Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــــية العلـــــوم
قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

استعمال نظرية النقطة الثابتة في حلول بعض المعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية

Option : Analyse numérique et équations aux dérivées partielles

Par : Amane zaouali

Encadré par: Azzouz ferrag M.C.B ENS. SKIKDA

Devant le jury :

Halim atoui	**M.C.B**	**Univ. SKIKDA**	**Président**
Kamel Slimani	**M.C.A**	**ENS. SKIKDA**	**Examinateur**
Azzouz ferrag	**M.C.B**	**ENS. SKIKDA**	**Examinateur**

Année universitaire : 2021/2022

إهداء

بكل الحب أهدي هذه المذكرة الى:

ملهمتي الحبيبة أمي: نوارة

ومنبع طموحي أبي: الطاهر

***** حفظهما الله *****

ولأنك تجيئين قبل البدء ... وقبل القلب ... وقبل الكل ... الى نفسي التي تعبت مع جسدي وأرهقت مع عقلي.

الى:

كل من دعمني ووقف بجانبي ولكل أخواتي واخواني وأصدقائي ولكل من صبر على تمردي ...

الى:

كل من أوقفته طلبات الطريق وصعوبات الحياة على تحقيق أحلامه ...

أهديكم جميعا هذه المذكرة

تشكر

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن اتبع هداه الى يوم الدين، وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم:

"من لم يشكر الناس لم يشكره الله"

رواه الترمذي وأحمد

نتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير الى:

أمي: عندما أحاول كتابة لك الكلمات تصبح عاجزة عن التعبير لكن شكرا لك يامن تجلى في قلبك وروحك كل صور العطاء والبدل، فأنت الحبيب الذي لا يخون، والقريب الذي لا يغير، والصديق الذي لا يتغير ولا يتبدل.

ابي: الذي كان ولا يزال الشجرة الوارفة الظلال التي يستظل بها جميع أبناءه، شكرا لك يا مربي الأجيال ولمن أضاء في قلبي قناديل الحب و العطاء وقدم وأعطى كل ما لديه فقط من أجلنا نحن.

أستاذي: جميل أن يضع الإنسان هدفا في الحياة والأجمل أن يثمر هذا الهدف طموحا يساوي طموحك، لذلك يا أستاذي (فراق عزوز) تستحق مني كل الشكر والعرفان بعدد قطرات المطر وألوان الزهر وشذى العطر على جهوداتك الثمينة والقيمة، كما نقدم الشكر الخاص للجنة المناقشة واشرافهم على هذه المذكرة.

واخيرا ...

شكر خاص لكل من ساندني وأمسك بيدي في محنتي فهي رسالة ابعثها بملئ الحب و العطف والتقدير والإحترام لكم أنتم أصدقائي وصديقاتي وزملائي وزميلاتي وكل عامل أو اطار أو نقابي كان معي وساندني في محنتي.

كما لا يسعني إلا أن أقدم الشكر لكل من الدكتور محمد مناف الحمد من جامعة دمشق والأستاذ فرنان خير الدين من جامعة قالمة و محمد مومن بكوش من جامعة الوادي وكل الشكر للطالب لؤي أحمد جديد طالب هندسة مدنية بجامعة دمشق.

آخير الشكر من تعبت بصيرته واصابع يديه أقدم شكري الخاص للسيد كمال مفروش ومكتبته المتواضعة "عمي أحسن".

شكرا لكم جميعا...

الفهرس

مقدمة

تعتبر النقطة الثابتة من أهم البحوث الرياضية التي تطورت مع مرور الزمن حيث أصبحت من أهم الطرق لحلول الكثير من المشاكل الرياضية كإيجاد جذور كثير الحدود كما تبرهن وجود حلول بعض المعادلات التفاضلية والتكاملية دون تحديد ماهية هذه الحلول.
كما يعتبر حساب التفاضل و التكامل الكسري أحد مجالات التحليل الرياضي الذي يناقش بحث وتطبيقات التفاضل والتكامل برتب غير صحيحة في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. ويعد موضوعا قديما لإتفاق معظم الباحثين في تاريخ الرياضيات على أنه نشأ أواخر القرن 17.
وتعد المعادلات ذات التفاضلات الكسرية بشكلها العام الخطية واللاخطية تعميما لنظرية المعادلات التفاضلية العادية الى مرتبة إختيارية.
وتنقسم هذه المذكرة الى (4) أربعة فصول كما يلي:

الفصل الأول: نتذكر فيه بعض المفاهيم و التعاريف المفيدة في جميع مراحل المذكرة.
الفصل الثاني: نقتبس بعض نظريات النقطة الثابتة وبرهانها.
الفصل الثالث: دراسة تطبيق نظريات النقطة الثابتة في المعادلات التفاضلية والتكاملية.
الفصل الرابع: في هذا الفصل نستخدم بعض المعادلات التفاضلية الكسرية في تطبيق نظريات النقطة الثابتة.

تكمن أهمية المذكرة في تسليط الضوء على كيفية استعمال نظريات النقطة الثابتةو تطبيقاتها على المعادلات التفاضلية والتكاملية في الحساب الكسري وعلى نتائج هامة في دراسة وجود الحلول وتعددها لمسائل القيم الحدية للمعادلات اللاخطية ذات التفاضلات الكسرية مع عرض العديد من المبرهنات الأساسية في هذا المجال.

الفصل الأول

عموميات ومفاهيم أساسية

1.1 تعاريف

في هذا الفصل نذكر بأهم المصطلحات التي نستخدمها في جميع أجزاء هذه المذكرة.

1.1.1 المعادلات التفاضلية:

أ-المعادلات التفاضلية العادية:[01]

المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات، كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف الى خطية وغيرخطية حيث أن المعادلات التفاضلية الخطية هي المعادلة الخطية في المتغير التابع ومشتقاته جميعا، وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:

① إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.

② إذا كان المتغير التابع و المشتقات غير مرفوعة الأسس، أي كلها من الدرجة الأولى، وتكون غير خطية فيما عدا ذلك.

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الرتبة الأولى، بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى هي خطية، لأن الرتبة تحدد حسب أس التفاضل الأعلى، ومن الممكن أن تكون التفاضلات الأقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون أن يؤثر ذلك على الرتبة، وهذا يخل بشرط المعادلة الخطية.
حيث أن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي: [02] .

$$P_n\left(x\right)y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+P_1\left(x\right)y'+P_0\left(x\right)y=Q\left(x\right)$$

حيث المتغير y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها. والمعاملات $P_i\left(x\right)$ هي دوال في x خطية أم غير خطية وكذلك بالنسبة للدالة $Q\left(x\right)$.

ب-المعادلات التفاضلية الكسرية:[03]

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية ذات رتب صحيحة حيث أن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الكسرية متعددة الترتيب تعرف بالشكل التالي:

$$D^{\alpha}y\left(x\right)=\sum_{i=1}^{K}a;D^{B_i}y\left(x\right)+a_{K+1}y\left(x\right)+g\left(x\right)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y^{(i)}\left(0\right)=d_i;i=0.1,...,n-1$$

حيث $a_j\left(j=1,...,K+1\right)$ هي معاملات ثابتة حقيقية، وأيضا

$n-1<\alpha\leqslant n$ و $0<B_1<B_2<...<B_K<\alpha$ و
D^{α} تدل على المشتقات الكسرية لريمان لوفيل من رتبة α.

2.1.1 المعادلات التكاملية:[18]

تعريف 1.1.1:
المعادلة التكاملية تعطى بالعلاقة التالية:

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)\, U(t)\, dt \qquad (*)$$

حيث:

✍ $K(x,t)$ يسمى النواة التكاملية للعلاقة.
✍ $a(x)$ و $b(x)$ هما حدود التكامل.
✍ $U(x)$ تابع غير معروف

وتشير الى أن نواة $K(x,t)$ والتابع $F(x)$ معلومتين، و λ هو عدد ثابت.
الهدف من هذا هو تحديد التابع المجهول $U(x)$ الذي من خلاله يمكن حل العلاقة $(*)$ وذلك عن طريق استخدام بعض تقنيات الحلول.

أ- تصنيف المعادلات التكاملية:

لاتوجد طرق عامة لحل المعادلات التكاملية، فطريقة ووجود الحل تتعلق بشكل هذه الأخيرة، فمعادلة تكاملية تسمى خطية إذا كانت الخطية مطبقة على الدالة المجهولة، يمكن تصنيف المعادلات التكاملية على النحو التالي:

فريد-هولم (Freedholm)

✍ من النوع الثاني: $F(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$

✍ من النوع الأول: $F(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$

فولتيرا :(Volterra)

✍ من النوع الثاني: $F(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$

✍ من النوع الأول: $F(x) = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$

وينرهويف (Hopf wiener) :

$$F(x) = \varphi(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

غرونوال :(Gronwall)

$$F(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

آبل: (Abel)

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}\frac{\varphi\left(t\right)}{\left(x-t\right)^{\alpha}}dt;0<\alpha<1$$

φ مستمرة وتحقق $\varphi\left(0\right)=0$

3.1.1 الحساب الكسري:

1-3 الدوال الخاصة:

نتطرق في هذا الجزء الى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي تعتمد عليها في هذه المذكرة، كما أنها تلعب دورا هاما في الحساب الكسري وهي:

1- دالة غاما: [05]

تعرف دالة غاما على النحو التالي:

$$\Gamma\left(x\right)=\lim_{M\rightarrow\infty}\int_{0}^{M}x^{n-1}e^{-x}dx;n>0;x\in\mathbb{R}$$

قواعد أساسية للدالة غاما:

1. $\Gamma\left(n+1\right)=n\Gamma\left(n\right)\ ;\ \forall n\neq0$
2. اذا كانت n : عددا صحيحا فإن $\Gamma\left(n+1\right)=n!$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

2- دالة بيتا:[05]

تعرف الدالة بيتا كما يلي:

$$\begin{aligned}B\left(m,n\right)&=\int_{0}^{1}x^{m-1}\left(1-x\right)^{n-1}dx;n>0;m>0\\B\left(m,n\right)&=B\left(n,m\right)\end{aligned}$$

