)$ et réciproquement

Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble **compact** et : $\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|]$.

soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert.

1. Si $A_1 \in L(H_1, H_2)$ et compact et $A_2 \in L(H_2, H_3)$ Alors $A_2 A_1 \in L(H_1, H_3)$ est compact.
2. Si $A_1 \in L(H_1, H_2)$ et $A_2 \in L(H_2, H_3)$ et compact Alors $A_2 A_1 \in L(H_1, H_3)$ est compact.
3. Si $A_1 \in L(H_1, H_2)$ et compact et $A^* \in L(H_1, H_2)$ est aussi compact.

soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateur compact de H_1 dans H_2 , si A_n converge vers A dans $L(H_1, H_2)$ c'est-à-dire

$$\|A_n - A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|A_n u - A u\|_{H_2}}{\|u\|_{H_1}} \longrightarrow 0$$

Alors A est compact.

soit A un opérateur compact de H_1 dans H_2 ou H_1, H_2 deux espaces de Hilbert qui ne sont pas de dimension finie alors A n'est jamais inversible dans $L(H_1, H_2)$.

1.5 Décomposition spectrale des Opérateurs auto-adjoint

Dans cette section A désigne un opérateur auto-adjoint compact dans H .

On commence par rappeler le théorie spectrale pour les opérateurs auto-adjoint en dimension finie.

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto adjoint, si H est de dimension finie Alors :

1. Le sous espaces $\ker(\lambda I - A)$, où $\lambda \in \sigma(A)$ sont deux à deux orthogonaux.
2. A admet la décomposition spectrale suivante :

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \ker(\lambda I - A).$$

3. A est diagonalisable dans une base orthogonale et

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda p_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \lambda p_\lambda$$

où p_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda I - A)$.

On caractérise dans ce lemme la norme d'un opérateur auto-adjoint compact .

Lemme 1.5.1 [25] [48] [47] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact Alors

$$\|A\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Théorème 1.5.1 (Décomposition Spectrale)[7] [48] [47]

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto adjoint compact, si H est séparable, Alors il admet une base Hilbertienne formé de vecteur propre de A .

Autrement dit, A est diagonalisable dans une base Hilbertienne.

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto adjoint. On pose

$$m = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle$$

1.6 Théorie de Riez-Fredholm

1.6.1 Diagonalisation de l'opérateur auto-adjoint compact

On dit que $A \in L(H_1, H_2)$ est un opérateur compact si $K(B_{H_1}(0, 1))$ est relativement compact.

Pour la topologie forte on note $K(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateur compact de H_1 dans H_2 et on pose $K(H_1, H_1) = K(H_1)$.

Théorème 1.6.1 [7] : $A \in K(H)$ avec $\dim H = \infty$

1. $0 \in \sigma(A)$
2. $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$
3. l'une des situation suivante

ou bien $\sigma(A) = \{0\}$

ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini

ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini une suite $\rightarrow 0$

Théorème 1.6.2 [7] Soient H est un espace de Hilbert séparable et $A \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formé de vecteurs propre de A :

$$\forall x \in H \quad x = x_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$$

et

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{où } x_0 \in \ker A.$$

1.6.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

version direct

Soit $A : D(A) \subset H \mapsto H$ opérateur non borné. Alors A est dit à **résolvant compact** si

$$\forall \lambda \in \rho(A), R(\lambda, A) \in K(H).$$

On a le résultat suivant

Théorème 1.6.3 [7] *Un opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est à résolvante compact si et seulement si il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu, A) \in K(H)$ compact.*

Théorème 1.6.4 *Soit $A : D(A) \subset H \mapsto H$ opérateur auto-adjoint, Alors :*

1. $\sigma_r(A) = \emptyset$.
2. $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$.
3. $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, +\infty]$.

Théorème 1.6.5 [7] *Soit $A : D(A) \subset H \mapsto H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compact. Alors A est diagonalisable c'est-à-dire (il existe une base Hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset D(A)$ et une suite réel $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \rightarrow \infty$, $Ae_m = \lambda_m e_m$, $m = 1, 2, \dots$*

Remarque Si $A : D(A) \subset H \mapsto H$ opérateur auto-adjoint avec $A \geq \theta > 0 \implies (0 \in \rho(A))$, et l'injection $H_1 \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.

1.7 Les propriétés spectrale des opérateurs auto-adjoint

Dans cette section on voir la définition des opérateurs auto-adjoint et quelque propriétés

1.7.1 L'adjoint d'un Opérateur

Théorème 1.7.1 [25] [48] [47] Soit A un opérateur linéaire continue de H_1 dans H_2 , il existe un unique opérateur de H_2 dans H_1 noté A^* tel que

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle,$$

cette opérateur est appelé l'adjoint de A .

il vérifier de plus $(A^*)^* = A$ et $\|A^*\| = \|A\|$.

1. $\ker(A^*) = (\text{Im } A)^\perp$
2. $(\ker A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}$

Un opérateur dans H_1 est dit auto-adjoint si est seulement si

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_1 \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \text{ c'est-à-dire } A = A^*$$

-si l'opérateur A est auto-adjoint Alors on :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

Si $A : D(A) \subset H_1 \mapsto H_2$ opérateur non borné à domaine dense, Alors A^* est fermé.

$A : D(A) \subset H \mapsto H$ est dit symétrique si $\forall (x, y) \in D(A) \times D(A) \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

pour tout $A \in B(H)$ on a :

1. $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|$.
2. $A^*A = 0 \iff A = 0$.

Chapitre 2

Problèmes inverses et problèmes mal posé et théorie de la régularisation

2.1 Problème inverse et problème mal posé

Soient E, F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est un opérateur (linéaire ou non linéaire).

Le problème $Ax = y$ est bien posé au sens de Hadamard si les conditions sont vérifiées :

1. **Existence** : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $Ax = y$ (A surjectif) $\text{Im}(A) = F$ pour tout $y \in F$.
2. **Unicité** : pour tout $y \in F$, il a au plus une solution $x \in E$ (A injectif) $\ker(A) = 0$.

c'est-à-dire pour tout $x_1, x_2 \in E$. et $Ax_1 = Ax_2$ alors $x_1 = x_2$

3. **Stabilité** : la solution x dépend continument de la donnée y . $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)} = \ker(A^*)^\perp$

c'est-à-dire faible perturbation de donnée y donne faible perturbation de la solution x .

pour tout $(x_n)_n \subset E$ si $y_n = Ax_n \longrightarrow Ax = y$ implique $x_n \rightarrow x$ c'est -à-dire (A^{-1} borné).

problème direct : Etant donné les causes, trouver l'effet $Ax = y$.

problème inverse : Etant donné les l'effet, trouver les causes $x = A^{-1}y$.

2.2 Problème direct et problème inverses en EDP

Dans le cas de problème directs, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, On s'intéresse à la solution

$$\begin{cases} u : (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty[\mapsto u(x, t) \in E \\ u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f \quad \text{dans } \Omega \\ \{B_{i=1}^q\} u = j_i \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans le problème inverse : à partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP

On doit retrouver par exemple :

1. $f, g_1, \dots, g_q \rightarrow$ problème d'identification de sources
2. $u_0 \rightarrow$ problème d'identification de donnée initiales.
3. $F \rightarrow$ problème d'identification de coefficients.
4. $\Omega \rightarrow$ problème d'identification géométrique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère générales mal posé.

2.2.1 Exemples des problèmes mal posés

Exemple 1 : Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 < y < \pi \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\psi \in C^1$. En utilisant la méthode de séparation des variables, nous avons :

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

En substituant u dans le problème (2.2)

on trouve :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

donc :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

et

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \quad (2.4)$$

On vérifie aisément que $X(x) = c_2 \sin(\lambda x)$ est une solution du problème 2.3 et $Y(y) = c_3 \exp(ny) + c_4 \exp(-ny)$ est une solution de 2.4.

