

Université 20 Aout 1955-Skikda

Faculté des Technologie

Département : Génie Civil

Ref ; D012124002D



جامعة 20 اوت 1955 سكيكدة

كلية التكنولوجيا

قسم : الهندسة المدنية

المرجع: D012124002

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat L.M.D

En Génie Civil
Option : Structures et sols

THEME

**Modélisation numérique de la fissuration dans les
structures sandwichs**

Présentée par :

Mohamed Ben Ali Amina

Dirigé par :

Mr. BOUZIANE.S Professeur

Directeur de thèse

Université de SKIKDA

Mr. BOUZERD .H Professeur

Co-directeur de thèse

Université de SKIKDA

Soutenue publiquement le 11/01/2024

Devant le jury composé de :

Mr DJEBIEN Rachid

MCA

Président

Université de SKIKDA

Mr DERABLA Riad

MCA

Examinateur

Université de SKIKDA

M^{me} BOUACHA Nadjet

MCA

Examinateur

Université de SOUK AHRAS

الملخص

تطور التكنولوجيا الكبير في مجال صناعة المواد المركبة جعلها تستعمل بكثافة في مجال الهندسة وهذا راجع الى انخفاض كثافتها وخواصها الميكانيكية ذات الأداء العالي. كما أن الاستعمال المكثف والواسع لهذه المواد جعل منها حقل خصب للدراسات والأبحاث العلمية خاصة دراسة ظاهرة التشقق في كل الأنماط.

يهدف هذا العمل الى حساب معامل استعادة الطاقة في حالة نمطي التشقق I، II في البنى المكونة من شرائح متعددة (Sandwich). حساب معامل استعادة الطاقة اعتمد على مبدأ المزج بين طريقة ريسنر وطريقة التمدد الافتراضي للتشقق والعناصر المتناهية المختلطة.

تم تطبيق هذه الطريقة على نماذج متعددة لمنشآت مختلفة " العوارض ذات النتوء المزدوج DCB " " BEAMS و العوارض ذات النتوء المزدوج غير المتناظرة " UDCB BEAMS " , حيث التشقق هو من النمط I أما التشقق في العوارض الشرائحية " BEAMS CSB " فالمعالجة كانت في نمط التشقق II .

النتائج المتحصل عليها بتطبيق هذه الطريقة المبتكرة تم مقارنتها مع نتائج الدراسات السابقة المشابهة والتي اعتمدت على طرق ونظريات مختلفة ومغايرة عن الطريقة المتبعة في هذه الدراسة. أظهرت هذه المقارنة التقارب الكبير مع دقة النموذج المقرر في هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: التشقق، معامل استعادة الطاقة، طريقة العناصر المتناهية المختلطة، البنى الشرائحية

Abstract

The use of composite materials is on the rise in different engineering fields. The main advantage of these materials being their low density and their excellent mechanical qualities.

The analysis of failure modes, such as delamination, of these materials has received great attention from researchers. This study proposes a method to evaluate the Strain Energy Release Rate (SERR) of mode I and II in sandwich structures.

This method associates a two-dimensional mixed finite element with virtual crack extension technique for the analysis of cracked interfaces of sandwich beams. The cases of a symmetrical Double Cantilever Beam (DCB) and a asymmetrical Double Cantilever Beam (UDCB) of the mode I, and CSB (cracked sandwich beam) of mode II, have been analyzed in this study.

The comparison of the results obtained by this method with those found in the literature shows efficiency and good precision of the developed model for the calculation of Strain Energy Release Rate (SERR) of mode I and II in sandwich structures.

Keywords: Cracking; Strain energy release rate; Mixed finite element method; Sandwich structures.

Résumé

L'utilisation des matériaux composites est en augmentation dans différents domaines de l'ingénierie. Les principaux avantages de ces matériaux sont leur faible densité et leur excellent comportement mécanique.

L'analyse des modes de rupture telle que le délaminage de ces matériaux a reçu beaucoup d'attention par les chercheurs.

L'objectif de ce travail est d'effectuer une étude qui présente une méthode pour évaluer le taux de restitution d'énergie (TRE) en mode I et II des structures sandwichs. Cette méthode numérique est basée sur la formulation mixte de Reissner et associée à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour la détermination du taux de restitution d'énergie des interfaces fissurées. Cette étude traite les cas d'une DCB (Double Cantilever Beam) et d'une UDCB (Asymmetrical Double Cantilever Beam) en mode I, et d'une CSB (cracked sandwich beam) en mode II.

La comparaison des valeurs du résultat obtenu par cette méthode avec ceux trouvés dans la littérature montre l'efficacité et les bonnes performances de la méthode proposée pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie dans les structures sandwichs fissurées en mode I et II.

Mots Clés : Fissuration ; taux de restitution d'énergie ; méthode des éléments finis mixtes ; structures sandwichs.

Remerciement

Chaque travail que l'homme effectue est un voyage et une aventure pleine de surprises.

C'est un épilogue qui ouvre à l'homme les portes de l'inconnu sur le chemin qu'il poursuit tout le long de sa vie.

Je remercie Dieu de nous avoir donné la vie, la santé, le courage et la volonté d'entreprendre ce voyage et d'en apprécier le fruit de l'effort consenti.

Ce mémoire a été pour moi une occasion de rencontrer des gens que j'ai appris à connaître et dont j'apprécie les qualités, notamment, mon directeur de thèse Monsieur BOUZAINÉ salah, qui m'a encadré avec efficacité, clairvoyance et beaucoup de patience durant tout le temps qu'a exigé ce travail. Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour son soutien et encouragement face à la difficulté mais aussi pour sa disponibilité.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur BOUZERD hamoudi, Mon co-encadreur, que je tiens à lui adresser ma profonde reconnaissance.

J'exprime également toute ma reconnaissance aux membres de jurés, pour m'avoir fait l'honneur et accepté d'examiner ce travail de recherche et d'évaluer le contenu de ce mémoire de thèse de Doctorat.

Je remercie tous ceux qui m'ont assisté et contribué de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des abréviations

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Structures sandwichs : Généralités et modes de ruptures	4
1.1 introduction	4
1.2 Matériaux sandwichs et leurs constituants	4
1.3 Les éléments constituants les matériaux sandwichs	5
1.3.1 Les peaux.....	5
1.3.2 L'âme (cœur).....	5
1.3.3 L'adhésif.....	7
1.4 Intérêt des structures sandwichs	7
1.5 Modes de rupture et endommagement des structures sandwichs	8
1.5.1 Flambement généralisé des peaux	9
1.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression	9
1.5.3 Modes de rupture par indentation localisée.....	10
1.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement	10
1.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »	11
1.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling ».....	11
1.5.7 Dégradation de l'adhésive	12
1.6 conclusion.....	13
Chapitre II :Etude analytique de la fissuration dans les structures sandwichs.....	14
2.1 introduction	14
2.2 Différents types de rupture	15
2.3 Modes fondamentaux de la rupture et facteurs d'intensité de contrainte.....	15
2.3.1 Concept d'intensité des contraintes	15
2.3.2 Modes de rupture.....	17
2.4 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith.....	18
2.5 Propagation brutale des fissures	20
2.6 Calcul analytique du taux de restitution d'énergie.....	21
2.6.1 Méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie en Mode I	21
2.6.2 Méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie en Mode II	24

2.7 conclusion	26
Chapitre III : Modélisation numérique de la fissuration dans les structures sandwichs	28
3.1 introduction	28
3.2 Formulation de l'élément d'interface	29
3.2.1 Elément mixte de Reissner	30
3.2.2 Elément de référence RMQ-5	35
3.2.3 Construction de l'élément RMQ-11	36
3.2.4 Construction de l'élément RMQ-7	40
3.2.5 Construction de l'élément d'interface RMQ-7 inversé	42
3.3 Calcul du taux de restitution d'énergie	45
3.4 Conclusion.....	47
Chapitre IV :Validation du modèle	48
4.1 introduction	48
4.2 Etude numérique des essais du délaminage en mode I.....	48
4.2.1 Etude d'une poutre sandwich symétrique	48
4.2.2 Etude d'une poutre sandwich asymétrique.....	52
4.2.3 Calcul du taux de restitution d'énergie critique	55
4.3 Calcul du taux de restitution d'énergie critique en mode II	57
4.4 conclusion	59
Conclusion Générale	61
Références.....	63

Liste des Tableaux

Tableau 3.1 Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss	39
Tableau 4.1 Propriétés mécaniques du sandwich [6].	49
Tableau 4.2 Différents maillages d'une poutre symétrique.	50
Tableau 4.3 Taux de restitution d'énergie du mode I à partir du test DCB.	51
Tableau 4.4 Dimensions d'une poutre sandwich asymétrique de type (UDCB) [5].	52
Tableau 4.5 Propriétés mécaniques du sandwich [5].	53
Tableau 4.6 Différents maillages d'une poutre asymétrique.	53
Tableau 4.7 Comparaison des données calculées et expérimentales pour l'essai (UDCB).	53
Tableau 4.8 Différents maillages des poutres asymétrique.	54
Tableau 4.9 Le taux de restitution d'énergie pour différentes tailles d'une poutre UDCB.	54
Tableau 4.10 Caractéristiques géométriques du sandwich en poutre DCB [30].	55
Tableau 4.11 Propriétés mécaniques du matériau [30].	56
Tableau 4.12 Différents maillages de la poutre symétrique DCB.	56
Tableau 4.13 Calcul du taux de restitution d'énergie critique.	56
Tableau 4.14 Dimensions de la poutre CSB (cracked sandwich beam) [40].	57
Tableau 4.15 Propriétés mécaniques de la poutre CSB (cracked sandwich beam) [40]	58
Tableau 4.16 Différents maillages d'une poutre CSB en mode II.	58
Tableau 4.17 Comparaison des résultats de G_{IC} obtenus à partir des différentes méthodes.	59

Liste des Figures

Figure 1.1 Schématisation d'une structure sandwich.....	4
Figure 1.2 Composants d'un panneau sandwich à âme pleine[27].....	6
Figure 1.3 Composants d'un panneau sandwich à âme creuse[27].	6
Figure 1.4 Comparaison des performances mécaniques en flexion avec son homologue monolithique[29].....	8
Figure 1.5 Comparaison d'une poutre sandwich avec une poutre IPN[29].	8
Figure 1.6 Flambement généralisé des peaux du sandwich [30].....	9
Figure 1.7 Rupture des peaux en traction et en compression [30].	10
Figure 1.8 Mode de rupture par indentation localisée[30]	10
Figure 1.9 Mode de rupture par cisaillement de l'âme[30].....	10
Figure 1.10 Flambement généralisé de l'âme [30].....	11
Figure 1.11 Flambement localisé « wrinkling » [28]	12
Figure 1.12 Flambement généralisé « dimpling » [28].....	12
Figure 1.13 Dégradation de l'adhésif [28].	12
Figure 2.1 Défaut de longueur $2a$ dans une plaque infinie[35].....	15
Figure 2.2 Contraintes près de l'extrémité d'une fissure[36].....	16
Figure 2.3 Les trois modes de propagation de fissure[38].	17
Figure 2.4 Fissure sollicitée en mode I [35].	19
Figure 2.5 Variables nodales pour le calcul de G_I [6].....	23
Figure 2.6 Le test CSB.....	24
Figure 2.7 La charge –déplacement [41].....	25
Figure 2.8 Définition des coordonner de $x-z$ d'une poutre CSB [40].....	25
Figure 2.9 Illustration du transfert de charge dans la région fissurée [40].....	26
Figure 3.1 Maillage d'une structure sandwich	26
Figure 3.2 L'élément fini mixte RMQ-7 et l'élément de référence.	26
Figure 3.3 Elément de Reissner.....	28
Figure 3.4 Elément de référence RMQ-5	32
Figure 3.5 Elément RMQ-11	34
Figure 3.6 Elément RMQ-7.....	37

Figure 3.7 Deux éléments RMQ-7 assemblés	40
Figure 3.8 Élément RMQ-7 inversé et élément de référence	40
Figure 3.9 Maillage à la pointe de la fissure après l'extension δa	43
Figure 4.1 Epreuve d'une poutre DCB (Double Cantilever Beam) [6].	46
Figure 4.2 Epreuve d'une poutre UDCB ((Unsymmetrical Double Cantilever Beam) [5].	48
Figure 4.3 Délaminage d'une poutre DCB [30].	51
Figure 4.4 Essai cracked sandwich beam(CSB) [41].	53

Liste des abréviations

ε_{ij} : Tenseur de déformation

σ_{ij} : Tenseur de contraintes

(1, 2, z) : repère local

(1', 2', z) : repère global

E_i : Module d'élasticité de monocouche dans le sens i.

E_c ; module d'élasticité du cœur

E_f . module de flexion de la peau

h_f : l'épaisseur de la peau

h_c ; épaisseur du cœur

ν_{ij} : Coefficient de poisson de monocouche dans le plan i,j.

G_{ij} : Module de cisaillement de monocouche dans le plan i,j.

e_i^0 : Déformation dans le plan

N : Effort Normal

T : Effort tranchant

M : Moment de flexion

h_1 : Épaisseur de la peau

h : Épaisseur du cœur

P : Charge totale exercée au milieu de la poutre

P_c : Charge critique

a : Longueur de la fissure

Δ : Facteur de correction de la rotation à la pointe de la fissure

K_I : Intensité de contrainte en mode I de rupture

K_{IC} : Facteur d'intensité de contrainte critique en mode I

G_I : Taux de restitution d'énergie en mode I

G_{Ic} : Taux de restitution d'énergie critique

b : Largeur de l'éprouvette

C : Compliance

δ : Déplacement

S_{ijkl} : Composantes de la matrice de souplesse.

λ_i, β_i : multiplicateurs de Lagrange

f_i : forces de volume données

\bar{u}_i : déplacement imposé sur S_u

\bar{T}_i : traction imposée sur S_σ

$[I]$: Matrice unité

$[S]$: Matrice des souplesses

A^e : Aire élémentaire

e : Epaisseur de l'élément (supposée constante)

L_σ : la partie du contour de l'élément où les efforts $\{\bar{T}^e\}$ sont imposés.

$\{\sigma\}$: Vecteur de contraintes pour un élément.

$\{\varepsilon\}$: Vecteur de déformations pour un élément.

$\{u\}$: Champ de déplacements

$\{f^e\}$: Vecteur des forces de volume.

D'_{11} : Coefficient de flexion

A_{SS}^* : Coefficient de cisaillement

Introduction Générale

Introduction générale

Les structures sandwichs offrent de nombreux avantages dans divers secteurs industriels, tels que la construction automobile, l'aéronautique, le génie civil ...etc. Leur utilisation continue d'augmenter rapidement, en raison de la nécessité de développer de nouveaux matériaux à haute performance et à faible densité qui conduit à une réduction dans le poids total et la consommation des carburants. Les structures sandwichs ont deux peaux rigides et minces séparées par une âme (cœur) à faible rigidité et épaisse. Leurs concepts ont une excellente technique de construction qui combine entre le poids, la rigidité et la résistance.

Un des phénomènes les plus importants dans l'étude des matériaux composites en général et les structures sandwichs en particulier est la fissuration qui peut conduire à la ruine locale ou globale de la structure. Les fissures générées par des impacts à basse vitesse et à des chocs, qui sont souvent de nature accidentelle, peuvent se propager jusqu'à provoquer la rupture prématurée de la pièce.

Le recours aux méthodes numériques devient une nécessité pour les chercheurs afin d'approcher ce genre de problème en utilisant les concepts de la mécanique de la rupture qui tient compte des discontinuités causées par la fissuration et modélisées correctement la singularité à la pointe de la fissure où une concentration de contraintes est constatée. C'est pourquoi de nombreuses études antérieures se sont concentrées sur la rupture dans les structures sandwichs en mode I (mode d'ouverture) et en mode II (mode de glissement plan). Cependant, d'autres études ont été consacrées à la compréhension et à la caractérisation des propriétés des fissures et des fractures interfaciales en utilisant différentes approches analytiques, numériques et expérimentales. Parmi les travaux qui ont traité le phénomène de la fissuration en mode I et II et ont mené à l'évaluation du taux de restitution d'énergie dans les matériaux sandwichs, On a considéré que ceux ayant conduit à des résultats importants.

Avilés et Carlsson [1] ont analysé la compliance et le taux de restitution d'énergie d'un sandwich en poutre DCB (double cantilever beam) par la théorie des poutres, la méthode de EFA (elastic foundation analysis) et la méthode des éléments finis (FEA). Østergaard et al [2] ont présenté une évaluation analytique par la méthode J-integral afin de calculer le taux de restitution d'énergie pour les interfaces fissurées d'un sandwich avec des peaux isotropes. Nairn [3] a calculé le taux de restitution d'énergie dans les stratifiés hétérogènes soumis à des contraintes résiduelles.

Wang et Zhang [4] ont développé une nouvelle solution analytique pour calculer le taux de restitution d'énergie, où ils ont analysé le délaminage typique dans un sandwich puis dans les joints collés. Ils ont analysé le champ de contraintes à l'aide d'une méthode basée sur les contraintes d'interface. Davidson et al [5] ont effectué des essais expérimentaux sur une poutre sandwich DCB (double cantilever beam) avec une modification au niveau de la géométrie pour obtenir UDCB (Unsymmetrical Double Cantilever Beam), et ENF (End Notch Flexure), afin de calculer le taux de restitution d'énergie critique en mode I et II respectivement.

