

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M / 2021/2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Analyse mathématique d'un problème de contact avec adhésion

Option : AFA

Par :

1. *Chahinaz Boulbit*
2. *Marwa krika*

Encadré par : S. Benferdi

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Z. Belyacine  
Examineur: Z. Chougui

MCB U. SKIKDA  
MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

# TABLE DES MATIÈRES

0.1 Notations . . . . .	9
0.2 Introduction générale . . . . .	11
<b>1 Rappel de la mécanique des milieux continus :</b>	<b>13</b>
1.1 Géométrie de la déformation : . . . . .	13
1.2 Le champ de vitesse et le champ des accélérations : . . . . .	15
1.3 Tenseur de déformation : . . . . .	15
1.4 Tenseur des contraintes : . . . . .	17
1.5 Equation de mouvement : . . . . .	19
1.6 Loi de comportement : . . . . .	20
1.6.1 Loi de comportement viscoélastique . . . . .	20
1.7 Conditions aux limites : . . . . .	21
1.7.1 Condition aux limites de déplacement–traction : . . . . .	22
1.7.2 Condition aux limites de contact : . . . . .	22
1.7.3 Condition aux limites de contact avec adhésion . . . . .	23
<b>2 Préliminaires sur l’analyse fonctionnelle et les inéquations variationnelles</b>	<b>26</b>

## Table des matières

---

2.1	Espaces normés	27
2.2	Espace de Hilbert	27
2.3	Espaces des fonctions continues et continûments différentiables	29
2.3.1	Espace mesurable	30
2.3.2	Les espaces de distributions	31
2.4	Espaces de Sobolev, opérateur de déformation et de divergence	33
2.4.1	Les espaces de sobolev $H^1(\Omega)$ :	33
2.4.2	Espace liés à l'opérateur déformation :	34
2.4.3	Théorème de Cauchy Lipshitz	35
2.5	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	36
2.6	Théorèmes de point fixe	37
2.7	Éléments d'analyse non linéaire	41
2.7.1	Opérateur fortement monotones	41
2.8	Inéquations variationnelles	42
2.8.1	Inéquations variationnelles de première espèce :	42
2.9	Inéquations variationnelles de deuxième espèce :	42
2.10	Lemme de Gronwall	44
<b>3</b>	<b>Etude d'un problème viscoélastique de contact bilatéral avec</b>	
	<b>adhésion</b>	<b>45</b>
3.1	Formulation du problème mécanique et hypothèses :	46
3.2	Formulation variationnelle :	51
3.3	Existence et unicité de la solution :	52
3.3.1	Démonstration du lemme 3.1	53
3.3.2	Démonstration du lemme 3.2	54
3.3.3	Démonstration du lemme 3.3	55
3.4	Conclusion	61

<b>4 Annexe</b>	<b>63</b>
4.1 Les tenseurs :	63
4.1.1 Tenseurs d'ordre 0 et 1	63
4.1.2 Tenseurs d'ordre n	63
4.1.3 Tenseurs d'ordre 2	64
4.1.4 Tenseur d'ordre 3	66
4.1.5 Tenseur d'ordre 4	66
<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>

## Abstract

In structural mechanics, applications where contact problems are involved are many. The purpose of this research is the variational study of contact with friction between a deformable material and a deformable foundation, here we consider the rules of behavior for non linear elastic materials with the hypothesis of little deformation. This problem is studied with the following steps : we start with the modelisation of the mechanical problems and we precise the hypothesis, then we get a variational formulation followed by the study of existence and uniqueness of weak solution.

we adopt in this study the theory of monotone operators and the argument of Banach fixed point.

---

**Keywords** :viscoelasticity, weak solution, monotone operator, deformable foundation, fixed point, variational formulation.

## Résumé

En mécanique des structures, les applications dans lesquelles interviennent les problèmes de contact sont nombreuses, Le but de ce mémoire est l'étude variationnelle du contact avec compliance normale et adhésion entre un matériau viscoélastique et une fondation déformable, ici nous considérons la loi de comportement non linéaire avec l'hypothèse des petites déformations. Ce problème est étudié suivant ces étapes : nous commençons par la modélisation de problème mécanique, nous précisons les hypothèses sur les données, puis on établit la formulation variationnelle avec l'étude d'existence et d'unicité de la solution faible. On basé dans cette étude sur la théorie des opérateurs monotones, et des arguments du point fixe de Banach.

---

**Mots clés** :viscoélasticité, solution faible, opérateur monotone, fondation déformable, point fixe, formulation variationnelle.

## Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon mémoire et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Nous tenons tous d'abord à adresser notre remerciement à l'encadreur Dr. S. Benferdi, maître de conférences 'B' à l'université de Skikda, Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Skikda Merci également à tous les membres du jury Dr. Z. Belyacine et Dr Z. Chougui

Mes parents, pour leur soutien constant et leurs encouragements. Enfin à tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail reçoivent notre remerciements.

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, mon père Rabh et ma mère Dawia qui m'ont toujours soutenu avec leurs encouragements et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance, en hommage affectueux. ma grande mère Nouara, mes frères Nassef, Mohamad, Amine, Ahmad, Walid, Sami, mes sœurs Aya et Wafa, ma chère kanza et khadija, Mes amies et à toutes mes camarades.

Marwa krika.

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, mon père Ayash et ma mère Khadija qui m'ont toujours soutenu avec leurs encouragements et qui m'ont donné un magnifique

modèle de labeur et de persévérance, en hommage affectueux, à ma grande mère Zagda et mes frères Mohamad, Tayab, Fathallah et Amir, mes sœurs Loubna, ma chère Hanan et Inas, Mes amies et à toutes mes camarades

Chahinaz Boulbit

## 0.1 Notations

### Ensembles

$\Omega$  : un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ .

$\bar{\Omega}$  : l'adhérence de  $\Omega$ .

$\Gamma$  : La frontière de  $\Omega$ .

$\Gamma_i$  : une partie de la frontière,  $(1, 2, 3)$ .

$M_N$  : l'espace des matrices carrées d'ordre  $N \times N$ .

$S_N$  : l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^N$  c'est-à-dire :

$$S_n = \mathbb{R}_s^{N \times N}.$$

### Opérateurs

$\varepsilon$  : l'opérateur de déformation.

$div$  : L'opérateur de divergence.

$\nabla u$  : le gradient de  $u$ .

$\partial_i \varphi$  : La dérivée partielle de  $\varphi$  par rapport à la  $i^{\text{ième}}$  composante.

### Espaces fonctionnels

$C([0, T], X)$  : l'espace des fonctions continues sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ .

$C^1([0, T], X)$  : l'espace des fonctions continûment dérivables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$

$W^{k,p}([0, T], H)$  : l'espace de Sobolev de paramètres  $k$  et  $p$ .

$\mathcal{D}(\Omega)$  : l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et de support compact dans  $\Omega$ .

$\mathcal{D}'(\Omega)$  : l'espace des distributions sur  $\Omega$ .

$L^2(\Omega)$  : l'espace des fonctions mesurables de carré intégrables sur  $\Omega$ .

$L^\infty(\Omega)$  : l'espace des fonctions  $u$  mesurables sur  $\Omega$  telle qu'il existe  $c > 0$  tel que  $|u(x)| \leq c$  p.p. sur  $\Omega$ .

$H^1(\Omega)$  : l'espace de Sobolev.

$H_0^1(\Omega)$  : l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  sur  $H^1(\Omega)$ .

$$D = \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

$$D' = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N \times N}.$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}.$$

$$H = [L^2(\Omega)]^N.$$

$$\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_s^{N \times N}.$$

$$H_1 = \{u \in H : \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}.$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} : \operatorname{div} \sigma \in H\}.$$

$L^2(\Gamma)$  : l'espace des fonctions définie sur  $\Gamma$  et de carré sommable pour la mesure surfacique.

$H^{1/2}(\Gamma)$  : l'espace de Sobolev d'ordre  $\frac{1}{2}$  sur  $\Gamma$ .

$$H_\Gamma = H^{1/2}(\Gamma)^N.$$

$H'_\Gamma$  : dual de  $H_\Gamma$ .

**Symboles :**

$\nu$  : la normale extérieure à  $\Gamma$ .

$v_\nu$  : la composante normale de  $v$ .

$\sigma_\tau$  : la composante tangentielle de  $v$ .

$r_+$  : la partie positive de  $r$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  : produit scalaire sur  $X$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{X} \times X}$  : produit de dualité entre  $\hat{X}$  et  $X$ .

p.p : presque partout.

## 0.2 Introduction générale

Analyse variationnelle expression devenue syntagme grâce à la puissance d'instrumentation fournie par les méthodes variationnelles en même temps que les formulations variationnelles des problèmes de contact sont des inéquations variationnelles. C'est la raison pour laquelle on a considéré comme nécessaire d'écrire ce mémoire de master où se trouve un résultat sur les inéquations variationnelle mais aussi une étude détaillée d'un problème de contact avec adhésion et compliance normale.

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil redoutable dans l'étude mathématique de nombreux problèmes non linéaires en physique et en mécanique, la complexité des conditions aux limites et la diversité des équations constitutives conduisant aux formulations variationnelles de type inéquations.

En mécanique et en physique, l'adhésion est l'ensemble des phénomènes physico- chimiques qui se produisent lorsque l'on met en contact intime deux matériaux, dans le but de créer une résistance mécanique à la séparation. Une fois le contact établi, l'énergie nécessaire pour éviter la séparation s'appelle énergie d'adhésion. Elle ne doit pas être confondue avec l'adhérence, qui est au contraire la force nécessaire pour réaliser cette même séparation. L'adhésion est soit directe (elle a lieu uniquement pour des matériaux très lisses et extrêmement propres (mica ou silicium par exemple), soit médiée par un matériau intermédiaire. L'importance accrue des processus d'adhésion dans les montages industriels a attiré l'attention des chercheurs ces derniers temps, ce qui enrichit les études et la littérature mathématique sur ce sujet. Pour modéliser le phénomène d'adhésion, quand l'assemblage n'est pas permanent et les matériaux composites pouvant subir un décollement sous l'effet des tensions, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description

du contact. En se basant sur les idées de M. Frémond [[6], [7]], l'idée est d'introduire une variable interne de surface appelée champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact.

Le but de ce travail est l'étude variationnelle d'un contact avec adhésion entre un matériau viscoélastique et une fondation déformable dans le processus quasi-statique et avec l'hypothèse des petites déformations. Les conditions de contact sont de type bilatéral et de compliance normale et l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant un théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques, le théorème de Cauchy-Lipschitz, un lemme de Gronwall ainsi que le point fixe de Banach.