Alors la solution du problème 2.2 est donnée par :

$$u(x, y) = [c_3 \exp(ny) + c_4 \exp(-ny)] \sin(nx)$$

En utilisant la condition $u(x, 0) = 0$ donc $c_4 = -c_3$,

et la condition $u_y(x, 0) = \psi(x)$, ce qui implique que :

$$u_y(x, 0) = 2c_3 n \sin(nx) = \psi(x). \quad (2.5)$$

Stabilité : Si nous avons $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, alors la solution du problème 2.2 est donnée par :

$$u_1(x, y) = 0,$$

solution triviale

On prend

$$\psi_n(x) = \psi(x) + \Delta_n = \psi(x) + \frac{1}{2} \sin(nx),$$

($\psi_n(x)$ donnée perturbée), d'après 2.5 on a :

$$\psi(x) = 2c_3 n \sin(nx),$$

et pour

$$\psi(x) = \psi_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx),$$

alors

$$2c_3 n \sin(nx) = \frac{1}{n} \sin(nx),$$

ce qui implique $2c_3 = \frac{1}{n^2}$, donc la solution du problème 2.2 associée à $\psi_n(x)$ est donnée par :

$$u_2(x, y) = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \sin(nx).$$

Nous remarquons :

$$\begin{aligned} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty &= \sup_{0 \leq x \leq \pi} |\psi_1 - \psi_2| \\ &= \sup_{0 \leq x \leq \pi} \left| \frac{1}{n} \sin(nx) \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_\infty &= \sup_{0 \leq x \leq \pi} |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \\ &= \frac{1}{n^2} |\sinh(ny)| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty. \end{aligned}$$

Donc la solution du problème ne dépend pas continument de la donnée $\psi(x)$, alors le problème est instable, d'où il est mal posé.

Exemple 4 (*Différentiation et Intégration*)

La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct et à l'intégration comme problème inverse.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ et l'opérateur intégrale A défini par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (2.6)$$

Il est facile de voir directement que A est un opérateur linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même. .

Cet opérateur est injectif, par conséquent son image est le sous espace vectoriel.

$$\text{Im}(A) = \left\{ f \in H^1(0, 1), g(0) = 0 \right\}$$

où $H^1(0, 1)$ est l'espace de Sobolev. En effet l'équation $Af = g$ équivalente à $f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$, l'image de A n'est pas continue sur $H^1(0, 1)$ comme le montre l'exemple suivant

Considérons une fonction $g \in C^1([0, 1])$ donnée et $n \in \mathbb{N}$.

Soit

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

$$\text{Alors } f_n(x) = g'_n(x) = g'(x) + n \cos(n^2 x)$$

Des simples calculs montrent que

$$\|g - g_n\| = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \theta\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\|f - f_n\| = \|g' - g'_n\| = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \theta(n).$$

Ainsi la différence entre f et f_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre g et g_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes. Une petite perturbation sur les données (ici g) peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat (ici f).

Une seconde classe de problèmes inverses est l'estimation de paramètres dans l'équation différentielles. Nous allons en voir un exemple très simple.

Exemple 5

$$\begin{cases} -(a(x) u'(x))' = f(x) & \text{pour } x \in]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans cet exemple, nous prendrons $a(x) = x^2 + 1$ et la solution $u(x) = \frac{(1-x^2)}{2}$, ce qui donne $f(x) = 3x^2 + 1$.

Le problème direct consiste à calculer u , étant données a et f .

Pour le problème inverse, nous considérons que f est connue, et nous chercherons à retrouver le coefficient a à partir d'une mesure de u .

Pour cet exemple, volontairement simplifié nous supposons que l'on mesure u en tout point de l'intervalle $]-1, 1[$, ce qui est bien évidemment irréaliste.

Nous allons voir que même dans cette situation optimiste, nous sommes susceptibles de rencontrer des difficultés.

En intégrant l'équation du problème, et en divisant par u' nous obtenons l'expression suivantes pour a (en supposant que u' ne s'annule pas, ce qui est faux sur notre exemple :

$$a(x) = \frac{c}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{c}{x} + x^2 + 1 \quad \text{pour } x \neq 0 \quad (2.8)$$

où c est une constante d'intégration.

Il y a dans ce problème deux sources d'instabilité, tout d'abord l'équation 2.8 fait intervenir u' , et nous venons de voir que le passage de u à u' est source d'instabilité. Il s'agit là d'un phénomène commun aux problèmes linéaires et non-linéaires,

Si u' est simplement petite la division sera cause d'instabilité.

2.2.2 Décomposition en valeur singulière (dimension infinie) :

Considérons maintenant un opérateur $A \in K(H_1, H_2)$ où H_1, H_2 , deux espaces de Hilbert séparable.

L'une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Ax = y$ tel que $x \in H_1, y \in H_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeur singulier (SVD) de l'opérateur A . Cette décomposition on propose des base pour les espace de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Définition 2.2.1 (valeur singulière)[40] [28]

Soient H_1, H_2 , deux espace de Hilbert séparable (admet une base Hilbertienne) et $A \in K(H_1, H_2)$

on appelle valeur singulière de l'opérateur A le réel positive $\mu = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur

auto-adjoint $T = A^*A : H_1 \rightarrow H_2$.

Théorème 2.2.1 (SVD)[40] [28]

Soit $A \in K(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $N(T)$, alors il existe une suite de valeur singulières (μ_n)

et deux systèmes orthonormé $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tel que :

1. (μ_n) est décroissante, $\mu_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
2. $A\varphi_n = \mu_n\psi_n, A^*\psi_n = \mu_n\varphi_n$
3. $\forall x \in H_1, x = \sum_{n \geq 1} (x, \varphi_n) \varphi_n + x_0$ tel que $x_0 \in \ker(A)$.
4. $\forall x \in H_1, Ax = \sum_{n \geq 1} \mu_n (x, \varphi_n) \psi_n$.
5. $\forall y \in H_2, A^*y = \sum_{n \geq 1} \mu_n (y, \psi_n) \varphi_n$.

Le système $\{(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)\}_{n \geq 1}$ est appelé système singulier de A .

La famille (φ_n) est une base Hilbertienne de $N(A)^\perp$.

La famille (ψ_n) est une base Hilbertienne de $\overline{R(A)}$. Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère Mal posé d'un problème inverse donné.

Théorème 2.2.2 (*Critère de Picard*) [40] [28]

On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soient $A \in H \rightarrow H$ un opérateur compact fini, $y \in H$ et $\{e_n, f_n, \sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors l'équation $Ax = y$ admet une solution si et seulement si

$$(i) \quad g \in N(A^*)^\perp = \overline{\text{Im}(A)}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, f_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty$$

alors la solution générale est donnée par :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, f_n \rangle|}{\sigma_n} e_n + x_0, \quad x_0 \in N(A) \quad (2.9)$$

Remarque le comportement de valeurs singulières aide à déterminer le degré de complexité du problème mal-posé :

On dit que le problème $Ax = y$ est faiblement Mal posé si $\mu_n \sim \frac{1}{n^c}$, $c > 0$

et le problème $Ax = y$ est fortement Mal posé si $\mu_n \sim \exp^{-np}$, $p > 0$

2.3 La théorie de régularisation :

La régularisation de problèmes mal-posés, due initialement à Tikhonov, cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée,..), de façon que la «solution régularisée» obtenue par «inversion régularisée» dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs activement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre «problème approximant» bien posé.

Considérons le problème inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif. On suppose que

$h_2 \in \text{Im}(K)$, i.e, le problème inverse possède une solution unique.

Définition 2.3.1 [40] (*Une Stratégie de Régularisation*) : Soient H_1, H_2 deux espaces normés et $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire borné injectif. La famille des opérateurs linéaire bornés $\{R_\alpha\}_{\alpha \geq 0} : H_2 \rightarrow H_1, \alpha > 0$

est dite "famille régularisante" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H_1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K)h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \text{ converge simplement vers } I. \quad (2.10)$$

Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \rightarrow H_2$, où H_1 de dimension infinie, alors les opérateurs

R_α ne sont pas uniformément bornés i.e, il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.

La convergence $R_\alpha h_2 \rightarrow K^{-1}h_2$ n'est pas uniforme, c'est à dire qu'il n'y a pas de convergence de $R_\alpha K$ vers l'identité au sens de la norme des opérateurs.

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau du bruit, i.e $\|h_2^\delta - h_2\| \leq \delta$.