Shah et Tarfaoui [6] ont comparé différentes approches de calcul du taux de restitution d'énergie dans un sandwich en modes I et en mode II, dont une étude expérimentale a été faite par un seul type d'âme avec la même densité et à différentes épaisseurs afin de déterminer l'effet de la mise à l'échelle sur le calcul du TRE (taux de restitution d'énergie). Une deuxième étude a été réalisée par Shah et Tarfaoui [7] où ils ont étudié l'effet de l'épaisseur de l'adhésif sur le calcul du taux de restitution d'énergie en mode I et II. Une étude comparative a été menée entre les différentes approches.

L'objectif principal de cette étude est d'analyser le problème de fissuration dans les structures sandwichs en modes I et II. Une technique numérique a été utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie en mode I et II et valider par la suite les résultats obtenus avec ceux établis par d'autres études. Cette méthode [8] est basée sur la formulation mixte de Reissner et consiste à associer la méthode d'extension virtuelle de fissure avec l'élément fini mixte RMQ-7 (Reissner Modified Quadrilateral) pour la détermination du taux de restitution d'énergie (TRE) des interfaces fissurées dans les structures sandwichs. Les tests DCB (Double Cantilever Beam) [9,11] et UDCB (Unsymmetrical Double Cantilever Beam) [12,14] sont utilisés pour modéliser le mode I. Le test CSB (Cracked Sandwich Beam) [15,17] est utilisé pour le mode II.

Plusieurs tests numériques, avec différentes valeurs de la taille initiale de la fissure et les dimensions de la poutre sandwich, sont présentés et les résultats obtenus à l'aide de la méthode proposée sont comparés à ceux trouvés dans la littérature.

Cette thèse relatant ce travail en quatre chapitres. Le premier chapitre est réservé à la présentation des généralités sur les structures sandwichs en commençant par les définitions, les domaines d'application et les différents constituants. On termine ce chapitre par l'étude des différents modes d'endommagement et les conditions qui mènent à la rupture et la ruine d'une structure sandwich.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude analytique de la fissuration des structures sandwichs en modes I et II. Les concepts de base de la mécanique de la rupture et les différentes méthodes

analytiques d'évaluation du taux de restitution d'énergie des structures sandwichs fissurées en modes I et II sont présentés dans ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, on a présenté une modélisation numérique pour l'étude de la fissuration dans les structures sandwichs. Les différentes étapes de formulation de l'élément fini mixte (RMQ-7) utilisé pour cette modélisation sont détaillés dans ce chapitre. La technique numérique de calcul du taux de restitution d'énergie en mode I et II et qui consiste à associer la méthode d'extension virtuelle de fissure et l'élément RMQ-7 est définie à la fin de ce chapitre. Le quatrième chapitre est dédié à la validation de la modélisation numérique proposée dans ce travail par le traitement de quelques exemples d'application. Ces exemples numériques traitent le problème de fissuration en mode I et II dans les structures sandwichs. Les tests DCB et UDCB pour modéliser le mode I et le test CSB pour le mode II. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des études antérieures.

Ce travail est achevé par une conclusion qui permettra de proposer une synthèse des principaux résultats obtenus et par des perspectives ouvrant la voie à d'éventuels nouveaux travaux.

Chapitre I

Structures sandwichs : Généralités et modes de rupture

Chapitre I

Structures sandwichs : Généralités et modes de rupture

1.1 Introduction

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on peut citer les matériaux sandwichs qui occupent une place importante dans la construction des pièces composites, dont leur consommation continue d'augmenter à cause de leur rapport rigidité /légèreté.

L'objectif de ce premier chapitre est de présenter les matériaux sandwichs en mettant en évidence tous les modes d'endommagement et de rupture des structures sandwichs.

1.2 Matériaux sandwichs et leurs constituants

Les matériaux sandwichs sont obtenus à partir de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux et d'un matériau d'âme (figure 1.1). Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module d'élasticité élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. La colle ou l'adhésif est le troisième composant du matériau sandwich. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et une bonne transmission des contraintes d'un milieu à un autre.

Du fait de la constitution des matériaux sandwichs, leurs propriétés mécaniques peuvent être ajustées en modifiant les propriétés de la peau et de l'âme et l'épaisseur de chaque composant en maintenant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [18,19].

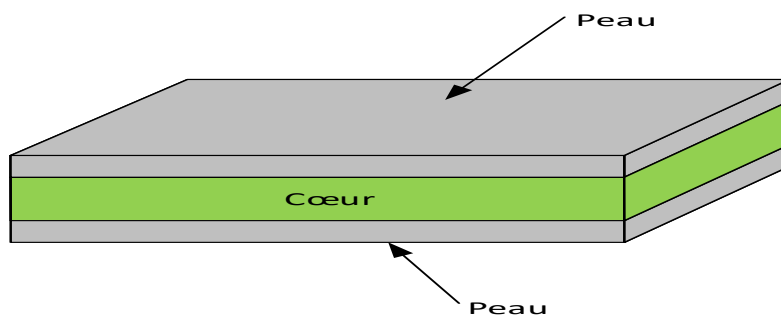


Figure 0.1 Schématisation d'une structure sandwich.

1.3 Eléments constituant les matériaux sandwichs

1.3.1 Les peaux

Généralement de faibles épaisseurs, un module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction, où dans une structure sandwich les peaux peuvent être réalisées en plusieurs matériaux différents (un matériau isotrope, orthotrope ou un matériau composite). Elles peuvent être en métal, bois ou matériau composite, généralement les peaux d'une structure sandwich sont constituées de fibres (mât ou tissu) enrobées d'une matrice à base de résine. Le choix de la nature des couches dépendra des performances mécaniques exigées. Le rôle principal des peaux est de reprendre les efforts de flexion traduite par des contraintes normales (traction ou compression). Cependant, pour minimiser le poids de la structure on préfère généralement des peaux sous forme de feuilles en matériaux composites [20,21], dont on peut distinguer :

Les feuilles métalliques : Alliages divers afin d'assurer la légèreté de la structure. Les alliages d'aluminium sont fréquemment les plus rencontrés [22].

Les feuilles non-métalliques : En général ce sont des matériaux composites, on distingue plusieurs types selon le renfort utilisé [22].

- **Fibres de verre :** Leur excellent rapport performance prix, permet de les placer au premier rang des renforts, actuellement ils sont les plus utilisés dans la construction des structures composites.
- **Fibres de carbone :** qui ont de très fortes propriétés mécaniques.
- **Fibres de kevlar ou aramides :** présentent des propriétés mécaniques élevées en traction et une faible résistance à la compression.

Ces matériaux sont bien souvent anisotropes et leur utilisation nécessite donc une bonne connaissance des sollicitations externes auxquelles ils seront soumis [23].

1.3.2 L'âme (cœur)

L'âme en général a une très faible résistance à la flexion. Son rôle principal est de résister aux efforts de compression et de cisaillement. De plus, l'âme doit pouvoir supporter des charges localisées de poinçonnement. En fait, l'âme permet de classer les différentes structures des matériaux sandwich car les peaux sont identiques en matériaux et en épaisseurs. Afin que la

structure résiste à la charge de compression et de cisaillement l'âme doit être suffisamment solide et rigide. Si l'âme effondre, la rigidité globale du sandwich est perdue [24,25].

Parmi les âmes les plus utilisées, on cite les types suivants [26] :

a. Âme plein, en mousses

Les plus utilisées par rapport aux autres types de cœur, qui étaient constituées à partir de polychlorure de vinyle, polystyrène, polyuréthane ou d'autres polymères synthétiques. Leurs caractéristiques mécaniques sont une bonne adhérence à la résine, peu d'absorption d'eau, et une faible résistance à l'impact, par contre elle présente certains nombres d'inconvénients et notamment une très grande sensibilité à l'humidité. La figure 1.2 montre les éléments constitutifs d'un panneau sandwich à âme pleine [27].

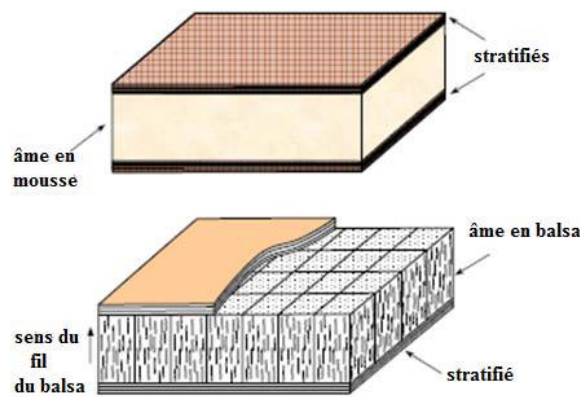


Figure 1.2 Composants d'un panneau sandwich à âme pleine [27].

b. Âme creuse

La figure 1.3 représente les différents types de l'âme creuse [27] :

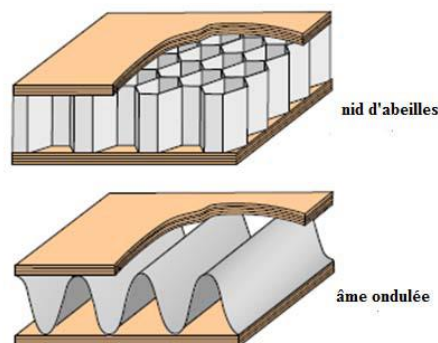


Figure 1.3 Composants d'un panneau sandwich à âme creuse [27].

Âme en nids d'abeilles

L'âme en nid d'abeilles, connue sous le nom « Nida », est un matériau structural souple constitué de mailles hexagonales. Ils sont obtenus par expansion ou corrugation.

Il est composé de différents matériaux, comme le papier ou l'aluminium. Le nida est une structure anisotrope dont les propriétés varient selon l'horizontale ou la verticale de la cellule. De plus, ces dimensions, l'épaisseur de paroi de Nida et les méthodes de traitement sont tous des paramètres qui affectent la résistance au cisaillement transversal et longitudinal de Nida. Les variétés les plus courantes sont le Nomex et le Korex, qui sont fabriqués à partir de Kevlar [26,27].

Âme en profilés divers

Âmes ondulées formée fréquemment de matières plastiques renforcées par des fibres. Le choix de la forme du profile est souvent guide par les exigences de tenue mécanique de la structure. Des utilisations secondaires peuvent être attribuées à ce type d'âme comme le transport de fluides ou le passage de câbles électriques.

Le noyau ondulé est généralement formé de plastique renforcé de fibres. Le choix de la forme du profil est généralement guidé par les exigences de la résistance mécanique de la structure. Des usages secondaires peuvent être attribués à ce type d'âme, comme le transport de fluides ou pour passage des câbles électriques [26,27].

1.3.3 L'adhésif

L'assemblage des peaux et de l'âme peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Son rôle principal est de s'assurer la liaison entre les différentes couches du sandwich afin de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et à l'âme et de les protéger de l'environnement extérieur. L'adhésif doit être continu, d'épaisseur constante et sans porosité, lors des simulations numériques, on suppose que, l'adhésif entre les peaux et l'âme est considéré comme un assemblage direct quel que soit le mode d'assemblage [28].

1.4 Intérêt des structures sandwichs

Par rapport aux matériaux composites traditionnels dits monolithiques, le principal avantage de la structure sandwich est leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est généralement de l'ordre de 100 kg m^{-3} . On peut proposer le matériau le plus adapté à la structure

en modifiant la nature et l'épaisseur de la peau ou bien de l'âme. Ainsi, on augmente la rigidité de la structure par l'augmentation de l'épaisseur de l'âme ou le module d'élasticité de la peau qui fait augmenter son moment d'inertie, qui se traduira par le comportement en flexion du matériau. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante [29].

La figure 1.4 compare les propriétés mécaniques de flexion entre le panneau monolithique de référence et deux panneaux sandwich dont les peaux sont les mêmes pour tous les panneaux. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau, et par conséquent permettre d'augmenter fortement les caractéristiques en flexion et ce sans augmenter la masse volumique [29].

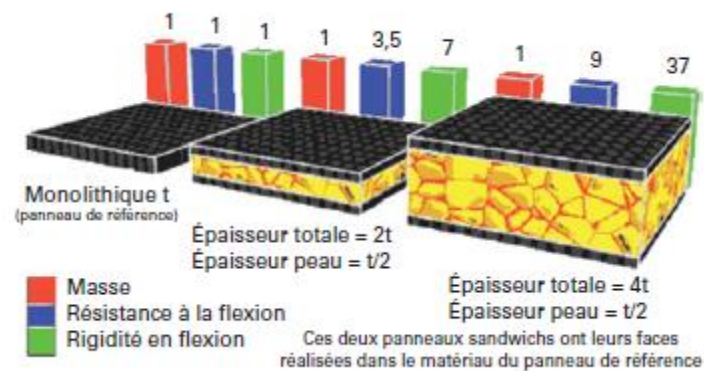


Figure 1.4 Comparaison des performances mécaniques en flexion avec son homologue monolithique [29].

Cette configuration du matériau sandwich peut être comparée à une poutre en IPN, où les peaux agissent considérer comme les deux ailes de la poutre et l'âme agissent comme le raidisseur central comme montré dans la figure 1.5, dont la peau supérieure est chargée en compression, la peau inférieure en traction, et l'âme en cisaillement.

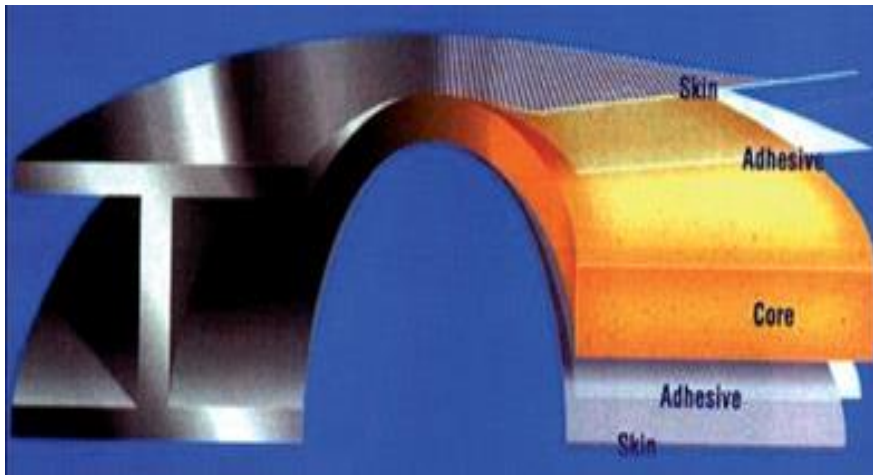


Figure 1.5 Comparaison d'une poutre sandwich avec une poutre IPN [29].

1.5 Modes de rupture et endommagement des structures sandwichs

Les modes de rupture et d'endommagement des structures ont été étudiés par plusieurs chercheurs [27,28,30–32].

Nous représentons dans cette partie les différents modes de dégradations des structures sandwichs soumis aux sollicitations.

1.5.1 Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité sur toute la poutre comme montré dans la figure 1.6. Le flambement généralisé peut apparaître quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture. Plusieurs paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, et le module de cisaillement de l'âme, influent sur la charge qui cause le flambement du sandwich.

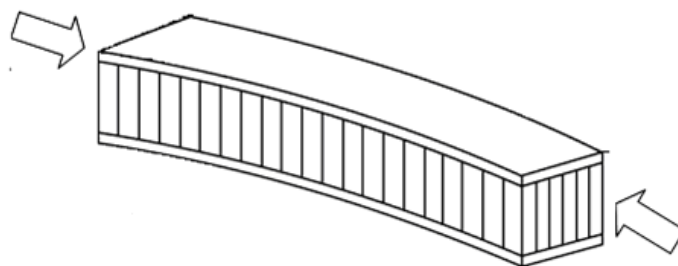


Figure 1.6 Flambement généralisé des peaux du sandwich [30].

Afin d'éviter le phénomène de flambement généralisé, on utilise des peaux avec un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux et de l'âme, ou d'utiliser un matériau pour l'âme avec un module de cisaillement plus élevé.

1.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression

Figure.1.7 montre la rupture des peaux en traction ou en compression qui peut se traduire lorsque, les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles du matériau constituant les peaux. Afin d'éviter ce phénomène en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, ou bien d'augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), aussi bien par l'augmentation de l'épaisseur de l'âme ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux.



Figure 1.7 Rupture des peaux en traction et en compression [30].

1.5.3 Modes de rupture par indentation localisée

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique comme le montre la figure 1.8.

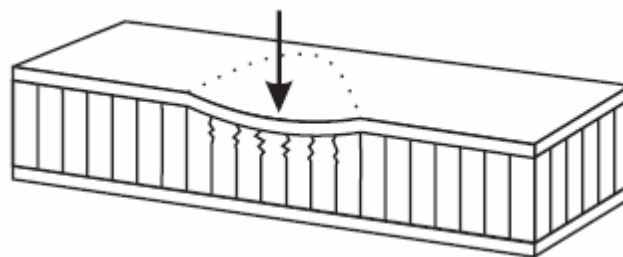


Figure 1.8 Mode de rupture par indentation localisée [30].