Le mémoire est composé de trois chapitres et une annexe que nous allons brièvement décrire. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats essentiels de la théorie des milieux continus, nous définissons les tenseurs des déformations et des contraintes et loi de comportement viscoélastique et nous présentons les conditions aux limites de contact avec adhésion

Dans Le troisième chapitre nous étudions le contact bilatéral avec adhésion entre un corps viscoélastique et une fondation déformable,. Nous donnons après avoir modélisé le problème mécanique, une formulation variationnelle en terme de déplacement, ensuite nous étudions l'existence et l'unicité de ca formulation variationnnelle

Enfin on termine le mémoire par une annexe où on rappelle quelques définitions et résultats sur les tenseurs qui sont utilisé pour l'étude de notre problème.

# CHAPITRE 1

Rappel de la mécanique des milieux continus :

## 1.1 Géométrie de la déformation :

**Définition 1.1 ( milieu continu )** De point de vu mathématique la continuité du domaine sera traduire par le fait que les fonctions caractéristiques au domaine sont des fonctions continues.

De point de vu physique on dit q'un domaine contient un milieu matériel continu si à chaque instant  $t$  et en chaque point de se domaine on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel ces grandeurs physiques peut être représentée mathématiquement par :

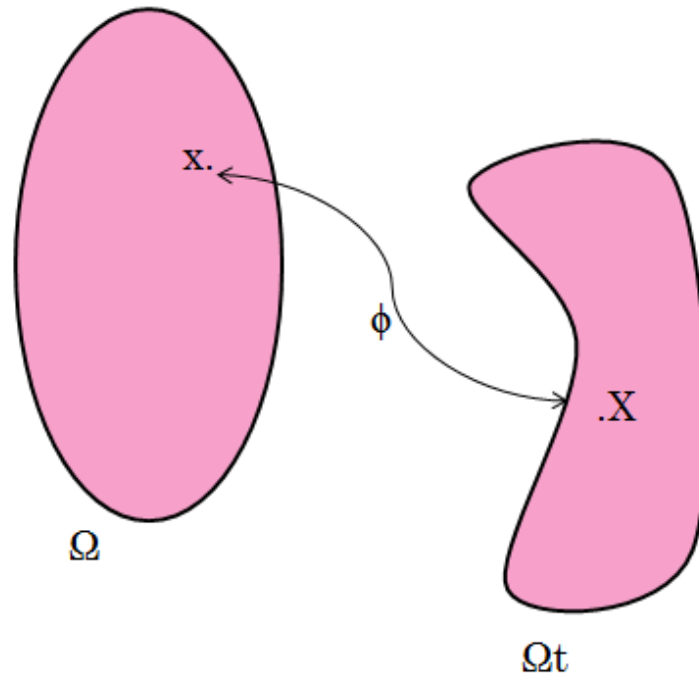
Un scalaire (masse, volumique, température)

Un vecteur (vitesse, accélération)

**Définition 1.2 (champ de déplacement) :**

On appelle configuration d'un matériaux l'ensemble des positions consti-

tuant ce matériau.



*Fig1.1. Visualisation du champ des déplacements.*

On note  $\varphi$  la relation entre deux configurations telle que  $t \rightarrow \varphi(0, t)$  est un application :

$$\varphi(0, t) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad n = (1, 2, 3)$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ) de frontière régulière  $\Gamma$  occupé par le matériau si on suppose que  $p$  un point matériel se retrouve initialement c'est à dire à l'instant  $T = 0$  en

$X \in \Omega$  alors  $\varphi(X, t) = x$  est la nouvelle position de  $p$  dans ce cas  $x \in \Omega_T$  et le champ vectoriel défini par :

$$U(x, t) = \varphi(x, t) - X = x - X, \forall x \in \Omega, t > 0$$

$U$  est appelé un champ de déplacement .

nous supposons que pour chaque instant  $t > 0$  l'application  $\varphi(0, t)$  est une application continue bjectrice et soit

$$\varphi^{-1}(\cdot, t) : \Omega_t \longrightarrow \Omega$$

son application réciproque donnée par :

$$x = \varphi^{-1}(x, t)$$

## 1.2 Le champ de vitesse et le champ des accélérations :

Au mouvement  $\varphi$  on associe le champ de vitesse et le champ des accélérations définis par :

$$\begin{aligned} v &= \dot{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \\ \alpha &= \dot{v} = \ddot{u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) \end{aligned}$$

## 1.3 Tenseur de déformation :

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état de déformation local résultant de contraintes, l'état de déformation d'un solide est décrit par un champ tensoriel c'est-à-dire que le tenseur des déformations est défini en tout point du solide, on parle de ce fait de champ de déformation.

le gradient de  $\chi$  par rapport aux coordonnées de la variable  $X$  définit un champ tensoriel :

$$F = \nabla_x \phi \tag{1.1}$$

$F$  s'appelle tenseur gradient de la déformation .

Le tenseur des déformation vise à caractériser en un point de variation de longueur d'un segment à la suite de transformation par le milieu.

Supposer que  $\chi(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \Omega$  existe et donne par :

$$X = \chi^{-1}(x, t) \quad (1.2)$$

Au mouvement  $\chi$  on associe le champ des vitesses et le champ des accélérations définis respectivement par :

$$v = \dot{u} = \frac{d\chi}{dt}(X, t) \quad (1.3)$$

$$a = \ddot{u} = \frac{d^2x}{dt^2}(X, t) \quad (1.4)$$

Soit  $H$  également le gradient de  $u$  par rapport aux coordonnées de la variable  $X$ . c'est-à-dire.

$$H = (h_{ij}) = \nabla_X u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (1.5)$$

$$H = \nabla_X(\Phi(x, t) - X)$$

$$H = \nabla_x(\Phi(X, t) - x)$$

$$H = F - I_N$$

Nous introduisons encore les notations suivantes

$$C = \mathcal{F}\mathcal{F}^T = I_N + H + H^T + HH^T \quad (1.6)$$

Ou  $H^T$  désigne la transposée de  $H$  .

Le tenseur  $C$  défini précédemment s' appelle tenseur des dilatation (tenseur des déformation de cochy).

$$G = \frac{1}{2}(C - I_N) \quad (1.7)$$

$$G = \frac{1}{2}(FF^T - I_N)$$
$$G = \frac{1}{2}(\nabla_x \phi \nabla_x \phi^t - I_N)$$

On composantes on a :

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) \quad (1.8)$$

Le tenseur  $G$  n'est pas linéaire par rapport aux composantes du vecteur de déplacement  $u$ .

Dans ce case le termes  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_j}{\partial u_i}$  sont négligés et la tenseur  $G$  devient un tenseur linéaire  $\varepsilon$  défini par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(H + H^T) \quad (1.9)$$

$\varepsilon$  s'appelle le tenseur des déformation linéairese.

On composant on à :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

– le tenseur  $\varepsilon$  s'appelle le tenseur de déformation linéarisé

Dans la suite on va définie quelque tenseur :

–Tenseur gradient de la déformation est définie par :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(X, t)$$

Tenseur des dilatation est définie par :

$$C = F^t F$$

## 1.4 Tenseur des contraintes :

Considérons un matériau soumis à des efforts extérieurs

---

les contraintes sont des efforts intérieurs qui se développent au sens de milieu , ils sont dus aux interactions entre les particules du milieu

Soit un solide  $\Omega$  nous admettrons que sur chaque point  $M$  du corps s'exerce une force élémentaire

$$d\vec{F} = \vec{T}(M, \vec{\nu}) ds$$

le vecteur  $\vec{T}(M, \vec{\nu})$  est appelé vecteur contrainte en  $M$  par rapport à la normale  $\nu$ , donc on définit le tenseur des contraintes de Cauchy noté  $\sigma$  par :

$$\vec{T}(M, \vec{\nu}) = \sigma(M) \vec{\nu}$$

ce tenseur est symétrique c'est à dire

$$\sigma^t = \sigma, \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji})$$

**Théorème 1.1 (Cauchy) :** *Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, n)$  dépend linéairement de  $\vec{n}$  c'est à dire qu'il existe un tenseur  $\sigma(M, t)$  de composantes  $\sigma_{ij}(M, t)$  tel que*

$$\vec{T}_i(M, t) = \sigma_{ij} \vec{n}_j$$

les composantes  $\sigma_{ij}$  sont les composantes caractéristiques de la contrainte

–le premier indice indique la direction normale à la surface sur la quelle agit la contrainte

–le second indice indique la direction considérée  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  sont les contraintes normales

$\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}$  sont les contraintes tangentielles

$$\tau(., t) : \Omega_N \times \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ ou } \Sigma_N = \{v \in \mathbb{R}^N \mid |v| = 1\}$$

Si  $x \in \Gamma_t$  et  $v$  est la normale extérieure unitaire à  $\Gamma_t$  au point  $x$ , alors par définition on a :

$$h(x, t) = \tau(x, v, t)$$

D'après le théorème de Cauchy, ce vecteur est linéaire par rapport à  $v \in \Sigma$ , donc il existe un champ de tenseurs  $\sigma(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow M_N$  tel que :

$$\tau(x, v, t) = \sigma^T(x, t)_v \quad \forall x \in \Omega_t, t > 0$$

Où  $M_N (N = 1, 2, 3)$  est l'espace des matrices carrées d'ordre  $N \times N$ .

Le tenseur  $\sigma(x, t)$  défini précédemment s'appelle tenseur des contraintes de Cauchy ou point  $x \in \Omega_t$ .

$$\sigma(x, t) = \sigma^T(x, t) \quad \forall x \in \Omega_t, t > 0$$

## 1.5 Equation de mouvement :

En physique généralement, on décrit l'évolution d'un matériau par l'équation de mouvement de Cauchy suivante :

$$\operatorname{div} \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u}, \text{ dans } \Omega \times [0, T]$$

tel que  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la densité de la masse  $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  et le champ de densités des forces volumiques appliquées sur le matériau,  $\ddot{u}$  est le champ d'accélération qui sont des données du problème et  $\operatorname{div} \sigma$  et la divergence du champ des contraintes les processus d'évolution modélisés par cette équation s'appellent processus dynamique dans le cas où le champ de vitesse  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho \ddot{u}$  peut être négligé donc l'équation devient :

$$\operatorname{div} \sigma(t) + f_0(t) = 0 \tag{1.10}$$

cette équation s'appelle (1.10), représente une loi universelle utilisée pour tous les solides. Il faut ajouter des relations qui caractérisent le comportement de

chaque type de solide, c'est l'objet des lois de comportement. que nous décrivons dans la suite

## 1.6 Loi de comportement :

La loi de comportement caractérise ce qui est propre à chaque type de matériau, est une relation entre les contraintes et les déformations d'un corps, bien quelle doit respecter certaines propriétés d'invariance, pour origine est souvent expérimentale c'est à dire qu'il faut réaliser une série d'essais pour établir une loi de comportement

on peut réaliser les essais suivants :

### 1.6.1 Loi de comportement viscoélastique

Le comportement du solide élastique et celui du liquide visqueux coexistent simultanément le matériau sous contrainte se déforme d'abord de façon élastique puis de façon irréversible mais avec un certain retard. Après déformation, le solide ne reprend pas sa forme initiale mais récupère seulement une partie de la déformation, là aussi avec retard.