3- علاقة دالة بيتا بدالة غاما:[05]

$$B\left(m,n\right)=\tfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

2-3 التكامل الكسري بمفهوم ريمان - ليوفيل: [06]

التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}J^{\alpha}F\left(x\right)&=\tfrac{1}{\Gamma(a)}\int_{0}^{x}\left(x-\tau\right)^{\alpha-1}F\left(\tau\right)d\tau,d>0\\J^{0}F\left(x\right)&=F\left(x\right)\end{aligned}$$

3-3 التفاضل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل:[06]

لنفرض أن $\alpha, a, t \in \mathbb{R}; a > 0; t < a$.

$$D_*^{\alpha} F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{d^n}{dt^n} \displaystyle\int_a^t \dfrac{F(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n} F(t) \qquad ; \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4-3 المشتق الكسري بمفهوم كابيتو: [06]

لنفرض أن $\alpha > 0$ ، $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$.

$$D^a F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{F^{(r)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-r}} d\tau & ; \ 0 \leqslant r-1 < \alpha < r \\ \dfrac{d^r}{dx^r} F(x) & ; \ \alpha = r \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4,1,1 الفضاءات :[07]

أ- الفضاء الطوبولوجي:

ليكن E مجموعة كيفية غير خالية و $P(E)$ مجموعة كافة أجزاء E نقول عن τ من $P(E)$ أنها طوبولوجيا من E اذا حققت الشروط التالية:

1. E و ϕ عنصران من τ .
2. τ مستقرة بالإتحاد الكيفي، أي: $\forall (A_i)_{i\in I} \in \tau : \cup_{i\in I} A_i \in \tau_i$ حيث I مجموعة كيفية
3. τ مستقرة بالتقاطع المنتهي، أي: $\forall (A_j)_{j\in J} \in \tau : \cap_{j\in J} A_j \in \tau$ حيث J مجموعة منتهية من $\mathbb{N}$.

✍ نسمي الثنائية (E, τ) بالفضاء الطوبولوجي.

ب- الفضاء المتري:

الفضاء المتري هو الثنائية (E, d) حيث E هو المجموعة و d هي المسافة.

ج- النظيم:

نسمي نظيم على فضاء شعاعي Eالتطبيق:

$$\|.\| : E \longmapsto \mathbb{R}^+$$

والذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0; \forall x \in E$
2. $\|\eta x\| = |\eta| . \|x\| ; \forall x \in E, \forall \eta \in K$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| , \forall x, y \in E$

د- الفضاء النظيمي:

نقول أن E فضاء شعاعي نظيمي اذا زود بالنظيم $\|.\|$، ونرمز للفضاء النظيمية بالثنائية $(E, \|.\|)$

ذ- الفضاء التام:

نقول عن فضاء شعاعي نظيمي $(E, \|\cdot\|)$أنه تام، أذا كانت كل متتالية كوشية x_n من E متقاربة نحو x من E ، بمعنى:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_\varepsilon, \forall p \cdot q \geqslant n_\varepsilon : \|x_p - x_q\| < \varepsilon \leftrightarrow \exists x \in E$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ر- النظيمات المتكافئة:

ليكن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمين معرفين على نفس الفضاء الشعاعي E، نقول أن النظيمين متكافئين إذا وجدنا ثابتين موجبين α_1 و α_2 بحيث:

$$\alpha_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \alpha_2 \|x\|_1 ; \forall x \in E$$

س- الإستمرارية بانتظام:

القول أن F مستمر بانتظام على E اذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E; \|x - y\| \leqslant \delta \Rightarrow \|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$$

ش - الإستمرار الكلي:

ليكن X و y فضائين شعاعيين نظميين و Ω مفتوح من X.
ليكن F بحيث $F : \Omega \subset X \mapsto y$ تطبيق مستمر.
نقول أن F أنه مستمر كليا اذا كانت صورة كل محدود B من Ω هو متراص نسبيا من y.

ك- فضاء بناخ:

✍ نسمي فضاء بناخ كل فضاء شعاعي نظيمي تام.
✍ كل فضاء نظيمي ذو بعد منته هو فضاء بناخ.

و- المسافة:

مسافة مترية على مجموعة $E \neq \phi$ هي تطبيق $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ يحقق:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \quad \forall x,y \in E.$
2. $d(x,y) = d(y,x); \quad \forall x,y \in E.$
3. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z); \quad \forall x,y \in E$

ي- التابع الليبشيتزي:

ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاء بناخ، وليكن التطبيق: $F : E \mapsto E$.
نقول عن F أنه ليبشيتزي من أجل $K \geqslant 0$ إذا كان:

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant K \|x - y\|$$

ويسمى K الثابت الليبشيتزي.

1. إذا كان: $K = 1$ نقول أن F مقلص (أو تقليص على E).
2. إذا كان: $K < 1$ نقول أن F مقلص تماما (أو تقليص تمام E).

نظرية (1)

تطبيق ليبشيتزي هو بالضرورة تطبيق مستمر

5,1,1 التقلص (Retraction):[06]

تعريف 2،1،1: ليكن X فضاء طبولوجي، ليكن $r : X \to M$ تطبيق مستمر مع $M \subseteq X$.
التطبيق r يسمى تقلصا إذا وفقط إذا كان $r(x) = x$ من أجل كل $x \in M$ ، في هذه الحالة المجموعة M نسمي مقلص لـ X.

6,1,1 التحدب:[06]

ليكن E فضاء شعاعي حقيقي.

نظرية (2)

نقول أن المجموعة الجزئية غير الخالية $\mathbb{C}$ من E أنها مجموعة محدبة إذا تحقق:

$$\forall \lambda \in [0,1]; \forall (a,b) \in C^2 : \lambda a + (1-\lambda) b \in C$$

أ- متراجحة شوارتز:

ليكن F و G تابعين حقيقيين قابلين للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\left[\int_a^b F(x)\,G(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left(\int_a^b F(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b G(x)^2\,dx\right)$$

ب- التطبيق الدوري:

نقول عن التابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ أنه دوري ودوره T إذا تحقق:

$$\forall x\in\mathbb{R}: F(x+T)=F(x)$$

2.1 ترميزات

الرمز	مدلوله (معناه)
$\Gamma(n)$	التابع غاما
$B(m,n)$	التابع بيتا
$H = L^2(0,1)$	فضاء هيلبار (هيلبار)
$<\cdot,\cdot>$	جداء سلمي معرف على $L^2(\Omega)$
$<\cdot,\cdot>_\omega$	جداء سلمي
$\Vert\cdot\Vert$	النظيم
$D^\alpha F(t)$	الإشتقاق الكسري لكابوتو
$I^\alpha F(t)$	التكامل الكسري لريمان - ليوفيل
$D^{(\alpha)}$	مصفوفة العمليات للتفاضل الكسري
D^α	تدل على المشتقات الكسرية لكابوتو من الرتبة α
D^a	مؤشر الإشتقاق
I^a	مؤشر التكامل
$F(x)$	التابع (الدالة)
$A^\vee$	المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري
$\overline{A}, A^\circ, A'$	تراكمية A، داخلية A، ملاصقة A
$D(F)$	مجموعة التعريف
P(E)	مجموعة أجزاء المجموعة E
$L(E,F)$	مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة
$C([a;b])$	مجموعة التطبيقات المستمرة على $[a;b]$
$\mathbb{R}^n$	الجداء الديكارتي لـ $n\mathbb{R}$ مرة

الفصل الثاني

نظريات النقطة الثابتة

1.2 تمهيد

إن مبرهنات النقطة الثابتة تعلمنا بوجود نقطة ثابتة واحدة على الأقل للدالة F تحت شروط معينة، ومعرفة وجود هذه النقاط الثابتة له العديد من التطبيقات في مختلف فروع التحليل والطوبولوجيا ويعد من النتائج المفيدة جدا في الرياضيات.

2.2 تعريف النقطة الثابتة:

تعريف 2.2.1: ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاء بناخ $F : E \longrightarrow E$ تطبيق.
نسمي النقطة الثابتة ل F كل نقطة $x \in E$ بحيث: $F(x) = x$

مثال (1)

ليكن $[a, b]$ مجال مغلق عندئذ أي دالة مستمرة $f : [a, b] \longmapsto [a, b]$ تملك نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

3.2 نظرية النقطة الثابتة لبراور (Brouwer): [15]

تعريف 2.3.1: كل دالة F مستمرة من كرة الوحدة المغلقة في الفضاء E الى نفسها تملك نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

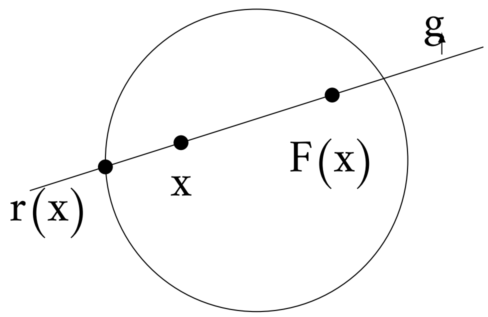
نظرية (1)

نفرض أن M مجموعة جزئية غير خالية متراصة، محدبة من $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ و $F : M \longrightarrow M$ تطبيق مستمر فإن F يملك نقطة ثابتة.

البرهان (1)

① نفرض أن $M = B$ حيث B هي كرة نصف قطرها $\mathbb{R} > 0$ ، ولنفرض أن F لا يملك نقطة ثابتة يعني أن $x \neq F(x)$ مهما كان x من B. وعليه يمكن أن ننشئ التقلص $r : B \longrightarrow \partial B$، والذي يرفق بكل x من B، تقاطع المستقيم $(F(x), x)$ مع ∂B.

أنظر الشكل (1)



الشكل (1)

وهذا تناقض مع (ب) في القضية ❄ (أنظر آخر الفصل).

② في الحالة العامة لنعتبر كرة مغلقة B تحوي M ، من (أ) في قضية ❄ فإنه يوجد تقلص $r : B \longrightarrow M$، فإن تركيب التطبيقات : $B \xrightarrow{r} M \xrightarrow{F} M \subseteq B$: يملك نقطة ثابتة حسب (1) $x = F(r(x))$ من أجل x من M فإن $r(x) = x$ وعليه $x = F(x)$

4.2 نظرية النقطة الثابتة لبناخ: (Banach)[08]

مبرهنة 01

تعد مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة أداة هامة في نظرية الفضاءات المترية، حيث تضمن وجود ووحدانية النقطة الثابتة لدوال معينة في الفضاءات المترية، وتزودنا بطريقة بناءه لإيجاد هذه النقاط الثابتة.
سميت هذه المبرهنة نسبة للعالم الرياضي ستيفان باناخ (1892-1945) ووضعت من قبله عام 1922.