1.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement

La figure 1.9 représente la rupture de l'âme par cisaillement, cette rupture peut traduite si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du

matériau de l'âme. Afin d'éviter ce phénomène, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme, et ne pas d'utiliser un matériau différent pour les peaux, ou bien de changer leur épaisseur.

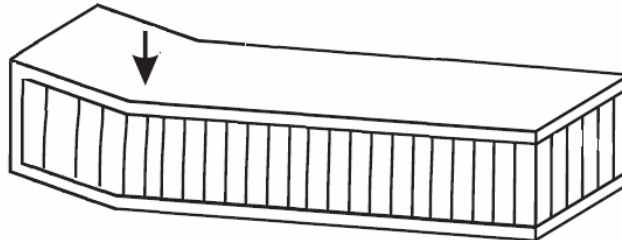


Figure 1.9 Mode de rupture par cisaillement de l'âme [30].

1.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme (selon la figure 1.10). Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.

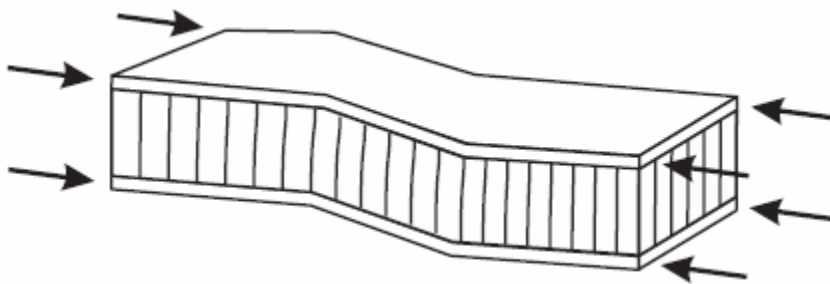


Figure 1.10. Flambement généralisé de l'âme [30].

1.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » est représenté dans la figure 1.11. Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dimpling », schématisée sur la figure 1.12.



Figure 1.11. Flambement localisé « wrinkling » [28].



Figure 1.12 Flambement généralisé « dimpling » [28].

1.5.7 Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme se fait généralement selon trois types

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La figure 1.13 représente les modes de dégradation de l'adhésif, où l'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

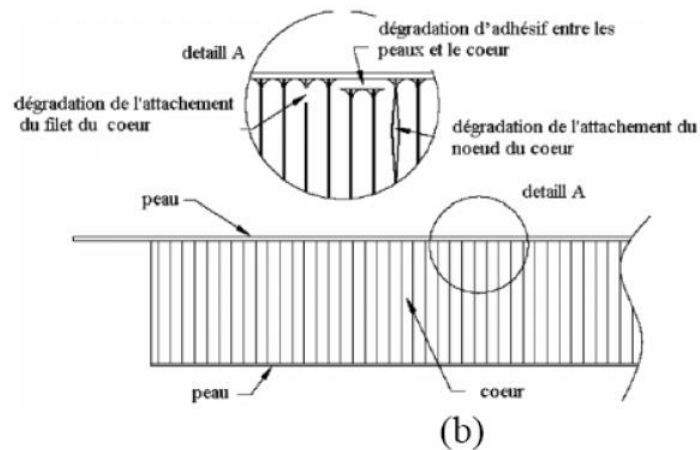


Figure 1.13 Dégradation de l'adhésif [28].

1.6 Conclusion

Des notions de base sur les matériaux sandwichs et les modes d'endommagement et de rupture sont présentés dans ce chapitre. Afin de constituer une base de connaissances sur les structures sandwichs et ces différents constituants et leurs modes de dégradations soumises aux sollicitations qui présentent un premier pas pour l'étude du problème de fissuration dans les structures sandwichs.

Chapitre II

Etude analytique de la
fissuration dans les
structures sandwichs

Chapitre II

Etude analytique de la fissuration dans les structures sandwichs

2.1 Introduction

La mécanique de la rupture permet d'étudier le comportement des fissures dans les matériaux ou les structures, notamment pour établir des critères de propagation, ou de non-propagation des fissures. Afin de mettre en place ces critères de propagation, il est nécessaire d'introduire la notion de ténacité, et en particulier le taux de restitution d'énergie critique, la capacité d'un matériau à résister à l'avancement d'une fissure. Cette notion de ténacité est fondamentale pour le dimensionnement de la tolérance aux dommages, c'est-à-dire pour le dimensionnement d'une structure présentant déjà un dommage, ce qui est en général le cas pour les structures composites.

La mécanique de la rupture a été introduite dans les années 1920 par A.A. Griffith et largement reformulée et précisée par G.R. Irwin dans les années 1950 pour les matériaux métalliques isotropes homogènes. Actuellement elle a largement fait ses preuves et couramment utilisée dans l'industrie. Son application dans les structures composites stratifiées est encore un domaine complexe et relativement nouveau, ce qui nécessite la prudence en raison de leur forte anisotropie et hétérogénéité.

Les structures composites sont en effet des matériaux complexes. En particulier, la ténacité associée aux différents modes de rupture des composites dépend de plusieurs paramètres : géométrie, type et orientation des couches inférieure et supérieure, vitesse de contrainte, contrainte de compression. Afin d'entamer la modélisation numérique de ce type d'endommagement, il faut mettre en considération la compréhension physique de ces mécanismes de rupture [33].

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, on a fait une présentation des notions de la mécanique de rupture applicable aux matériaux composites. La deuxième partie a été réservée à la définition des différentes méthodes analytiques utilisées pour la détermination du taux de restitution d'énergie en modes I et II dans les structures sandwichs. Ces méthodes analytiques vont être utilisées dans le quatrième chapitre pour valider les résultats obtenus par le modèle numérique proposé pour la détermination du taux de restitution d'énergie en modes I et II pour les structures sandwichs.

2.2 Différents types de rupture

Pour un essai sous chargement monotone d'une éprouvette de traction simple, on peut distinguer différents types de modes de rupture [34] :

- **Rupture élastique fragile** : le comportement global est linéaire élastique et la rupture intervient de façon brutale (c.-à-d. sans signes d'avertissement). Les déformations à la rupture sont généralement faibles. Les matériaux ayant ce type de comportement sont les céramiques et les verres.
- **Rupture quasi fragile** : le comportement global est non linéaire. Des décharges partielles indiquent une forte perte de rigidité qui révèle des microfissurations du matériau tel que : composites, céramiques (en particulier les composites en céramique), les bétons.
- **Rupture plastique fragile** : ce type de matériau se rompt brutalement pour des déformations relativement faibles. C'est le cas des métaux de type cubique centré ou hexagonal lorsque la température est suffisamment faible.
- **Rupture ductile** : ce type de matériau se rompt progressivement. Une fissure peut s'amorcer au sein de la matière. L'endommagement peut être relativement important. Les métaux cubiques à faces centrées ont ce comportement. Les métaux de type cubique centré sont ductiles pour une température suffisamment élevée.

2.3 Modes fondamentaux de la rupture et facteurs d'intensité de contrainte

2.3.1 Concept d'intensité des contraintes

Afin de décrire le facteur d'intensité de contrainte, on considère une fissure de longueur $2a$ (selon la figure 2.1) dans une plaque de dimensions infinies, où la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans le plan de chargement.

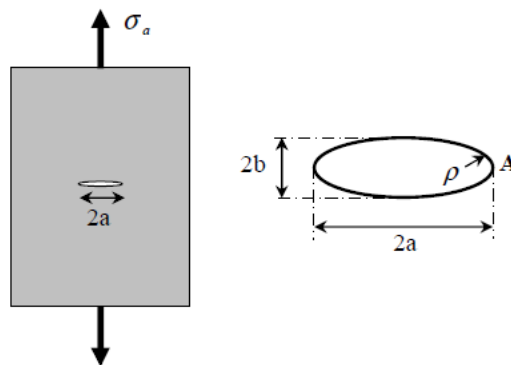


Figure 2.1 Défaut de longueur $2a$ dans une plaque infinie [35].

Plus précisément, la figure 2.2 schématise l'ensemble des contraintes appliquées sur un élément centré en un point M de coordonnées polaires (r, θ) par rapport à l'extrémité d'une fissure sollicitée en mode I.

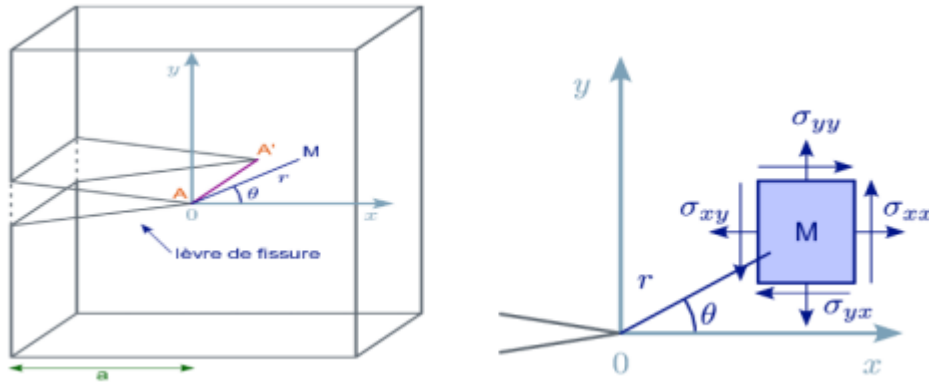


Figure 2.2 Contraintes près de l'extrémité d'une fissure [36].

Ces contraintes s'expriment à partir d'un paramètre appelé, facteur d'intensité de contraintes (FIC), en mode I noté K_I , que l'on peut trouver dans les manuels spécialisés, pour différentes configurations de chargement. L'expression du facteur d'intensité de contraintes K_I dans le cas de la figure 2.2 est donné par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (2.1)$$

La relation entre le facteur d'intensité de contrainte et les contraintes dans le plan peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2.2)$$

La fonction $f_{ij}(\theta)$ contient les fonctions trigonométriques décrites dans le paragraphe ci-après. Dans l'approche basée sur le concept de facteur d'intensité de contrainte de la mécanique linéaire de la rupture, la rupture se produit lorsque le facteur K_I atteint la valeur critique K_{IC} qui correspond à la ténacité du matériau. Dans cette approche, le facteur d'intensité de contrainte K_I est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est caractérisée par la ténacité K_{IC} .

2.3.2 Modes de rupture

Irwin, G. R. (1957) [37] considère les fissures comme des surfaces de discontinuité des déplacements. Puisque chacune des trois composantes du vecteur déplacement peut être affectée. A cet effet, il a observé et défini trois modes indépendants possibles pour les mouvements respectifs des deux surfaces d'une fissure, où les trois modes fondamentaux sont représentés dans la figure 2.3.

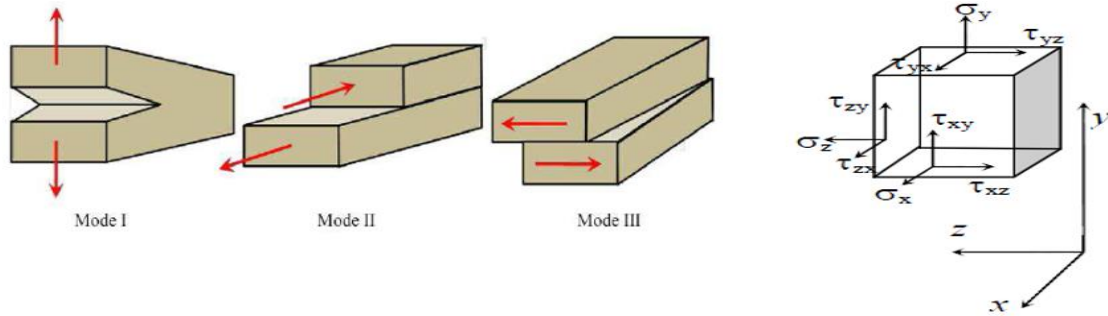


Figure 2.3 Les trois modes de propagation de fissure [38].

a) Mode I (Mode d'ouverture)

Dans ce cas, les lèvres de la fissure s'écartent l'une par rapport à l'autre selon la direction y qui apparaît lors d'un chargement σ_y . Le facteur d'intensité de contrainte en mode I est défini par:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0, 0) \quad (2.3)$$

En cas de compression, il ne peut être négatif car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres.

b) Mode II (Mode de glissement)

Dans ce cas, les lèvres glissent l'une sur l'autre selon la direction perpendiculaire au front de fissure x, qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{xy} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode II est défini par :

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yx}(r, 0, 0) \quad (2.4)$$

c) Mode III (Mode de déchirement)

Dans ce cas, les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction parallèle au front de la fissure z qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{yz} . Le facteur d'intensité de contrainte

du mode III est défini par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (2.5)$$

Dans le cas général, les relations entre les coefficients d'intensité de contraintes et les contraintes dans les trois modes sont exprimées par :

En Mode I

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

En Mode II

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

En Mode III

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Lorsque la structure fissurée est simultanément sollicitée dans les trois modes, le principe de superposition en élasticité linéaire est donné par la formule suivante :

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.9)$$

2.4 Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith

Dans le cadre des hypothèses d'élasticité linéaire isotrope et homogène, le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte en pointe de fissure sont reliés, comme schématisé sur la figure 2.4.

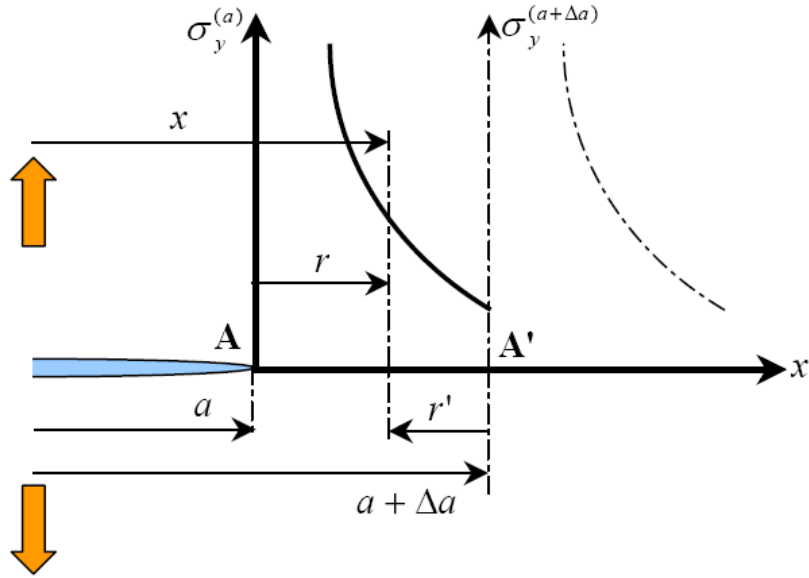


Figure 2.4 Fissure sollicitée en mode I [35].

Selon la figure 2.4, la fissure a une longueur initiale a et se propage avec Δa . L'extrémité de la fissure se déplace donc de la position A ($x=a$) à la position A' ($x=a+\Delta a$). Le champ de contrainte en aval de l'extrémité de la fissure ($\theta = 0$) est donné par:

$$\sigma_y(r, \theta, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.10)$$

Pour déterminer l'énergie de propagation de la fissure ou le taux de restitution d'énergie G , il est plus commode de calculer le travail de régression de la fissure de la position A' à la position(A). Autrement dit, on calcule le travail qu'il faut appliquer aux lèvres de la fissure pour qu'elles se referment. En mode I, la relation entre le taux de restitution d'énergie et le coefficient d'intensité de contrainte est exprimée par:

$$G_I = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} \Rightarrow G_I = \frac{K_I^2}{\mu} \left(\frac{1 - \nu^*}{2} \right) \quad (2.11)$$

En déformations planes: $\nu^* = \nu$

En contraintes planes: $\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}$

Pour le mode II, les expressions étant les mêmes que pour le mode I, les mêmes calculs conduisent à:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{\mu} \left(\frac{1 - \nu^*}{2} \right) \quad (2.12)$$

Après calcul, l'énergie de Griffith en mode III s'exprime :

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.13)$$

Dans le cas général, lorsqu'on a coexistence des trois modes de changement, l'énergie de Griffith s'écrit:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1}{\mu} [(1 - \nu^*)(K_I^2 + K_{II}^2) + K_{III}^2] \quad (2.14)$$

En déformations planes:

$$G = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)(K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu)K_{III}^2] \quad (2.15)$$

En contraintes planes:

$$G = \frac{1}{E} [(K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu)K_{III}^2] \quad (2.16)$$

2.5 Propagation brutale des fissures

La propagation brutale de la fissure interviendra lorsque l'énergie de Griffith G atteindra une valeur critique notée G_C . Cette valeur critique G_C correspond à une valeur d'intensité des contraintes notée K_{IC} , où K_{IC} est relié à l'énergie critique G_C donné par les formules établies précédemment (2.15 à 2.16). Dans le cas général, on note :

$$G_c = \frac{K_{Ic}^2 + K_{IIc}^2}{E'} + \frac{K_{IIIc}^2}{\mu} \quad (2.17)$$

Avec :

$E' = E$ en contraintes planes.

$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ en déformations planes.

μ : est le module de cisaillement.

Irwin postule qu'il existe une valeur critique de K_I , appelée ténacité (et noté K_{IC}). En deçà de laquelle la fissure n'évolue pas. Une fois cette valeur critique atteinte, la fissure avance :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } K_I < K_{IC} & \text{aucune évolution de la fissure.} \\ \text{Si } K_I = K_{IC} & \text{la fissure avance.} \end{array} \right.$$

2.6 Calcul analytique du taux de restitution d'énergie

Différentes approches analytiques ont été formulées dans la littérature pour le calcul du taux de restitution d'énergie en mode I et II « G_I et G_{II} ».