Ce phénomène apparaît nettement au cours d'un essai de relaxation où d'un essai de retard appelé quelque fois essai de fluage. On peut citer à titre d'exemples les lois de comportement de Maxwell et Kelvin-voigt.

#### Modèle de Maxwell

La loi de comportement de Maxwell dans le cas unidimensionnel est de la forme suivante :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \sigma$$

Où  $E$  est le module de Young et  $\sigma, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

### Modèle de Kelvin-Voigt

La loi de comportement de Kelvin-Voigt est de la forme suivante :

$$\sigma = c\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \quad (1.11)$$

Où  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité,  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_{ijkl})$  est un tenseur d'ordre quatre (tenseur d'élasticité) et  $c \geq 0$ , est le coefficient de viscosité.

Lorsque  $c = 0$  la relation (1.11) devient :

$$\sigma = \mathcal{G}\varepsilon(u)$$

Donc la loi devient élastique.

Lorsque  $c > 0$ , la loi de comportement du corps est viscoélastique.

## 1.7 Conditions aux limites :

Soit un matériau déformable qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ), avec une frontière suffisamment régulière  $\Gamma$  partitionnée en trois parties mesurable disjointes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  tel que  $mes\Gamma_1 > 0$

Nous notons par  $\nu$  la normale unitaire extérieur à  $\Gamma$ ,  $u$  le champ de déplacement et  $\varepsilon$  le champ de déformation.

nous désignons par  $u_\nu$  et  $u_\tau$  les composantes normale et tangentielle d'un vecteur  $u$  à la frontière tel que :

$$u_\nu = u\nu$$

$$u_\tau = u - u_\nu u$$

de même  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  représente les composantes normales et tangentielles d'un champ des contraintes à la frontière tel que :

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= \sigma_\nu \nu \\ \sigma_\tau &= \sigma_\nu - \sigma_\nu \nu\end{aligned}$$

ces deux relations nous permettent d'écrire la relation suivante :

$$\sigma_\nu v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau v_\tau$$

Maintenant, nous définissons les conditions aux limites sur chacune des trois parties de la frontière  $\Gamma$

### 1.7.1 Condition aux limites de déplacement–traction :

La condition aux limites de déplacement est :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, T[ \quad (1.12)$$

sa signification consiste que la matériau est encastré sur la partie  $\Gamma_1 \times ]0, T[$

La condition aux limites de traction est :

$$\sigma_\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times ]0, T[ \quad (1.13)$$

où  $f_2$  représente la densité des forces surfaciques appliquées sur  $\Gamma_2$  et constitue une donnée du problème

### 1.7.2 Condition aux limites de contact :

Nous présentons en détails les condition de contact sur  $\Gamma_3$  c'est ici réside notre intérêt, car les diverses conditions sur cette partie nous donnent une variété de modèle de contact, qu'on va introduit dans la suite.

**Contact unilatérale :**

Dans ce cas de contacte, c'est le matériau qui se déforme, puisque la base est considérée rigide, de plus la réaction normale de la fondation sur le matériau est dirigée vers l'intérieur du matériau si le point est en contact alors  $u_\nu = 0$  et  $\sigma_\nu \leq 0$  et si le point quitte la fondation  $\sigma_\nu = 0$  et  $u_\nu \leq 0$

donc on peut exprimer les conditions aux limites de contact sans frottement par la relation suivante :

$$u_\nu \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (1.14)$$

cette condition appelées condition de Signorini, donc l'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_\nu = 0, \quad \Gamma_3 \times ]0, T[$$

**Contact bilatérale :**

Quand le contact entre le matériau et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatérale, nous traduisons ça mathématiquement par la condition suivante :

$$u_\nu = 0 \quad (1.15)$$

généralement le cas dans nombreuses machines et entre les pièces et composants d'équipement

### 1.7.3 Condition aux limites de contact avec adhésion

On considère un corps déformable occupant un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 2, 3$ ) dont la frontière  $\Gamma$ , supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  telles que  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \overline{\Gamma}_i$  et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ .

Nous supposons que le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur  $\Gamma_3 \times [0, T]$ . Nous étudions, l'évolution de ce corps matériel due à l'application des forces de volumes et de surfaces et de l'adhésion avec une base sur la partie  $\Gamma_3$ .

pour décrire les conditions de contact avec adhésion sur  $\Gamma_3$ , on introduit une variable interne d'état  $\beta$ , définie sur  $\Gamma_3$ , qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Quand  $\beta = 1$  sur  $\Gamma_3$ , l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand  $\beta = 0$ , tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion; et quand  $0 < \beta < 1$ , c'est le cas d'une adhésion partielle qui mesure la fraction des liens.

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale et adhésion

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R(u_\nu)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.16)$$

Où  $\sigma_\nu$  est la constante de l'énergie de collage,  $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de troncature définie par

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s > L \\ s & \text{si } |s| \leq L \\ -L & \text{si } s < -L \end{cases} \quad (1.17)$$

et  $p_\nu(u_\nu)$  est la compliance normale.

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.18)$$

tel que

$p_\tau(\beta)$  est une fonction positive donnée.

En particulier

$$p_\tau(\beta, u_\tau) = \begin{cases} q_\tau(\beta) r & \text{si } |r| < L_0 \\ q_\tau(\beta) \frac{r}{|r|} L_0 & \text{si } |r| > L_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $L_0 > 0$  est la longueur limite liée, et  $q_\tau$  est une fonction de raideur tangentielle non négative.

Le processus d'adhésion est supposé être gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \varsigma_\beta, R(|u|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.20)$$

$H_{ad}$  est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule.

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion par :

$$\varsigma_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds \quad (1.21)$$

On donne quelques exemples de genre de fonctions

$$H_{ad}(\beta, r) = -\gamma_\nu \beta_+ r^2. \quad (1.22)$$

Où  $\gamma_\nu$  est la constante de l'énergie de collage.

Un autre exemple, dans lequel  $H_{ad}$  dépend de ses trois variables, est donné par :

$$H_{ad}(\beta, \varsigma_\beta r) = -\gamma_\nu^- \beta_+ r^2 + \frac{\gamma_\nu^+ \beta (1 - \beta)_+}{1 + \varsigma_\beta^2} \quad (1.23)$$

Où  $r_+$  représente la partie positive de  $r$

## CHAPITRE 2

# Préliminaires sur l'analyse fonctionnelle et les inéquation variationnelle

Afin de faciliter la lecture de cet mémoire, il nous est prau utile de rappeler quelques éléments d'analyse non linéaire et inéquations variationnelles elliptiques .

Ce chapitre est devisé en deux parties nous començon de rappeler quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, et sur les opérateurs fortement monotone , des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquaion variationnelles, et théorème de cauchy-lipshitz.

La deuxieme partie concerne les espaces fonctionnelles ony introdoit les espaces de distributions et les espaces type sobolev associés a l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence, et quelques lemmes du type Gronwall.

## 2.1 Espaces normés

Soit  $X$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$

**Définition 2.1** Une application  $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé norme si et seulement si :

1.  $|u|_X \geq 0 \forall u \in X$  et  $|u|_X = 0 \Rightarrow u = 0_X$ . (positivité et séparation)
2.  $|au|_X = |\alpha| |u|_X \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . (Homogénéité)
3.  $|u + v|_X \leq |u|_X + |v|_X \forall u, v \in X$ . (Inégalité triangulaire).

**Définition 2.2** On appelle espace vectoriel normé un espace  $X$  muni d'une norme  $|\cdot|_X$ .

Passons maintenant à la notion d'espace vectoriel normé complet .

**Définition 2.3** Un espace normé  $X$  est dit complet si toutes les suites, de cauchy de  $X$  convergent dans  $X$

.un espace de Banach est un espace normé complet.

## 2.2 Espace de Hilbert

Dans cette sous section nous rappelons quelques fondamentales sur les espaces de Hilbert.

**Définition 2.4** Soit  $H$  un espace vectoriel réel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ . et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  un produit scalaire sur  $H$  c'est à dire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par  $|\cdot|_H$  l'application de  $H$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par :

$$|u|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

et on rappelle que  $\|\cdot\|_H$  est une norme sur  $H$  qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H \quad (2.2)$$

On dit que  $H$  est un espace de Hilbert si  $H$  est complet pour la norme définie dans la suite, on suppose que  $H$  est un espace de Hilbert

**Définition 2.5** Soit  $H'$  le dual de  $H$  c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur  $H$  muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\langle \varphi, v \rangle|}{\|v\|_H} \quad (2.3)$$

Où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H \times H'}$  représente la dualité entre  $H'$  et  $H$  ou le produit de dualité entre  $H$  et  $H'$

**Théorème 2.1** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) :

Soient  $H$  un espace de Hilbert, pour tout  $\varphi \in H'$  il existe un unique  $f \in H$  tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (2.4)$$

on a de plus :

$$\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H \quad (2.5)$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur  $H$  peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application  $\varphi \rightarrow f$  est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier  $H$  et son dual  $H'$

**Théorème 2.2** (Théorème de projection) :

Soit  $K \subset H$  un convexe fermé non vide, alors pour tout  $f \in H$  il existe un unique  $u \in K$  tel que :

$$\|f - u\|_H = \min_{v \in K} \|f - v\|_H \quad (2.6)$$

De plus  $u$  est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in K, \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K \quad (2.7)$$

On note  $u = P_K f$ , tel que  $P_K$  est l'opérateur de projection sur  $K$  défini par :

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\|_H \leq \|f_1 - f_2\|_H \quad \forall f_1, f_2 \in H \quad (2.8)$$

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{ v \in L^p(0, T; X) : |v^{(m)}|_{L^p(0, T; X)} < \infty, \forall m \leq k \} \quad (2.9)$$

## 2.3 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on note :

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; u \text{ continue}\}$$

$C^m(\Omega)$  est l'espace de fonction  $m$  fois continûments différentiables sur  $\Omega$ .

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$$

$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega) \text{ telle que : } u(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \Omega : K, \text{ ou } K \text{ est un compact}\}$

$$\text{supp} u = \overline{\{v \in \Omega \text{ tq : } u(v) \neq 0\}}$$

Le support de  $u$  le plus petit fermé sur lequel  $u(v) \neq 0$

### 2.3.1 Espace mesurable

Soient  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p d\mu < \infty \right\}$$

On définit la norme de  $u$  dans  $L^p(\Omega)$  par :

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $p = \infty$ , on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que : } u \text{ mesurable et } \exists c \geq 0 : |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

$$\|u\|_\infty = \inf \{c \geq 0 : |u(x)| \leq c \text{ p.p}\}$$

est la norme de  $u$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .

Pour  $p = 2$ , l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u; v \rangle_H = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

**Proposition 2.1** : L'espace  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$

L'espace  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est séparable pour  $1 < p < \infty$

L'espace  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est réflexif pour  $1 \leq p < \infty$

On définit :

$$D(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \text{supp } \varphi \subset \Omega, \text{supp } \varphi \text{ compact}\}$$

**Remarque 2.1** L'espace des fonction  $C^\infty$  sur  $\Omega$  à support compact dans  $\Omega$  (dit aussi espace des fonctions de test)

**Définition 2.6** (La convergence dans  $D(\Omega)$ )

On dit que la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D(\Omega)$  converge vers  $\varphi$  dans  $D(\Omega)$  si et seulement si :

$\exists K$  compact telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ supp } \varphi_n \subset K$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\partial^n \varphi_n - \partial^n \varphi| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

### 2.3.2 Les espaces de distributions

**Définition 2.7** Une forme linéaire continue sur  $D(\Omega)$  est appelée une distribution sur  $\Omega$  l'ensemble des distributions sur  $\Omega$  est noté  $D'(\Omega)$  (dual topologique de  $D(\Omega)$ )

**Proposition 2.2** 1.  $D(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset D'(\Omega)$

2. Si  $p < \infty$  alors  $D(\Omega)$  est dense dans  $L^p$  c'est-à-dire  $\overline{D(\Omega)} = L^p(\Omega)$

**Définition 2.8 (La convergence faible)** i.e La convergente dans  $D'(\Omega)$

On dit qu'une suite de distribution  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D'(\Omega)$  converge dans  $D(\Omega)$  si et seulement si elle converge simplement c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in D(\Omega), \int_{\Omega} u(x) \cdot \partial_i \psi(x) dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \cdot \psi(x) dx$$

Si un tel  $\partial_i u$  existe, il est unique, néanmoins il existe pas toujours.

Nous introduisons également les espaces suivants :

$$D = \{\varphi = (\varphi_i) | \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D} = \{\phi = (\phi_{ij}) | \phi_{ij} = \phi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega), i, j = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N \times N}$$

$$D'(\Omega) = \{u = (u_i) | u_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D}' = \{\sigma = (\sigma_{ij}) | \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega), i, j = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}$$

**Définition 2.9** Les produits de dualité entre  $D$  et  $D'$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  seront définis par :

$$\langle u, \varphi \rangle_{D' \times D} = \langle u_i, \varphi_i \rangle$$

$$\langle \sigma, \phi \rangle_{D' \times D} = \langle \sigma_{ij}, \phi_{ij} \rangle$$

Soit  $\partial_i$  l'opérateur  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  pour les fonctions et pour les distribution On a :

$$\langle \partial_i \theta, \psi \rangle = - \langle \theta, \partial_i \psi \rangle, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On peut également introduire les opérateurs différentiels du premier ordre définis par :

$$\varepsilon : D' \rightarrow \mathcal{D}', \varepsilon(\varphi) = \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \forall \varphi \in D$$

$$\text{div} : \mathcal{D} \rightarrow D, \text{div}(\phi) = \partial_i \phi_{ij} \quad \forall i = \overline{1, N}, \forall \phi \in D$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$\varepsilon : D' \rightarrow \mathcal{D}', \varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \forall u \in D'$$

$$\text{div} : \mathcal{D}' \rightarrow D', \text{div} \sigma = \partial_j \sigma_{ij} \quad \forall i = \overline{1, N}, \forall \sigma \in \mathcal{D}'$$

En utilisant le produit scalaire ,on obtient facilement :

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle u, \text{div} \phi \rangle_{D' \times D} \quad \forall u \in D', \forall u \in D', \forall \phi \in$$

$$\langle \text{div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in D$$

L'opérateur pour les fonctions et pour les distributions s'appelle opérateur déformation. L'opérateur div pour les fonctions et pour les distributions s'appelle opérateur divergence

## 2.4 Espaces de Sobolev, opérateur de déformation et de divergence

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, \infty]$ . Nous définissons les espaces de Sobolev par

Lorsque  $p < \infty$ , nous définissons la norme dans l'espace  $W^{1,p}(0, T; X)$  par :

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}$$

La norme sur l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est définie par

$$|v|_{w^{1,p}(0,T;X)} = \left( \int_0^T \sum_{0 \leq m \leq k} |v^{(m)}(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

Lorsque  $p = \infty$ , la norme est définie par

$$|v|_{w^{1,p}(0,T;X)} = \max_{0 \leq m \leq k} \sup_{t \in [0,T]} |v^{(m)}(t)|_X \quad (2.11)$$

Si  $X$  est un espace de Hilbert et  $p = 2$ , alors l'espace  $H^1(0, T; X)$ ,

$$H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(0,T;X)} = \sum_{0 \leq m \leq k} \int_0^T \langle u^{(m)}(t), v^{(m)}(t) \rangle_X dt \quad (2.12)$$

### 2.4.1 Les espaces de sobolev $H^1(\Omega)$ :

**Définition 2.10 :**

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on définit les espaces de sobolev suivants :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tq } D_i u \in L^2(\Omega), \text{ pour } i = \overline{1 \dots N}\} \quad (2.13)$$

$H(\Omega)$  est un hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (2.14)$$

si norme associée :

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left( \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

On a résultats suivants :

$C^1(\Omega)$  est dense dans  $H^1(\Omega)$

$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  avec injection compact.

Il existe une application linéaire et continue  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2$

telle que  $\gamma u = u_\Gamma$  pour tout  $(u \in C^1(\overline{\Omega}))$

## 2.4.2 Espace liés à l'opérateur déformation :

**Définition 2.11** L'espace  $H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$  lié à l'opérateur déformation  $\varepsilon$ , est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire .

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H \quad (2.16)$$

et la norme associée :

$$|u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.17)$$

on l'opérateur divergence est défini par :

$$Div : \mathcal{H} \rightarrow H, Div \sigma = \partial_i \sigma_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, N} \quad (2.18)$$

nous avons aussi inclusions suivants :

$$D \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$$

Et quelques propriétés :

$$\begin{aligned} \|u\|_H &\leq \|u\|_{H_1}, \quad \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in H_1 \\ \|\sigma\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\sigma\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \|\operatorname{div} \sigma\|_{\mathcal{H}} \leq \|\operatorname{div} \sigma\|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Théorème 2.3** (*inégalité de Korn*) :

Soit mesure  $\Gamma_1 \succ 0$ . Alors, il existe une constante  $C \succ 0$ , qui dépend de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que :

$$\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geq C \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in V \quad (2.20)$$

Où  $V$  est un sous-espace fermé de  $H_1$ , défini par :

$$V = \{u \in H_1 \mid u = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1\} \quad (2.21)$$

et le produit scalaire dans  $V$  est défini par :

$$\langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (2.22)$$

### 2.4.3 Théorème de Cauchy Lipshitz

**Théorème 2.4** (*cauchy lipshitz*)

soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel et  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini presque partout sur  $]0, T[$ , qui satisfait les conditions suivantes.

1- Il existe  $L_F > 0$  tel que :

$$\|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[ \quad (2.23)$$

2-Il existe  $p \geq 1$  telque  $t \rightarrow F(t, x) \in L^p(0, T, X) \forall x \in X$

Alor pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction  $x_0 \in X$ ,il existe une fonction  $x \in W^{1,p}(0, T, X)$  telle que

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & p, p, t \in ]0, T[ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

## 2.5 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soient  $K \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $T > 0$ . On rappelle que  $W^{k,p}(0, T, H)$  est l'espace des distributions vectorielles  $u \in \mathcal{D}'(0, T, H)$

telles que  $D_j u \in L^p(0, T, H)$  pour  $j = \overline{0, k}$ ,  $D_j$  désignant la dérivée d'ordre  $j$  au sens des distributions.

Si  $1 \leq p < +\infty$ ,  $W^{K,p}(0, T; H)$  est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$|u|_{W^{K,p}(0,T,H)} = \left( \sum_{j=0}^k \int_0^T |\mathbf{D}_j u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W^{k,p}(0, T, H)$$

En particulier,  $W^{k,2}(0, T, H)$  est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}(0,T,H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T \langle D_j u(t), D_j v(t) \rangle_H dt \quad \forall u, v \in W^{k,2}(0, T, H)$$

D'autre part  $W^{k,+\infty}(0, T; H)$  est un espace de Banach pour la norme définie par :

$$|u|_{W^{K,p}(0,T,H)} = \sum_{j=0}^k \sup |\mathbf{D}_j u(t)|_H \quad \forall u \in W^{k,+\infty}(0, T, H)$$

Pour le cas particulier  $k = 0$ , on remarque que  $W^{0,p}(0, T, H) = L^p(0, T, H)$  et on note alors la norme de  $L^p(0, T, H)$  par  $|\cdot|_{L^p(0,T,H)}$  pour tout  $p \geq 1$

## 2.6 Théorèmes de point fixe

Le théorème de point fixe de Banach sera utilisé dans ce mémoire pour prouver l'existence de la solution au problème variationnel en mécanique du contact.

Soit  $X$  un espace de Banach avec la norme  $|\cdot|_X$  et  $K$  est un sous-ensemble non vide fermé de  $X$ . Soit  $A : K \rightarrow X$  est un opérateur défini sur  $K$ .

Nous sommes intéressés par l'existence d'une solution  $u \in K$  de l'équation d'opérateur

$$Au = u \tag{2.25}$$

Un élément  $u \in K$  qui satisfait (2.25) est appelé un point fixe de l'opérateur  $A$ .

Nous présentons dans ce qui suit le théorème principal qui énonce l'existence des points fixes des opérateurs non linéaires.

Soit  $X$  fermé. Supposons que  $A : K \rightarrow K$  est une contraction, c'est-à-dire il existe une constante  $\alpha \in [0, 1]$  telle que

$$|Au - Av|_X \leq \alpha |u - v|_X \quad \forall u, v \in K \tag{2.26}$$

Alors il existe une unique  $u \in K$  tel que  $Au = u$

### Démonstration de point fixe de Banach :

Soit  $u_0 \in K$  un élément quelconque de  $K$  et Soit la suite définie par

$$u_{n+1} = Au_n \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Car  $A : K \rightarrow K$ , la suite  $\{u_n\}$  est bien définie. Montrons d'abord que  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy.

En utilisant le fait que  $A$  est une contraction, nous avons

$$|u_{n+1} - u_n|_X \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|_X \leq \dots \leq \alpha^n |u_1 - u_0|_X$$

Alors pour tout  $m > n \geq 1$

$$\begin{aligned} |u_m - u_n|_X &\leq \sum_{j=0}^{m=n-1} |u_{n+j+1} - u_{n+j}|_X & (2.27) \\ &\leq \sum_{j=0}^{m=n-1} \alpha^{n+1} |u_1 - u_0|_X \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |u_1 - u_0| \end{aligned}$$

Comme  $\alpha \in [0, 1]$ , on résulte que

$$|u_m - u_n|_X \rightarrow 0 \quad \text{Lorsque } m, n \rightarrow \infty$$

Ainsi  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy et a une limite  $u \in K$ , puisque  $K$  est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach  $X$ .