Notons $h_1^{\alpha, \delta}$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\|h_1^{\alpha, \delta} - h_1\|$, on obtient

$$\|h_1 - h_1^\delta\| \leq \|R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha, \delta}\| + \|h_1 - R_\alpha h_2\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|h_1 - R_\alpha h_2\|. \quad (2.11)$$

Le premier terme de droite de l'équation 2.11 représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. comme $\|R_{\alpha_n}\| \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Alors il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de 2.11 tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α .

Nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

Définition 2.3.2 [40] *Une Stratégie de Régularisation* $\delta \rightarrow \alpha(\delta)$ est admissible si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\delta \in H_2} \left\{ |R_{\alpha(\eta)} h_2^\delta - h_1| \text{ tel que } \|K h_1 - h_2^\delta\| \leq \delta \right\} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Les stratégies de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son

degré de complexité. Parmi les méthodes les plus connues en problème inverse, on a la méthode de Tikhonov.

2.3.1 La méthode de Tikhonov :

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, supposons que $K : H_1 \rightarrow H_2$, $\|A\| < \infty$ est linéaire, $y \in \text{Im}(A)$ telle que $\|y_\delta - y\| \leq \delta$, y_δ n'est pas nécessaire dans $\text{Im}(A)$, le problème $Ax = y$

Etant donné y_δ on veut donc construire une approximation raisonnable x_α^δ de la solution exacte x de l'équation

non perturbée $Ax = y$. On veut aussi que cette approximation soit stable, i.e. que x_α^δ dépende continûment des données y_δ . Donc on cherche une approximation de l'opérateur inverse non borné $A^{-1} : \text{Im}(A) \rightarrow H_1$ par un opérateur linéaire borné

$$R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1.$$

Théorème 2.3.1 [40]

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $A : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur linéaire compact et soit $\alpha > 0$. Alors pour chaque $y \in H_2$, il existe $x_\alpha \in H_1$

$$\|Ax_\alpha - y\|^2 + \alpha \|x_\alpha\|^2 = \inf_{x \in H_1} \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \quad (2.13)$$

Le minimiseur x_α est donné par l'unique solution de

$$\alpha x_\alpha + A^*Ax_\alpha = A^*y \quad (2.14)$$

et dépend continûment de y .

De l'identité ci-dessus, il en résulte que

$$x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*y$$

et

$$\begin{aligned} R_\alpha & : H_2 \rightarrow H_1 \\ y & \longmapsto R_\alpha(y) = x_\alpha \end{aligned}$$

où $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$

Lemme 2.3.1 [40] *Supposons que $A \in \mathcal{L}(H_1)$ (A fermé) est un opérateur auto-adjoint positif alors pour tout $\alpha > 0$ l'opérateur $A + \alpha I$ est bijectif et $\|(A + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$ et $\|(A + \alpha I)^{-1}A\| \leq 1$.*

Preuve :

On a A positif : $\forall x \in H_1, \langle Ax, x \rangle \geq 0$.

donc

$$\|(A + \alpha I)x\| \|x\| \geq \langle (A + \alpha I)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \alpha \langle x, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2.$$

alors $(A + \alpha I)$ est injectif $\ker(A + \alpha I) = \{0\}$

$$\overline{\text{Im}(A + \alpha I)} = \ker(A + \alpha I)^\perp = \{0\}^\perp = H_1$$

A fermé alors le graphe $(A + \alpha I)$ est fermé donc $\text{Im}(A + \alpha I)$ est fermé .

$$\text{Im}(A + \alpha I) = \ker(A + \alpha I)^\perp = \{0\}^\perp = H_1.$$

donc $(A + \alpha I)$ est surjectif.

Alors $(A + \alpha I)$ est bijectif donc comme H_1 et H_2 sont des espaces des Banach alors $(A + \alpha I)^{-1} : H_1 \rightarrow H_2$ est borne.

de (*) on a $\|(A + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$

2) Soit $\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Bx, x \rangle$.

On a

$$\begin{aligned}
(A + \alpha I)^{-1} A &= (A + \alpha I)^{-1} (A + \alpha I - \alpha I) \\
&= (A + \alpha I)^{-1} (A + \alpha I) - \alpha (A + \alpha I)^{-1} \\
&= I - \alpha (A + \alpha I)^{-1}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle (A + \alpha I)^{-1} Ax, x \rangle &= \langle (I - \alpha (A + \alpha I)^{-1}) x, x \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \alpha \langle (A + \alpha I)^{-1} x, x \rangle \\
&\leq \langle x, x \rangle = \|x\|^2
\end{aligned}$$

Alors $\|(A + \alpha I)^{-1} A\| \leq 1$

Corollaire 2.3.1 [40] Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\alpha > 0$ alors

$$\|(A^* A + \alpha I)^{-1} A^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
\|(A^* A + \alpha I)^{-1} A^* v\|^2 &= \langle (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* v, (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* v \rangle \\
&= \langle A^* (AA^* + \alpha I)^{-1} v, A^* (AA^* + \alpha I)^{-1} v \rangle \\
&= \langle AA^* (AA^* + \alpha I)^{-1} v, (AA^* + \alpha I)^{-1} v \rangle \\
&= \langle A (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* v, (AA^* + \alpha I)^{-1} v \rangle \\
&= \langle (AA^* + \alpha I)^{-1} AA^* v, (AA^* + \alpha I)^{-1} v \rangle \\
&\leq \|(AA^* + \alpha I)^{-1} AA^* v\| \|(AA^* + \alpha I)^{-1} v\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \|v\|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\|(A^* A + \alpha I)^{-1} A^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Proposition 2.3.1 [40](Nair page 157) *Supposons que $A \in \mathcal{L}(H_1)$ est un opérateur auto-adjoint alors pour tout $\alpha > 0$*

$$\begin{aligned}\sigma((A + \alpha I)^{-1}) &= \left\{ \frac{1}{\lambda + \alpha}, \lambda \in \sigma(A) \right\} \\ \sigma((A + \alpha I)^{-1} A) &= \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}, \lambda \in \sigma(A) \right\} \\ \sigma((A + \alpha I)^{-2} A) &= \left\{ \frac{\lambda}{(\lambda + \alpha)^{-2}}, \lambda \in \sigma(A) \right\}\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.2 [40] *Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\alpha > 0$ alors*

$$\|(A^*A + \alpha I)^{-1} A^*\| = \sup \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha}, \lambda \in \sigma(A) \right\} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Preuve : On a $R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*$

$$\begin{aligned}R_\alpha R_\alpha^* &= (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* [(A^*A + \alpha I)^{-1} A^*]^* \\ &= (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* A [(A^*A + \alpha I)^{-1}]^* \\ &= (A^*A + \alpha I)^{-1} [(A^*A + \alpha I)^{-1} A^* A]^* \\ &= (A^*A + \alpha I)^{-1} [(A^*A + \alpha I)^{-1} A^* A], (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* A \text{ auto-adjoint}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}R_\alpha R_\alpha^* &= (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* A = f(A^*A) \\ \|R_\alpha R_\alpha^*\| &= r(R_\alpha R_\alpha^*) = \sup \left\{ \frac{\lambda}{(\lambda + \alpha)}, \lambda \in \sigma(A^*A) \right\}\end{aligned}$$

On a

$$\frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{z}}{z + \alpha} - 1 \leq 0 \text{ donc } \frac{\sqrt{z}}{z + \alpha} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

D'où

$$\|R_\alpha\|^2 = \|R_\alpha R_\alpha^*\| \leq \frac{1}{4\alpha}$$

Alors

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

On a $x_\alpha = R_\alpha y = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y$

donc

$$\begin{aligned} x_\alpha - x &= (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y - x \\ &= (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*Ax - x \\ &= (A^*A + \alpha I)^{-1} [A^*A - (A^*A + \alpha I)]x \\ &= -\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} x \end{aligned}$$

Proposition 2.3.2 [40] *Pour tout $u \in \ker(A)^\perp$ et pour tout $v \in \ker(A^*)^\perp$ alors*

$$\begin{aligned} \|\alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}u\| &\rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0 \\ \|\alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}v\| &\rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Preuve : On a

$$\overline{\text{Im}(A^*A)} = \ker(A^*A)^\perp = \ker(A)^\perp$$

Posons $T_\alpha = \alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}$

$$\|T_\alpha\| = \|\alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}\| = \alpha \|(A^*A + \alpha I)^{-1}\| \leq 1$$

Alors T_α est borné.