2.6.1 Méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie en Mode I

a) Théorie des poutres modifiée 1 (Modified Beam Theory 1)

La théorie des poutres modifiée 1 [6] modélise la poutre DCB (Double Cantilever Beam) comme une simple poutre encastrée. Elle est basée sur la théorie des poutres de Timoshenko. Le taux de restitution d'énergie est évalué à partir de la relation suivante :

$$G_I = \frac{3P\delta}{2ba} \quad (2.18)$$

où "P" est la charge qui produit le déplacement " δ ", "b" est la largeur de l'échantillon et "a" est la longueur de la fissure. Cette théorie calcule le G_I en tenant compte de la compliance des poutres fissurées.

b) Théorie des poutres modifiée 2 (Modified Beam Theory 2)

Dans la théorie des poutres modifiée 2 [6], on prend en compte la rotation du front de fissure ainsi que l'interface partiellement fissurée pour tenir compte du pontage des fibres. Le taux de restitution d'énergie est calculé à partir de la formule suivante :

$$G_I = \frac{3P\delta}{2b(a + |\Delta|)} \quad (2.19)$$

Cette théorie prend en compte la rotation du fond de fissure. Il a également été observé lors des expériences que les éprouvettes DCB ont subi de grands déplacements pour propager la fissure, d'où un facteur de correction doit être inclus pour tenir compte des interfaces partiellement séparées. Pour cette correction, on doit régler le problème à l'aide de l'analyse des fondations élastiques élaborée par (Avilés et Carlsson) [1],

$$\Delta = \left[a^3 + \frac{3aF_1}{2\lambda^2} + \frac{3F_2}{2\lambda^3} \right]^{1/3} - a \quad (2.20)$$

$$F_1 = \frac{\sinh^2(\lambda c) + \sin^2(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} + 2a\lambda \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) + \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} \quad (2.21)$$

$$F_2 = \frac{\sinh(\lambda c) \cosh(\lambda c) - \sin(\lambda c) \cos(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)} + a\lambda \frac{\sinh^2(\lambda c) + \sin^2(\lambda c)}{\sinh^2(\lambda c) - \sin^2(\lambda c)}$$

« P » est la force appliquée, « δ » le déplacement des deux poutres, « b » est la largeur de l'échantillon, « a » la longueur de la fissure, « Δ » est le facteur de correction de la rotation à la pointe de la fissure, « c » est la longueur de l'interface partiellement non bornée en général considérée comme (L-a). Pour la définition de λ se référer aux équations (2.22).

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{6E_c}{E_f h^3 h_c}} \quad (2.22)$$

Où « E_c » est le module d'élasticité du cœur, « E_f » est le module de flexion de la peau, « h_f » est l'épaisseur de la peau et « h_c » est l'épaisseur du cœur.

c) Méthode de calibration de la compliance (Compliance Calibration Method)

Une autre approche consiste à utiliser la méthode de calibration de la souplesse ou (Compliance Calibration method) notée CC [6,30]. La compliance est considérée comme une fonction de la poutre fissurée. Le taux de restitution d'énergie G_I est donnée par la formule suivante :

$$G_I = \frac{np^2 R a^{n-1}}{2b} \quad (2.23)$$

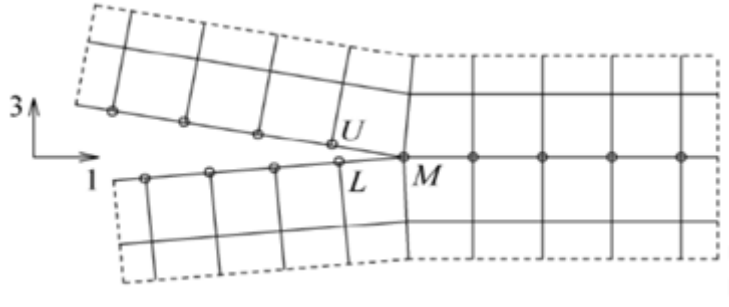
Où « R » est un log anti naturel de l'intersection d'une parcelle entre « Ln(C) » et « Ln(a) ».

d) Technique de fermeture virtuelle des fissures (Virtual crack closure technique (VCCT))[6]

La formule de G_I est donnée par :

$$G_I = \frac{\sigma_{M3}(w_U - w_L)}{2} \quad (2.24)$$

Les nœuds « U » et « L » sont déplacés à travers « W_U » et « W_L » dans la direction verticale. Le taux de restitution d'énergie est calculé en tenant compte de la contrainte au front de la fissure et des déplacements aux nœuds voisins, comme le montre la figure 2.5.

Figure 2.5 Variables nodales pour le calcul de G_I [6].

e) Méthode des poutres bi-couches déformables par cisaillement (shear deformable bi-layer beam theory)

Cette méthode a été utilisée pour les sandwichs asymétrique [5]. Afin d'étudier l'influence de la variation des matériaux et de la géométrie sur les résultats du DCB, ils ont utilisé une méthode analytique proposée par Wang et Qiao [39]. La formulation analytique est obtenue à l'aide d'une approche globale. L'expression du taux de restitution d'énergie en mode I donné par la formule suivante :

$$G_I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_T} + \frac{1}{B_B} \right) \left[V + k \left(M + \frac{h_T N}{2} \right) \right]^2 \quad (2.25)$$

M , N , V sont le moment effectif, les forces normales et de cisaillement sur la pointe de fissure d'interface. Le calcul de M , N et V pour la poutre DCB est donné par les formule suivante :

$$M = M_1 - \left(\frac{n}{\xi} A_M - \frac{1}{\xi} \frac{h_B}{2D_B} \right) M_t + \left(\frac{n}{\xi} A_N - \frac{1}{\xi} \frac{1}{C_B} \right) N_t \quad (2.26)$$

$$N = N_1 - A_M M_t + A_N N_t \quad (2.27)$$

$$V = V_1 - \left[\left(\frac{\eta}{\xi} + \frac{h_T}{2} \right) A_M - \frac{1}{\xi} \frac{h_B}{2D_B} \right] v_t \quad (2.28)$$

Avec :

$$\xi = \frac{h_T}{2D_T} - \frac{h_B}{2D_B}, \eta = \frac{1}{C_T} + \frac{1}{C_B} + \frac{(h_T + h_B)h_B}{4D_B} \quad (2.29)$$

$$A_M = \frac{(D_T + D_B)h_B + \xi D_T D_B}{2D_B(D_T + D_B)\eta + \xi D_T D_B(h_T + h_B)} \quad (2.30)$$

$$A_N = \frac{2(D_T + D_B)}{2C_B[2(D_T + D_B)\eta + \xi D_T(h_T + h_B)]} \quad (2.31)$$

$$k = \sqrt{\frac{\mathbf{B}_T \mathbf{B}_B [2(\mathbf{D}_T + \mathbf{D}_B)\eta + \mathbf{D}_T(\mathbf{h}_T + \mathbf{h}_B)\xi]}{\mathbf{D}_T \mathbf{D}_B (\mathbf{B}_T + \mathbf{B}_B)(2\eta + \mathbf{h}_T \xi)}} \quad (2.32)$$

Où :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{P}\mathbf{a}, \mathbf{N}_1 = \mathbf{V}_1 = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{N}_t = \mathbf{V}_t = \mathbf{0} \quad ;$$

« P » est la charge appliquée, « a » est la longueur de la fissure.

2.6.2 Méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie en Mode II

Le taux de restitution d'énergie a été calculé dans la littérature [40,41] par les méthodes suivantes :

Mingze Ma et al [41] proposé une méthode afin de calculer le taux de restitution d'énergie en mode II (G_{IIc}), où un échantillon de Glass fiber/balsa en poutre CSB (cracked sandwich beam) selon la figure 2.6 a été utilisé. La formule de G_{IIc} est donnée par :

$$G_{IIc} = \frac{p_c^2 a^2}{8b} \left(\frac{\lambda^2}{E_1 I_1} + \frac{(1-\lambda)^2}{E_1 I_1'' + E_2 I_2'} - \frac{1}{E_2 I_2 + 2E_1 I_1'} \right) \quad (2.33)$$

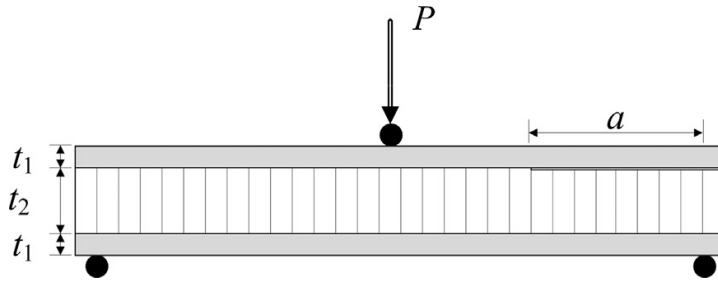


Figure 2.6 Le test CSB [41].

Avec :

Le moment de flexion à la pointe de fissure est donné par :

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \frac{p\mathbf{a}}{2}; \mathbf{M}_1 = \frac{p\mathbf{a}}{2}\lambda; \mathbf{M}_2 = \frac{p\mathbf{a}}{2}(1-\lambda)$$

$$\text{Où : } \lambda = \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_1 I_1'' + E_2 I_2'}$$

La charge critique P_c est déterminée à partir de la figure 2.7.

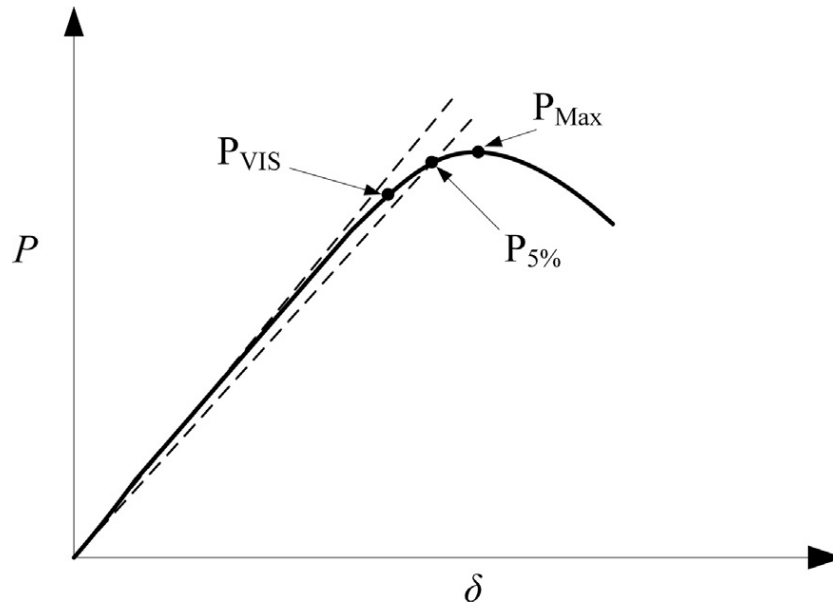


Figure 2.7 La charge –déplacement [41].

Les résultats de [41] ont été comparé par celle de [40] qui a calculé le taux de restitution d'énergie en mode II (G_{IIc}) à partir des deux méthodes suivante :

a) Méthode de la compliance dans une poutre CSB et le taux de restitution d'énergie (CSB compliance method) :

En raison des données limitées de [40], on donne que les formules explicatives du taux de restitution d'énergie.

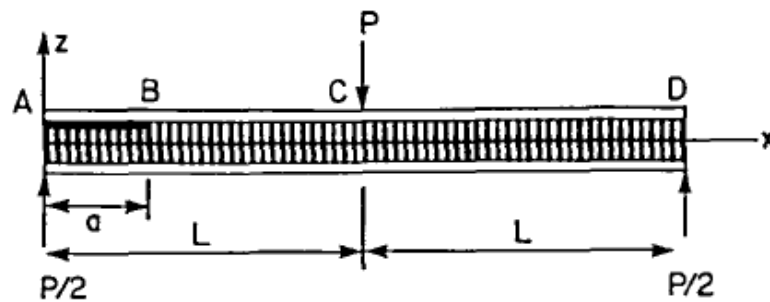


Figure 2.8 Définition des coordonner de x - z d'une poutre CSB [40].

La formule de G_{II} est donnée par :

La variation du moment de flexion pour les région AC et CD schématisé sur la figure 2.8

$$\text{La région AC : } M_x = \frac{-Px}{2b} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$\text{La région CD: } M_x = \frac{Px}{2b} - \frac{PL}{b} \quad L/2 \leq x \leq L$$

Où b est la largeur de la poutre.

$$G_{IIc} = \frac{P^2}{2b} \frac{dc}{da} \quad (2.34)$$

Avec :

$$C = \frac{L^3 (D'_{11})_{BC}}{6b} + \frac{L(A^*_{ss})_{BC}}{2bk} + \frac{a^3(D'_{11})_{AB} - (D'_{11})_{BC}}{12b} + \frac{a[(A^*_{ss})_{AB} - (A^*_{ss})_{BC}]}{4bk} \quad (2.35)$$

Par la combinaison des équations (2.34) et (2.35) on obtient :

$$G_{IIc} = \frac{p^2}{8b^2} \left\{ a^2 [(D'_{11})_{AB} - (D'_{11})_{BC}] + \frac{(A^*_{ss})_{AB} - (A^*_{ss})_{BC}}{k} \right\} \quad (2.36)$$

Où :

coefficient de flexion effectif : $(D'_{11})_{AB} = \frac{2P_2}{p} (D'_{11})_2$

coefficient de cisaillement effectif $(A^*_{ss})_{AB} = \frac{2P_2}{p} (A^*_{ss})_2$

Les coefficients de flexion et de de cisaillement effectif peuvent être obtenus par l'application d'une charge $P/2$ à une poutre de longueur a , comme schématisé sur la figure 2.9

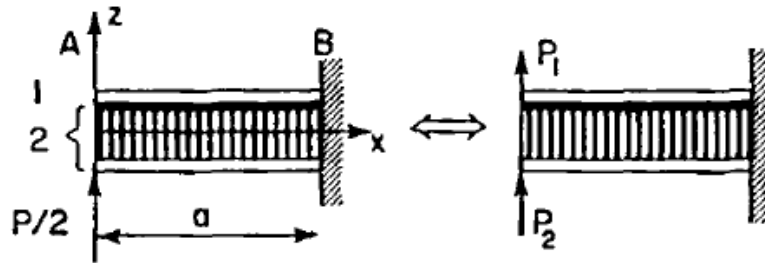


Figure 2.9 Illustration du transfert de charge dans la région fissurée[40].

b) Méthode de la compliance calibration (étalonnage) :

Des échantillons ont été utilisés pour calculer les valeurs critiques du taux de restitution d'énergie à partir d'un étalonnage de la compliance expérimentalement et l'équation (2.36).

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini, tout d'abord les concepts de base de la mécanique de la rupture, les paramètres décrivant la rupture et les modes de rupture qui peuvent survenir dans les structures sandwichs, à partir de ces notions de base nous avons pu identifier que la mécanique de la rupture aborde les problèmes de fissuration en deux approches équivalentes

,une approche locale et globale, où dans le cas des matériaux composites la détermination du facteur d'intensité de contrainte est difficile ,c'est pour cette raison que le critère énergétique présente une meilleure application pour ce type de matériau ,le présent chapitre nous a permis de présenter les différentes méthodes pour le calcul du taux de restitution d'énergie en modes I et II .

Chapitre III
Modélisation
numérique de la
fissuration dans les
structures sandwichs

Chapitre III

Modélisation numérique de la fissuration dans les structures sandwichs

3.1 Introduction

Les matériaux composites sont devenus un composant structurel important dans le domaine industriel, notamment en génie civil, en aéronautique ou encore en automobile. L'intérêt grandissant pour les stratifiés et les structures sandwichs dans la conception des structures a conduit à un réel besoin d'outils d'analyse puissants, capables de prendre en compte correctement leurs spécificités. Toutefois, leur modélisation souffre toujours d'un manque de précision au niveau de l'analyse numérique.

Parmi les phénomènes les plus importants dans l'étude des matériaux composites en général et les structures sandwichs en particulier c'est la fissuration qui peut mener à une ruine locale ou globale de la structure.

Le recours aux méthodes numériques devient une nécessité pour les chercheurs afin d'approcher ce genre de problème en utilisant les concepts de la mécanique de la rupture qui tient compte des discontinuités causées par la fissuration et modélise correctement la singularité à la pointe de la fissure ou une concentration de contraintes est constatée.

Dans ce chapitre, on propose une modélisation numérique pour l'étude de la fissuration dans les structures sandwichs.

La structure sandwich va être modélisée en utilisant l'élément fini mixte RMQ-7. Cet élément fini mixte a été développé par Bouzard [8] à l'aide d'une formulation directe, où les fonctions de forme des champs cinématiques et statiques sont construites directement à partir de la configuration réelle de l'élément en se plaçant dans un repère global (x, y) . L'élément RMQ-7 a été reformulé à partir d'un élément de référence dans un repère naturel (ξ, η) par Bouziane et al [42].