De plus, puisque  $u_n \rightarrow u$  dans  $K$ , il résulte de ?? que  $Au_n \rightarrow Au$  dans  $X$  ce qui conclut la partie d'existence du théorème.

Supposons que  $u_1, u_2 \in K$  sont des points fixes de  $A$ . Alors de  $u_1 = Au_1$  et  $u_2 = Au_2$  nous avons

$$u_1 - u_2 = Au_1 - Au_2 \tag{2.28}$$

et comme  $A$  est une contractante

$$|u_1 - u_2|_X = |Au_1 - Au_2|_X \leq \alpha |u_1 - u_2|_X \tag{2.29}$$

Ce qui implique que  $|u_1 - u_2| = 0$ , car  $\alpha \in [0, 1]$ . Donc si  $A$  admet un point fixe, il en résulte que ce point fixe est unique, ce qui conclut la preuve.

Nous avons besoin d'une version du théorème de point fixe de Banach que nous rappelons dans ce qui suit. Pour un opérateur  $A$ ,

nous définissons  $A^m = A(A^{m-1})$  pour  $m \geq 2$ .

admet un point fixe unique.

**Démonstration :**

D'après théorème 1.2,  $A^m$  a un point fixe unique  $u \in K$ . De  $A^m(u)$ , on obtient

$$A^m(Au) = A(A^m u) = Au \quad (2.30)$$

Ainsi  $Au \in K$  est aussi un point fixe de  $A^m$ , où  $A^m$  admet un point fixe unique nous avons

$$\Lambda u = u$$

C'est-à-dire  $u$  est un point fixe de  $\Lambda$ . L'unicité du point fixe de  $\Lambda$  est une conséquence de l'unicité de du point fixe de  $\Lambda^m$ .

Nous présentons maintenant un résultat de point fixe qui est utile pour la résolution des inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire.

**Proposition 2.3** Soit  $\Lambda : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$  un opérateur satisfait la propriété suivante :

il existe  $k \in [0, 1]$  et  $c \geq 0$  tels que :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq k \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X + c \int_0^1 \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds \quad ; \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X), t \in [0, T] \quad (2.31)$$

Alors il existe un élément unique  $\eta^* \in C(0, T; X)$  tel que  $\Lambda\eta^* = \eta^*$ .

On note par :

$$\|\eta\|_\beta = \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} \|\eta(t)\|_X \quad (2.32)$$

Avec  $\beta > 0$  d'être choisi plus tard. Il est clair que  $\|\cdot\|_\beta$  définit une norme sur l'espace  $C(0, T; X)$  qui est équivalente à la norme usuelle  $\|\cdot\|_{C(0, T; X)}$ .

conséquence ,il en résulte que  $C(0, T; X)$  est un espace de Banach avec la norme  $|\cdot|_\beta$  aussi .Soit  $t \in [0, T]$  ,en utilisant (2.31)et (2.32) il en résulte que

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X &\leq k e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c e^{-\beta t} \int_0^1 |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds \\ &= k e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c e^{-\beta t} \int_0^1 (e^{-\beta t} |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X) e^{\beta t} ds \\ &\leq k |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta + c e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta \int_0^1 e^{\beta t} ds \\ &= k |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta + \frac{c}{\beta} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

Pour tout  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X)$  .Donc :

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_\beta \leq \left(k + \frac{c}{\beta}\right) |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta ; \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X).$$

Ensuite ,nous choisissons  $\beta$  tel que  $\beta \succ \frac{c}{1-k}$  ce choix est possible car  $k \in [0, 1]$  .

Alors ,

$$k + \frac{c}{\beta} \prec 1$$

et par conséquent ,l'opérateur  $\Lambda$  est une contraction sur l'espace  $C(0, T; X)$  muni de la norme  $|\cdot|_\beta$  .D'après le Théorème (1,2),l'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in C(0, T; X)$  ,ce qui conclut la preuve .

Notones ,Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce ,puis nous passons aux inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce ,ainsi que les inéquations quasi-variationnelles elliptiques.

## 2.7 Éléments d'analyse non linéaire

### 2.7.1 Opérateur fortement monotones

Dans cette section, nous étudions quelques propriétés d'un opérateur fortement monotone et de lipshitz dans un espace de Hilbert et  $A : H \rightarrow H$  un opérateur non linéaire.

**Définition 2.12** l'opérateur  $A$  est dit :

(a) monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq 0 \quad \forall u, v \in H \quad (2.33)$$

(b) fortement monotone s'il existe  $m \leq 0$  tel que :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq m |u - v|_H^2 \quad \forall u, v \in H \quad (2.34)$$

(c) de lipshitz s'il existe  $M > 0$  tel que :

$$|Au - Av|_H \leq M |u - v|_H \quad \forall u, v \in H \quad (2.35)$$

**Théorème 2.5** : Soit  $A : H$  un opérateur fortement monotone et de lipshitz.

Alors  $A$  est inversible et son inverse  $A^{-1}$  est également fortement monotone et de lipshitz.

Alors l'équation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.

Dans cette partie nous essayons de rappeler les notions essentielles sur les espaces fonctionnels nécessaires pour l'étude mathématique de notre problème mécanique.

## 2.8 Inéquations variationnelles

### 2.8.1 Inéquations variationnelles de première espèce :

Étant donné un opérateur  $A : X \rightarrow X$ , un sous-ensemble  $K \subset X$ , et un élément  $f \in X$  nous considérons le problème de trouver un élément  $u$  tel que :

$$u \in K, (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X, \forall v \in K \quad (2.36)$$

Une inéquation de la forme (2.36) s'appelle inéquation variationnelle elliptique de première espèce .

Nous avons le résultat standard suivant d'existence et d'unicité de la solution .

Alors ,pour tout  $f \in X$  l'inéquation variatonnelle ..admet une solution unique .

Supposons maintenant que  $K = X$  ,puis en prenant  $v = u \pm w$  ,il est facile de voir que l'inéquation variatonnelle..est équivalente à l'équation variationnelle

$$(Au, w)_X = (f, w)_X, \forall w \in X$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant dans l'étude des équations non linéaires impliquant des opérateurs monotones .

## 2.9 Inéquations variationnelles de deuxième espèce :

Étant donné un ensemble  $K \subset X$  ,un opérateur  $A : K \rightarrow X$  ,une fonction  $j : K \rightarrow \mathbb{R}$  ,et un élément  $f \in X$  ,nous considérons le problème de trouver

un élément  $u$  tel que :

$$u \in K, (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X, \forall v \in K \quad (2.37)$$

Une inéquation variationnelle de la forme (2.37) est appelée inéquation variationnelle elliptiques de deuxième espèce. Dans le cas particulier lorsque  $j \equiv 0$  l'inéquation variationnelle (2.37), représente une inéquation variationnelle de la forme, (2.36) c'est-à-dire

une inéquation variationnelle elliptique de première espèce. Dans l'étude de nous (2.37) supposons les hypothèses suivants :

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe non vide de } X \quad (2.38)$$

$A : K \rightarrow X$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ (Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|^2, \forall u, v \in X. \\ \text{b) il existe une constant } M > 0 \text{ telle que} \\ |Au - Av|_X \leq M |u - v|_X, \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$j : K \rightarrow R \text{ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.} \quad (2.40)$$

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

**Théorème 2.6** *Soit  $X$  un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.38)–(2.40) sont vérifiées.*

Alors pour tout  $f \in X$  l'inéquation variationnelle elliptique (2.37) admet une solution unique.

## 2.10 Lemme de Gronwall

**Lemme 2.1** Soient  $f, g \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $\varphi \in C([0, T], \mathbb{R})$

si

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)\varphi(s)ds, \quad t \in [0, t]$$

Alors on a :

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t f(s)ds) \exp \int_0^t g(s)ds, t \in [0, T] \quad (2.41)$$

pour le cas particulier  $f = 0$ , ce lemme dérivient :

Soient  $g \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $\varphi \in C([0, T], \mathbb{R})$

Alors : si

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t g(s)\varphi(s)ds, t \in [0, T] \quad (2.42)$$

Alors on a :

$$\varphi(t) \leq a \exp \int_0^t g(s)ds, t \in [0, T] \quad (2.43)$$

## CHAPITRE 3

### Etude d'un problème viscoélastique de contact bilatéral avec adhésion

On étudie, dans ce chapitre, un problème de contact avec adhésion d'un corps déformable, sous l'action des forces volumiques et surfaciques avec une base déformable

On suppose que les forces subies par le corps varie lentement dans le temps de façon à ce que les accélérations soient négligeables ; la loi de comportement du matériau est considérée viscoélastique.

On suppose que les conditions aux limites de contact sont modélisés par une condition de compliance normale et adhésion

Des résultats d'existence et d'unicité pour le problème de contact ont été obtenus dans la formulation variationnelle. Dans cette travaux, la loi de comportement viscélastique considérée est Kelvin-voigt.. De plus, seule une formulation variationnelle on déplacement a été obtenue,

On formule tout d'abord le modèle pour le processus (problème  $P$ ), on obtenue la formulation variationnelle  $P_1$  a partire du problème  $P$  en utilisant

la formule de Green ainsi que loi de comportement donnée

les inconnues du problème est le champ de déplacements noté  $u$  et le champ d'adhésion  $\beta$ , nous démontrons, un résultat d'existence et d'unicité de la solution en utilisant un théorème d'existence et d'unicité sur les inéquations variationnelle avec des opérateurs frottement monotones et de Lipshitz ainsi que les propriétés de point fixe.

### 3.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses :

Nous considérons un corps viscoélastique, occupe le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  avec de frontière régulière  $\Gamma$ , divisée en trois parties mesurables disjointes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  telle que  $mes(\Gamma_1) > 0$ .