Pour $x \in \text{Im}(A^*A)$, soit $z \in H_1$ tel que $x = A^*Az$

donc

$$\begin{aligned} \|\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} x\| &= \|\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*Az\| \\ &\leq \|\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*A\| \|x\| \\ &\leq \alpha \|z\| \end{aligned}$$

Alors $\|\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} x\| \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$

Ainsi $\|\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} u\| \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$ pour tout $u \in \ker A^\perp$

de la même manière on montre que

Théorème 2.3.2 [40] Pour $y \in D(A^+)$

$$\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0$$

Preuve : $y \in D(A^+)$

On a $x_\alpha - x = -\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} x$

donc $\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$

Alors $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ est une stratégie de régularisation .

En choisissant un système singulier $\{s_j, e_j, f_j\}_{j \geq 1}$ pour l'opérateur A . On voit que R_α est défini par

$$\begin{aligned} R_\alpha y &= \sum_{j \geq 1} \frac{s_j}{\alpha + s_j^2} \langle y, f_j \rangle e_j \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{s_j^2}{\alpha + s_j^2} \langle x, e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{q(\alpha, s_j)}{s_j} e_j \end{aligned}$$

avec

$$q(\alpha, s) = \frac{s^2}{\alpha + s^2} \langle y, f_j \rangle$$

cette fonction appelée fonction filtre.

Et

$$\begin{aligned} x_\alpha - x &= \sum_{j \geq 1} \left(1 - \frac{s_j^2}{\alpha + s_j^2} \right) \langle x, e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{j \geq 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \right) \langle x, e_j \rangle e_j \end{aligned}$$

Théorème 2.3.3 [40] Soit $y^\delta \in H_2$ tel que

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta \quad \text{où } y = Ax$$

a) Soit $A : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire injectif et compact, l'opérateur R_α définie par

$$R_\alpha y = \sum_{j \geq 1} \frac{s_j}{\alpha + s_j^2} \langle y, f_j \rangle e_j$$

est une stratégie de régularisation avec

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \alpha > 0$$

chaque choix $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$ avec $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$ est admissible.

Preuve : On a

$$\begin{aligned} R_\alpha y &= \sum_{j \geq 1} \frac{s_j}{\alpha + s_j^2} \langle y, f_j \rangle e_j \\ \|R_\alpha y\|^2 &= \sum_{j \geq 1} \frac{s_j^2}{(\alpha + s_j^2)^2} |\langle y, f_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

On a $\frac{2\sqrt{\alpha s_j}}{\alpha + s_j^2} \leq 1$ alors $\frac{s_j}{\alpha + s_j^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

donc

$$\|R_\alpha y\|^2 \leq \frac{1}{4\alpha} \sum_{j \geq 1} |\langle y, f_j \rangle|^2 \leq \frac{1}{4\alpha} \|y\|^2$$

Alors

$$\|R_\alpha y\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \|y\|$$

On va montrer que $\|x - x_\alpha\| \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$.

On a

$$\begin{aligned} x - x_\alpha &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \langle x, e_j \rangle e_j \\ \|x - x_\alpha\|^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

Comme $x \in H_1$ alors $\sum_{j=1}^{+\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 < +\infty$ donc $\sum_{j=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$

$$\|x - x_\alpha\|^2 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 + \sum_{j=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Comme $\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \leq 1, \alpha > 0$ alors

$$\sum_{j=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

d'autre part

$$\frac{\alpha}{\alpha + s_j^2} = \frac{\alpha}{s_j^2 \left(\frac{\alpha}{s_j^2} + 1 \right)}$$

$$\begin{aligned} \|x - x_\alpha\|^2 &\leq \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha}{s_j^2 \left(\frac{\alpha}{s_j^2} + 1 \right)} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left(\frac{\alpha}{s_j^2} \right)^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leq \frac{\alpha^2}{s_N^4} \sum_{j=1}^N |\langle x, e_j \rangle|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

On choisit α tel que

$$\frac{\alpha^2}{s_N^4} \|x\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ c-à-d } \alpha \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \frac{s_N^2}{\|x\|}$$

donc

$$\|x - x_\alpha\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

On en déduit que $\{R_\alpha\}$ est une stratégie de régularisation.

Chapitre 3

La méthode de régularisation des conditions aux limites auxiliaires

Dans ce chapitre nous considérons le problème d'identification de source inconnue dans l'équation de chaleur dans une domaine borné. Pour régulariser notre problème mal-posé, on propose la méthode des conditions auxiliaires(Q.B.V.method).

3.1 Formulation du problème

Dans ce travail, Considérons le problème inverse suivant : déterminer la fonction f vérifiant le système :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), & 0 < x < \pi, 0 < t \leq 1 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

à partir de la donnée supplémentaire $u(x, 1) = g(x)$.

Il bien connu que ce problème inverse (3.1) est mal posé au sens d'Hadamard, c'est la solution existe ne dépend pas continûment des données. Ces problèmes apparaissent dans plusieurs applications, par exemple, une estimation précise de la source de polluants est cruciale pour la sauvegarde de l'environnement dans les villes à forte densité de population. On trouve dans la littérature de nombreuses méthodes pouvant être utilisées pour traiter ce problème, comme la méthode de mollification [[61], [62]], la méthode des différences finies [[17], [56]], la régularisation de Landweber [60], la méthode du gradient conjugué [[34]-[54]], la méthode de Fourier [49], la méthode de quasi-réversibilité [59], la méthode simplifiée de Tikhonov et aures. Engl et al. [16] ont établi l'unicité du problème de la source inverse des équations

paraboliques et hyperboliques et ont analysé le taux de convergence de la solution régularisée. Notre travail est une lecture de l'article [57].

Dans ce travail nous présentons la méthode des conditions aux limites auxiliaires. Pour construire une approximation stable de la solution du problème inverse(3.1). Nous remplaçons les conditions $u(x, 1) = g(x)$ par :

$$u(x, 1) + \beta^2 f(x) = g_\delta(x) \quad (3.2)$$

où $\beta > 0$ est un paramètre de régularisation et la donnée mesurée $g_\delta \in L^2 [0, \pi]$; satisfait

$$\|g^\delta(\cdot) - g(\cdot)\| \leq \delta \quad (3.3)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme dans L^2 et la constante $\delta > 0$ représente le niveau de bruit.

3.2 Analyse du problème

Par la méthode de séparation des variables, la solution du problème (3.1) est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-n^2 t}}{n^2} \right) \langle f(x), \sin nx \rangle \sin nx \quad (3.4)$$

où

$$\left\{ e_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots \right\}$$

est une base orthonormale dans $L^2 [0, \pi]$ et $f_n = \langle f, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$.

3.2.1 Caractère mal-posé du problème inverse

Notre objectif est de déterminer f à partir la donnée $u(x, 1) = g(x)$. Pour ce but définissons l'opérateur $K : f \rightarrow g$

$$g(x) = Kf(x) = \sum_{n \geq 1} \langle g, e_n \rangle e_n = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 - e^{-n^2}}{n^2} \right) \langle f(x), \sin nx \rangle \sin nx = u(x, 1) \quad (3.5)$$

Il est facile de voir que K est un opérateur linéaire compact et les valeurs singulières $(\sigma_n)_{n=1}^\infty$ de K satisfait

$$\sigma_n = \frac{1 - e^{-n^2 t}}{n^2} \quad (3.6)$$

et

$$\langle g(x), \sin nx \rangle = \left(\frac{1 - e^{-n^2 t}}{n^2} \right) \langle f(x), \sin nx \rangle \quad (3.7)$$

c'est-à-dire

$$\langle f(x), \sin nx \rangle = \sigma_n^{-1} \langle g(x), \sin nx \rangle \quad (3.8)$$

par conséquent

$$f(x) = K^{-1}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle g(x), \sin nx \rangle \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 - e^{-n^2 t}} \langle g(x), \sin nx \rangle \sin nx \quad (3.9)$$

nous remarquons que $\frac{1}{\sigma_n} = O(n^2) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ donc la donnée exacte $g(x)$ doit satisfaire la propriété que $\langle g(x), \sin nx \rangle$ décroît rapidement comme $O(n^2)$. La source mesurée expérimentalement a peu de chances de la satisfaire, et c'est ce qui entraîne l'instabilité du problème inverse. Il est impossible de résoudre le problème (3.1) par les méthodes classiques. Dans la section suivant on utilise la méthode de régularisation des conditions auxiliaire (Q.B.V.method) pour traiter le problème mal-posé .