Ce chapitre est consacré à la présentation des différentes étapes de la formulation isoparamétrique de l'élément RMQ-7, et à la présentation de la méthode utilisée pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

3.2 Formulation de l'élément fini mixte

La structure sandwich comme schématisé dans la figure 3.1 a été discrétisée à l'aide d'un élément fini mixte spécial RMQ-7 (Reissner Modified Quadrilateral). L'élément est un élément fini mixte quadrilatère avec 7 nœuds et 14 degrés de liberté [8]. La configuration finale de l'élément (voir la figure 3.2), dans un plan naturel (ξ, η), a été obtenue après les trois étapes suivantes[41] :

- (i) construction de l'élément parent en ajoutant un nœud de déplacement (nœud 5) à l'élément mixte à quatre nœuds ;
- (ii) délocalisation de certaines variables à l'intérieur de l'élément et déplacement de certaines variables du nodal statiques inconnues des coins vers le côté lui-même ;
- (iii) condensation statique des variables internes inconnues pour obtenir la forme finale de l'élément fini mixte final.

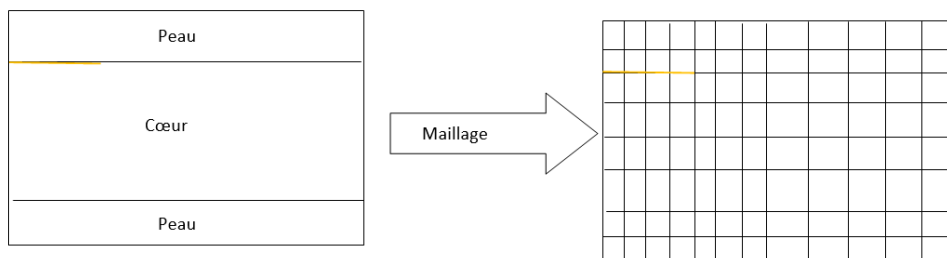


Figure 0.1 Maillage d'une structure sandwiche.

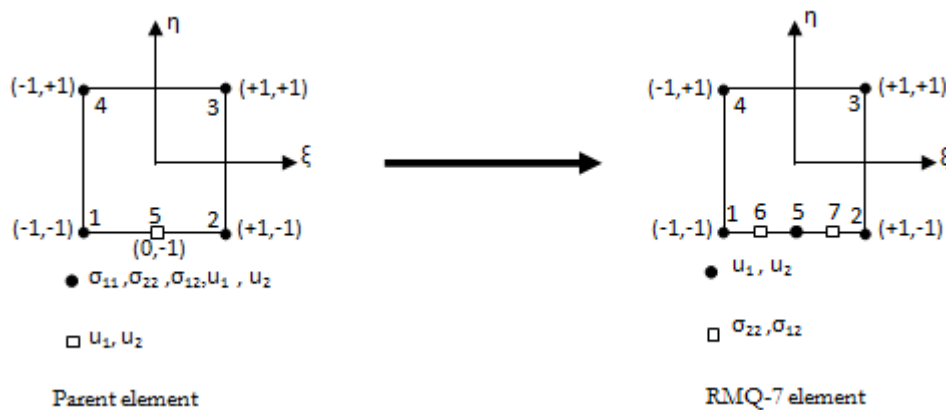


Figure 3.2 L'élément fini mixte RMQ-7 et l'élément de référence.

L'élément RMQ-7 (Reissner Modified Quadrilateral) est un élément mixte quadrilatère à 7 nœuds et 14 degrés de liberté. Trois de ses côtés sont compatibles avec des éléments classiques

linéaires et présentent un nœud déplacement à chaque extrémité. Le quatrième côté, outre ses deux nœuds cinématiques d'extrémités (nœud 1 et nœud 2), offre trois nœuds supplémentaires : un nœud médian (nœud 5) et deux nœuds intermédiaires au milieu de chaque demi-côté (nœuds 6 et 7), introduisant les composantes du vecteur contrainte le long de l'interface. Les continuités des vecteurs déplacement et contrainte peuvent être prises en compte au niveau de ce côté particulier, qui doit être placé le long de l'interface. Dans le cas des structures fissurées, le nœud médian est associé à la pointe de fissure, les deux nœuds statiques de part et d'autre permettent de satisfaire les deux exigences essentielles d'une telle situation, qui sont la condition de bord libre sur les lèvres de la fissure et les conditions de continuité le long de la partie cohérente.

Au départ, on part de la formulation mixte de Reissner avec comme variables nodales tous les déplacements et toutes les contraintes pour construire l'élément mixte d'interface. Il y a donc au début des variables nodales excédentaires :

- au niveau de l'interface, cette formulation impose une continuité trop forte, en effet la contrainte σ_{11} figure parmi les variables considérées dans la fonctionnelle de Reissner, mais ne figure pas parmi les contraintes d'interface (contrainte de décollement σ_{22} et contrainte de cisaillement σ_{12}), donc on élimine cette contrainte (σ_{11}) dans la formulation de l'élément d'interface.

- l'utilisation de la fonctionnelle de Reissner conduit à des éléments ayant un nombre de degrés de liberté très élevé ; or en pratique, il est, bien sûr, intéressant de disposer d'éléments avec un nombre aussi réduit que possible de degrés de liberté.

3.2.1 Élément mixte de Reissner

C'est un élément à quatre nœuds et cinq degrés de liberté par nœud (tous les composantes de déplacements et toutes les composantes des contraintes) (selon la figure 3.3). La formulation de cet élément est basée sur le principe variationnel de Reissner [43].

En posant pour un élément:

$$\{\varepsilon^e\} = [L_2] \{u^e\} \quad \text{sur } A^e \quad (3.1)$$

$$\{u^e\} = \{\bar{u}^e\} \quad \text{sur } L_u \quad (3.2)$$

La fonctionnelle de Reissner s'écrit:

$$R(\{\sigma\}, \{u\}) = \frac{e}{2} \int_{A^e} \left\{ \begin{array}{c} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{array} \right\}^t \begin{bmatrix} -[S] & [I] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{array} \right\} dA^e - e \int_{L_\sigma} \{\bar{T}^e\}^t \{u^e\} dL_\sigma - e \int_{A^e} \{f^e\}^t \{u^e\} dA^e \quad (3.3)$$

où:

$[I]$ est la matrice unité

$[S]$ est la matrice des souplesses

A^e est l'aire élémentaire

e est l'épaisseur de l'élément (supposée constante)

L_σ est la partie du contour de l'élément où les efforts $\{\bar{T}^e\}$ sont imposés.

$\{\sigma\}$ est le vecteur de contraintes pour un élément.

$\{\varepsilon\}$ est le vecteur de déformations pour un élément.

$\{u\}$ est le champ de déplacements

$\{f^e\}$ est le vecteur forces de volume.

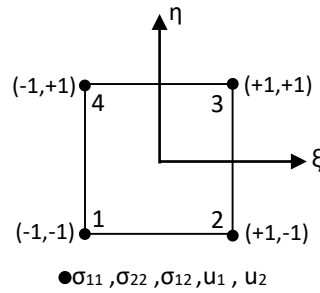


Figure 3.3 Elément de Reissner.

Le champ de contrainte en tout point s'écrit:

$$\{\sigma\} = [M] \{\tau\} \quad (3.4)$$

où $[M]$ est la matrice des fonctions de forme (linéaire en ξ , linéaire en η).

avec $\{\sigma\}^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}$

$$\{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \sigma_{12}^1, \sigma_{11}^2, \sigma_{22}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{11}^3, \sigma_{22}^3, \sigma_{12}^3, \sigma_{11}^4, \sigma_{22}^4, \sigma_{12}^4\}$$

Où :

$\{\sigma\}^t$ est le vecteur transposé de contrainte .

$\{\tau\}^t$ est le vecteur transposé des contraintes pour un élément.

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Les fonctions de forme sont données par:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & , & & M_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ M_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & , & & M_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le champ de déplacement s'écrit:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{q}\} \quad (3.7)$$

où $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions de forme des déplacements (bilinéaire).

avec $\{\mathbf{u}\}^t = \{u_1, u_2\}$

$$\{\mathbf{q}\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4\}$$

Où :

$\{\mathbf{u}\}^t$ est le vecteur transposé de déplacement

$\{\mathbf{q}\}^t$ est le vecteur transposé de déplacement pour un élément.

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Les fonctions de forme sont données par:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & , & & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & , & & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

En introduisant les déformations à l'aide de la matrice $[\mathbf{B}]$:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{q}\} \quad (3.10)$$

avec : $[\mathbf{B}]$ matrice liant les déformations aux déplacements.

$$\{\varepsilon\}^t = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$$

Où :

$\{\varepsilon\}^t$ est le vecteur transposé de déformation .

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Comme la matrice $[N]$ est fonction des variables (ξ, η) , on utilise le jacobien $[J]^{-1}$ de la transformation géométrique inverse pour pouvoir exprimer les dérivées par rapport à (x, y) en fonction de (ξ, η) .

La matrice jacobienne $[J]$ est définie par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On a:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{cases} \quad (3.13)$$

Donc les termes de la matrice jacobienne peuvent être calculés par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lorsque la matrice jacobienne $[J]$ n'est pas singulière, on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

L'approximation nodales des champs cinématique et statique est exprimée par:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

La substitution de la dernière expression dans la fonctionnelle de Reissner (3.3) conduit à la forme discrétisée de R [43]:

$$R = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}^t [K_e] \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{F_\sigma^e\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

où $[K_e]$ est la matrice élémentaire de rigidité-souplesse définie par:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

avec:

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (3.19)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M]^t [B] dA^e \quad (3.20)$$

Le vecteur des forces élémentaires équivalentes est composé de deux vecteurs: l'un correspond aux déplacements $\{F_u^e\}$; le deuxième vecteur correspond aux contraintes, $\{F_\sigma^e\}$ est nul en l'absence de déformations initiales.

Les vecteurs $\{F_u^e\}$ et $\{F_\sigma^e\}$ sont donnés par:

$$\{F_u^e\} = e \int_{L_\sigma} [N]^t \{\bar{T}^e\} dL_\sigma \quad (3.21)$$

$$\{F_\sigma^e\} = \{0\} \quad (3.22)$$

Avec :

L_σ : partie du contour où les contraintes sont imposées

$[N]$: matrice des fonctions de forme des déplacements

$\{\bar{T}^e\}$: traction imposée sur L_σ .

3.2.2 Elément de référence RMQ-5

L'élément RMQ-5 est obtenu en ajoutant un nœud déplacement à l'élément mixte de Reissner. C'est un élément mixte à 5 nœuds et 22 degrés de liberté (selon la figure 3.4). Il possède un côté (associé à l'interface) présentant trois nœuds, le nœud du milieu (nœud déplacement) caractérise le fond de la fissure dans la version finale de l'élément.

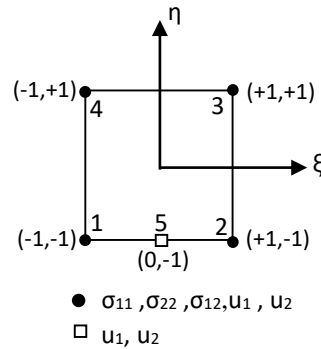


Figure 0.4 Elément de référence RMQ-5.

Les nœuds contraints n'ayant changé ni en nombre, ni en position, les éléments RMQ-5 et celui de Reissner présentent le même comportement statique. Le champ de contraintes est exprimé par les mêmes fonctions de forme M_i , $i = 1, 4$.

Le champ de déplacement s'écrit:

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3.23)$$

avec $\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\}$

$\{q\}^t$ est le vecteur transposé de déplacement pour un élément.

$[N]$ est la matrice des fonctions de forme.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Les fonctions de formes s'écrivent :

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi \quad , \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi \quad (3.25)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad , \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad , \quad N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

La matrice [B] liant les déformations aux déplacements est définie par :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Dans le cas de l'élément RMQ-5, les termes de la matrice jacobienne sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les champs cinématique et statique sont exprimés par:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse est calculée en utilisant les formules (3.18), (3.19) et (3.20).

3.2.3 Construction de l'élément RMQ-11

L'élément RMQ-11 est obtenu à partir de l'élément de référence RMQ-5 par relocalisation de certaines variables à l'intérieur de l'élément et par déplacement d'inconnues nodales statiques des extrémités vers le côté lui-même. La technique de relocalisation [44] permet d'éviter la continuité excessive à l'interface. L'élément RMQ-11 est un élément à 11 nœuds et 22 degrés de liberté (selon la figure 3.5).

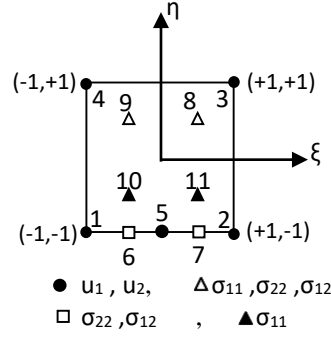


Figure 3.5 Élément RMQ-11.

Les nœuds déplacements n'ayant changé ni en nombre, ni en position, les éléments RMQ-5 et RMQ-11 présentent le même comportement cinématique. Le champ de déplacement est exprimé par les mêmes fonctions de forme $N_i, i = 1,5$.

L'approximation généralisée du champ de contrainte dans l'élément RMQ-11 s'écrit :

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} \{a\} \quad (3.29)$$

avec : $\{P(\xi, \eta)\} = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}$ est la base polynomiale de l'élément.

$\{a\}$ sont les variables généralisées.

On a :

$$\{\tau\} = [P_n] \{a\} \quad (3.30)$$

avec : $[P_n]$ est la matrice nodale.

Donc l'approximation du champ de contraintes en fonction des variables nodales $\{\tau\}$ est:

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_n]^{-1} \{\tau\} = [M] \{\tau\} \quad (3.31)$$

La contrainte σ_{11} dans l'élément est exprimée par:

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\text{avec: } [P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \\ 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [M_{11}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} [P_{n11}]^{-1} \quad (3.33)$$

Dans la configuration de la figure 3.5, les fonctions de formes sont données par :

$$M_{11}^8 = \frac{1}{4}(1+2\xi)(1+2\eta) \quad , \quad M_{11}^9 = \frac{1}{4}(1-2\xi)(1+2\eta) \quad (3.34)$$

$$M_{11}^{10} = \frac{1}{4}(1-2\xi)(1-2\eta) \quad , \quad M_{11}^{11} = \frac{1}{4}(1+2\xi)(1-2\eta)$$

Les contraintes σ_{22} et σ_{12} sont évaluées par l'expression:

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} \quad , i = 1, 2 \quad (3.35)$$

$$\text{avec : } [P_{ni2}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -1 & +0,5 \\ 1 & +0,5 & -1 & -0,5 \\ 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [M_{i2}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} [P_{ni2}]^{-1} \quad , i = 1, 2 \quad (3.36)$$

Dans la configuration de la figure 3.5, les fonctions de formes sont données par :

$$M_{i2}^6 = \frac{1}{6}(1-2\xi)(1-2\eta) \quad , \quad M_{i2}^7 = \frac{1}{6}(1+2\xi)(1-2\eta) \quad (3.37)$$

$$M_{i2}^8 = \frac{1}{3}(1+2\xi)(1+\eta) \quad , \quad M_{i2}^9 = \frac{1}{3}(1-2\xi)(1+\eta)$$

Le champ de contraintes est donné par :

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [M] \{\tau\} \quad (3.38)$$

$$\text{avec : } [M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\text{et } \{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^6, \sigma_{22}^7, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{12}^6, \sigma_{12}^7, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9\}$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse est donnée par:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

avec:

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (3.41)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M]^t [B] dA^e \quad (3.42)$$

Le calcul de la matrice élémentaire est effectué par intégration numérique selon la méthode de Gauss, le passage de l'intégration de l'élément réel à celui de référence fait intervenir le déterminant du jacobien de la transformation géométrique.

Dans la configuration de référence l'intégration s'écrit:

$$[K^e] = -e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [k^e(\xi, \eta)] \det(J(\xi, \eta)) d\eta d\xi \quad (3.43)$$

Nous avons utilisé la formule d'intégration à 4 points (2 points dans chaque direction (p=2)).

Nous avons :

$$[K^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [k^e(\xi_i, \eta_j)] \det(J(\xi_i, \eta_j)) \quad (3.44)$$

où:

ξ_i, η_j sont les coordonnées des points d'intégration (tableau 3.1).

w_i, w_j représentent les coefficients de pondération.

P	ξ_i	w_i
2	$\pm 0,57735026918$	1,0

Tableau 3.1 Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss.

3.2.4 Construction de l'élément RMQ-7

L'élément RMQ-7 est obtenu à partir de l'élément RMQ-11 en éliminant les variables internes de ce dernier par condensation statique (selon la figure 3.6).

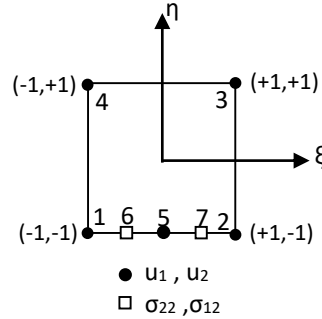


Figure 3.6 Elément RMQ-7.

Les quatre nœuds internes de l'élément RMQ-11 qui ne participent pas à l'assemblage compliquent l'opération de mise en donnée, et augmentent la taille de la demi-largeur de bande au cours de l'assemblage, ce qui a pour effet une augmentation du temps de calcul.