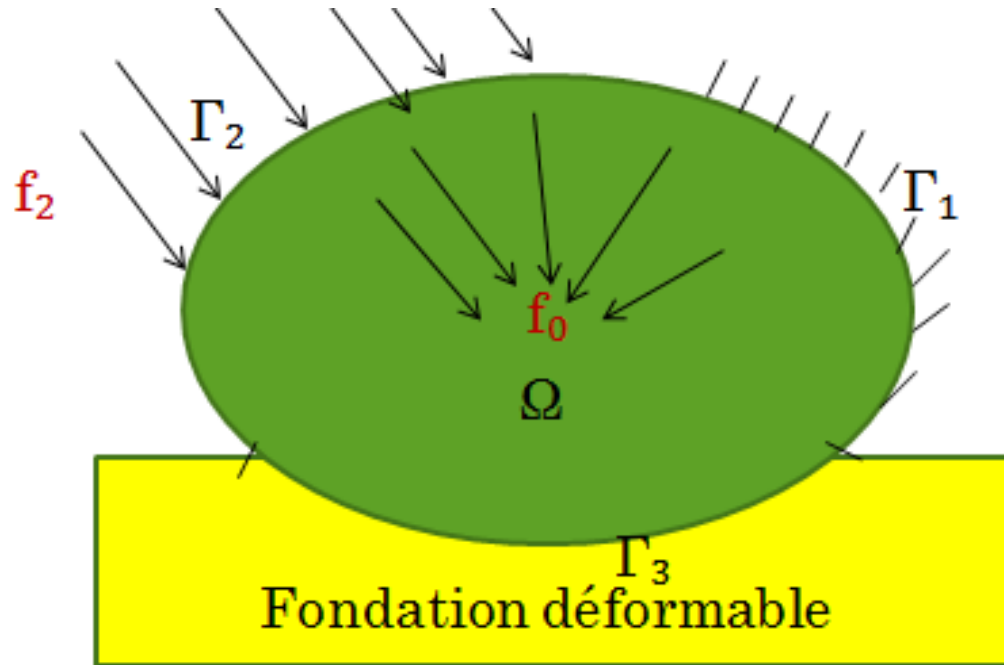
Soit  $\nu$  la normale extérieure unitaire sur  $\Gamma$ ,  $T > 0$ , et soit l'intervalle de temps  $[0, T]$  en question.

Le corps est encastré sur  $\Gamma_1 \times [0, T]$ , donc le champs de déplacement  $u$  est inexistant dans cette partie .

Soumis à une densité des forces  $f_0$  dans  $\Omega \times [0, T]$  et des forces surfaciques de densité  $f_2$  sur  $\Gamma_2 \times [0, T]$ .

Le corps est en contact avec une fondation déformable le long de  $\Gamma_3$  .de

plus le contact , avec cette fondation est supposée avec adhésion .



Le problème mécanique qu'on étudie est le suivant :

problème p :trouver un champs de déplacement  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un champs des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{S}_d$ , et un champs d'adhésion  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  telle que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (3.3)$$

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (3.4)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2(-R(u_\nu))_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.5)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.6)$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \varsigma_\beta, R(|u|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.7)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.8)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.9)$$

L'équation (3.1) représente la loi de comportement viscoélastique non linéaire, la relation (3.2) représente l'équation d'équilibre où  $f_0$  est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable. Les conditions (3.2) – (3.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les conditions (3.5) – (3.7) représente les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur la partie  $\Gamma_3$  de la frontière  $\Omega$ . Finalement, la relation (3.8)–(3.9) représente les conditions initiales.

Pour l'étude de notre problème mécanique (3.1)–(3.9) on considère les hypothèses suivantes :

**Hypothèses :**

Nous supposons que l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbf{S}_d \rightarrow \mathbf{S}_d$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists L_{\mathcal{A}} > 0 : |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{S}_d, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \text{(b) } \exists m_{\mathcal{A}} > 0 : |(\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)| \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \text{(c) l'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable Lebesgue dans } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbf{S}_d \\ \text{(d) l'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbf{S}_d \rightarrow \mathbf{S}_d$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists L_{\mathcal{G}} > 0 : | \mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2) | \leq L_{\mathcal{G}} | \varepsilon_1 - \varepsilon_2 | , \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{S}_d \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \text{(b) } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon) \text{ et mesurable dans } \Omega , \forall \varepsilon \in \mathbf{S}_d \\ \text{(c) } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Nous supposons que la fonction de compliance normale  $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists L_v > 0 : | p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2) | \leq L_v | r_1 - r_2 | , \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) } x \rightarrow p_v(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \text{(c) } \text{L'application } x \rightarrow p_v(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La fonction de contact tangentiel  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } L_\tau > 0 \text{ telle que } | p_\tau(x, \beta_1, r_1) - p_\tau(x, \beta_2, r_2) | \leq L_\tau ( | \beta_1 - \beta_2 | + | r_1 - r_2 | ) \\ \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, x \in \Gamma_3 \\ \text{(b) } x \rightarrow p_\tau(x, \beta, r) \text{ Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}^d \\ \text{(c) } x \rightarrow p_\tau(x, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d \\ \text{(d) } x \rightarrow p_\tau(x, \beta, r) \cdot \nu(x) = 0 \text{ tel que } r \cdot \nu(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

la fonction d'adhésion :  $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{(a)} \exists L_{ad} \succ 0 \text{ telle que } |H_{ad}(x, b_1, z, r) - H_{ad}(x, b_2, z, r)| \leq L_{ad} |b_1 - b_2| \\
 \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \text{ et} \\
 |H_{ad}(x, b_1, z_1, r_1) - H_{ad}(x, b_2, z_2, r_2)| \\
 \leq L_{ad} (|b_1 - b_2| + |z_1 - z_2| + |r_1 - r_2|) \\
 \forall b_1, b_2 \in [0, 1], z_1, z_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in [-L, L], \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \\
 \text{(b)} \text{ l'application } x \rightarrow H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall b, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L] \\
 \text{(c)} \text{ l'application } (b, z, r) \rightarrow H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est continue dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\
 \text{(d)} H_{ad}(x, 0, z, r) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, [-L, L] \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\
 \text{(e)} H_{ad}(x, b, z, r) \geq 0 \quad \forall b \leq 0; z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], x \in \Gamma_3 \text{ et} \\
 H_{ad}(x, b, z, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1; z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Notons que si  $\beta \in L^\infty(\Gamma_3), z \in L^\infty(\Gamma_3)$  et  $r : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable alors les conditions (2.26) impliquent que  $x \rightarrow H_{ad}(x, \beta(x), z(x), Rr(x))$  appartient à  $L^\infty(\Gamma_3)$ . de plus, il est aisé de voir que si le coefficient d'adhérence  $\gamma_v \in L^\infty(\Gamma_3)$  satisfait  $\gamma_v \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$  alors la fonction .

On suppose que les forces surfaciques et volumiques satisfont :

$$f_0 \in L^\infty(0, T, H) \quad , \quad f_2 \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_2)^d) \quad (3.15)$$

Enfin les données initiales satisfont :

$$u_0 \in V \quad (3.16)$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \quad (3.17)$$

On remarque que les conditions (3.14) et (3.14)

Le théorème de représentation de Riesz entraine l'existence d'un élément  $f(t) \in V$  telle que :

$$\langle f(t), u \rangle_V = \langle f_0(t), v \rangle_H + \langle f_2(t), v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (3.18)$$

Soit  $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par :

$$j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_v(u_v)v_v d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \gamma_v \beta^2 (-R(u_v)_+ + v_v) d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau)v_\tau d\Gamma \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \forall u, v \in V \quad (3.19)$$

Les conditions (3.12) et (3.13) entraînent que l'intégrale (3.19) est bien définie. On note que la condition (3.18) implique

$$f \in L^\infty(0, T, V) \quad (3.20)$$

Pour l'étude du problème  $p$ , on définit le sous-espace fermé  $V$  de  $H_1$  par :

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (3.21)$$

## 3.2 Formulation variationnelle :

Dans cette section, on va donner une formulation variationnelle du problème mécanique  $P$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta, u, v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T) \quad (3.22)$$

La formulation variationnelle de notre problème  $\mathbf{P}$  est le suivant :

**Problème  $P_v$**  : Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , et le champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{A}$ , et le champ d'adhésion  $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$  telle que :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) \quad (3.23)$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), \varsigma_{\beta}(t), R(|u(t)|)) \quad (3.24)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) = (f(t), v)_V \quad (3.25)$$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad \beta(0) = \beta_0 \quad (3.26)$$

Le résultat d'avoir la solution unique est le suivant :

### 3.3 Existence et unicité de la solution :

**Théorème 3.1** *Sous les hypothèses (3.10) – (3.17) , le problème variationnelle  $P_V$  admet une solution unique  $\{u, \sigma, \beta\}$  ayant la régularité suivant :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, V) \quad (3.27)$$

$$\sigma \in L^\infty(0, T, \mathcal{H}_1) \quad (3.28)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T, L^\infty(\Gamma_3)) \quad (3.29)$$

la démonstration du théorème sera conduit en plusieurs étapes ;

Soit  $\eta \in L^\infty(0, T; V)$  .

**Problem  $P_v^\eta$**  : Trouver le champ de déplacements  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que :

$$A\varepsilon(\dot{u}_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_V = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \quad (3.30)$$

$$u_\eta(0) = u_0 \quad (3.31)$$

**Lemme 3.1** *Le problème  $p_v^\eta$  admet une solution unique*

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V). \quad (3.32)$$

### 3.3.1 Démonstration du lemme 3.1

**Preuve.** : Soit  $A : V \rightarrow V$ , l'opérateur définit par :

$$\langle Av, w \rangle_V = \langle \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v, w \in V \quad (3.33)$$

de l'hypothèse (3.10) on a :

$$| \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2) | \leq L_{\mathcal{A}} | \varepsilon_1 - \varepsilon_2 | \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{S}_d, x \in \Omega ; \quad (3.34)$$

il résulte que  $A$  est un opérateur fortement monotone et lipschitz en effet : ■

Soit  $w_1, w_2 \in V$  on a :

$$\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V = \langle Aw_1, w_1 - w_2 \rangle_V - \langle Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V$$

$$\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V = \langle \mathcal{A}\varepsilon(w_1 - w_2), \varepsilon(w_1 - w_2) \rangle_{\mathcal{H}}$$

De l'hypothèse (17)(b) il vient que :

$$\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V \geq m_{\mathcal{A}} | \varepsilon(w_1 - w_2) |_{\mathcal{H}}^2$$

On applique l'inégalité de korn et (a) on trouve :

$$\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V \geq c | w_1 - w_2 |_{H_1}^2 \geq c | w_1 - w_2 |_V^2$$

Alors  $A$  est fortement monotone .