Avant de faire cela, nous supposons

$$\|f(\cdot)\|_{H^p} \leq E, \quad p > 0 \quad (3.10)$$

Où $E > 0$ est une constante et désigne la norme $\|\cdot\|_{H^p}$ dans l'espace de Sobolev $H^p(\mathbb{R})$ définie par

$$\|f(\cdot)\|_{H^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)^p |\langle f, \sin nx \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

3.2.2 Quelques résultats auxiliaires

Dans cette section nous donnerons deux lemmes importants

Lemme 3.2.1 *Si $x > 1$ nous avons l'inégalité suit :*

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{e}{e - 1}$$

Lemme 3.2.2 *Pour $0 < \beta < 1$ on a :*

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2} + \beta^2 n^2} (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \right) \leq \frac{e}{e - 1} \max \{ \beta^p, \beta^2 \} \quad (3.12)$$

Preuve : Soit

$$A(n) = \frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2} + \beta^2 n^2} (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \quad (3.13)$$

le preuve de (3.11) sera séparée en trois cas :

· **Cas 1 :** Si $n \geq n_0 = \frac{1}{\beta}$

$$A(n) = \frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2} + \beta^2 n^2} (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \leq (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \leq n^{-p} \leq n_0^{-p} = \beta^p \quad (3.14)$$

on a

$$\frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2} + \beta^2 n^2} \leq 1$$

donc

$$A(n) \leq (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}}$$

et on a

$$1 + n^2 > n^2$$

$$\frac{1}{1 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ et } p > 0$$

$$\left(\frac{1}{1 + n^2} \right)^{\frac{p}{2}} \leq \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$(1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq (n^2)^{-\frac{p}{2}} = (n)^{-p}$$

comme $n \geq n_0 = \frac{1}{\beta}$ alors $n^{-p} \leq n_0^{-p} = \beta^p$

donc

$$A(n) \leq (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq n^{-p} \leq n_0^{-p} = \beta^p$$

Cas 2 : Si $1 \leq n \leq n_0$ on obtient

$$A(n) \leq \frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \frac{\beta^2 n^{2-p}}{1 - e^{-n^2}} \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 n^{2-p} \quad (3.15)$$

$$A(n) = \frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2} + \beta^2 n^2} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \frac{\beta^2 n^2}{1 - e^{-n^2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{1 - e^{-n^2}} \beta^2 n^2 (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}}$$

on a

$$\frac{1}{1 - e^{-n^2}} \leq \frac{e}{e-1}$$

donc

$$A(n) \leq \frac{1}{1 - e^{-2}} \beta^2 n^2 (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 n^2 (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 n^{2-p}$$

Si $0 \leq p \leq 2$ on va démontrer que

$$A(n) \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 n^{2-p} \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 n_0^{2-p} = \frac{e}{e-1} \beta^p \quad (3.16)$$

Si $p > 2$

$$A(n) \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 n^{2-p} \leq \frac{e}{e-1} \beta^2 \quad (3.17)$$

En combinant de (3.13) avec (3.15) et (3.16) l'inégalité (3.11) tient

3.3 La méthode de régularisation des conditions aux limites auxiliaires et l'estimation d'erreur

Dans cette étude nous proposons la méthode des conditions aux limites auxiliaires(Q.B.V.method).

L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème mal-posé par un problème proche, où on perturbe la condition $u(x, 1) = g(x)$ en la remplaçant par une condition non-local

$$u(x, 1) + \beta^2 f(x) = g_\delta(x) \quad (3.18)$$

dépendant d'une petite paramètre de régularisation β .

On approche le problème mal-posé (3.1) ,par le problème perturbé suivant pour avoir une approximation de la solution du problème inverse (3.1)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x) & 0 < x < \pi, 0 < t \leq 1 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 1) + \beta^2 f(x) = g_\delta(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (3.19)$$

On obtient donc la solution du problème (4.2) comme suit :

$$f_\beta^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (g^\delta, X_n) X_n \quad (3.20)$$

qui est défini comme la solution de régularisation des condition aux limites auxiliaires du problème (3.1).

A noter que pour les petits β , $\frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}}$ est près de $\frac{n^2}{1 - e^{-n^2}}$. Au contraie si n devient grand, $\frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}}$ est borné. Donc $f_{\beta, \delta}(x)$ est considéré comme une approximation de $f(x)$.

Le théorème suivant donne la relation entre n'importe quelles deux solution régularisées de (4.2).

Théorème 3.3.1 Soit $f_{\beta_1}^\delta$ et $f_{\beta_2}^\delta$ deux solutions du problème inverse (4.2) correspondantes aux données g_1^δ et g_2^δ , respectivement vérifiant $\|g_1^\delta - g_2^\delta\| \leq \delta$ alors pour $0 < \beta < 1$ on trouve l'estimation d'erreur

$$\left\| f_{\beta_1}^\delta - f_{\beta_2}^\delta \right\|_{L^2(0,\pi)} \leq c \|g_1^\delta - g_2^\delta\|_{L^2(0,\pi)}$$

Preuve : Soit $f_\beta^\delta \in L^2(0, \pi)$

$$\begin{aligned} \left\| f_{\beta_1}^\delta - f_{\beta_2}^\delta \right\|_{L^2(0,\pi)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (g_1^\delta - g_2^\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \right) \left\| (g_1^\delta - g_2^\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \right) \|g_1^\delta - g_2^\delta\|_{L^2(0,\pi)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

On pose

$$\begin{aligned} B(n) &= \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \\ &= \frac{n^2}{(1 - e^{-n^2}) \left[\beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1} + 1 \right]} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 1 + \beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1} &\geq \beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1} \\ \frac{1}{1 + \beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1}} &\leq \frac{1}{\beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1}} \\ \frac{n^2}{1 + \beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1}} &\leq \frac{n^2}{\beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1}} \\ B(n) &\leq \frac{n^2}{(1 - e^{-n^2}) \left[1 + \beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})^{-1} \right]} \leq \frac{n^2}{\beta^2 n^2 (1 - e^{-n^2})} \\ B(n) &\leq \frac{1}{\beta^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| f_{\beta_1}^\delta - f_{\beta_2}^\delta \right\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{1}{\beta^2} \left\| g_1^\delta - g_2^\delta \right\|_{L^2(0,\pi)} \quad (3.22)$$

Théorème 3.3.2 Soit $f(x)$ donnée par (3.9) la solution exacte du problème (3.1) et $f_\beta^\delta(x)$ la solution régularisée donnée par (4.3). Soit g^δ satisfaisant $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ et supposons que $\|f\|_{H^p}, p > 0$. Si on choisit :

$$\beta = \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{1}{p+2}} \quad (3.23)$$

Alors on obtient l'estimation d'erreur suivante :

$$\|f - f_\beta^\delta\|_{L^2(0,\pi)} \leq \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \left(1 + \frac{e}{e-1} \max \left\{ 1, \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2-p}{p+2}} \right\} \right) \quad (3.24)$$

Preuve : Par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - f_\beta^\delta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} &= \|f(\cdot) - f_\beta(\cdot) + f(\cdot) - f_\beta^\delta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \\ &\leq \|f(\cdot) - f_\beta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} + \|f_\beta(\cdot) - f_\beta^\delta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - f_\beta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (g, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \frac{1 - e^{-n^2}}{n^2} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \frac{1 - e^{-n^2}}{n^2} \right) (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|f_\beta(\cdot) - f_\beta^\delta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (g^\delta, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (g, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (g^\delta - g, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\
 &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \right) \|g^\delta - g\|_{L^2(0,\pi)}
 \end{aligned}$$

d'après le théorème(3.3.1), on a

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} \right) \|g^\delta - g\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{1}{\beta^2} \delta$$

donc

$$\|f_\beta(\cdot) - f_{\beta,\delta}(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{1}{\beta^2} \delta$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \|f(\cdot) - f_\beta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^2 n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\
 &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^2 n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} (1 + n^2)^{\frac{p}{2}} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\
 &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta^2 n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \right) \left\| (1 + n^2)^{\frac{p}{2}} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,\pi)} \\
 &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta^2 n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \right) E
 \end{aligned}$$

d'après le lemme (3.2.2)