Nous présentons dans cette partie une méthode de la condensation des variables internes au contour qui est liée à la notion globale de réduction de la taille d'un système d'équations par élimination d'un certain nombre de degrés de liberté. En calcul de structures ce type de procédure s'appelle analyse par sous-structures [45].

Au départ, nous utilisons la forme discrétisée de la fonctionnelle de Reissner :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t [\mathbf{K}_e] \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Pour faciliter les calculs de l'opération de condensation, on décompose les degrés de liberté de contraintes au niveau élémentaire en deux groupes :

$\{\tau_c\}$: contraintes sur les contours de l'élément.

$\{\tau_i\}$: contraintes à l'intérieur de l'élément.

La décomposition de la matrice élémentaire $[\mathbf{K}_e]$ relativement aux groupes de degrés de liberté

$\{q\}$, $\{\tau_c\}$ et $\{\tau_i\}$ s'écrit :

$$[\mathbf{K}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_i & [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_{ci} & [\mathbf{K}_{\sigma u}]_i \\ [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_{ci}^t & [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_c & [\mathbf{K}_{\sigma u}]_c \\ [\mathbf{K}_{\sigma u}]_i^t & [\mathbf{K}_{\sigma u}]_c^t & [0] \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Les variables de contraintes $\{\tau_i\}$ ne sont pas assemblées, par conséquent les équations relatives à celles-ci, ne font intervenir que les degrés de liberté $\{q\}$ et $\{\tau_c\}$.

Nous pouvons alors trouver une relation entre ces différents types de ddl en traduisant la condition de stationnarité de R par rapport à $\{\tau_i\}$:

$$\frac{\delta R}{\delta \tau_i} = 0 \quad (3.47)$$

Ce qui donne comme relation :

$$[K_{\sigma\sigma}]_i \{\tau_i\} + [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_c\} + [K_{\sigma u}]_i \{q\} = 0 \quad (3.48)$$

Ou encore :

$$\{\tau_i\} = -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_c\} - [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \{q\} \quad (3.49)$$

La matrice $[K_{\sigma\sigma}]_i$ est un sous bloc diagonal d'une matrice symétrique définie négative, donc elle est toujours inversible.

A partir de la relation (3.49), on peut définir une matrice $[\Gamma]$ de transformation des ddl permettant de définir la matrice de rigidité réduite relatives aux variables $\{q\}$ et $\{\tau_c\}$.

On a:

$$\begin{Bmatrix} \{\tau_i\} \\ \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

avec:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} & -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \\ [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

et $[I]$: la matrice unité.

En substituant la relation (3.51) dans la fonctionnelle R (3.45), nous obtenons la fonctionnelle réduite R^* ne dépendant que des variables de contour $\{q\}$ et $\{\tau_c\}$:

$$\mathbf{R}^* = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \tau_c^e \\ q^e \end{Bmatrix}^t [\mathbf{K}_e]^* \begin{Bmatrix} \tau_c^e \\ q^e \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \tau_c^e \\ q^e \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_u^e \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

où $[\mathbf{K}_e]^*$ est la matrice élémentaire réduite définie par:

$$[\mathbf{K}_e]^* = [\Gamma]^t [\mathbf{K}_e] [\Gamma] \quad (3.53)$$

La matrice $[\mathbf{K}_e]^*$ s'écrit:

$$[\mathbf{K}_e]^* = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]^* & [\mathbf{K}_{\sigma u}]^* \\ [\mathbf{K}_{u\sigma}]^* & [\mathbf{K}_{uu}]^* \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

avec :

$$[\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]^* = [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_c - [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_{ci} [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_{ci}^t \quad (3.55)$$

$$[\mathbf{K}_{\sigma u}]^* = [\mathbf{K}_{\sigma u}]_c - [\mathbf{K}_{\sigma u}]_{ci} [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [\mathbf{K}_{\sigma u}]_i^t \quad (3.56)$$

$$[\mathbf{K}_{u\sigma}]^* = [\mathbf{K}_{\sigma u}]_i^{*t} \quad (3.57)$$

$$[\mathbf{K}_{uu}]^* = -[\mathbf{K}_{\sigma u}]_{ci} [\mathbf{K}_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [\mathbf{K}_{\sigma u}]_i^t \quad (3.58)$$

La matrice de rigidité réduite possède un bloc $[\mathbf{K}_{uu}]^*$ semi-défini positif, contrairement à la forme non réduite où ce bloc est toujours nul.

L'intérêt majeur de la procédure de condensation des variables internes est de réduire le temps de calcul lors d'une application, sa réalisation pratique est très simple d'autant plus qu'on n'a pas à modifier le vecteur du second membre puisque par hypothèse les nœuds statique ne sont pas chargés. La technique de condensation statique nous permet d'obtenir l'élément RMQ-7 ne possédant que 7 nœuds avec deux degrés de liberté par nœud (les nœuds 6 et 7 sont des nœuds contraints avec les variables σ_{22} et σ_{12} et le reste des nœuds sont en déplacement pur).

3.2.5 Construction de l'élément d'interface RMQ-7 inversé

L'assemblage d'éléments RMQ-7, nous oblige à considérer des éléments d'interface inversés (figure 3.7). Ceci nous conduit à construire de nouveau l'élément RMQ-7 inversé.

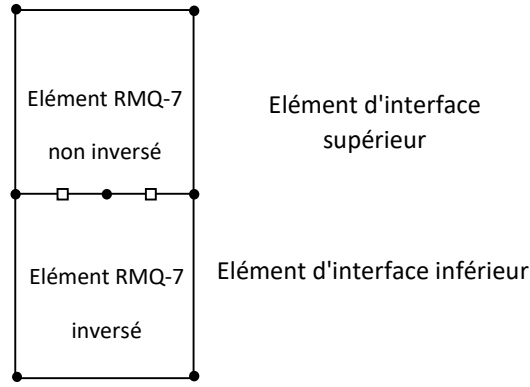


Figure 3.7 Deux éléments RMQ-7 assemblés.

En suivant les mêmes étapes précédentes :

- construction d'un élément de référence mixte
- relocalisation de certains ddl à l'intérieur de l'élément et d'autres sur le contour
- condensation statique des ddl placés à l'intérieur de l'élément

On peut obtenir l'élément RMQ-7 inversé (élément d'interface inférieur) (figure 3.8).

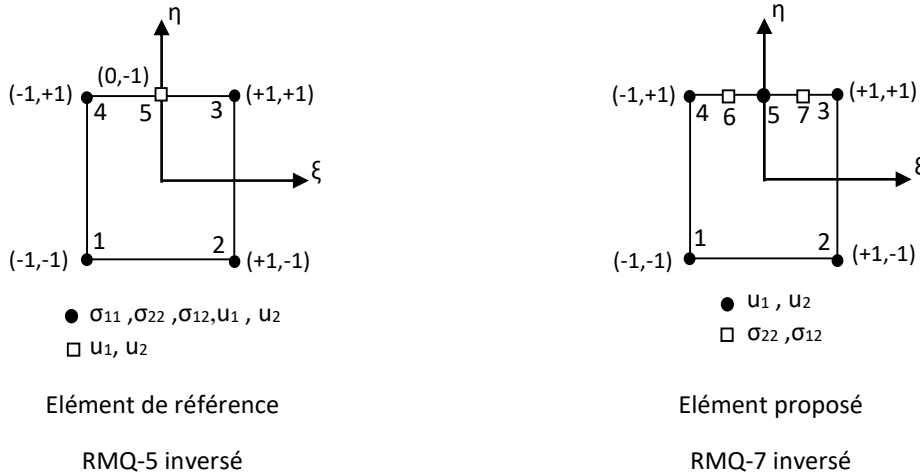


Figure 3.8 Elément RMQ-7 inversé et élément de référence.

Le champ de déplacement s'écrit:

$$\{u\} = [N] \{q\} \tag{3.59}$$

avec $\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\}$

Les nouvelles fonctions de formes N_i sont données par:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad , \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{3.60}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi \quad , \quad N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi \quad , \quad N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

L'approximation du champ de contraintes en fonction des variables nodales $\{\tau\}$ est:

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}[P_n]^{-1}\{\tau\} = [M]\{\tau\} \quad (3.61)$$

La contrainte σ_{11} dans l'élément est exprimée par:

$$1) \quad \sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}[P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\text{avec: } [P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \\ 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [M_{11}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}[P_{n11}]^{-1} \quad (3.63)$$

Dans la configuration de la figure 3.8, les fonctions de formes sont données par:

$$M_{11}^8 = \frac{1}{4}(1+2\xi)(1-2\eta) \quad , \quad M_{11}^9 = \frac{1}{4}(1-2\xi)(1-2\eta) \quad (3.64)$$

$$M_{11}^{10} = \frac{1}{4}(1-2\xi)(1+2\eta) \quad , \quad M_{11}^{11} = \frac{1}{4}(1+2\xi)(1+2\eta)$$

Les contraintes σ_{22} et σ_{12} sont évaluées par l'expression:

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}_i [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} \quad , i = 1, 2 \quad (3.65)$$

$$\text{avec: } [P_{ni2}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & +1 & -0,5 \\ 1 & +0,5 & +1 & +0,5 \\ 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [M_{i2}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}_i [P_{ni2}]^{-1} \quad , i = 1, 2 \quad (3.66)$$

Dans la configuration de la figure 3.8, les fonctions de formes sont données par:

$$M_{i2}^6 = \frac{1}{6}(1 - 2\xi)(1 + 2\eta) \quad , \quad M_{i2}^7 = \frac{1}{6}(1 + 2\xi)(1 + 2\eta) \quad (3.67)$$

$$M_{i2}^8 = \frac{1}{3}(1 + 2\xi)(1 - \eta) \quad , \quad M_{i2}^9 = \frac{1}{3}(1 - 2\xi)(1 - \eta)$$

Le champ de contraintes est donné par:

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [M] \{\tau\} \quad (3.68)$$

$$\text{avec: } [M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\text{et } \{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^6, \sigma_{22}^7, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{12}^6, \sigma_{12}^7, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9\}$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse s'écrit sous la forme donnée par les relations (3.40), (3.41) et (3.42). Ses termes sont calculés par intégration numérique selon la méthode de Gauss avec 4 points d'intégration.

3.3 Calcul du taux de restitution d'énergie

La méthode d'extension virtuelle de la fissure associée à l'élément fini mixte RMQ-7 est utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie G [8]. Dans cette technique, le premier calcul de l'énergie de déformation Π_1 est effectué dans la configuration initiale de la fissure. La fissure est alors déplacée par une distance δa infinitésimale dans la direction de son axe (Figure 3.9) et l'énergie de déformation Π_2 est calculée. Le taux de restitution d'énergie G sera ensuite évalué en partant de la relation suivante:

$$G = -\frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\delta a} = -\frac{\delta \Pi}{\delta a} \quad (3.70)$$

En effet, le nœud de déplacement intermédiaire de l'élément RMQ-7 est associé à l'extrémité de la fissure, et par conséquent à la longueur de la fissure "a" peut-être augmenté d'une quantité δa tout en agissant à l'intérieur strict de l'élément de fissure par translation du nœud de fissure d'extrémité sans perturber le reste de la maille [8].

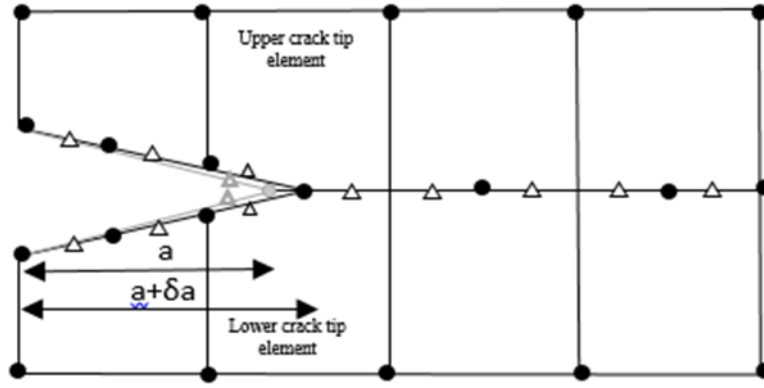


Figure 3.9 Maillage à la pointe de la fissure après l'extension δa .

Si nous considérons que la charge externe ne varie pas pendant l'augmentation de δa , le taux de restitution d'énergie est calculé comme suit:

$$G = - \frac{\Pi(a + \delta a) - \Pi(a)}{\delta a} \quad (3.71)$$

où $\Pi(a + \delta a)$ and $\Pi(a)$ représentent respectivement l'énergie de déformation de la structure fissurée dans la configuration $a + \delta a$ et " a ".

Avec l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire et de petits déplacements, les solutions $u(a)$ et $u(a + \delta a)$ sont aussi proches que la perturbation δa est petite par rapport aux dimensions de l'élément de fissure. Le taux de libération d'énergie G devient:

$$G = - \frac{1}{2\delta a} \sum_{i=1}^{ne} \{u(a + \delta a)\}_i^T [[K(a + \delta a)]_i - [K(a)]_i] \{u(a + \delta a)\}_i \quad (3.72)$$

Avec :

ne : nombre total d'éléments dans une structure discrétisée,

$\{u\}_i$: vecteur vertical contenant les valeurs nodales de l'élément i ,

$[K]_i$: matrice élémentaire de l'élément i , et l'exposant "T" indique le vecteur transposé.

Comme seul l'élément de fissure est perturbé, alors G résulte plus simplement dans la relation

$$G = - \frac{1}{2\delta a} \{u(a + \delta a)\}_c^T [[K(a + \delta a)]_c - [K(a)]_c] \{u(a + \delta a)\}_c \quad (3.73)$$

Où l'indice "c" indique que la matrice et le vecteur utilisés sont ceux de l'élément de fissure.

L'expression de G peut être écrite différemment comme suit:

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}_c^T \frac{[\delta \mathbf{K}]_f}{\delta a} \{\mathbf{u}\}_c \quad (3.74)$$

Après la phase de résolution, les valeurs nodales de l'élément fissuré sont extraites, et un module spécial est utilisé pour évaluer le taux de restitution d'énergie selon la formule suivante:

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}_c^T \frac{[\Delta \mathbf{K}]_f}{\Delta a} \{\mathbf{u}\}_c \quad (3.75)$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini, tout d'abord les différentes étapes de la formulation isoparamétrique de l'élément RMQ-7, afin de calculer le taux de restitution d'énergie des interfaces fissurées dans les structures sandwichs nous avons utilisé la méthode d'extension virtuelle de la fissure associée à l'élément fini mixte RMQ-7 on respecte les conditions suivantes :

- Le nœud médian (nœud de déplacement) est associé à la pointe de la fissure ;
- Les deux nœuds statiques de part et d'autre permettent de satisfaire les deux exigences essentielles d'une telle situation qui sont :
 1. La condition de bord libre sur les lèvres de la fissure ;
 2. Conditions de continuité des contraintes le long de la partie cohérente.

Chapitre IV

Validation du modèle

Chapitre IV

Validation du modèle

4.1 Introduction

Dans cette étude, nous avons proposé une modélisation numérique pour l'étude du problème de fissuration dans les structures sandwichs en mode I et II. Cette modélisation utilise l'élément fini mixte RMQ-7 développé à partir du principe variationnel mixte de Reissner [8]. Cet élément d'interface mixte a été associé à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour déterminer le taux de restitution d'énergie des structures sandwichs en mode I et II.

Ce chapitre a été consacré à l'étude de quelques exemples d'applications traitant le problème de fissuration des structures sandwichs en mode I et II. La première application traite le comportement au délaminage en mode I d'une poutre sandwich symétrique. Dans la deuxième application, une poutre sandwich asymétrique a été étudié. La troisième application a été réservé au calcul du taux de restitution d'énergie critique d'une poutre de type DCB. La dernière application concerne le calcul du taux de restitution d'énergie en mode II d'une poutre de type CSB.

Les résultats obtenus, à partir de ces exemples d'applications, sont comparés aux solutions analytiques et expérimentales disponibles dans la littérature dans le but de valider la modélisation proposée dans ce travail.

4.2 Etude numérique des essais du délaminage en mode I

4.2.1 Etude d'une poutre sandwich symétrique

Afin d'étudier le comportement au délaminage en mode I pur (mode d'ouverture), l'essai DCB est le plus couramment utilisé [46,47]. C'est un essai de traction appliquée sur deux extrémités d'une éprouvette où la charge appliquée est normale par rapport aux différentes couches du sandwich, couches incluant une fissure artificielle. Cette pré-fissure est nécessaire pour amorcer le délaminage dans des conditions stables [38].

Les échantillons utilisés pour modéliser le mode I sont obtenue à partir de la littérature [6], d'une poutre sandwich symétrique de type DCB, où les interfaces des différentes couches sont illustrées schématiquement sur la figure 4.1.

Les éprouvettes utilisées dans cet exemple sont constituées d'une peau de type Biax de 45° et une âme en mousse de PVC d'une densité de 80 kg/m³ avec différentes épaisseurs de 10, 20 et 30 mm. Tous les spécimens ont la même épaisseur des peaux (2 mm).