On a de plus :  $\forall w_1, w_2 \in V$  et  $v \in V$  :

$$| \langle Aw_1 - Aw_2, v \rangle_V | = | \langle \mathcal{A}\varepsilon(w_1) - \mathcal{A}\varepsilon(w_2), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} |$$

On applique l'inégalité de cauchy schwartz on obtient :

$$| Aw_1 - Aw_2 |_V \cdot | v |_V \leq | \mathcal{A}\varepsilon(w_1) - \mathcal{A}\varepsilon(w_2) |_{\mathcal{H}} \cdot | \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}}$$

On a

$$| \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}} \leq | v |_V, \quad \forall v \in V$$

Alors

$$| Aw_1 - Aw_2 |_V \cdot | v |_V \leq | \mathcal{A}\varepsilon(w_1) - \mathcal{A}\varepsilon(w_2) |_{\mathcal{H}} | v |_V$$

Donc :

$$| Aw_1 - Aw_2 |_V \leq | \mathcal{A}\varepsilon(w_1) - \mathcal{A}\varepsilon(w_2) |_{\mathcal{H}}$$

Le fait que  $\mathcal{A}$  vérifié (10.b) alors :

$$| Aw_1 - Aw_2 |_V \leq L_A | \varepsilon(w_1 - w_2) |_{\mathcal{H}}$$

$$| Aw_1 - Aw_2 |_V \leq c | w_1 - w_2 |_V$$

Donc ;  $A$  est un opérateur est fortement monotone et de Liptchiz

**Problème  $.Q_v^n$**  : Trouver le champ d'adhésion  $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$  tel que :

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta_\eta(t), \varsigma_{\beta_\eta}(t), R(| u_\eta(t) |)) \quad , t \in [0, T] \quad (3.35)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0 \quad (3.36)$$

**Lemme 3.2** *Le problème  $Q_v^n$  admet une solution unique  $\beta_\eta$  tel que :*

$$\beta_\eta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3))$$

### 3.3.2 Démonstration du lemme 3.2

**Preuve.** Soit la fonction  $F_\eta : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$  définie par :

$$F_\eta(t, \beta) = H_{ad}(\beta(t), \varsigma(t), R(| u_{\eta\tau}(t) |))$$

Soient  $\beta_1, \beta_2 \in L^\infty(\Gamma_3)$  ona :

$$| F_\eta(t, \beta_1) - F_\eta(t, \beta_2) |_{L^\infty(\Gamma_3)} = | H_{ad}(\beta_1(t), \varsigma(t), R(| u_{\eta\tau}(t) |)) - H_{ad}(\beta_2(t), \varsigma(t), R(| u_{\eta\tau}(t) |)) |_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq$$

Donc  $F_\eta$  est liptchizienne par rapport a second argument  $\beta$ .

Soient maintenant  $t_1, t_2 \in [0, T]$  alors on a :

$$| F_\eta(t_1, \beta) - F_\eta(t_2, \beta) |_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c | u_{\eta\tau}(t_1) - u_{\eta\tau}(t_2) |_{L^\infty(\Gamma_3)}$$

comme  $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V)$  alors

$$\|F_\eta(t_1, \beta) - F_\eta(t_2, \beta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c \|t_1 - t_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$$

Donc  $F_\eta$  est continue par rapport au temps  $t$ .

D'après ces deux résultats et comme  $\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3)$ , l'application  $t \rightarrow F_{\eta\zeta}(t, \beta)$  appartient à  $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ , on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui nous donne l'existence et l'unicité d'une fonction  $\beta\eta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3))$  tel que :

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta_{\eta\zeta}(t), \varsigma(t), R(|u_{\eta\tau}(t)|)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (3.37)$$

Et

$$\beta\eta(0) = \beta_0 \quad (3.38)$$

■

On note par  $\beta\eta$  la solution du problème  $Q_v^\eta$  obtenue dans le lemme 3.2

On note aussi par  $\Lambda_n(t)$  l'élément de  $V$  définie par

$$\langle \Lambda_\eta(t), v \rangle_v = \langle \mathcal{G}\varepsilon(u_n(t)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta u_n(t), u_n(t), v) \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \quad (3.39)$$

**Lemme 3.3** *l'opérateur  $\Lambda_n : [0, T] \rightarrow V$  est continue, se plus il existe un unique élément  $\eta^* \in L^\infty(0, T, V)$  tel que :*

$$\Lambda\eta^* = \eta^*$$

### 3.3.3 Démonstration du lemme 3.3

i) Soient  $\eta \in C([0, T])$  et soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ .

$$\langle \Lambda_\eta(t), v \rangle_v = \langle \mathcal{G}\varepsilon(u_n(t)), \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta u_n(t), u_n(t), v) \quad \forall v \in V, t \in [0, T]$$

on a :

$$\|v\|_{L^\infty(T_3)} \leq c \|v\|_V$$

$$\|\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)\|_V \leq \|\mathcal{G}\varepsilon(u_n(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_n(t_2))\|_{\mathcal{H}} + \|j(\beta u_n(t_1), u_n(t_2), v) - j(\beta u_n(t_2), u_n(t_2), v)\|_{L^\infty}$$

$$\|\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)\|_V \leq \|\mathcal{G}\varepsilon(u_n(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_n(t_2))\|_{\mathcal{H}} + \left| \int_{\Gamma_3} p_\tau (\beta_{u_\eta}(t_1) - \beta_{u_\eta}(t_2), u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2), v) \right|$$

donc  $\exists c > 0$

$$\|\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)\|_V \leq c \|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_V + c \|\beta_n(t_1) - \beta_n(t_2)\|_{L^\infty(T_3)}$$

Comme  $u_n \in L^1([0, T], V)$  et  $\beta_n \in W^{1,\infty}([0, T] \times \Gamma_3) \subset L^\infty(T_3)$

Alors (3.36) déduit que

$$\Lambda\eta \in C([0, T], V)$$

ii) Soient  $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty([0, T], V)$ , et notons  $u_i = u_{\eta_i}, v_i = v_{\eta_i}$ , pour  $i = 1, 2$

de (3.36) ; on a :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + C \|\beta u_1(t) - \beta u_2(t)\|_{L^2(T_3)}^2$$

et on a de (3.35) et (3.36) on trouve :

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}(\beta_i(s), \varsigma_{\beta_i}(s), R(|u_i(s)|)) ds \quad i = 1, 2 \quad (3.40)$$

En utilisant (3.39) et (3.12a) et (3.13) on obtient :

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^\infty(T_3)} \leq L_{H_{ad}} \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^\infty(T_3)} ds + L_{H_{ad}} \int_0^t \|\varsigma_{\beta_1}(s) - \varsigma_{\beta_2}(s)\|_{L^\infty(T_3)} ds + L_{H_{ad}} \int_0^t \dots$$

comme

$$\varsigma_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds$$

on trouve

$$\int_0^t | \varsigma_{\beta_1}(s) - \varsigma_{\beta_2}(s) |_{L^\infty(T_3)} \leq c \int_0^t | \beta_1(s) - \beta_2(s) |_{L^\infty(T_3)} \quad (3.41)$$

de (3.40) et (3.41) et (3.13) et l'inégalité de Gronwail on a :

$$| \beta_1(t) - \beta_2(t) |_{L^\infty(T_3)}^2 \leq c \int_0^t | u_1(s) - u_2(s) |_{L^\infty(T_3)}^2 ds$$

comme

$$| v |_{L^\infty(\Gamma_3)} \geq c | v |_V; \forall v \in V$$

on obtient :

$$| \beta_1(t) - \beta_2(t) |_{L^\infty(T_3)}^2 \leq c \int_0^t | u_1(s) - u_2(s) |_V^2 ds, \forall t \in [0, T]$$

$$| \langle \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t), v \rangle_V | \leq | \langle \mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} | + | \langle j(\beta_1(t), u_1(t), v) - j(\beta_2(t), u_2(t), v) \rangle |$$

On applique le théorème de Cauchy chwartz ,on obtient :

$$| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) |_V | v |_V \leq | \mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}} | \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}} + | (j(\beta_1(t), u_1(t), v) - j(\beta_2(t), u_2(t), v)) |$$

De l'équation (3.10) , (3.12) , (3.13) , et on a :

$$| \varepsilon(u) |_{\mathcal{H}} \leq | u |_V;$$

nous obtenons :

$$| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) |_V \leq | \mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}} + \left| \int_{\Gamma_3} p_\tau \left( \beta_{u_\eta}(t_1) - \beta_{u_\eta}(t_2), u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2), v \right) \right|$$

nous obtenons

$$| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) |_V \leq c | u_1(t) - u_2(t) |_V + c | \beta_1(t) - \beta_2(t) |_{L^\infty(T_3)}$$

de l'équation (3.37) on a :

$$c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^\infty(T_3)} = c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^\infty(T_3)} ds$$

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^\infty(T_3)} ds$$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V = \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds$$

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds$$

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v \rangle_V = 0$$

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2 \rangle$$

Comme  $\mathcal{A}$  est fortement monotone, et pour appliquée le théorème de Cauchy-Schwarz sur  $\langle \eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2 \rangle$  on obtient :

$$m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V \|v_1(s) - v_2(s)\|_V$$

Donc ;

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 \leq c \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V \|v_1(s) - v_2(s)\|_V$$

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V$$

De l'équation :

$$\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V \leq c \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds$$

nous trouvons :

$$| \Lambda_{\eta_1}(t) - \Lambda_{\eta_2}(t) |_V \leq c \left| \int_0^t \eta_1(s) - \eta_2(s) |_V ds \right.$$

$$| \Lambda_{\eta_1}^n(t) - \Lambda_{\eta_2}^n(t) |_{C[0,T]} \leq c^n \underbrace{\int_0^t \int_0^x \dots \int_0^q}_{n} | \eta_1(s) - \eta_2(s) |_{C[0,T]} dr \dots ds$$

$$| \Lambda_{\eta_1}(t) - \Lambda_{\eta_2}(t) |_{C[0,T]} \leq \frac{(cT)^n}{n!} | \eta_1(s) - \eta_2(s) |_{C[0,T]}^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(cT)^n}{n!} = 0$$

$\Lambda^n$  est une contraction dans l'espace de Banach  $L^\infty(\Gamma_3)$  par  $\Lambda$  admet une point fixe  $\eta^*$  telle que :  $\Lambda^n \eta^* = \eta^* \in L^\infty(\Gamma_3)$

$$\Lambda^n(\Lambda \eta^*) = \Lambda^{n+1} \eta^* = \Lambda(\Lambda^n \eta^*) = \Lambda \eta^*$$

Et comme  $\eta^*$  est unique point fixe de  $\Lambda^n$  pour tout  $n \in N$  ,il résulte que  $\eta^*$  est unique point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ .

Maintenant, on peut utiliser les trois lemmes précédents pour démontrer l'existence et l'unicité du théorème 3.1 : (c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution faible du problème de départ).

**i) L'existence :**

Soient :  $\eta^* \in C([0, T]; V)$  le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  ,et  $u \in C^1([0, T]; V)$  la solution du problème  $pv_{\eta_1}$  .pour  $\eta = \eta^*$  (c-à-d :  $u = u_{\eta^*}$ ).

Nous notons par  $\sigma$  la fonction donnée par [3.23](#) et par  $\beta$  la solution du problème  $pv_{\eta_2}$  ,pour  $\eta = \eta^*$  (c-à-d  $\beta = \beta_{\eta^*}$ ).