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta^2 n^2}{\beta^2 n^2 + 1 - e^{-n^2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \right) \leq \frac{e}{e-1} \max \{ \beta^p, \beta^2 \}$$

$$\|f(\cdot) - f_\beta(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{e}{e-1} \max \{ \beta^p, \beta^2 \} E$$

Alors

$$\|f(\cdot) - f_{\beta}^{\delta}(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} = \frac{e}{e-1} \max\{\beta^p, \beta^2\} E + \frac{1}{\beta^2} \delta$$

Si on choisit $\beta = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{1}{p+2}}$ alors :

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - f_{\beta}^{\delta}(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} &= \frac{e}{e-1} \max\left\{\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{p}{p+2}}, \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{p+2}}\right\} + \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{-2}{p+2}} \delta \\ &= \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \left(1 + \frac{e}{e-1} \max\left\{1, \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2-p}{p+2}}\right\}\right) \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1 : Si $0 < p < 2$ alors

$$\|f(\cdot) - f_{\beta}^{\delta}(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{2e-1}{e-1} \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0$$

Si $p > 2$

$$\|f(\cdot) - f_{\beta}^{\delta}(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} + \frac{e}{e-1} \delta^{\frac{2}{p+2}} E^{\frac{p}{p+2}} \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0$$

Alors $f_{\beta}^{\delta}(x)$ est une approximation de la solution $f(x)$.

Si on choisit $\beta = \delta^{\frac{1}{p+2}}$ on obtient :

$$\|f(\cdot) - f_{\beta}^{\delta}(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Chapitre 4

La méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée

4.1 Formulation du problème

Dans cette section on s'intéresse au problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Ici le problème inverse consiste à retrouver la source $f(x)$ étant donné une mesure de la solution $u(x, 1) = g(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Nous supposons que $u(x, t)$ est l'unique solution du problème 4.1.

Il est bien connu que ce genre de problème 4.1 est mal posé au sens de Hadamard, c'est-à-dire même si solution existe et unique, elle ne dépend pas continûment de donnée g .

Dans ce travail, nous présentons La méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée pour obtenir une solution approchée stable de notre problème mal posé.

Notre travail est une lecture de l'article [58].

4.2 Quelques résultats auxiliaires :

Par la méthode de séparation des variables, la solution du problème 4.1, est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n^2\pi^2 t}}{n^2\pi^2} \langle f, X_n \rangle X_n \quad (4.2)$$

où

$$\left\{ X_n = \sqrt{2} \cos n\pi x, (n = 1, 2, \dots) \right\}$$

est une base orthogonale dans $L^2(0, 1)$ et

$$\langle f, X_n \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx. \quad (4.3)$$

Par la condition supplémentaire, on définit l'opérateur $K : f \rightarrow g$, alors nous avons

$$g(x) = Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, X_n \rangle X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2} \langle f, X_n \rangle X_n \quad (4.4)$$

Il est facile de voir que K est un opérateur compact linéaire, et les valeurs singulières $\{\sigma_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ de K satisfont

$$\sigma_n = \frac{1 - e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2} \quad (4.5)$$

et

$$\langle g, X_n \rangle = \frac{1 - e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2} \langle f, X_n \rangle \langle X_n, X_n \rangle \quad (4.6)$$

c'est à dire

$$\langle f, X_n \rangle = \sigma_n^{-1} \langle g, X_n \rangle \quad (4.7)$$

Donc

$$f(x) = K^{-1}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, X_n \rangle X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{1 - e^{-n^2\pi^2}} \langle g, X_n \rangle X_n \quad (4.8)$$

Notons que $\frac{1}{\sigma_n} = o(n^2)$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc la fonction de données exacte $g(x)$ doit satisfaire la propriété selon laquelle $\langle g, X_n \rangle$ décroît rapidement comme $o(n^{-2})$. Mais dans les applications, les données d'entrée $g(x)$ ne peuvent être que mesurées et ne jamais être exactes. Nous supposons la fonction de données mesurée $g_\delta(x) \in L^2(0, 1)$ et satisfait

$$\|g - g_\delta\|_{L^2(0,1)} \leq \delta \quad (4.9)$$

où la constante $\delta > 0$ représente le niveau de bruit. On ne peut donc pas s'attendre à ce qu'il ait le même taux de décroissance en $L^2(0,1)$. Il est donc impossible d'obtenir la source de chaleur par des méthodes classiques. Dans notre travail nous proposons pour l'étude de ce problème la méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée. Elle consiste à transformer le problème original mal-posé en un problème de minimisation. Nous imposons une condition a priori sur la source de la chaleur, c'est-à-dire..,

$$\|f\|_{H^p[0,1]} \leq E, \quad p \geq 0 \quad (4.10)$$

où $E > 0$ est une constante, $\|\cdot\|_{H^p[0,1]}$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev est défini par [33] comme suit :

$$\|f\|_{H^p[0,1]} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^p |\langle f, X_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

Donnons maintenant quelques lemmes importants qui sont très utiles pour notre conclusion principale.

Lemme 4.2.1 *Pour $n \geq 1$*

$$\frac{1}{1 - e^{-n^2\pi^2}} \leq 2 \quad (4.12)$$

Lemme 4.2.2 *Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, il y a les inégalités suivantes :*

$$\sup_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 n^2} \right) (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \right) \leq \max \{ \alpha^p, \alpha^2 \} \quad (4.13)$$

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^2)} \right) \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \quad (4.14)$$

Preuve : Soit

$$G(n) = \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 n^2}\right) (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \quad (4.15)$$

La preuve de (4.13) peut être séparée de deux cas :

cas 1 : Pour $n \geq n_0 = \frac{1}{\alpha}$

$$G(n) \leq (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \leq n^{-p} \leq n_0^{-p} = \alpha^p \quad (4.16)$$

cas 2 : $1 \leq n \leq n_0$ on obtient :

$$G(n) = \frac{\alpha^2 n^2}{1 + \alpha^2 n^2} (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \leq \alpha^2 n^2 (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \leq \alpha^2 n^{2-p} \quad (4.17)$$

Si $0 \leq p \leq 2$, au-dessus de l'inégalité devient dans :

$$G(n) \leq \alpha^2 n^{2-p} \leq \alpha^2 n_0^{2-p} = \alpha^2 \alpha^{p-2} = \alpha^p \quad (4.18)$$

Sinon si $p \geq 2$, nous obtenons :

$$G(n) \leq \alpha^2 n^{2-p} \leq \alpha^2 \quad (4.19)$$

En combinant (4.16) avec (4.18) et (4.19), on obtient

$$\sup_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 n^2}\right) (1 + n^2)^{\frac{-p}{2}} \right) \leq \max \{ \alpha^p, \alpha^2 \}$$

Soit

$$B(n) = \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^2)}, \quad D(n) = \frac{n^2 \pi^2}{1 - e^{-n^2 \pi^2}} \quad (4.20)$$

La preuve de (4.14) peut également être divisée en deux cas

Cas 1 : Pour $1 \leq n \leq n_0 = \frac{1}{\alpha}$, si $0 < \alpha < 1$, on a

$$D(n) \leq D\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \quad (4.21)$$

alors

$$B(n) \leq D(n) \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \quad (4.22)$$

Cas 2 : Si $n > n_0$, on obtient

$$D(n) \leq 2n^2\pi^2 \quad (4.23)$$

et

$$B(n) \leq \frac{2n^2\pi^2}{1 + \alpha^2 n^4} \quad (4.24)$$

On pose

$$L(n) = \frac{2n^2\pi^2}{1 + \alpha^2 n^4} \quad (4.25)$$

puis

$$L'(n) = \frac{4\pi^2 n (1 - \alpha^2 n^4)}{(1 + \alpha^2 n^4)^2} \quad (4.26)$$

nous mettons $L'(n) = 0$, on obtient $n_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Il est facile de voir que $n_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ est un point de valeur maximale de $L(n)$. Donc

$$L(n) \leq \frac{2\pi^2 n_1^2}{1 + \alpha^2 n_1^4} \leq 2\pi^2 n_1^2 = \frac{2\pi^2}{\alpha} \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \quad (4.27)$$

En combinant (4.22) avec (4.27), l'inégalité (4.14) est vérifiée.