نظرية (1)

نظرية النقطة الثابتة لبناخ: ليكن (X,d) فضاء متري تام , اذا كان $F : X \longrightarrow X$ تقليص على X مع K ثابت ليبيشيتزي، بمعنى يوجد ثابت $0 < M < 1$ بحيث يكون:

$$d\left(F\left(x\right),F\left(y\right)\right) \leqslant Md\left(x,y\right)$$

من أجل كل $x, y \in X$.

فان F يقبل نقطة ثابتة وحيدة $u \in X$.

البرهان (1)

✍الوحدانية:

نفرض أنه يوجد $x, y \in X$ حيث: $x = F(x)$ و $y = F(y)$ ومنه:

$$d(x,y) = d(F(x), F(y)) \leqslant K d(x,y)$$

نستنتج أن:

$$d(x,y) = 0$$

بالتالي: $x = y$

✍الوجود:

ليكن $x \in X$ سوف نثبت أن: $\{Fn(x)\}$ هي متتالية كوشي:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$d(F_n(x), F_{n+1}(x) \leqslant K d(F_{n-1}(x), F_n(x)) \leqslant ... \leqslant K^n d(x, F(x)))$$

وهكذا من أجل: $m > n$ حيث $n \geqslant 0$ لدينا:

$$\begin{aligned} d(F_n(x), F_m(x)) &\leqslant d(F_n(x), F_{n+1}(x)) + d(F_{n+1}(x), F_{n+2}(x)) + \\ &\quad ... + d(F_{m-1}(x), F_m(x)) \\ &\leqslant K^n d(x, F(x)) + ... + K^{m-1} d(x, F(x)) \\ &\leqslant K^n d(x, F(x)) \left(1 + K + K^2 + ... + K^{m-n-1}\right) \\ &= \frac{K^n - K^m}{1-K} d(x, F(x)) \end{aligned}$$

وبالتالي من أجل $m > n$ و $n \geqslant 0$:

$$d(F_n(x), F_m(x)) \leqslant \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x)) \qquad (*)$$

وهذا يظهر أن $\{F_n(x)\}$ هي متتالية كوشي، وبما أن X هو فضاء تام، إذن:

$$\exists u \in X | \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = u$$

إضافة الى ذلك استمرارية F تؤدي الى أن:

$$u = \lim_{n \to +\infty} F_{n+1}(x) = \lim_{n \to +\infty} F(F_n(x)) = F(u)$$

نستنتج أن u هي نقطة ثابتة لـ F. وبالتالي اذا كان $m \longrightarrow \infty$ في (✻) فإن:

$$d\left(F_n\left(x\right), u\right) \leqslant \frac{K^n}{1-K} d\left(x, F\left(x\right)\right)$$

وهو المطلوب.

مبرهنة 02

كل تطبيق تقليص على فضاء متري (باناخ) يملك نقطة ثابتة وحيدة.

5.2 نظرية النقطة الثابتة لشاودر (Schauder): [09]

مبرهنة 01 (شاودر الأولى)

لتكن K مجموعة محدبة متراصة وغير خالية من فضاء بناخ X

وليكن $F : K \longrightarrow K$ مستمر عندئذ فإن F يقبل نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

تعريف 2.5.1: [10]

نقول أن المؤثر F من فضاء X أنه تام الاستمرارية (متراص) إذا كان F ينقل المجموعات المحدودة الى مجموعة متراصة نسبيا، بمعنى أنه إذا كانت $\{U_n\}$ متتالية من فضاء X بحيث: $\|U_n\| < M$ عندئذ $\{Tu_n\}$ تحوي متتالية جزئية تتقارب الى نقطة ما في X.

تعريف 2.5.2: [11]

لتكن A مجموعة من الدوال المستمرة على X، يقال أن A محدودة بانتظام اذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث يحقق:

$$\|F\| < M$$

من أجل كل $F \in A$

مبرهنة 02 [12]

ليكن X فضاء متراص ولتكن A مجموعة من الدوال على X والمحدودة بانتظام ومتساوية الإستمرار عندئذ A تحوي متتالية جزئية متقاربة (أي A متراصة)

مبرهنة 03 (مبرهنة شاودر الثانية)

ليكن K مجموعة محدودة ومغلقة ومحدبة وغير خالية من فضاء باناخ X ، وليكن $F : K \longrightarrow K$ تام الإستمرار عندئذ F يملك نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

نتيجة (1)

ليكن X مجموعة جزئية من E و $F : X \longrightarrow E$ حيث:

1. X متراص ومحدب
2. E فضاء بناخ
3. F تطبيق داخلي مستمر

إذن F يقبل نقطة ثابتة في X.

6.2 نظرية النقطة الثابتة لشيفر (Schaefer)[13،11]

مبرهنة 01

ليكن X فضاء بناخ وليكن $F : X \longrightarrow X$ مستمر وتام الإستمرار بحيث تكون المجموعة : $\{x \in X : x = \lambda F(x) ; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ محدودة عندئذ F يقبل نقطة ثابتة واحدة على الأقل.
تسمى هذه المبرهنة أيضا مبرهنة لاري-شاودر للنقطة الثابتة.

تعريف 2.6.1: ليكن $F : X \longrightarrow X$ مستمر ومتراص ، بحيث X هو فضاء بناخ على $\mathbb{R}$ ، اذا كان:

$$B = \{x \in X ; x = \lambda F(x) ; \forall \lambda \in [0,1]\}$$

محدودة، فإن F يقبل نقطة ثابتة.

البرهان (1)

لدينا B مجموعة محدودة، فإنه يوجد $M > 0$ بحيث:

$$\forall x \in B : \|x\| < M$$

نعرف التابع:

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & ; \|F(x)\| \leqslant M \\ \frac{M}{\|F(x)\|}F(x) & ; \|F(x)\| > M \end{cases}$$

تطبيق $\widetilde{F}$ ينقل الكرة $\overline{B}_M(0)$ نحو نفسها، لأن:

$$\forall y \in \overline{B}_M(0) \to \|y\| < M$$ و

$$\widetilde{F}(y) = \begin{cases} F(y) & ; \|F(y)\| \leqslant M \\ \frac{M}{\|F(y)\|}F(y) & ; \|F(y)\| > M \end{cases}$$

لما $\|F(y)\| \geqslant M$ فإن $\frac{M}{\|F(x)\|}\|f(y)\| = M$ $= \left\|\widetilde{F}(y)\right\|$، ومنه: $\widetilde{F}(y) \in \overline{B}_M(0)$
نعتبر $K = \overline{Co}\left(\widetilde{F}\left(\overline{B}_M(0)\right)\right)$ ، حيث $F : X \longrightarrow X$ مغلق محدب، فإنه يوجد x من K حسب شودر نجد:

$$x = \frac{M}{\|F(x)\|}F(x) = \lambda F(x), 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

ومنه: $x \in B$.

من جهة أخرى:

$$\|x\| = \frac{M}{\|F(x)\|}\|F(x)\| = M$$

وهذا تناقض، لأن:

$$\forall x \in B, \|x\| < M$$

ومنه $F(x) = x$ أي F يملك نقطة ثابتة.

7.2 نظرية النقطة الثابتة لكراسنو سلسكي (Krasnoselski)[14]

نظرية (1)

لتكن X مجموعة جزئية غير خالية مغلقة ومحدبة من فضاء بناخ E.
نفرض أن A و B هما تطبيقين من X نحو E يحققان الشروط التالية:

1. $\forall x, y \in X : Ax + By \in X$

2. A متراص و مستمر.

3. B تطبيق مقلص.

إذن يوجد y من X حيث: $Ay + By = y$

البرهان (1)

من خلال الشرط (3) لدينا:

$$\begin{aligned} \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\leqslant \|x-y\|+\|Bx-By\| \\ &\leqslant \|x-y\|+\alpha\|x-y\| \\ &\leqslant (1+\alpha)\|x-y\| \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى:

$$\begin{aligned} &\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \\ \geqslant\ &\|(x-y)\|-\|Bx-By\| \\ \geqslant\ &\|x-y\|-\alpha\|x-y\| \\ \geqslant\ &(1-\alpha)\|x-y\| \end{aligned}$$

نختصر ذلك:

$$(1-\alpha)\|x-y\| \leqslant (1-b)(x)-(I-B)(y) \leqslant (1+\alpha)\|x-y\|$$

هذه المتراجحة تبين أن $(I-B): M \longmapsto (I-B)M$ مستمر وتقابلي، إذن $(I-B)^{-1}$ موجود ومستمر.

نفرض أن:

$$\bar{U} = (I-B)^{-1} A$$

من الواضح أن $\bar{U}$ تطبيق متراص لأن $\bar{U}$ هو تركيب لتطبيق مستمر مع تطبيق متراص، حسب نظرية شودر. $\bar{U}$ يملك نقطة ثابتة يعني:

$$\exists x \in M / (I-B)^{-1} Ax = x$$

هذا يكافئ أن نقول $Ax + Bx = x$.

8.2 نظرية النقطة الثابتة ليجيت - ويليامز: [16-17]

تعريف 2.8.1: يقال عن التطبيق θ أنه دالي موجب ومستمر ومقعر على المخروط P لفضاء بناخي حقيقي x إذا كان $\theta : P \longrightarrow [0, \infty]$ مستمر وكان:

$$\theta\left(tx + (1-t)\,y\right) \geqslant t\theta\left(x\right) + (1-t)\,\theta\left(y\right)$$

من أجل كل $x, y \in P$ و $0 \leqslant t \leqslant 1$.