On voit bien que les égalités ?? et 3.27 sont vérifiées respectivement par le problème  $pv_{\eta_1}$  et le problème  $pv_{\eta_2}$ . En outre, puisque  $\Lambda\eta^* = \eta^*$ , il résulte de 3.37 et que 3.38 :  $\sigma \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ , en effet : Soient  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , Alors on a :

$$\langle \sigma(t_1) - \sigma(t_2), \varepsilon_1(w) - \varepsilon_2(t_2) \rangle = \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t_1)) + \xi\varepsilon(u(t_1)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t_2)) - \xi\varepsilon(u(t_2)), \varepsilon_1(w) - \varepsilon_2(w) \rangle_{\mathcal{H}}$$

Alors :

$$\langle \sigma(t_1) - \sigma(t_2) + \varepsilon_1(w) - \varepsilon_2(t_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t_1)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t_2))) + (\xi\varepsilon(u(t_1)) - \xi\varepsilon(u(t_2))), \varepsilon_1(w) - \varepsilon_2(w) \rangle_{\mathcal{H}}$$

En appliquant l'inégalité de cauchy-schwartz on obtient :

$$| \sigma(t_1) - \sigma(t_2) |_{\mathcal{H}} \leq | \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t_1)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t_2)) |_{\mathcal{H}} + | \xi\varepsilon(u(t_1)) - \xi\varepsilon(u(t_2)) |_{\mathcal{H}}$$

De 3.15(b)-3.16(b) il résulte que :

$$| \sigma(t_1) - \sigma(t_2) |_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} | \varepsilon(\dot{u}(t_1)) - \varepsilon(\dot{u}(t_2)) |_{\mathcal{H}} + L_{\varepsilon} | \varepsilon(u(t_1)) - \varepsilon(u(t_2)) |_{\mathcal{H}}$$

On utilise la continuité de l'opérateur  $\varepsilon$  on obtien :

$$| \sigma(t_1) - \sigma(t_2) |_{\mathcal{H}} \leq c | \dot{u}(t_1) - \dot{u}(t_2) |_{\mathcal{H}} + c | u(t_1) - u(t_2) |_{\mathcal{H}}$$

Comme  $\dot{u} = v \in C([0, T]; V)$ ,  $u \in | u(t_1) - u(t_2) |_{\mathcal{H}}$ , alors :

$$| \sigma(t_1) - \sigma(t_2) |_{\mathcal{H}} \leq c | t_1 - t_2 |_{\mathcal{H}}$$

Par conséquent :  $\sigma \in C([0, T]; \mathcal{H})$ . Choissant maintenant  $w \in C_0^\infty(\Omega)^N$  dans 2.26 et comme  $\overline{C_0^\infty(\Omega)^N} = H_0^1(\Omega)^N$  on obtient :

$$\text{Div } \sigma + f_0(t) = 0 \quad , \forall t \in [0, T]$$

On a donc :

$$\text{Div } \sigma = -f_0 \in C([0, T]; H)$$

Ce qui implique :

$$\sigma \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$$

.Nous concluons maintenant que  $(u, \sigma, \beta)$  est une solution du problème  $Pv$

**ii) L'unicité :**

L'unicité de la solution du problème  $P$  est une conséquence de l'unicité de point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et l'unicité de la solution des deux problèmes auxiliaires  $pv_{\eta_1}$  et  $pv_{\eta_2}$  .

### 3.4 Conclusion

Après l'étude de ce problème de contact, on peut tirer les conclusions suivantes :

Il y a une variété d'hypothèses lors de la modélisation des phénomènes de contact.

La prise en compte des différentes conditions aux limites de contact et des lois de comportement, de plus en plus complexes, conduit à des modèles mathématiques nouveaux et non standards.

En général, le système d'équations aux dérivées partielles, associé aux conditions aux limites et aux conditions initiales, obtenu à l'étape de modélisation, n'admet pas de solution classique. La raison réside principalement dans les non-linéarités prises en considération dans la description du contact. Pour palier à cette difficulté et dans le but de donner un sens au modèle mathématique obtenu, on est obligé de passer par la formulation faible (dite parfois formulation variationnelle) du modèle mathématique.

Cette formulation faible a l'avantage de prendre en considération d'une manière intrinsèque les frontières libres et les différentes conditions aux limites et bien souvent elle conduit à des inéquations variationnelles.

## CHAPITRE 4

Annexe

### 4.1 Les tenseurs :

#### 4.1.1 Tenseurs d'ordre 0 et 1

Le nombre  $x.y$  est un exemple typique de quantité scalaire ou tenseur d'ordre 0 tel que  $x$  et  $y$  sont des vecteurs et  $x.y$  est le produit scalaire des 2 vecteurs, par contre un vecteur est appelé "tenseur d'ordre 1". des exemples physiques des tenseurs d'ordre 0 et 1 sont respectivement la température et le vecteur position.

#### 4.1.2 Tenseurs d'ordre n

On définit les tenseurs par récurrence de la façon suivante :

Un tenseur d'ordre  $n \geq 1$ , noté  $T^n$ , est une application linéaire qui à tout vecteur fait correspondre un tenseur d'ordre  $n - 1$  :

$$T^n : x \rightarrow T^n(x)$$

noté aussi  $T^n.x$

### Exemple :

Un tenseur d'ordre 1 (vecteur)  $T$  peut être vu comme l'application linéaire qui à tout vecteur  $x$  fait correspondre le produit scalaire  $T.x$  qui est un tenseur d'ordre 0, c'est -à- dire :

$$T : x \rightarrow T(x) = T.x.$$

### 4.1.3 Tenseurs d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  noté  $T^2$  qui à tout vecteur fait correspondre un tenseur d'ordre 1, c'est- à- dire un vecteur, il s'agit donc d'un endomorphisme de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , donc :

$$\begin{aligned} T^2 & : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x & \rightarrow T^2(x) = T^2.x \end{aligned}$$

On sait qu'un tel endomorphisme est représenté sur une base orthonormé par une matrice. Suite à cette identification, les opérations sur les tenseurs (addition, multiplication, multiplication par un scalaire,.....) se réduisent aux opérations correspondantes sur les matrices, et les notions liées aux tenseurs (symétrie, antisymétrie, déterminant, produit scalaire, norme, trace,.....) se définissent à l'aide de la matrice associée.

#### Tenseur identité :

On appelle tenseur identité, le tenseur de seconde ordre associé à l'application linéaire identité, on note  $I$ , sa matrice  $I$  à pour composantes dans la base  $B = (e_1, e_2, e_3)$  les scalaires  $\delta_{ij}$  tel que  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de

Kronrker, i.e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

### Définition tenseur adjoint (transposé) :

Etant donné un tenseur quelconque  $T^2$ , le tenseur transposé  $(T^2)^t$  est défini par :

$$\begin{aligned} (T^2)^t &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow (T^2)^t(x, y) = T^2(y, x) \end{aligned}$$

Si on note  $M$  la matrice représentant  $(T^2)^t$  sur une base,

$$\forall x, y : ((T^2)^t \cdot y) \cdot x = x_i M_{ij} y_j = y_i T_{ij} x_j = y \cdot (T^2 \cdot x)$$

en les roles de  $i$  et  $j$  dans l'expression où apparait  $[T]$  :

$$\forall x, y \quad x_i M_{ij} y_j = y_j T_{ji} x_i = x_i T_{ji} y_j$$

On déduit que la matrice  $[M]$  représentant  $T^2$  n'est autre que le transposé de la matrice  $[T]$  représentant  $T^2$  .

On a de plus :

$$\begin{aligned} (TU)^t &= U^t T^t \\ (T^t)^t &= T \end{aligned}$$

### Définition Tenseur (anti) symétrique :

Un tenseur  $T^2$  est dit symétrique ou auto-adjoint si  $T^2 = (T^2)^t$  c-à-d :

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \forall i, j = \overrightarrow{1, N}$$

et anti-symétrique si :  $T^2 = - (T^2)^t$  c-à-d :

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \forall i, j = \overrightarrow{1, N}$$

Tout tenseur du seconde ordre  $T^2$  peut se découper de façon unique en la somme d'une partie symétrique noté  $(T^2)^s$  et d'une autre anti-symétrique  $(T^2)^a$  tel que :

$$\begin{aligned}(T^2)^s &= \frac{1}{2}(T^2 + (T^2)^t) \\ (T^2)^a &= \frac{1}{2}(T^2 - (T^2)^t)\end{aligned}$$

$T^2$  est symétrique si et seulement si :  $T^2 = (T^2)^s$

$T^2$  est anti-symétrique si et seulement si :  $T^2 = (T^2)^a$  .

#### 4.1.4 Tenseur d'ordre 3

Un tenseur d'ordre 3 est une forme linéaire

Soit  $T^3$  un tel tenseur, possède  $3^3$  composantes relatives à la base canonique, ces composantes sont les scalaires suivantes :

$$T_{ijk} = T(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad i, j, k = \overline{1, 3}$$

Un exemple physique d'un tenseur d'ordre 3 est le champ des propriétés piézoélectriques

#### 4.1.5 Tenseur d'ordre 4

Un tenseur d'ordre 4 possède  $3^4 = 81$  composantes :

$$T_{ijkl} = T(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \quad i, j, k, l = \overline{1, 4}$$

Un exemple physique d'un tenseur d'ordre 4 est le champ des propriétés élastiques  $E$  qui est donné à partir du tenseur des déformations  $\varepsilon$  et du tenseur des contraintes  $\sigma$  par :

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Le nombre des composantes de ce tenseur est réduit à 21 en tenant compte de la symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1987.
- [2] P.G.Ciarlet, Elasticité Tridimensionnelle, Masson, Paris 1986.
- [3] Duvaut, G. and Lions, J.L. Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [4] .N. Hemic. Analyse variationnelle de quelques problemes de contact avec adhésion, Thèse de Doctorat D'Etat en Mathématiques, Université Ferhat Abbas de Sétif, 2004.
- [5] N. Hemic ? B.Awbi, M. Sofonea, Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion , Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.
- [6] M.Frémond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support, C. R. Académie des sciences, Paris, 1972
- [7] M.Frémond, Adhèrence des solide, Journal. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383-407.

## Bibliographie

---

- [8] Ionescu, I. R. and Sofonea, M. Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [9] .S. Latreche. Analyse variationnelle de différents problèmes aux limites en mécanique du contact , Thèse de Doctorat LMD en Mathématiques, Université Ferhat Abbas de Sétif,2018.
- [10] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica ,Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933
- [11] .M.Sofonea, Modélisation mathématique en Mécanique du Contact, Annals of University of Craiova, Math.Comp.Sci.Ser.Volume32,2005,PP.67-74ISSN :1223-6934.
- [12] B. Teniou. Etude Fonctionnelle des Problèmes Elasto-plastiques de Contact, Thèse de Doctorat D'Etat en Mathématiques, Université Frères Mentouri Constantine, 2000.