4.3 La méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée

À partir de (4.4) , nous savons que le problème (4.1) peut être formulé comme une équation d'opérateur :

$$(Kf)(x) = g(x) \quad (4.28)$$

Le problème (4.28) étant un problème mal posé , on donne une solution approchée de $f(x)$ par une méthode de régularisation de Tikhonov qui minimise la quantité suivante :

$$\|Kf - g^\delta\|^2 + \alpha^2 \|f\|^2 \quad (4.29)$$

Alors par le théorème [33] , la solution unique du problème de minimisation (4.29) est égale à résoudre l'équation normale suivante :

$$K^*Kf_\delta(x) + \alpha^2 f_\delta(x) = K^*g_\delta(x) \quad (4.30)$$

c'est à dire

$$f_\delta(x) = [K^*K + \alpha^2 I]^{-1} K^*g_\delta(x) \quad (4.31)$$

Parce que K est un opérateur compact auto-adjoint linéaire c'est-à-dire que $K = K^*$, on a la forme équivalente

$$f_\delta(x) = [K^2 + \alpha^2 I]^{-1} K g_\delta(x) \quad (4.32)$$

Nous définissons la fonction d'un opérateur auto-adjoint compact K par le théorème d'application spectrale de la manière suivante :

Définition 4.3.1 *Si $f(x)$ est une fonction continue à valeurs réelles sur le spectre $\sigma(K)$ on définit $f(K)$ par*

$$f(K)x = \sum_n f(\lambda_n)(x, \omega_n) \omega_n \quad (4.33)$$

où K est un auto-adjoint compact $\lambda_n \in \sigma(K)$, et ω_n sont les vecteurs propres orthogonaux correspondants.

Donc on obtient :

$$f_\alpha^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2}}{\alpha^2 + \left(\frac{1-e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2}\right)^2} (g_\delta, X_n) X_n \quad (4.34)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n^2\pi^2}{1-e^{-n^2\pi^2}}}{1 + \alpha^2 \left(\frac{n^2\pi^2}{1-e^{-n^2\pi^2}}\right)^2} (g_\delta, X_n) X_n \quad (4.35)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n^2\pi^2}{1-e^{-n^2\pi^2}}}{1 + \alpha^2 \left(\frac{n^2\pi^2}{1-e^{-n^2\pi^2}}\right)^2} g_n^\delta X_n \quad (4.36)$$

En comparant la formule (4.8) avec la formule (4.36), on constate que la procédure consiste à remplacer l'inconnue g par une donnée bruitée filtrée de manière appropriée $g^\delta(x)$. Le filtre en (4.36) atténue le coefficient g_n^δ de g^δ d'une manière compatible avec l'objectif de minimisation de la quantité (4.29). Grâce à cette idée, nous pouvons utiliser un bien meilleur filtre $\frac{1}{1+\alpha^2 n^4}$ pour remplacer le filtre $\frac{1}{1+\alpha^2 \left(\frac{n^2\pi^2}{1-e^{-n^2\pi^2}}\right)^2}$ et donner une autre approximation $f_\alpha^\delta(x)$ de la solution f .

On définit une solution régularisée du problème du problème 4.28 pour les données bruitées g^δ qui est appelée la solution régularisée de Tikhonov simplifiée du problème 4.28 de la façon suivante

$$f_\alpha^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{(1-e^{-n^2\pi^2})(1+\alpha^2 n^4)} (g_\delta, X_n) X_n \quad (4.37)$$

Montrons maintenant que le problème inverse est bien posé.

Le théorème suivant donne la relation entre n'importe quelles deux solution régularisées de (4.32).

Théorème 4.3.1 Soit $f_{\alpha_1}^\delta$ et $f_{\alpha_2}^\delta$ deux solutions du problème inverse (4.32) correspondantes aux données g_1^δ et g_2^δ , respectivement vérifiant $\|g_1^\delta - g_2^\delta\| \leq \delta$ alors pour $0 < \alpha < 1$ on trouve l'estimation d'erreur

$$\|f_{\alpha_1}^\delta - f_{\alpha_2}^\delta\| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \delta$$

Preuve : Pour tout $g^\delta \in L^2(0, 1)$ nous avons

$$\begin{aligned} \|f_{\alpha_1}^\delta - f_{\alpha_2}^\delta\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} (g_1^\delta - g_2^\delta, X_n) X_n \right\|_{L(0,1)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (g_1^\delta - g_2^\delta, X_n) X_n \right\|_{L(0,1)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \|g_1^\delta - g_2^\delta\|_{L(0,1)} \end{aligned}$$

d'après le lemme (4.2.2), on a

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2}$$

donc

$$\begin{aligned} \|f_{\alpha_1}^\delta - f_{\alpha_2}^\delta\| &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \|g_1^\delta - g_2^\delta\| \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \delta \end{aligned}$$

Théorème 4.3.2 Soit $f(x)$ donnée par 4.8 la solution exacte du problème 4.1 $f_\alpha^\delta(x)$ la solution régularisée donnée par 4.37. Soit g^δ satisfaisant 4.9 et la condition a priori 4.10 pour $p > 0$. Si on choisit

$$\alpha = \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{1}{p+2}}$$

Alors on obtient l'estimation d'erreur suivante :

$$\|f - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} \leq 2\pi^2 \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \left(1 + \frac{1}{2\pi^2} \max \left(1, \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2-p}{p+2}} \right) \right) \quad (4.38)$$

Preuve : En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} \|f - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} &= \|f - f_\alpha + f_\alpha - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|f - f_\alpha\|_{L^2(0,1)} + \|f_\alpha - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} \\ \|f - f_\alpha\|_{L^2(0,1)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} (g, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2 n^4} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 n^4} \right) (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} (1 + n^2)^{\frac{p}{2}} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 n^4} \right) (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \right) \left\| (1 + n^2)^{\frac{p}{2}} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 n^4} \right) (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \right) E \\ &\leq \max \{ \alpha^p, \alpha^2 \} E \\ &= \max \left\{ \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{p}{p+2}}, \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2}{p+2}} \right\} E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_\alpha - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^4}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} (g, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} (g^\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} (g - g^\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (g - g^\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \delta \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \delta \end{aligned}$$

d'après le théorème (4.3.1), on a

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \alpha^2 n^4)} \right) \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2}$$

donc

$$\|f_\alpha - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \delta$$

$$\begin{aligned} \|f - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} &= \max \left\{ \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{p}{p+2}}, \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2}{p+2}} \right\} E + 2\pi^2 \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2}{p+2}} \\ &= 2\pi^2 \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \left(1 + \frac{1}{2\pi^2} \max \left\{ 1, \left(\frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2-p}{p+2}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Remarque 1 : Si $0 < p \leq 2$, on a

$$\|f - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} \leq (2\pi^2 + 1) \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0$$

sinon si $p > 2$, on a

$$\|f - f_\alpha^\delta\|_{L^2(0,1)} \leq \left(2\pi^2 \delta^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} + \delta^{\frac{2}{p+2}} E^{\frac{p}{p+2}} \right) \rightarrow 0, \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié deux classes de problèmes mal-posés engendrés par l'équations de type parabolique. en utilisant différentes méthodes de régularisation.

Dans l'étude du premier problème, on a utilisé la méthode des conditions aux limites auxiliaires pour identifier le terme source dans l'équation de la chaleur.

Dans le deuxième problème on a identifié le terme source pour l'équation de la chaleur, où la méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée a été introduite pour la construction d'une solution régularisée.

Dans ces études des résultats de convergence ont été établis et des estimations d'erreur ont été obtenus.

La méthode des conditions aux limites auxiliaires a été largement expérimentée et donne des approximation des solutions précises avec beaucoup d'avantages comme la simplicité du calcul.