مبرهنة 01

ليكن P مخروط في فضاء بناخي حقيقي x و

$$P_c = \{x \in P : \|x\| \leqslant c\}$$

و θ دالي مقعر موجب ومستمر على P بحيث يحقق $\theta\left(x\right) \leqslant \|x\|$ من أجل كل x من $\overline{P}_c$ و $P\left(\theta, b, d\right) = \{x \in P : b \leqslant \theta\left(x\right), \|x\| \leqslant d\}$ ولنفرض أن: $A : \overline{P}_c \longrightarrow \overline{P}_c$ تام الإستمرار.
ويوجد ثوابت $0 < a \leqslant b \leqslant d \leqslant c$ بحيث يتحقق:

1. $\{x \in P\left(\theta, b, d\right) : \theta\left(x\right) > b\} \neq \phi$
و $\theta\left(Ax\right) > b$ من أجل $x \in P\left(\theta, b, d\right)$
2. $\|Ax\| < a$ إذا كان $x \leqslant a$
3. $\theta\left(Ax\right) > b$ إذا كان $x \in P\left(\theta, b, d\right)$ حيث $\|Ax\| > d$

عندئذ A يملك على الأقل ثلاث نقاط ثابتة x_1, x_2, x_3 بحيث:

$$\|x_1\| < a, b < \theta\left(x_2\right), a < \|x_3\|$$

مع كون $\theta\left(x_3\right) < b$

ملاحظة (1)

إذا كان $c = d$ في المبرهنة السابقة عندئذ الشرط الأول سيقتضي مباشرة للشرط الثالث.

الفصل الثالث

تطبيقات النقطة الثابتة في المعادلات التفاضلية و التكاملية

1.3 تمهيد:[4]

المعادلات التكاملية هي المعادلات التي تملك دوالا مجهولة تحت إشارة التكامل، وتكون المعادلة من الشكل:

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t)\, F(t)\, dt$$

حيث φ دالة معطاة.
F دالة مجهولة. وتسمى هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا من النوع الأول وتسمى الدالة K النواة.
أما إذا ظهرت الدالة المجهولة خارج اشارة التكامل أيضا:

$$F(x) = \int_a^x K(x,t)\, F(t)\, dt + \varphi(x)$$

عندئذ تسمى هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا من النوع الثاني.
أما إذا كانت المعادلات بحدود ثابتة للتكامل فإن:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\, F(t)\, dt$$

وتدعى معادلة فريدهولم من النوع الثاني.
وإذا كانت $\varphi = 0$ فإن المعادلة تسمى متجانسة وإلا تسمى غير متجانسة.

2.3 تطبيقات نظرية النقطة الثابتة في المعادلات التفاضلية والتكاملية :

[21-20-19]

أ- تطبيق نظرية النقطة الثابتة لبراور:

كتطبيق بسيط على نظرية النقطة الثابتة لبروار سوف نبرهن النظرية المهمة لوجود الحل للجملة:

$$g_i(x) = 0 \qquad (*)$$

حيث:

$$x = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_N) \in \mathbb{R}^N; i = 1, ...N$$

قضية (1)

لتكن:

$$\overline{U}(0,R) = x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leqslant R$$

من أجل ثابت $R > 0$ و $\|\cdot\|$ نظيم في $\mathbb{R}^N$. ولتكن: $g_i : \overline{U}(0,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة
من أجل $i = 1, ..., N$ إذا كان لدينا:

$$\sum_{i=0}^{N} gi(x)\,\xi_i \geqslant 0$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^N$ بحيث $\|x\| = R$ فإن $(*)$
تملك حلا x من أجل $\|x\| \leqslant R$.

البرهان (1)

نضع $g(x) = (g_1(x), ..., g_N(x))$ ونفرض ان $g(x) \neq 0$
من اجل كل $x \in \overline{U}(0,R)$ نعرف:

$$F(x) = \frac{-Rg(x)}{\|g(x)\|}$$

المجموعة $\overline{U}(0,R)$ محدبة، متراصة و F تطبيق مستمر من $\overline{U}(0,R)$ نحو $\overline{U}(0,R)$،
باستعمال نظرية براور فإنه توجد نقطة ثابتة x تحقق: $F(x) = x$.
وبالتالي:

$$F(x) = -R\frac{g(x)}{\|g(x)\|} = x \;\rightarrow\; \frac{\|-R\|\,\|g(x)\|}{\|g(x)\|} = \|x\|$$
$$\rightarrow\; \|x\| = R$$

$$\longrightarrow \|x\| = R$$

بالاضافة الى ذلك:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \tfrac{-Rg(x)}{\|g(x)\|}\\
g(x) &= \tfrac{-1}{R}F(x)\,\|g(x)\|\\
\textstyle\sum_{i=1}^{N} g_i(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \tfrac{-1}{R}Fi(x)\,\|g(x)\|\\
\textstyle\sum_{i=1}^{N} g_i(x)\,\xi_i &= -R^{-1}\,\|g(x)\| \textstyle\sum_{i=1}^{N} Fi(x)\,\xi_i\\
&= -R^{-1}\,\|g(x)\| \textstyle\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 < 0
\end{aligned}$$

ب- تطبيق نظرية النقطة الثابتة لبناخ:

✍مسألة الشرط الإبتدائي:

من الطبيعي أن نبدأ تطبيقنا لنظرية النقطة الثابتة في بناخ، مع دراسة وجود ووحدانية حلول بعض مسائل الشروط الإبتدائية من الدرجة الأولى.
نعتبر المسألة التالية:

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(t, y(t)) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1}$$

حيث: $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $I = [0, b]$
نلاحظ أن (1) هي جملة المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى لأن التطبيق F يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^n$.
تعتبر الفضاء $C(I)$ مزود بالنظيم $|U|_\circ = \sup_{t\in I} |U(t)|$ و $C^1(I)$ فضاء بناخ للتوابع U التي مشتقتها الأولى مستمرة على I مزود بالنظيم $|U|_1 = \max\left(\sup_{t\in I} |U(t)|, \sup_{t\in I} \left|\acute{U}(t)\right|\right)$
، ونبدأ تحليلنا للمعادلة (1) بفرض أن $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ مستمر وبالتالي $y \in C^1(I)$ هو حل للمعادلة (1) إذا وفقط اذا كان $y \in C(I)$ ويحل:

$$y(t) = y_\circ + \int_0^t K(s, F(s))\, ds$$

تعرف إذن التطبيق التكاملي $T : C(I) \longmapsto C(I)$ كما يلي:

$$T_y(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y(s))\, ds$$

وعليه y هو حل المعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $T(y) = y$ حيث $T : C(I) \longmapsto C(I)$.
بعبارة أخرى حلول المعادلة (1) هي نقاط ثابتة بالتطبيق التكاملي I.

نظرية (1)

ليكن $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تطبيق مستمر و يحقق شرط ليبشيتزي بالنسبة لـ y ، وبعبارة أخرى يوجد $\alpha \geqslant 0$ حيث:

$$|F(t, y) - F(t, z)| \leqslant \alpha |y - z| ; \forall y, z \in \mathbb{R}^n$$

إذن يوجد $y \in C(I)$ وحيد هو حل للمسألة (1).

البرهان (2)

سوف نطبق النظرية لإثبات أن T يملك نقطة ثابتة وحيدة.
من النظرة الأولى، يبدو طبيعيا استعمال النظيم الأعظمي على $C(I)$ ، لكن هذا الإختيار سوف يقودنا نحو حل محلي معرف على مجال جزئي لـ I.
سنستعمل إذن النظيم الأعظمي المعدل التالي:

$$\|y\|_{\alpha} = |\exp(-\alpha t)\, y(t)|_0$$

على $C(I)$ ، نلاحظ أن $C(I)$ مزود بهذا النظيم هو فضاء بناخ، لأن:

$$\exp(-\alpha t)\,|y|_0 \leqslant \|y\|_{\alpha} \leqslant |y|_0$$

تظهر الآن أن T هو تقليص في $(C(I), \|\cdot\|_{\alpha})$

ليكن $y, z \in C(I)$ إذن:

$$Ty(t) - T_z(t) = \int_0^t [F(s, y(s)) - F(s, z(s))]\, ds, \forall t \in I$$

وبالتالي من أجل $t \in I$ نحصل:

$$\begin{aligned}
\exp(-\alpha t)\,|(Ty - Tz)(t)| &\leqslant \exp(-\alpha t) \int_0^t \alpha \exp(\alpha s) \exp(-\alpha t)\, |y(s) - z(s)|\, ds \\
&\leqslant \exp(-\alpha t) \left(\int_0^t \alpha \exp(\alpha s)\, ds \right) \|y - z\|_{\alpha} \\
&\leqslant \exp(-\alpha t)\,(\exp(\alpha t) - 1)\, \|y - z\|_{\alpha} \\
&\leqslant (1 - \exp(-\alpha b))\, \|y - z\|_{\alpha}
\end{aligned}$$

و ينتج:

$$\|Ty - Tz\|_{\alpha} \leqslant (1 - \exp(-\alpha b))\, \|y - z\|_{\alpha}$$

حيث: $1 - \exp(-\alpha b) < 1$
مبدأ التقليص في بناخ يؤدي الى وجود نقطة ثابتة وحيدة $y \in C(I)$ حيث: $Ty = y$
بمعنى آخر (1) يقبل حل وحيد $y \in C^1(I)$.

ج- تطبيق نظرية النقطة الثابتة لشاودر:

عندما يكون المتغير في المعادلة $F(x) = 0$ هو عبارة عن تابع , وغالبا في هذا المجال الفضاء هو فضاء الدوال، وبالتالي فإن استخدام نظرية النقطة الثابتة لشودر يكون ضروري.