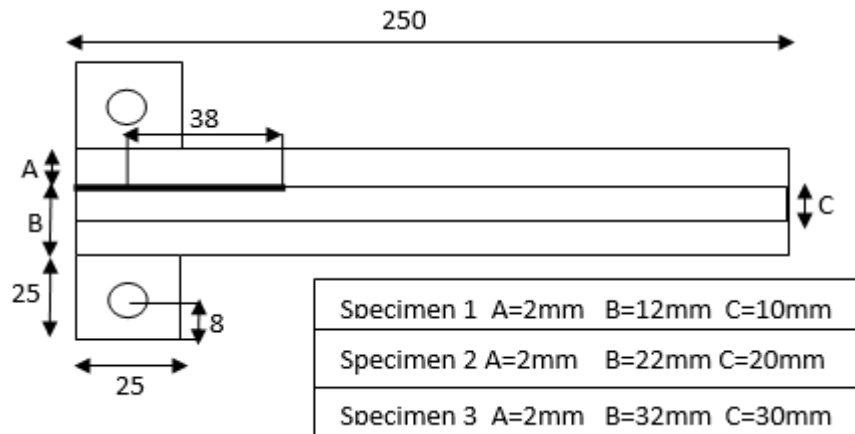


Figure 4.1 Eprouvette d'une poutre DCB (Double Cantilever Beam) [6].

Les propriétés mécaniques des peaux sont données dans le tableau 4.1:

Direction des Fibres	Module d'élasticité E(GPa)	Coefficient de poisson ν_{avg}
0^0	$E_L = 48.11 \pm 6$	$\nu_{LT} = 0.28 \pm 0.3$
90^0	$E_T = 11.21 \pm 2$	$\nu_{TL} = 0.096 \pm 0.010$
45^0	$G_{LT} = 4.42 \pm 0.5$	

Tableau 4.1 propriétés mécaniques du sandwich [6].

Ces différents échantillons ont été modélisé en utilisant l'élément fini mixte (RMQ-7) afin de calculer le taux de restitution d'énergie en mode I.

Dans cette étude nous avons utilisé plusieurs maillages pour calculer le G_{II} initial, afin de tester la convergence et assurer la précision des résultats, le tableau 4.2 présente les différents maillages traités.

Specimen 1. Poutre Sandwich: peaux 2mm, Cœur 10mm			
	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
1 ^{er} Maillage	28	88	176
2 ^{ème} Maillage	52	166	332
3 ^{ème} Maillage	108	320	640
4 ^{ème} Maillage	180	529	1058
Specimen 2. Poutre Sandwich : peaux 2mm. Cœur 20mm			
	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
1 ^{er} Maillage	42	125	250
2 ^{ème} Maillage	78	233	466
3 ^{ème} Maillage	162	457	914
4 ^{ème} Maillage	360	985	1970
Specimen 3. Poutre Sandwich : peaux 2mm. Cœur 30mm			
	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
1 ^{er} Maillage	56	162	324
2 ^{ème} Maillage	88	229	458
3 ^{ème} Maillage	104	300	600
4 ^{ème} Maillage	216	594	1188
5 ^{ème} Maillage	480	1289	2578

Tableau 4.2 Différents maillages d'une poutre symétrique.

Ensuite, les résultats obtenus sont comparés à ceux de Shah et Tarfaoui [6], qui ont été évalués par les différentes méthodes présentées au chapitre 2. Shah et Tarfaoui [6] ont utilisé les méthodes suivantes :

Méthode théorique : La théorie des poutres modifiée 1 (MBT1) ;

Méthodes expérimentales : la théorie des poutres modifiée 2 (MBT2) et la méthode de la compliance (CC) ;

Méthode Numérique : VCCT (Virtual Crack Closure Technique).

Les résultats obtenus par ces différentes méthodes sont présentés dans le tableau 4. 3.

Specimen 1. Poutre Sandwich: peaux 2mm, Cœur 10mm			
	Méthodes	$G_{II}(kJ/m^2)$	L'erreur (%)
RMQ-7	RMQ-7	0.465	
Shah et Tarfaoui [6]	MBT1	0.452	2,87
	MBT2	0.520	10,57
	CC	0.563	17,40
	VCCT	0.488	4,71
Specimen 2. Poutre Sandwich : peaux 2mm. Cœur 20mm			
	Method	$G_{II}(kJ/m^2)$	
RMQ-7	RMQ-7	0.459	
Shah et Tarfaoui [6]	MBT1	0.436	5,27
	MBT2	0.446	2,91
	CC	0.405	13,33
	VCCT	0.593	22,59
Specimen 3. Poutre Sandwich : peaux 2mm. Cœur 30mm			
	Method	$G_{II}(kJ/m^2)$	
RMQ-7	RMQ-7	0.579	
Shah et Tarfaoui [6]	MBT1	0.533	8,63
	MBT2	0.571	1,40
	CC	0.813	28,78
	VCCT	0.662	12,53

Tableau 4.3 Taux de restitution d'énergie du mode I à partir du test DCB.

Le tableau 4.3 montre la comparaison des résultats obtenus pour différentes valeurs de l'épaisseur de l'âme. Les résultats trouvés en utilisant la méthode proposée, sont en bon accord avec les valeurs obtenues par différentes approches analytiques [6]. Les résultats montrent qu'avec une augmentation monotone de l'épaisseur du noyau de 10 à 30 mm, il n'y a aucune relation entre le taux de restitution d'énergie et l'épaisseur de l'âme, et donc la valeur de G_I augmente de manière non monotone. Cet effet a été observé expérimentalement [6] et il est principalement dû à la pénétration de la résine dans l'interface âme-face, qui influe sur la rigidité du matériau de l'âme et donc le comportement de l'interface.

Numériquement, le choix de la valeur d'extension virtuelle de la fissure influe sur la rigidité de la poutre et notamment à l'interface peau-âme, cette dernière a un impact sur la valeur du taux de restitution d'énergie.

4.2.2 Etude d'une poutre sandwich asymétrique

Dans cet exemple la poutre sandwich asymétrique de type UDCB est utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie en mode I.

En raison de leur grande utilisation, des échantillons de poutre de type (DCB) sont généralement utilisés avec quelques modifications développées par Davidson et al [5]. L'éprouvette asymétrique de type UDCB, comme le montre la figure 4.2, a été utilisée avec une simple modification de la géométrie de telle sorte que le plan de la fissure coïncide avec l'axe neutre [5].

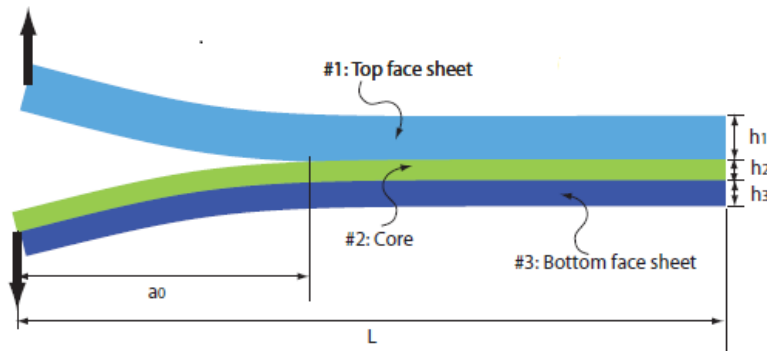


Figure 4.2 Epreuve d'une poutre UDCB (Unsymmetrical Double Cantilever Beam) [5].

La figure 4.2 montre la géométrie de l'échantillon UDCB et spécifie les interfaces des différentes couches et l'emplacement de la fissure, où les interfaces en question se trouvent entre l'âme et les peaux de la poutre sandwich et la fissure entre la peau supérieure et l'âme. Les dimensions des différentes couches sont données dans le tableau 4.4.

L(mm)	b(mm)	h ₁ (mm)	h ₂ (mm)	h ₃ (mm)	a ₀ (mm)
120	25.4	4.83	3.5	2.76	53

Tableau 4.4 Dimensions d'une poutre sandwich asymétrique de type (UDCB) [5].

Les propriétés mécaniques des différentes couches du sandwich sont données dans le tableau 4.5.

Type	Module d'élasticité E(GPa)	Coefficient de poisson ν_{avg}	Module de cisaillement G(GPa)
Peaux	$E_{11} = 11.5$	$\nu_{12} = 0.3$	$G_{12} = 3.0$
	$E_{22} = 8.0$	$\nu_{21} = 0.25$	
Ame	$E_{11} = 3.0$	$\nu_{12} = 0.3$	$G_{12} = 1.2$
	$E_{22} = 3.0$	$\nu_{12} = 0.3$	

Tableau 4.5 Propriétés mécaniques du sandwich [5].

Des simulations numériques du test UDCB ont été réalisées en utilisant l'élément fini mixte RMQ-7 pour le calcul du taux de restitution d'énergie en mode I. Plusieurs maillages ont été utilisés dans ces simulations pour assurer la convergence des résultats, le tableau 4.6 montre les différents maillages traités.

	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
1 ^{er} Maillage	24	85	170
2 ^{ème} Maillage	56	201	402
3 ^{ème} Maillage	66	213	426
4 ^{ème} Maillage	144	473	946

Tableau 4.6 Différents maillages d'une poutre asymétrique.

Le tableau 4.7 montre la comparaison des résultats obtenus par l'éléments fini mixte RMQ-7 et les valeur expérimentales données par Davidson et al [5].

Méthode	G_I (kJ/m ²)	L'erreur (%)
RMQ-7	2.29	
Davidson et al [5]	2.08	10,09

Tableau 4.7 Comparaison des données calculées et expérimentales pour l'essai (UDCB).

La différence entre la valeur du taux de restitution d'énergie en mode I, donnée par le présent élément fini mixte RMQ-7, et les résultats expérimentaux [5] est de 10 %. Cette différence est très acceptable car dans les calculs, les couches sont considérées comme un assemblage direct, mais en réalité, l'adhésif entre elles a certaines propriétés mécaniques. Pour cette raison, les résultats montrent que la valeur du taux de restitution d'énergie de mode I, donnée par la méthode proposée, et celle trouvée expérimentalement, sont en bon accord.

Plusieurs spécimens avec différentes dimensions des couches de poutre sandwich ont été utilisés dans ces simulations numériques. La variation des dimensions s'est faite de la même manière pour les différentes couches. Plusieurs maillages ont été utilisés dans ces simulations pour assurer la convergence des résultats, le tableau 4.8 montre les différents maillages traités.

Poutre sandwich asymétrique specimen 2 : h ₁ =6.83 mm h ₂ =5.5 mm h ₃ =4.76 mm			
	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
1 ^{er} Maillage	48	149	298
2 ^{ème} Maillage	66	213	426
3 ^{ème} Maillage	84	273	546
4 ^{ème} Maillage	192	595	1190
Poutre sandwich asymétrique specimen 3 : h ₁ =8.83 mm h ₂ =7.5 mm h ₃ =6.76 mm			
	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
1 ^{er} Maillage	48	149	298
2 ^{ème} Maillage	112	345	690
3 ^{ème} Maillage	192	595	1190
4 ^{ème} Maillage	256	779	1558

Tableau 4.8 Différents maillages des poutres asymétrique.

Le tableau 4.9 montre les résultats du taux de restitution d'énergie en mode I pour les différents cas.

Type	G _I (kJ/m ²)
Poutre sandwich asymétrique specimen 1 : h ₁ =4.83 mm h ₂ =3.5 mm h ₃ =2.76 mm	2.29
Poutre sandwich asymétrique specimen 2 : h ₁ =6.83 mm h ₂ =5.5 mm h ₃ =4.76 mm	2.20
Poutre sandwich asymétrique specimen 3 : h ₁ =8.83 mm h ₂ =7.5 mm h ₃ =6.76 mm	2.62

Tableau 4.9 Le taux de restitution d'énergie pour différentes tailles d'une poutre UDCB.

Les résultats obtenus montrent une stabilité des valeurs obtenues en gardant le même rapport entre les dimensions des différentes couches de la poutre sandwich.

Les valeurs trouvées en utilisant le présent élément fini mixte RMQ-7 pour le calcul du taux de restitution d'énergie (TRE) en mode I d'une poutre sandwich symétrique et asymétrique, ont été comparés aux résultats analytiques, expérimentaux et numériques. Les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- les résultats des essais de types DCB et UDCB montrent une très légère différence entre la simulation numérique et les études précédentes.
- il faut noter que la colle entre les peaux et l'âme est considérée dans l'étude numérique comme un assemblage direct mais dans l'étude expérimentale c'est une couche en résine avec des caractéristiques mécaniques.

4.2.3 Calcul du taux de restitution d'énergie critique

Pour la détermination du taux de restitution d'énergie critique en mode I, un autre exemple qui traite le problème de délaminage d'une poutre de type DCB symétrique a été étudié. Cette étude expérimentale a été réalisée par Djemai [30] selon la figure 4.3.

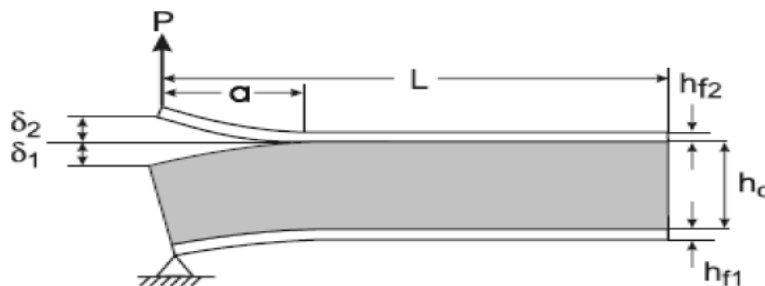


Figure 4.3 Délaminage d'une poutre DCB [30].

Les paramètres géométriques du sandwich sont indiqués dans le tableau 4.10.

Longueur (mm)	Largeur (mm)	Ép de la peau (mm)	Ép de la Ame (mm)
180	20	3.5	15

Tableau 4.10 Caractéristiques géométriques du sandwich en poutre DCB [30].

Le sandwich est composé de verre-polyester comme peau et le liège aggloméré comme âme [30]. Les propriétés mécaniques des différentes couches sont données dans le tableau 4.11.

Type	Module d'élasticité E(GPa)	Coefficient de poisson ν_{avg}	Module de cisaillement G(GPa)
Composite	$E_{11} = 4.995$	$\nu_{12} = 0.3675$	$G_{12} = 1.827$
	$E_{22} = 4.997$	$\nu_{21} = 0.3675$	
Ame	$E_{11} = 21$	$\nu_{12} = 0.05$	$G_{12} = 4.3$
	$E_{22} = 5.5$	$\nu_{12} = 0.05$	

Tableau 4.11. Propriétés mécaniques du matériau [30].

L'étude de la convergence nous a permis de retenir le maillage indiqué dans le tableau 4.12.

Taille de la fissure	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
a = 30	42	129	258
a = 40	36	113	226
a = 50	36	117	234
a = 60	36	117	234
a = 70	30	101	202

Tableau 4.12 Différents maillages de la poutre symétrique DCB.

Le tableau 4.13 montre la comparaison entre les valeurs expérimentales obtenues par Djemai [30] et celles trouvées par l'élément fini mixte proposé pour différentes valeurs de la charge critique " P_c " et la taille de la fissure "a".

P_c : charge critique ;

a : longueur de la fissure .

		Djemai [30]	RMQ-7
a(mm)	P(N)	$G_{IC}(kJ/m^2)$	$G_{IC}(kJ/m^2)$
30	23.03	0.0634	0.0638
40	18.32	0.0565	0.0542
50	14.53	0.0648	0.0639
60	13.12	0.0678	0.0657
70	12.64	0.0650	0.0647
G_{IC}		0.0635	0.0624
Ecart type		0.00379	0.00418

Tableau 4.13 Calcul du taux de restitution d'énergie critique.

Les résultats obtenus de la valeur du taux de restitution d'énergie critique en mode I par la méthode des éléments finis mixte sont en bon accord avec les valeurs expérimentales données par Djemai [30].

D'après les résultats obtenus, on remarque qu'à chaque fois que la longueur de la fissure augmente, la charge critique diminue, le taux de restitution d'énergie reste quasiment constant avec la variation de la taille de la fissure, ce qui indique que la résistance à l'amorçage du délaminage reste constante malgré la variation de la taille initiale de la fissure entre la peau et l'âme.

4.3 Calcul du taux de restitution d'énergie critique en mode II

L'essai CSB de délaminage en mode de glissement droit (mode II) a pour objectif de caractériser le délaminage en cisaillement des matériaux composites. Cet essai consiste à charger en flexion trois points une éprouvette contenant un défaut artificiel sur une de ces cotes comme le montre la figure 4.4. Le délaminage est placé à l'extrémité pour tenir compte de la déformation du glissement dû à la flexion de la poutre.

La géométrie de la poutre CSB est similaire à ENF (End-Notched Flexure) spécimen pour les essais de rupture en mode II des matériaux composites [48,49].

La dérivation du taux de restitution d'énergie G_{II} , pour cet échantillon est basée sur le taux de variation de la compliance de la poutre avec l'extension de la fissure. La compliance de la poutre CSB est définie comme le déplacement « δ », au centre de la poutre centrale divisée par la charge appliquée « P », où le déplacement de la poutre sera dérivé par la théorie des poutres stratifiées, y compris la déformation par cisaillement.

Cette étude expérimentale a été réalisée par Carsson [40] et validée par Mingze et al [41], dont les paramètres géométriques de l'échantillon CSB sont indiqués dans le tableau 4.14.