Bibliographie

- [1] Atakhadzaev, MA, Egamberdiev, OM : The Cauchy problem for the abstract bicaloric equation, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol. 31, No. 4, 187-191 (1990).
- [2] A.A.Buryki and A.M. Denisov ,Determination of the unknown sources in the heat-conduction equation,*Comput.Math.Model*.8(1997), pp.
- [3] L. S. Abdulkerimov. Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, *Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat.*, 1(1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).
- [4] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, *Inverse Problems* 21, 1087-1104, (2005).
- [5] N. Boussetila, F. Rebbani. Optimal Regularisation method for ill-posed Cauchy problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. (2006), No. 147, pp. 1–15.ISSN : 1072-6691.
- [6] N. Boussetila. Thèse de Doctorat : Etude de problèmes non locaux et régularisation de problèmes mal posés en EDP, (2005).
- [7] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications* MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).
- [8] Carasso, AS : Bochner Subordination, Logarithmic Division Equations, and Blind Deconvolution of Hubble Space Telescope Imagery and Other Scientific Data, *SIAM J. Imaging Sciences*, Vol. 3, No. 4, pp. 954-980 (2010).
- [9] J.R.Cannon, *One Dimensional Heat Equation* ,Addison-Wesley Publishing Company, California, 1984.
- [10] J.R.Cannon and S.P.Estevz, An inverse problem for the heat equation ,*Inverse Probl*.2(1986),pp.395-403.

-
- [11] D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis, J.R. Mc Laughlin and W. Rundell (editors), (2000) Survey on solution methods for inverse problems, Springer, Wien, New York.
- [12] R. Dautray, J.-L. Lions; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988).
- [13] Djemoui Sebti, sur une classe de problèmes mal-posés, Thèse de Doctorat, université Badji Mokhtar annaba, 2016.
- [14] H. W. Engl and A. Leitão. A mann iterative regularization methode for elliptic Cauchy problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, (2001), 22(7-8) : 861-884.
- [15] H. W. Engl, Martin Hanke, Andreas Neubauer. Regularization of inverse problems, kluwer P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, (1996).
- [16] Engl, H. W., Scherzer, O., and Yamamoto, M., 1994, “Uniqueness and stable determination of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data,” *Inverse Problems*, 10, pp. 1253–1276.
- [17] Fatullayev AG. Numerical solution of the inverse problem of determining an unknown source term in a heat equation. *Mathematics and Computers in Simulation 2002*; 58 :247–253.
- [18] Fushchich, VL, Galitsyn, AS, Polubinskii, AS : A new mathematical model of heat conduction processes, *Ukrainian Math. J.*, 42, 210-216 (1990).
- [19] Gordon W. Clark and Seth F. Oppenheimer, Quasireversibility Methods for Non-Well-Posed Problems, *Electronic Journal of Differential Equations Vol. 1994(1994)*, No. 08, pp. 1-9, 1994.
- [20] J. Hadamard. Lecture note on Cauchy’s problem in linear partial differential equations, Yale Uni Press, New Haven, (1923).
- [21] D.N. Hào, V.D. Nguyen and H. Sahli. A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time, *J. Math. Anal. Appl.*, 345(2008), 805-815.
- [22] Hongwu Zhang, Xiaoju Zhang, Stability and Regularization Method for Inverse Initial Value Problem of Biparabolic Equation. School of Mathematics and Information Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan, China, 2015.

-
- [23] Johansson T, Lesnic D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics* 2007,72 :748–760.
- [24] S. I. Kabanikhin. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. Survey paper, *J. Inv. Ill-Posed Problems* 16 (2008), 317–357.
- [25] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, University of California, Berkeley, Berlin Heidelberg New York, (1980).
- [26] Khelili Bisma, *Sur quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problèmes de Cauchy inverses*. Thèse de Doctorat, université Badji Mokhtar annaba, 2018.
- [27] B.Khelili, N.Boussetila, and F.Rebbani, a modified quasi-boundary value method for an abstract ill-posed biparabolic. *Open Math.* 2017; 15 : 1649–1666 problem. <https://doi.org/10.1515/math-2017-0140>
- [28] M. Kern. *Problèmes inverses aspects numériques*. Lecture, école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002-2003).
- [29] A. Kolmogorov, S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse Fonctionnelle*. Édition Mir. Moscou, (1973).
- [30] V. A. Kozlov, V.G. Maz'ya. On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, *Leningrad Math. J.*, 1 (1990), No. 5,1207-1228.
- [31] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation, *Comput. Math. Phys.* 31, 45-52, (1991).
- [32] M.V. Klibanov, F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation, *SIAM J. Appl. Math.* 51, 1653-1675, (1991).
- [33] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [34] Ma YJ, Fu CL, Zhang YX. Identification of an unknown source depending on both time and space variables by a variational method. *Applied Mathematical Modelling* 2012; 36 :5080–5090.

-
- [35] Lakhdari, A. and Boussetila, N. (2015) An Iterative Regularization Method for an Abstract Ill-Posed Biparabolic Problem. *Boundary Value Problems*, 55, 1-17. <http://dx.doi.org/10.1186/s13661-015-0318-4>.
- [36] R. Lattès, J.L. Lions. *Méthode de Quasi-réversibilité et Applications*, Dunod, (1967).
- [37] A. V. Lykov, *Theory of Heat Conduction* [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1967).
- [38] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw, New York (1953).
- [39] Lakhdari, N, Boussetila, N : An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem, *Boundary Value Problems* 2015, 2015 :55.
- [40] M. T. Nair. *Linear operator equations : approximation and regularization*. World Scientific, (2009).
- [41] A. Pazy. *Semigroupe of linear operators and Applications to Pratial Differential equations*. Springer-Verlag, (1983).
- [42] A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Walter de Gruyter Berlin New York, (2007).
- [43] V.V.Solov'ev ,Solvability of the inverse problem of finding a source ,using overdetermination on the upper base for a parabolic equation,*Diff.Equ.*25(1990),pp.1114-1119
- [44] R. E. Showalter, "The final value problem for evolution equations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 47, no. 3, pp. 563–572, 1974.
- [45] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston and Sons, (1977).
- [46] Thanh Mai Pham Ngoc. *Thèse de Doctorat : Problèmes inveres et analyse en ondelettes adaptées*, (2009).
- [47] N.Ja.Vilenkin. *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publishing, (1972).
- [48] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. *Introduction à l'analyse fonctionnelle*. Les Presses de l'Université du Québec, (1981).
- [49] Trong DD, Long NT, Dinh Alain PN. Nonhomogeneous heat equation : identification and regularization for the inhomogeneous term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 2005 ; 312 :93–104.

-
- [50] Vabishchevich, P.N. : Numerical solution of nonlocal elliptic problems. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 5, 13–19 (1983) (in Russian)
- [51] E. V. Tolubinskii, *Theory of Transfer Processes* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1969).
- [52] F. Yanga, Chu-Li Fu, the method of simplified Tikhonov regularization for dealing with the inverse time-dependent heat source problem. *Computers and Mathematics with Applications* 60 (2010) 1228–1236. 2010 Elsevier.
- [53] H. Yang and Yanqi Yang, A quasi-reversibility regularization method for a Cauchy problem of the modified Helmholtz-type equation, *Boundary Value Problems a Springer Open Journal*, 2019. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-1142-z>.
- [54] Johansson T, Lesnic D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics* 2007,72 :748–760.
- [55] M.Yamamoto, Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle, *Math.Comput.Model.*18(1993),pp.79-88.
- [56] Yan L, Fu CL, Dou FF. A computational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 2010 ; 26(5) :5970–608.
- [57] F.Yanga,C.Fua and X.Xiao Lia. A quasi-boundary value regularization method for determining the heat source. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* · November 2014. DOI : 10.1002/mma.3040.
- [58] F. Yang a,b,* , Chu-Li Fu b. A simplified Tikhonov regularization method for determining the heat source. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 3286–3299.
- [59] Yang F, Fu CL. Two regularization methods to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature. *Mathematical and Computer Modelling* 2011 ; 53 :793–804.
- [60] Yang L, Yu JN, Luo GW, Deng ZC. Numerical identification of source terms for a two dimensional heat conduction problem in polar coordinate system. *Applied Mathematical Modelling* 2013 ; 37(3) :939–957.

- [61] Yi Z, Murio DA. Identification of source terms in 2-D IHCP. *Computers & Mathematics with Applications* 2004 ; 47 :1517–1533.
- [62] Z.Yi and D.A.Murio, Source Term identification in 1-D IHCP ,*Comput.Math.Appl.*47(2004),pp.1921-1933.