مثال (1)

يبين وجود $y:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}^n$ مستمر يحقق:

$$\begin{aligned} \acute{y}(t) &= F(t,y(t)) \\ y(a) &= b \end{aligned}$$

حيث F مستمرة لـ t و y في جوار (a,b).
نلاحظ أولا أنه من خلال الاستمرارية يمكننا أن نفترض أن

$$|F(t,y)|\leqslant K$$

من أجل:

$$|t-a|\leqslant\varepsilon \text{ و } |y-b|\leqslant\varepsilon$$

نضع:

$$\delta<\min\left(\varepsilon,\frac{\varepsilon}{K}\right)$$

نعتبر E فضاء الدوال من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}^n$ المستمرة على $|t-a|<\delta$ نزود E بالنظيم:
$\|U\|_{L^\infty}=\sup_{t\in\mathbb{R}}|U(t)|$
المجموعة التي سوف نطبق عليها نظرية شودر هي:

$$M=\{y\in E:|y(t)-b|\leqslant\delta K,\forall t\}$$

M هي مغلقة ومحدبة، بعدها نعرف $h:M\longrightarrow M$ بـ:

$$h(y)(t)=b+\int_a^t F(s,y(s))\,ds$$

من أجل $y\in M$:

$$|h(y)(t)-b|\leqslant|t-a|\max|F(s,y(s))|\leqslant\delta K$$

وبالتالي h تطبيق داخلي في M.
وكذلك h تطبيق مستمر لأن:

$$|h(y_1)-h(y_2)|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_a^t F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s))\,ds\right|$$

لما $|y_1-y_2|\longmapsto 0$
وبما أن F مستمر بانتظام فإن من أجل كل $y\in M$

$|h(y)| \leqslant |b| + \delta K$ ومنه $h(x)$ متراص نسبيا، وبالتالي فهو محدود بانتظام، وبما أن $h(x)$ هو متساوي الاستمرار فإن:

$$|h(y)(t_1) - h(y)(t_2)| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} F(s, y(s))\, ds \right| \leqslant K |t_1 - t_2|$$

وبالتالي فإن $h(x)$ هو متراص نسبيا، حينئذ نستطيع تطبيق النظرية الثانية لشودر ومنه h تملك نقطة ثابتة، هذه النقطة حل للمعادلة $h(y)(x) = y(x)$.

د- تطبيق نظرية النقطة الثابتة لشيفر:

نظرية (2)

طبقنا نظرية النقطة الثابتة لشيفر لاثبات النظرية التالية:

$$x(t) = F(t) + \int_a^b g(t, s, x(s))\, ds \qquad ((*))$$

حيث: $-\infty < a \leqslant t \leqslant b < +\infty$

عندما $F(\cdot) \in C([a, b])$، نفرض أن الدالة $g(t, s, x)$ تحقق الشروط التالية:

$$\begin{array}{rcl} \sup\left(|g(t,s,x)|, \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s,x)\right|\right) & \leqslant & V_1(t) V_2(s) \phi(|x|) \\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,s,x)\right| & \leqslant & V_1(t) V_2(s) \phi(|x|) \end{array} \qquad ((**))$$

حيث:

✍ $V_2(\cdot) \in L^1([a, b]), V_1(\cdot) \in C([a, b])$

✍ $\phi(\cdot)$ موجب ومحدود ومستمر على المجال $[0, +\infty]$

✍ تحت الشروط السابقة المعادلة (*) تملك حل في $C([a, b])$

البرهان (3)

أولا سنعرف التابع T على $c([a, b])$ كما يلي:

$$Tx\left(t\right)=F\left(t\right)+\int_{a}^{b}g\left(t,s,x\left(s\right)\right)ds$$

برهان النظرية ينقسم الى قسمين:

المرحلة الأولى: في هذه المرحلة نبرهن أن $T:c\left([a,b]\right)\longmapsto c\left([a,b]\right)$ مستمر نظهر أولا أن $Tx\left(\cdot\right)\in c\left([a,b]\right)$، كلما كان $x\left(\cdot\right)\in c\left([a,b]\right)$.
ليكن $\left(t_n\right)_n$ متتالية في $[a,b]$ متقاربة نحو t ، بما أن:

(***)

$$\left|Tx\left(t_n\right)-Tx\left(t\right)\right|\leqslant\left|F\left(t_n\right)-F\left(t\right)\right|+\int_{a}^{b}\left|g\left(t_n,s,x\left(s\right)\right)-g\left(t,s,x\left(s\right)\right)\right|ds$$

$$\begin{aligned}\left|g\left(t_n,s,x\left(s\right)\right)-g\left(t,s,x\left(s\right)\right)\right| &\leqslant \left|g\left(t_n,s,x\left(s\right)\right)\right|+\left|g\left(t,s,x\left(s\right)\right)\right|\\ &\leqslant \left[V_1\left(t_n\right)+V_1\left(t\right)\right]V_2\phi\left(\left|x\left(s\right)\right|\right)\\ &\leqslant 2\left\|V_1\right\|_\infty V_2\sup u\geqslant 0\left|\phi\left(u\right)\right|\\ &= 2\left\|V_1\right\|_\infty V_2\left(s\right)M_\phi\in L^1\left([a,b]\right)\end{aligned}$$

من إستمرارية $g\left(t,s,x\right)$ بالنسبة الى t وتطبيق نظرية التقارب المهين على $(***)$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|Tx\left(t_n\right)-Tx\left(t\right)\right|\leqslant$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|Fx\left(t_n\right)-Fx\left(t\right)\right|+\int_{a}^{b}\lim_{n\to+\infty}\left|g\left(t_n,s,x\left(s\right)\right)-g\left(t,s,x\left(s\right)\right)\right|ds=0$$

وبالتالي: $T_x\left(\cdot\right)\in c\left([a,b]\right)$

نبرهن أن التابع T مستمر على $c\left([a,b]\right)$.
لتكن $\left(x_n\right)_n\in c\left([a,b]\right)$ متتالية متقاربة بانتظام نحو $x\left(\cdot\right)$.
بما أن: $c\left([a,b]\right)$ تام فإن $x\left(\cdot\right)\in c\left([a,b]\right)$
لدينا $\forall t\in[a,b]$:

$$\begin{aligned}\left|Tx\left(t_n\right)-Tx\left(t\right)\right| &\leqslant \int_{a}^{b}\left|g\left(t_n,s,x\left(s\right)\right)-g\left(t,s,x\left(s\right)\right)\right|ds\\ &\leqslant \int_{a}^{b}\left|x_n\left(s\right)-x\left(s\right)\right|\frac{\partial g}{\partial x}\left(t,s,\theta_s x_n\left(s\right)+\left(1+\theta_s x\left(s\right)\right)\right)\qquad;0<\theta_s<1\\ &\leqslant \left\|x_n-x\right\|_\infty\left\|V_1\right\|_\infty\int_{a}^{b}V_2\left(s\right)\Psi\left(\left|\theta_s x_n\left(s\right)+\left(1+\theta_s x\left(s\right)\right)\right|\right)\end{aligned}$$

بما أن $x\left(\cdot\right)$ متقاربة بانتظام نحو $x\left(\cdot\right)\in c\left([a,b]\right)$ فإن:

$\left(\left|\theta_s x_n\left(s\right)+\left(1+\theta_s x\left(s\right)\right)\right|\right)$ محتواة في مجموعة متراصة K من $[0,+\infty[$ ، من أجل كل

من S $[a,b]$ زيادة على ذلك ، بما أن $\Psi(\cdot)$ مستمرة على $[0,+\infty[$ ، فإنه يوجد ثابت M_Ψ بحيث: $\forall s\in[0.1]\,;\forall n\in\mathbb{N}$ لدينا:

$$\left|\Psi\left(\theta_s x_n(s)\right)+\left(1+\theta_s x(s)\right)\right|\leqslant M_\Psi$$

من خلال الجمع بين المتراجحتين السابقتين نجد أن:

$$\left\|Tx(t_n)-Tx(t)\right\|_\infty\leqslant\left\|x_n-x\right\|_\infty\left\|V_2\right\|_1 M_\Psi$$

هذا يكافؤ التابع T مستمر على فضاء بناخ $c([a,b])$.

المرحلة الثانية:

بإستعمال نظرية النقطة الثابتة لشافر.

نبرهن أولا أن T محدود كليا بواسطة نظريا (Ascoli - Arzela) نحتاج فقط الى برهنة أن:

$$F=\{Tx_{n;}\forall n\in\mathbb{N}\}$$

مستمرة بالتساوي ومحدودة من أجل كل متتالية محدودة بانتظام $(x_n)_n$ على $c([a,b])$ بما أن:

$$\begin{aligned}
\left|Tx_n(t)-Tx_n(\tau)\right| &= \left|F(t)-F(\tau)\int_a^b g(t,s,x(s))-g(\tau,s,x(s))\right|ds\\
&\leqslant \left|F(t)-F(\tau)\right|\int_a^b\left|(t+\tau)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial t}\left(t+\theta_t(\tau-t),s,x_n(s)\right)\right|\\
&\quad 0<\theta_s<1\\
&\leqslant \left|F(t)-F(\tau)\right|+\left|t-\tau\right|\left\|V_1\right\|_\infty\left\|V_2\right\|_1\acute{M}_\Psi
\end{aligned}$$

فإن F متساوية الإستمرار، زيادة على ذلك من الواضح أن F محدودة إذا كانت $(x_n)_n$ محدودة، وبالتالي F محدودة كليا وبناء على ذلك T محدودة كليا على $c([a,b])$.

بما أنه تمت البرهنة في الخطوة الأولى على أن T مستمر نستنتج أن T مستمر تماما على $c([a,b])$ ، في الأخير نعرف المجموعة M كما يلي:

$$M=\{x\in c([a,b]),\exists\lambda\in]0.1[:x=\lambda Tx\}$$

نبرهن أن M محدودة، وليكن $U(\cdot)\in M$ عندها $\forall t\in[a,b]$ لدينا:

$$\begin{aligned}
|u(t)|=|\lambda u(t)| &\leqslant \|F\|_\infty+\int_a^b|g(t,s,u(s))|ds\\
&\leqslant \|F\|_\infty+\|V_1\|_\infty\|V_2\|_1\sup y\geqslant 0\,|\phi(y)|\\
&\leqslant \|F\|_\infty+\|V_1\|_\infty\|V_2\|_1 M_\Psi
\end{aligned}$$

وبالتالي المجموعة M محدودة وباستعمال نظرية النقطة الثابتة لشافر نستنتج أن T تملك نقطة ثابتة في $c([a,b])$.
أو أن $(*)$ تملك حلا مستمرا على $[a,b]$ وهو المطلوب.