Longueur (mm)	Largeur (mm)	Ép de la peau (mm)	Ép de la Ame (mm)
350	127	3.3	25.4

Tableau 4.14 Dimensions de la poutre CSB (Cracked Sandwich Beam) [40].

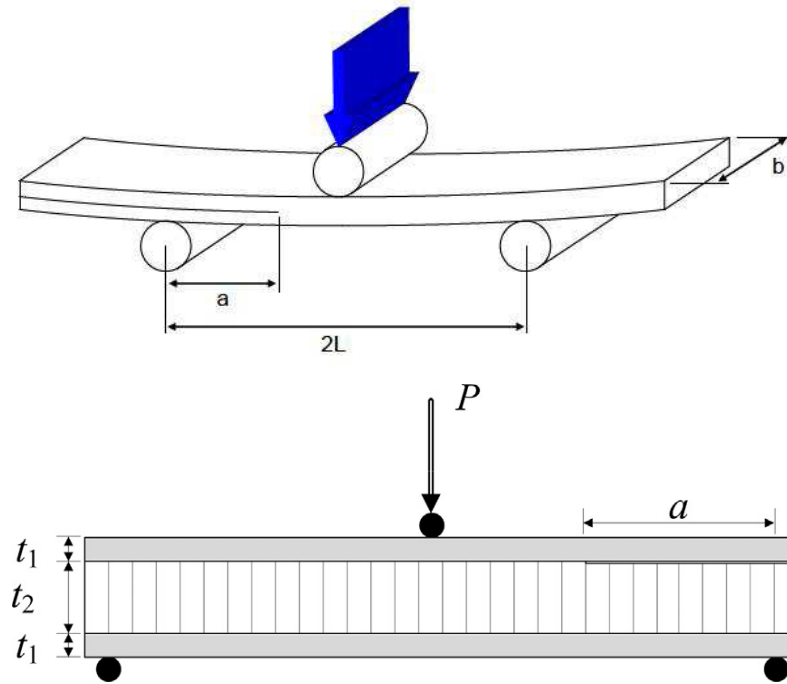


Figure 4.4 Essai Cracked Sandwich Beam(CSB) [41].

Les propriétés mécaniques des différentes couches sont données dans le tableau 4.15.

Type	Module d'élasticité E_{11} (MPa)	Module d'élasticité E_{22} (MPa)	Coefficient de poisson ν_{12}	Coefficient de poisson ν_{21}	Module de cisaillement G_{12} (MPa)
peau	16.1×10^3	7.12×10^3	0.55	0.55	4.44×10^3
âme	138	138	0.3	0.3	157

Tableau 4.15 Propriétés mécaniques de la poutre CSB (Cracked Sandwich Beam) [40].

L'étude de la convergence des poutres en mode II, nous a permis de retenir le maillage indiqué dans le tableau 4.16.

Type de maillage	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
Maillage en Mode II Avec RMQ-7	700	1909	3818

Tableau 4.16 Différents maillages de la poutre CSB en mode II.

Les résultats du taux de restitution d'énergie critique G_{IIC} sont résumés dans le tableau 4.17. Les résultats obtenus à partir des différentes méthodes données par Carsslon and al [40] et Mingze et al [41] sont très proches avec celles trouvées par l'élément fini mixte RMQ-7 pour une valeur critique de la charge "Pc" et la taille de la fissure "a".

		Carsslon et al [40]	L'erreur (%)	Mingze et al [41]	L'erreur (%)	RMQ-7
a(mm)	P(KN)	G_{IIC} (KN/mm)		G_{IIC} (KN/mm)		G_{IIC} (KN/mm)
51	6.7±0.8	1.060 ^{CC}	12,26	1.039	14,53	1.19
		1.070 ^{CSB}	11,21			

Tableau 4.17 Comparaison des résultats de G_{IIC} obtenus à partir des différentes méthodes.

4.4 Conclusion

Les résultats obtenus à l'aide du modèle proposé ont été comparés à ceux trouvés expérimentalement ou obtenus par d'autres techniques proposés dans la littérature. L'analyse des résultats en mode I :

Pour une poutre symétrique, spécimen 1, les résultats sont très proches aux résultats de la méthode théorique et numérique avec 2,87%, d'erreur, par contre présente un seuil d'erreur de 17,40% par rapport aux résultats expérimentaux. Spécimen 2, les résultats sont très proches aux résultats de la méthode expérimentale MBT2 avec 2,91% d'erreur, et de 5,27% d'erreur avec la méthode théorique MBT1, par contre l'erreur est de 22,59% par rapport aux résultats numérique VCCT. Spécimen 3, les résultats sont très proches aux résultats de la méthode théoriques MBT1 est la méthode expérimentale MBT2 avec 1,4% d'erreur cette différence est très acceptable, par contre l'erreur est de 12,53 par rapport aux résultats numériques VCCT.

La poutre asymétrique, les résultats sont très proches aux résultats de la méthode expérimentale avec 10 %, d'erreur, cette différence est très acceptable.

Les résultats du taux de restitution d'énergie critique, donner par l'élément RMQ7 sont très proches aux résultats expérimentaux.

Les résultats du taux de restitution d'énergie en mode II, donner par l'élément RMQ7 sont très proche au résultats expérimentaux donner par Carsslon et al [40] avec 11,21% d'erreur, et la différence entre les résultats donner par RMQ7et la méthode théorique de Mingze et al [41] est de 14,51%, cette différence est très acceptable.

L'analyse des résultats montre l'efficacité et la bonne performance de la méthode proposée pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie pour les poutres sandwichs fissurées en mode I et en mode II.

La différence entre les valeurs du taux de restitution d'énergie en mode I et II, donnée par le présent élément fini mixte, et celle trouvée dans la littérature est attribuée au fait que dans les calculs, les couches sont considérées comme un assemblage direct, mais en réalité, l'adhésif entre eux a des propriétés mécaniques. Dans ce cas, négliger cet aspect entraîne une sous-estimation ou une surestimation des valeurs du taux de restitution d'énergie.

Cet écart considéré raisonnable en tenant compte des défauts possibles lors du processus de l'élaboration des échantillons, et les incertitudes d'utilisations des appareils.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans cette étude, nous avons proposé une modélisation pour l'analyse du problème de fissuration dans les structures sandwichs. Une méthode numérique a été utilisée pour évaluer le taux de restitution d'énergie en mode I et II des poutres sandwichs fissurées. Cette technique associe la méthode d'extension virtuelle de la fissure à l'élément fini mixte RMQ-7 formulé à partir du principe variationnel mixte de Reissner.

L'élément fini mixte RMQ-7 a été développé afin de prendre en considération les conditions de continuité des champs de déplacement et de contrainte à l'interface sur la partie cohérente (équilibre mécanique et cohérence géométrique) et de la discontinuité de ces champs sur la partie fissurée (effet de bord libre). La formulation isoparamétrique de cet élément a été utilisé pour simplifier les calculs et modéliser des formes et des orientations quelconques des interfaces.

Contrairement à élément classique, cet élément permet de faire le calcul avec un seul maillage, et présente une légèreté par rapport à l'élément classique Q8.

Nous avons traité plusieurs exemples d'application pour tester et valider le modèle numérique proposé sur des structures sandwichs fissurées. Les tests DCB et UDCB ont été utilisé pour modéliser le mode I, par contre l'essai CSB pour le mode II.

Les résultats obtenus à l'aide du modèle proposé ont été comparés à ceux trouvés dans la littérature (méthodes théoriques, méthodes expérimentales et numériques). L'analyse de ces résultats en modes I et II montre l'efficacité et la bonne performance de la méthode proposée pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie pour les poutres sandwichs fissurées.

La différence entre les valeurs du taux de restitution d'énergie en mode I et II, donnée par le présent élément fini mixte, et celle trouvée dans la littérature est attribuée du fait que dans les calculs, les couches sont considérées comme un assemblage direct, mais en réalité, l'adhésif entre eux a des propriétés mécaniques. Dans ce cas, négliger cet aspect entraîne une sous-estimation ou une surestimation des valeurs du taux de restitution d'énergie déterminé numériquement.

Cet écart considéré raisonnable en tenant compte des défauts possibles lors du processus de l'élaboration des échantillons, et les incertitudes d'utilisations des appareils.

Comme perspectives, il serait très intéressant :

- De modéliser le mode mixte par le test SLB (Single Leg Bend),
- De généraliser le modèle numérique proposé pour les différents types de poutres sandwichs fissurées.
- Etude expérimentale et numérique des poutres sandwichs

Références Bibliographique

Références

- [1] Aviliés, F., Carlsson, L.A. (2008). Analysis of the sandwich DCB specimen for debond characterization, *Engineering Fracture Mechanics.*, 75, pp. 153–68.
- [2] Østergaard, R.C., Sørensen, B.F. (2007). Interface crack in sandwich specimen, *Int J Fract.*, 143, pp. 301–316.
- [3] Nairn, J.A. (2006). On the calculation of energy release rates for cracked laminates with residual stresses, *Int. J. Fract.*, 139(2), pp. 267–93.
- [4] Wang, J., Zhang, C. (2009). Energy release rate and phase angle of delamination in sandwich beams and symmetric adhesively bonded joints, *Int. J. Solids Struct.*, 46, pp. 4409–18.
- [5] Davidson, P., Waas, A.M., Yerramalli, C.S. (2012). Experimental determination of validated , critical interfacial modes I and II energy release rates in a composite sandwich panel , *Compos. Struct.*, 94(2), pp. 477–83.
- [6] Shah, O.R., Tarfaoui, M. (2017). Determination of mode I & II strain energy release rates in composite foam core . An experimental study of the composite foam core interfacial fracture resistance, *Compos. Part B Eng.*, 111, pp. 134–42.
- [7] Shah, O.R., Tarfaoui, M. (2016). Effect of adhesive thickness on the Mode I and II strain energy release rates. Comparative study between different approaches for the calculation of Mode I& II SERR's, *Compos. Part B Eng.*, 96, pp. 354–63.
- [8] Bouzard, H. (1992). *Elément fini mixte pour interface cohérente ou fissurée*, Thèse de doctorat. Université Claude Bernard , Lyon, France
- [9] Ma, M., Yao, W., Chen, Y. (2018). Critical energy release rate for facesheet/core delamination of sandwich panels, *Eng. Fract. Mech.*, 204(September), pp. 361–8.
- [10] Balaban, A.C., Tee, K.F. (2019). Strain energy release rate of sandwich composite beams for different densities and geometry parameters, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 101(February), pp. 191–9.
- [11] Moroni, F., Pironi, A. (2019). *Comparison of tensile strength and fracture toughness under mode I and II loading of co-cured and co-bonded CFRP joints*, 47, pp. 294–302.
- [12] Sundararaman, V., Davidson, B.D. (1997). *An unsymmetric double cantilever beam test for interfacial fracture toughness determination*, *Int J Solids Struct.*, 34(7), pp. 799–817.
- [13] Ma, M., Yao, W., Li, P. (2020). *Critical energy release rate for interface delamination of asymmetrical specimen*, *Compos. Struct.*, 237(September 2019), pp. 111919.
- [14] Zambelis, G., Da Silva Botelho, T., Klinkova, O., Tawfiq, I., Lanouette, C. (2018). *Evaluation of the energy release rate in mode I of asymmetrical bonded composite/metal assembly*, *Eng. Fract. Mech.*, 190, pp. 175–85.
- [15] Carlsson, L. A. (1991). *On the design of the cracked sandwich beam (CSB) specimen*. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 10(4), 434-444.
- [16] Shivakumar, K., Chen, H., & Smith, S. A. (2005). *An evaluation of data reduction methods for opening mode fracture toughness of sandwich panels*. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 7(1), 77-90.
- [17] Bragagnolo, G., Crocombe, A. D., Ogin, S. L., Mohagheghian, I., Sordon, A., Meeks, G., & Santoni, C. (2020). *Investigation of skin-core debonding in sandwich structures with foam cores*. *Materials & Design*, 186, 108312.

- [18] Zenkert, D. (1997). *The handbook of sandwich construction*. Engineering Materials Advisory Services.
- [19] Tom, L. G. (2014). *Contribution à l'étude numérique de la propagation d'un défaut de collage dans une structure sandwich Nida*, Thèse de doctorat. Université du Maine.
- [20] Assarar, M. (2007). *Etude expérimentale et modélisation du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs*, Thèse de doctorat. Université du Maine.
- [21] Idriss, M. (2013). *Analyse expérimentale et par élément finis du comportement statique et vibratoire des matériaux composites sandwichs sains et endommagés*, Thèse de doctorat. Université de Maine.
- [22] Bourouis, F. (2013). *Optimisation de la rupture et de l'endommagement de différents matériaux sandwichs*, Thèse de doctorat. Université de constantine1, Algérie.
- [23] Monti, A. (2016). *Élaboration et caractérisation mécanique d'une structure composite sandwich à base de constituants naturels*, Thèse de doctorat. Université de Maine.
- [24] Almusawi, A. M. (2017). *Mise en œuvre et optimisation des propriétés d'une structure sandwich en matériaux biosourcés (fibres et bois de chanvre) avec une matrice en polystyrène expansé pour le bâtiment*, Thèse de doctorat. Université de Bourgogne Franche-Comté.
- [25] Rocca, S. V., & Nanni, A. (2005). Mechanical characterization of sandwich structure comprised of glass fiber reinforced core: Part 1. *Composites in Construction*, 11-13.
- [26] Vincent, M. (1998). *Méthodes d'analyse par éléments finis des contraintes aux interfaces dans les structures sandwich*, Thèse de doctorat. Université de Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II).
- [27] Chemami, A. (2012). *Etude de la performance des matériaux composites sandwichs-Application en fatigue*, Thèse de doctorat. Université de Annaba).
- [28] Arbaoui, J. E. (2009). *Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches*, Thèse de doctorat. Université de Paul Verlaine-Metz.
- [29] BINÉTRUY, C. (2008). *Structures*, vol. 33. technique de l'ingénieur.
- [30] Djemai, H. (2017). *Contribution à l'étude de l'endommagement dans les matériaux composites*, Thèse de doctorat. Université de Mohamed Khider, Biskra, Algérie.
- [31] Hexcel Composite. *Hex Web tm honeycomb sandwich design technology*. <http://www.hexcelcomposite.com>, 2004.
- [32] Petras, A. (1999). *Design of sandwich structures*, Thèse de doctorat. Université de Cambridge.
- [33] Juan-Antonio, R. (2014). *Mécanique de la rupture*, vol. 33. technique de l'ingénieur.
- [34] Settet, A. T. (2014). *Modélisation des mécanismes de rupture d'une structure en composite nid d'abeille sous chargement thermodynamique*, Thèse de doctorat. Université de, m'hamed bougara,boumerdes,Algérie.
- [35] Zeghloul, A. (2003). *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. DEA Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés, 2004*.
- [36] Saci, T. (2018). *Calcul à la rupture d'une poutre simple isotrope pré-fissurée, chargée en flexion 3 et 4 points*, Thèse de Master. Université de Oum -El Bouaghi, Algérie.
- [37] Irwin, George R. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate." (1957): 361-364
- [38] Peng, L. (2013). *Modélisation numérique d'assemblages collés: Application à la réparation de structures en composites*, Thèse de doctorat. Université de Bourgogne.
- [39] Wang, J., & Qiao, P. (2006). *Fracture analysis of shear deformable bi-material interface*. Journal

- of engineering mechanics, 132(3), 306-316.
- [40] Carlsson, L. A., Sendlein, L. S., & Merry, S. L. (1991). Characterization of face sheet/core shear fracture of composite sandwich beams. *Journal of Composite Materials*, 25(1), 101-116.
- [41] Ma, M., Yao, W., & Chen, Y. (2018). *Critical energy release rate for facesheet/core delamination of sandwich panels*. *Engineering Fracture Mechanics*, 204, 361-368.
- [42] Bouziane, S., Bouzard, H., Guenfoud, M. (2009). *Mixed finite element for modelling interfaces*, *Eur. J. Comput. Mech.*, 18(2), pp. 155–75, Doi: 10.3166/ejcm.18.155-175.
- [43] Reissner, E. (1950). *On a variational theorem in elasticity*. *Journal of Mathematics and Physics*, 29(1-4), 90-95.
- [44] Herrmann, L.R. (1966). *A bending analysis for plates*, *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-66-80, pp.577-604.
- [45] Hellen, K. (1967) *Analysis of elastic plates by simplified finite element method*. Acta Polytechnica Scandinavia, Civil Engineering Series, n°46, Troheim.
- [46] Détriché, C. H., Maso, J. C., & Ramoda, S. A. (1987). *Sur la sensibilité des valeurs de KC et GF aux conditions expérimentales dans un essai de flexion 3 points sur éprouvettes entaillées*. *Materials and Structures*, 20(6), 428-435.
- [47] Daghia, F., & Cluzel, C. (2015, June). *Essai de délaminage en mode I sur composites monolithiques: double cantilever beam versus climbing drum peel*. In *Comptes-rendus des JNC19*.
- [48] Russel, A. J. (1982). *Factors affecting the interlaminar fracture energy of graphite/epoxy laminates*. In *Proc. 4th Int. Conf. on Composite Materials* (pp. 279-286).
- [49] Carlsson, L. A., & Gillespie Jr, J. W. (1989). *Mode-II interlaminar fracture of composites*. In *Composite Materials Series* (Vol. 6, pp. 113-157). Elsevier.