و- تطبيق نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي:

البرهان على النظرية التالية يستخدم النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي :

الشرط 01:

ليكن (X,d) فضاء متري تام و $F : X \longrightarrow X$ تطبيق (ليس بالضرورة مستمر)، نفرض أن الشرط التالي يحقق:

$$\forall \xi > 0, \exists \delta(\xi) > 0 : d(x, F(x)) < \delta(\xi) \to F(B(x,\xi)) \subseteq B(x,\xi)$$

$$B(x,\xi) = y \in X : d(x,y) < \xi$$

أذا كان من أجل $u \in X$ لدينا: $\lim_{n\to+\infty} d(F_n(u), F_{n+1}(u)) = 0$ إذن المتتالية $\{F_n(u)\}$ تتقارب نحو النقطة الثابتة لـ F.

الشرط 02:

ليكن (X,d) فضاء متري تام و ليكن:

$$d(F(x), F(y)) < \phi(d(x,y)), \forall x, y \in X$$

حيث $\phi : [0,\infty[\longmapsto [0,\infty[$ هو تابع رتيب أي ليس بالضرورة مستمر.
و $\lim_{n\to+\infty} \phi^n(t) = 0$ من أجل كل $t > 0$، إذن F تقبل نقطة ثابتة وحيدة $u \in X$ و

$$\lim_{n\to+\infty} F^n(x) = u; \forall x \in X$$

قضية (2)

اذا تحقق الشرطان (1) و (2).
فانه يوجد $r > 0$ حيث:

$$M = \{y \in x; \|y\| \leqslant r\}$$

و $AM \subset M$ و $\|(I-B)(x)\| \leqslant \|x\|$ فإن الشرط (1) محقق.

البرهان (4)

إذا كان $x = Bx + Ay$ فإن:
$(I-B)(x) = Ay$ ومنه حسب القضية فإن:

$$\|x\| \leqslant \|(I-B)(x)\| = Ay \leqslant r$$

بما أن: $y \in M \to Ay \in M \to \|Ay\| \leqslant r$: فإن $x \in M$.

لتكن $0 < \alpha < 1$ ولنعتبر المعادلة التكاملية التالية:

$$x(t) = -\alpha \sin^2 \left[\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}\right] + P(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\, G(x(s))\, ds$$

مع G, D, P تطبيقات مستمرة و $P(t+2\pi) = P(t)$.
نفرض أنه يوجد $r > 0$ بحيث:

$$|x| < r \Rightarrow |G(x)| < r - \|P\|$$

و

$$\int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|\, ds \leqslant 1$$
$$\int_{-\infty}^{t} |D'(t-s)|\, ds \leqslant \infty$$

إذن المعادلة التكاملية أدناه تقبل حل دوري 2π.
نضع:

$$(B_x)(t) = -\alpha \sin^2 \left[\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}\right]$$

و

$$(A_y)(t) = P(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\, G(x(s))\, ds$$

ونفرض $(X, \|\cdot\|)$ فضاء بناخ للدوال الدورية ودورها 2π مزود بالنظيم الأعظمي.
كما أن:

$$M = \{y \in X : y \leqslant r\}$$

من الواضح أن الشرط (1) (القضية 01) محقق و:

$$\begin{aligned}\left\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\right\| &\geqslant (1-\alpha)\left\|x-y\right\| \\ \left\|(I-B)(x)\right\| &\geqslant \left\|x\right\|\end{aligned}$$

بالإضافة إذا كان: $y \in M$ مع : $\|y\| \leqslant r$ لدينا:

$$\|Ay\| \leqslant \|P\| + \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)| \left[r-\|P\|\right] ds \leqslant \|P\| + r - \|P\| = r$$

الشرط(1) للنظرية محققة.
تحقيق الشرط (2) يكون كما يلي:

$$\begin{aligned}
\left\|B_x(t)-B_y(t)\right\| &= \left\|-\alpha\sin^2 t\left[\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}-\frac{y^3(t)}{1+2y^2(t)}\right]\right\| \\
&= \left|\alpha\sin^2 t\right|\left\|\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}-\frac{y^3(t)}{1+2y^2(t)}\right\| \\
&= \alpha\left|\sin^2 t\right|\left\|\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}-\frac{y^3(t)}{1+2y^2(t)}\right\| \\
&\leqslant \alpha\left\|\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)}-\frac{y^3(t)}{1+2y^2(t)}\right\| \\
&\leqslant \alpha\left\|\frac{x^3\left(1+2y^2\right)-y^3\left(1+2x^2\right)}{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}\right\| \\
&\leqslant \alpha\left\|\frac{x^3+2x^3y^2-y^3-2x^2y^3}{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}\right\| \\
&\leqslant \alpha\left\|\frac{(x-y)\left(2x^2y^2+x^2+y^2+xy\right)}{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}\right\| \\
&\leqslant \alpha\left|x-y\right|\left|\frac{2x^2y^2+x^2+y^2+xy}{4x^2y^2+2x^2+2y^2+1}\right|
\end{aligned}$$

نضع:

$$\begin{cases} x &= \varphi\cos\theta \\ y &= \varphi\sin\theta x^2+y^2=\varphi^2 \end{cases}$$

حيث: $\varphi < r$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{2x^2y^2+x^2+y^2+xy}{4x^2y^2+2x^2+2y^2+1}\right\| &= \left\|\frac{2\varphi^2\cos^2\theta\varphi^2\sin^2\theta+\varphi^2+\varphi^2\cos\theta\sin\theta}{4\varphi^2\cos^2\theta\varphi^2\sin^2\theta+2\varphi^2+1}\right\| \\
&= \left\|\frac{2\varphi^4\cos^2\sin^2\theta^2\varphi^2\cos\theta\sin\theta+\varphi^2}{4\varphi^2\cos^2\theta\sin^2\theta+2\varphi^2+1}\right\| \\
&\leqslant \left\|\frac{2\varphi^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\varphi^2\cos\theta\sin\theta+\varphi^2}{4\varphi^4\cos^2\theta\sin^2\theta+2\varphi^2}\right\| \\
&\leqslant \left\|\frac{2\varphi^2\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta+1}{4\varphi^2\cos^2\theta\sin^2\theta+2}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}+\left\|\frac{\cos\theta\sin\theta}{4\varphi^2\cos^2\theta\sin^2\theta+2}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}+\left\|\frac{1}{4\varphi^2\cos^2\theta\sin^2\theta+2}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1
\end{aligned}$$

ومنه:

$$B_x(t) \leqslant -\alpha\left\|x_t-y_t\right\|$$

إذن:

$$\left\|B_x(t)-B_y(t)\right\| \leqslant \alpha\left\|x(t)-y(t)\right\|$$

ومنه B تقلص بثابت $0<\alpha<1$.

الفصل الرابع

نظريات النقطة الثابتة في المعادلات التفاضلية والكسرية

1.4 المعادلات ذات التفاضلات الكسرية:[22.23]

تحوي المعادلات التفاضلية على مشتقات من مرتبة صحيحة بينما تحوي المعادلات التفاضلات الكسرية على مشتقات كسرية مثل D^{α} والمعرفة من أجل $\alpha > 0$ حيث ليس من الضروري أن يكون α عدد صحيح ومن الممكن أن يكون كسري أو حتى عقدي.

تعريف 4.0.1: تعطى المعادلة ذات التفاضل الكسري من المرتبة α حيث $\alpha > 0$ بالشكل:
$D^{\alpha}u\left(t\right) = F\left(t, u, \acute{u}, ...u^{(n-2)}\right); n-1 \leqslant \alpha \leqslant n$ حيث F دالة معرفة على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$.
أما : $u:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n-1}$ فهي دالة قابلة للإشتقاق n مرة في المتغير $t\in\mathbb{R}$

مبرهنة 01

إن حل المعادلة ذات التفاضل الكسري:

$$D^{\alpha}u\left(t\right) = F\left(t, u, \acute{u}, ..., u^{(n-2)}\right)$$

هو حل جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}Z_{n-1} &= F\left(t, u, Z_1, ..., Z_{n-2}\right) \\ \frac{dZ_{n-2}}{dt} &= Z_{n-1} \\ &\vdots \\ \frac{du}{dt} &= Z_1 \end{aligned}$$

حيث: $Z_K = \frac{d^K Z}{dt^K}, K = 1, ..., n-1$ والتي تحل لجملة معادلات تفاضلية عادية.

تعريف 4.0.2: تعرف المعادلة ذات التفاضل الكسري الخطية من المرتبة $0 < \alpha \leqslant 1$ بالشكل:
$D^{\alpha}u = a\left(t\right)u + b\left(t\right)$ حيث $b\left(t\right)$ ، $a\left(t\right)$ دوال عقدية القيمة.
وتكون المعادلة ذات التفاضل الكسري الخطية المتجانسة من المرتبة $0 < \alpha \leqslant 1$ من الشكل:

$$D^{\alpha}u = a\left(t\right)u$$

الجزء الأول: دراسة وجود الحلول لمسائل القيم الحدية للمعادلات اللاخطية ذات التفاضلات الكسرية

2.4 دراسة مسألة القيم الحدية من الشكل:[24]

$$\begin{aligned} D^{\alpha}u(t) + F(t, u(t)) &= 0 \\ au(0) + bu(T) &= c; 0 < a < 1, t \in J = [0, T] \end{aligned}$$

حيث D^{α} هو مشتق كابوتو الكسري، $F : J \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ دالة مستمرة، a, b, c ثوابت حقيقية وتحقق $a + b \neq 0$.

سنأخذ الفضاء $C(J.\mathbb{R})$ فضاء بناخ لكل الدوال المستمرة من J الى $\mathbb{R}$ والمزود بالنظيم:
$\|u\| = \sup\{|u(t)| : t \in J\}$

مبرهنة 01

لتكن $0 < a < 1$ ولتكن : $y : [0.T] \longmapsto \mathbb{R}$ دالة مستمرة، عندئذ نقول عن u إنه حل للمعادلة التكاملية الكسرية:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_o^t (t-s)^{a-1} y(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(a)} \int_o^T (T-s)^{a-1} y ds - c\right]$$

إذا وفقط إذا كان u حلا للمسألة ذات القيم الحدية للمعادلة ذات التفاضلات الكسرية التالية:

$$\begin{aligned} D^{a}u(t) &= y(t) \\ au(0) + bu(T) &= c; t \in [0, T] \end{aligned} \qquad (1,1,1)$$

البرهان (1)

لتكن لدينا المعادلة ذات التفاضلات الكسرية: $D^{a}u(t) = y(t)$
وبأخذ التكامل الكسري للطرفين: $I^{a}D^{a}u(t) = I^{a}y(t)$

وبحسب التمهيدية التالية:

التمهيدية:

ليكن $a<0$ عندئذ:

$$I^{a}D^{a}u\left(t\right)=u\left(t\right)+c_{0}+c_{1}t+c_{2}t^{2}+...+c_{n}t^{n}$$
$$n=\left[a\right]+1;c_{i}\in\mathbb{R};i=0,1,2,...n$$

نجد:

$$u\left(t\right)=c_{0}+I^{a}y\left(t\right)$$
$$u\left(t\right)=c_{0}+\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds$$

لكن:

$$\begin{aligned}u\left(0\right)&=c_{0}\\u\left(t\right)&=c_{0}+\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds\end{aligned}$$

وبما أن:

$$au\left(0\right)+bu\left(T\right)=c$$

فيكون:

$$ac_{0}+bc_{0}+\frac{b}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds=c$$
$$c_{0}\left(a+b\right)=c-\frac{b}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds$$
$$c_{0}=\frac{c}{a+b}-\frac{b}{\left(a+b\right)\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds$$

وهكذا نجد:

$$u\left(t\right)=$$
$$\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds+\frac{c}{a+b}-\frac{b}{\left(a+b\right)\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds$$
$$u\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma\left(a\right)}\int_{o}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds-c\right]$$

وبصورة عكسية نجد أنه إذا كانت:

$$u\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{T}\left(T-s\right)^{a-1}y\left(s\right)ds-c\right]$$

فمن الواضح أن مسألة القيم الحدية $(1,1,1)$ محققة.

تعريف 4.0.3:
لنفرض وجود ثابت $K>0$ بحيث:

1. $|F(t,u)-F(t,\overline{u})| \leqslant K|u,\overline{u}|\,; u,\overline{u}\in\mathbb{R}, t\in J$ عندئذ إذا كان:
2. $$\frac{KT^a\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(a+1)}<1$$

فإنه يوجد للمسالة (1,1) حلا وحيدا على المجال: $[0,T]$.

تعريف 4.0.4: لنفرض أن: $F: J\times\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ دالة مستمرة ولنفرض وجود ثابت $M>0$ بحيث: $|F(t,u)|\leqslant M$ من أجل كل $t\in J$ و $u\in\mathbb{R}$ ، عندئذ يوجد للمسألة (1.1) على الأقل حلا وحيدا على J .

لقد استعملنا نظرية النقطة الثابتة لبناخ لبرهان هذه المسالة.

الجزء الثاني: دراسة تحليلية لمسألة تفاضلية ذات مشتقات كسرية من الصنف Liouvile Riemman

طرح المسألة:

✍ نعتبر مسألة المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية التالية:

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[y(t)-g(t,y_t)\right]=f(t,y_t), & t\in J \quad 0<\alpha<1 \\ \\ y(t)=\phi(t) & t\in[-r;0] \end{cases} \qquad (1)$$

حيث ${}^{RL}D^{\alpha}$ هو المشتق الكسري لريمان ليوفيل و g,f دوال معطاة بحيث :
$g,f: J\times C([-r,0],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ و $\phi\in C([-r,0],\mathbb{R})$ مع $\phi(0)=0$ و $g\left(0,\phi\right)=0$
من أجل كل تابع y معرف على $[-r,T]$ و من أجل كل $t\in J$ نرمز بـ y_t لتابع من $C([-r,0],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ معرف بـ :

$$y_t(\theta)=y(t+\theta),\qquad \theta\in[-r,0]$$

وجود الحل:

تعريف 4.0.5:
نقول عن الدالة $y\in C\left([-r,T],\mathbb{R}\right)$ أنها حل للمسألة إذا حققت :

$$tag1\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[y(t)-g(t,y_t)\right]=f(t,y_t), & t\in J \quad 0<\alpha<1 \\ \\ y(t)=\phi(t) & t\in[-r;0] \end{cases} \qquad (2)$$

نظرية (1)

نعتبر أن الفرضيات التالية محققة

(H1) يوجد $l>0$ حيث:

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leq l\left\|u-v\right\|_c \qquad (3)$$

(H2) يوجد $k>0$ حيث:

$$|g(t,u)-g(t,v)|\leq k\left\|u-v\right\|_c \qquad (4)$$

من أجل كل $t\in J$ و كل $u,v\in C([-r,0],\mathbb{R})$.

إذا كان :

$$\left[k + \frac{lT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] < 1 \qquad (5)$$

فإن المسألة (1) تقبل حل وحيد على المجال $[-r, T]$.

البرهان (2)

نحول المسألة (1) إلى مسألة نقطةصامدة .

لنعتبر المؤثر

$$\begin{aligned} N : C([-r, T], \mathbb{R}) &\rightarrow C([-r, T], \mathbb{R}) \\ y &\rightarrow N(y) \end{aligned} \qquad (6)$$

حيث :

$$N(y)(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [-r, 0] \\ g(t, y_t) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & t \in [0; T] \end{cases} \qquad (7)$$

, لنبرهن أن المؤثر N مقلص:
ليكن $y, z \in C([-r, T], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\|N(y)(t)-N(z)(t)\| =&\|g(t,y_t)-g(t,z_t)\|+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,y_s)ds\right.\\ &\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,z_s)ds\right\|\\ \leq& k\left\|y_t-z_t\right\|_C+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left\|f(s,y_s)-f(s,z_s)\right\|ds\\ \leq& k\left\|y_t-z_t\right\|_C+\frac{l}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left\|y_s-z_s\right\|_C ds\\ \leq& k\left\|y-z\right\|_{[-r,T]}+\frac{l\left\|y-z\right\|_{[-r,T]}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\\ \leq& \left[K+\frac{lT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\left\|y-z\right\|_{[-r,T]}\end{aligned}$$

و منه

$$\left\|N(y)-N(z)\right\|_{[-r,T]}\leq\left[k+\frac{lT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\left\|y-z\right\|_{[-r,T]}$$

من (5) نجد أن المؤثر N مقلص , إذن حسب نظرية النقطة الصامدة لبناخ المؤثر N يقبل نقطة صامدة وحيدة التي هي حل للمسألة (1)

نظرية (2)

نعتبر أن الفرضيات التالية محققة :

(H1) الدالة $f:J\times C([-r,0],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ مستمرة .

(H2) يوجد $\exists q,p\in C(J,\mathbb{R}^+)$ حيث من أجل كل $t\in J$ و $u\in C([-r,0],\mathbb{R})$ فإن:

$$|f(t,u)|\leq p(t)+q(t)\left\|u\right\|_c$$

(H3) الدالة g مستمرة كليا من أجل كل مجموعة محدودة B من $C([-r,T],\mathbb{R})$, المجموعة:

$$\{t\to g(t,y_t),\quad y\in B\}$$

متساوية الإستمرار في $C([-r,T],\mathbb{R})$, و يوجد ثابتان $0<d_1<1,\ d_2>0$ حيث من أجل كل $t\in J$ و $u\in C([-r,0],\mathbb{R})$ فإن:

$$|g(t,u)|\leq d_1\left\|u\right\|_C+d_2$$

إذن المسألة (1) تقبل على الأقل حل في المجال $[-r, T]$.

نتيجة (1)

حلول المسألة (1) هي النقط الثابثة للمؤثر N.
نعتمد على نظرية النقطة الصامدة لاري-شاودر .

البرهان (3)

نعتبر المؤثر N المعرف بـــ (7) و نعتبر المؤثر F المعرف كما يلي:

$$F(y)(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [-r, 0] \\ \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_s) ds, & t \in [0; T] \end{cases} \tag{8}$$

بما أن $N(y)(t) = g(t, y_t) + F(y)(t)$ و إعتمادا على الفرضية (H3) نستنتج أن المؤثر N مستمر كليا يكافىء أن المؤثر F مستمر كليا.
-نبرهن أن F مستمر كليا. البرهان يتم على عدة مراحل :

المرحلة 1

إثبات أن F مستمر . لتكن $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو y في $C([-r, 0], \mathbb{R})$ نثبت أن $F(y_n)$ تتقارب نحو $F(y)$ أيـن

$$F(y_n)(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [-r; 0] \\ \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{ns}) ds, & t \in [0; T] \end{cases} \tag{9}$$

ليكن $t \in J$

فإن:

$$\begin{aligned}\|F(y_n)(t)-F(y)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,y_{ns})-f(s,y_s)\|\,ds\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}\|f(s,y_{ns})-f(s,y_s)\|\,ds\\ &\leq \|f(.,y_{n.})-f(.,y)\|_\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n)-f(.,y)\|_\infty\end{aligned}$$

بما أن f مستمر إذن :

$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(.,y_n)-f(.,y)\| \to 0$$

المرحلة 2

إثبات أن N يحول كل مجموعة محدودة إلى مجموعة محدودة في $C([-r,T],\mathbb{R})$.

ليكن $\eta^*>0$, نثبت أنه يوجد l ثابث موجب بحيث من أجل كل :

$$y\in B_{\eta^*}=\{y\in C([-r;T],\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leq\eta^*\}.$$

فإن :

$$\|N(y)\|_\infty\leq l$$

حسب الفرضية $(H2)$ لدينا من أجل كل $t\in J$ فإن:

$$\begin{aligned}\|F(y)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,y_s)\|\,ds\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)ds\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}q(s)\|y_s\|_C\,ds\\ &\leq \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\ &\quad+\frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\eta^*\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\ &\leq \frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta^*}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha\end{aligned}$$

إذن :

$$\|F(y)\|_\infty \le \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha = l.$$

المرحلة 3

إثبات أن F يحول كل مجموعة محدودة إلى مجموعة متساوية الإستمرار في $C([-r,T],\mathbb{R})$.

ليكن $t_1, t_2 \in]0,T]$ مع $t_1 < t_2$ و B_{η^*} مجموعة محدودة من $C([-r,T],\mathbb{R})$ المعرفة سابقًا حيث $y \in B_{\eta^*}$ إذن :

$$\begin{aligned}
\|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}) f(s,y_s) ds \right\| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y_s) ds \right\| \\
&\le \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} \right] ds \\
&+ \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \\
&\le \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha+1)} \left[-(t_2-t_1)^\alpha + t_2^\alpha - t_1^\alpha \right] \\
&+ \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha \\
&\le \left[\frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*}{\Gamma(\alpha+1)} \right] (t_2^\alpha - t_1^\alpha).
\end{aligned}$$

لما $t_1 \to t_2$ الطرف الأيمن للمتراجحة الأخيرة يؤول إلى الصفر إذن F متساوي الإستمرار . حسب المرحلتين 2 و 3 فإن F متراص نسبياً حسب نظرية أسكولي-أرزيلا، و من المرحلة 1، نستنتج أن F مستمر كليا إذن N مستمر كلياً .

المرحلة 4

ليكن $y \in C([-r;T],\mathbb{R})$ و $y = \lambda N(y)$ من أجل كل $0 < \lambda < 1$ و كل $t \in J$ فإن :

$$y(t) = \lambda \left(g(t,y_t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y_s) ds \right),$$

و من الفرضية $(H2)$ ، $(H3)$ نجد أنه من أجل كل $t \in J$

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq d_1 \|y_t\|_C + d_2 \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[p(s) + q(s) \|y_s\|_C \right] ds \right| \\ &\leq d_2 + d_1 \|y_t\|_C \\ &\quad + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q(s) \|y_s\|_C \, ds\end{aligned}$$

لتكن الدالة μ المعرفة بـ:

$$\mu(t) = sup\left\{|y(s)| : -r \leq s \leq t\right\} \qquad 0 \leq t \leq T$$

يوجد $t^* \in [-r,t]$ بحيث : $\mu(t) = |y(t^*)|$. إذا كان $t^* \in [0,T]$ نجد أنه أجل كل $t \in J$ فإن :

$$\begin{aligned}\mu(t) &\leq \frac{1}{1-d_1}\left[d_2 + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q(s)\mu(s) ds\right] \\ &\leq \frac{1}{1-d_1}\left[d_2 + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds\right]\end{aligned}$$

لما $t^* \in [-r,0]$ و منه :

$\mu(t) = \phi(t)$ حسب توطئة غرونوال لدينا :

$$\begin{aligned}\mu(t) &\leq \frac{1}{1-d_1}\left[d_2 + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{k\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(d_2 + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right) ds\right] \\ &\leq \frac{1}{1-d_1}\left[d_2 + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha k\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\left(d_2 + \frac{T^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right] := M\end{aligned}$$

إذن من أجل كل $t \in [0,T]$, $||y_t|| \leq \mu(t)$ لدينا :

$$\|y\|_\infty \leq max\{\|\phi\|_C ; M\} = R$$

ليكن :

$$U = \{y \in C([-r;T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty < R+1\}$$

عبارة عن مفتوح في $C([-r;T],\mathbb{R})$ و من خلال تعريف U لا توجد $y \in \partial U$

بحيث $y = \lambda N(y)$ **من أجل كل** $\lambda \in]0;1[$.

إذن حسب نظرية لاري شاودر فإن N يقبل نقطة صامدة وهي حل المسألة (1)
لقد استعملنا نظرية النقطة الثابتة لبناخ لبرهان هذه المسالة.

المصطلحات العلمية

Terminology	المصطلحات العلمية
A	
Able's integral equation	معادلة آبل التكاملية
B	
Banach's fixed point theorem	مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة
Boundary value problems	مسائل القيم الحدية
Boundary conditions	شروط حدية
Banach space	فضاء بناخ
C	
caputo derivative	مشتق كابوتو
continous	مستمر
D	
Definition	تعريف
Derivative	مشتق
Dffierntial equation	معادلة تفاضلية
E	
Equi-continuous	متساوي الإستمرار
F	
Fixed point	نقطة ثابتة
fixed point theorem	مبرهنة نقطة ثابتة
Fractional dffierential equation	معادلة ذات التفاضل الكسري
Fredholm integral equation	معادلة فريدهولم التكاملية
Function, Fractional	دالة ، كسري
I	
Integral equation	معادلة تكاملية
K	
Krasnoselski's fixed point theorem	مبرهنة كراسنوسلسكي للنقطة الثابتة
L	
Legget - Williams's	ليجيت - ويليامز
Lemma	تمهيدية
Linear	خطية
R	

remark	ملاحظة
Result	نتيجة
Riemann- liouville derivative	مشتق ريمان - ليوفيل
S	
Schaefer's	شيفر
Schauder's	شاودر
T	
Theorem	مبرهنة
U	
Uniqueness of solutions	وحدانية الحلول
V	
Volterra integral equation	معادلة فولتيرا التكاملية

خاتمة

نتعرف اليوم على النظرية التي احتلت المركز السادس وهي نظرية تنتمي للمواضيع المتقدمة والتي غالبا لا تدرس إلا في الجامعات وبداخل التخصصات الرياضية فقط، وبالرغم من عدم شيوع صيت هذه النظرية بين عموم الدارسين والطلاب إلا أنها مع ذلك تحمل أهمية رياضية قصوى، تمثل هذه النظرية **(نظرية النقطة الثابتة وتطبيقاتها)**.

من خلال هذه المذكرة قدمنا بعض مبرهنات النقطة الثابتة وتطبيقاتها في المعادلات و التفاضلات التكاملية والمعادلات التفاضلية الكسرية أي (دراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة تكاملية تفاضلية من الرتبة الكسرية ذات شروط حدودية بالإعتماد على مبرهنات النقطة الثابتة). باعتبارها ذات أهمية كبيرة عند الكثير من علماء الرياضيات إذا كان لها الدور الكبير في التحليل الرياضي اللاخطي ودراسة معظم المعادلات الكسرية.

الكلمات المفتاحية::

النقطة الثابتة، شروط حدودية، معادلة تكاملية - تفاضلية كسرية، معادلة تفاضلية كسرية، مسألة القيم الحدية .

قائمة المراجع

[1] Ross, In troduction of ordinary Differentia Equations, 1989.

[2] Lions,Jacques Liuis-Optimal control of systems governed by partial differentiale equation (Grund lehrem der Mathematischen wrissenschaften) Vol.170, Behren : Springer, 1971.

[3] M.H.Akrami, M.H.Atabakzadeh and G.H.Erijaee, "the operational matrix of fractional integration for shifted legendre polynomials". Iranian Journalof science Technology, IJST(2013) 37 A4: 439-444.

[4] L.Debnalth,P.MiKusinsKi, Introduction to Hilbert space with AZpplication (thirded,) Elsevier Academic. New York,2005.

[5] SHANTANU DAS,Functional.Fractional calcules,Doi 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN978-3-642-20544-6,2011 Springen - verlag Berlin Heidelberg.

[6] Y.M.chen,M,X,Yi ? and C,X,Yu ?Erroranalysis for numerical soulution of franctional differential equation by haar wavelets methad, J. comput, Sci.5 (3) (2012), PP.367-373.

[7] M.Ben CHOHARA, J.HENDERSON, and S.NTOUYAS,Inpulsive Differential Equation and Inclusions Hindawi Publishin Corporation 2006.

[8] M.Rosen zweig, 2012, Banach Fixed Point Theorem and some Applications.

[9] I.Podludng,1999,Fractional Differential Equations inm Mathematics in Sciences and End Engineering,Vol-198,Academic Press, San Diego.

[10] O.Tse, 2012 Lecture Notesm Noulinear Functional Analysis with Applicationsto Partial Differential Equations.

[11] P.Kumlin, 2003,A note on Fixid point theory, Mathematics, chalmers et GU 2003/2004.

[12] L.Erdo,2010, Topologies on, continuous Functions. Arzola - Ascoli theorem.

[13] G.Isac,2006, leray - Schauder type Alte ruatives. complemantarity Problems and varia - tional Ine quealities, US,Springer.

[14] Z.Bai,H,Lu,2005, Positive solulion fon bounda ky value problem of nonlinear fractionaldifferential equation, J.Math.Anal.311,495-505

[15] http :math-p4 studentes- blogspot.com/2010/12/blog-post-10.htm/ ?m=1. موسوعة الرياضيات

[16] K.G.Mavridis, 2010, Tow Modifications of the leggett-williams Fixed point theorem And their Applications, Elect monic Journal of Differential Equations, vol. 2010 (2010)No.53, PP,1-11

[17] R.W.leggett, L.R.Williams, 1979, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banck Spaces, Indiana Univ-Math.J.28 (1979) 673-688

[18] A.M.WAZWAZ,The combined la place teansform Adomions decomposition method for handling nonlinear Volterra integro- differential equations .Apple.

[19] Loannis farmakis, martin moskdwitz,fied point theoremes and thier application.

[20] A.DOMD,B-ECKMANN and F.TAKENS,Topological Fixed point theory and Appmication 1988.

[21] ZEIDLER.E,Nonlinear Function analysis and its application ; IFixed Point theorems, Springer - Verlage,Berlin, 1993.

[22] C.C.Tisdell, 2006, On the solvability of monlinear first- order boundary-Value problems. Electron.J.Differential Equation 2006, N ,80,8 pp-MR2240828 (2007 e : 34040) Zbl 111734020.

[23] R.K.Saxemena, 2006 Fractional Calculs And Fractional Differential Equations, Lecture Note (chatre -3) pp1-39, Jai Narayan Vyas University Rajasthan 2006.

[24] M.Benchoha, S.Hamani, S.K.Ntouyas, 2008, with Fractional ordr, ISSN 1842-6298 (electronic) ; 1843-7265 (print) Volume 3 (2008) , 1-12.

مراجع إضافية

[25] يرمين محمود الرفاعي، مسائل القيم الحدية للمعادلات اللاخطية ذات التفاضلات الكسرية، رسالة ماجستير في الرياضيات من جامعة دمشق، 2015، سوريا.

[26] وسف صوفية، بعض الطرق العددية لحل معادلات تفاضلية برتب كسرية ، مذكرة ماستر أكادمية في الرياضيات من جامعة 8 ماي 1945 قالمة، 2020-2021، الجزائر.

[27] الب علاء الدين - جباري عبد الله، دراسة تحليلية وعددية لبعض المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية، مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي، 2022، الجزائر.


وَمَا تَوْفِيقِيٓ إِلَّا بِٱللَّهِۚ
عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