

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Spécialité** : Analyse Numérique pour les Equations Différentielles Partielles

## Thème

*Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales  
De Fredholm de Seconde Espèce*

Présenté par :

**M. Chaib Leila**

Soutenu publiquement le : 02/07/2025

Devant le jury composé de :

N. Nasri

M.C.A,

Université de Skikda

Présidente

B. Neggal

M.C.A,

Université d'Annaba

Encadrant

Gh. Khenniche

M.C.A,

Université de Skikda

Examineur

Année universitaire : 2024/2025

# Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales de Fredholm de Seconde Espèce

Chaïb Leïla

2 juillet 2025

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 PRÉLIMINAIRES</b>	<b>5</b>
1.1 Généralités sur les équations intégrales . . . . .	5
1.1.1 Définition des équations intégrales . . . . .	5
1.1.2 Classification des équations intégrales . . . . .	5
1.1.3 Relation avec les équations différentielles . . . . .	9
1.2 Polynômes orthogonaux . . . . .	12
1.2.1 Généralités . . . . .	12
1.2.2 Polynômes de Legendre . . . . .	12
1.2.3 Polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n$ . . . . .	14
<b>2 Équations intégrales de Fredholm de seconde espèce</b>	<b>15</b>
2.1 Existence et unicité des solutions pour l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce . . . . .	16
2.1.1 Opérateur compact . . . . .	16
2.1.2 La théorie de Riesz . . . . .	16
2.2 Résolution exacte des équations Intégrales de Fredholm de seconde espèce . . . . .	18
2.2.1 Méthode des noyaux dégénérés . . . . .	18
2.2.2 La méthode des Noyaux itérés . . . . .	22
<b>3 Résolution Numériques des Équations Intégrales de Fredholm de Seconde Espèce</b>	<b>24</b>
3.1 Méthode de Legendre-Collocation . . . . .	24
3.2 Méthode de Legendre-Galarkin . . . . .	26
3.3 Tests numériques . . . . .	29
<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

## Résumé :

Dans ce travail, nous intéressons à la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce, ces dernières équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes ont été développées pour traiter cette catégorie de problèmes, on peut regrouper ces méthodes selon trois grands axes :

- La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de la solution et surtout présenter des méthodes d'approximation efficaces.
- L'analyse numérique, qui étudie la réalisabilité de ces méthodes, principalement l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur.
- La programmation sur machine, qui retranscrit ces méthodes sous forme d'algorithmes rapides et efficaces.

## Abstract :

In this work, we are interested in the numerical resolution of the Fredholm integral equations of the second kind, these last equations are written in the following form:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

In the mathematical literature, several methods have been developed to deal with this category of problems, we can group these methods according to three main axes :

- Mathematical theory, essentially the functional analysis of integral equations which makes it possible to analyze the problem, to prove the existence of the solution and above all to present effective approximation methods.
- Numerical analysis, which studies the feasibility of these methods, mainly the analysis of the speed of convergence and the estimation of the error.
- Machine programming, which translates these methods into fast and efficient algorithms.

## ملخص

في هذا العمل ، نحن مهتمون بالحل العددي لمعادلات فريدولم التكاملية من النوع الثاني ، وهذه المعادلات الأخيرة مكتوبة بالشكل التالي:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

في الرياضيات ، تم تطوير عدة طرق للتعامل مع هذا فئة المشكلات ، يمكن تجميع هذه الطرق وفقاً لثلاثة محاور رئيسية:

- الدراسة الرياضية النظرية، وهي في الأساس التحليل الوظيفي للمعادلات التكاملية التي تجعل من الممكن تحليل المشكلة ، وإثبات وجود الحل وقيل كل شيء لتقديم طرق تقريب فعالة.
- التحليل الرقمي الذي يدرس جدوى هذه الطرق وبشكل رئيسي تحليل سرعة التقارب وتقدير الخطأ.
- برمجة الآلة ، والتي تترجم هذه الأساليب إلى خوارزميات سريعة وفعالة.

Plusieurs problèmes en sciences et technologie définis sur un espace unidimensionnel, peuvent être modélisés par des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce, i.e., des équations de la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

où  $k(x,t) \in L^2([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$  est le noyau, qui est en général non dégénéré,  $f \in L^2(a, b)$  est la donnée et  $u \in L^2(a, b)$  est l'inconnue recherchée.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour traiter cette catégorie de problèmes. Parmi ces méthodes, on distingue deux variétés les plus utilisées : les méthodes de projection (méthode de Galerkin et collocation) qui consiste à projeter l'équation sur un sous-espace de dimension finie, où la solution recherchée s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base de cet espace [1, 2]. La seconde variété est connue sous le nom méthode de quadrature (méthodes de Nystrom) qui sont basées sur l'approximation numérique des intégrales par des sommes pondérées supportées sur un ensemble de points (nœuds).

Le présent travail porte sur la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. On propose l'étude des méthodes de projections (Galerkin et collocation), où la solution est projetée sur un sous-espace engendré par des polynôme orthogonaux de Legendre. On montre la convergence de ces approches, et on donne le bilan d'erreur justifié par

des expérimentations numériques.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

- *Le premier chapitre* est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale.
- *Le deuxième chapitre* fixe le cadre théorique de notre étude. Nous discutons notamment la question d'existence et d'unicité de la solution des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Ensuite nous présentons quelques méthodes analytiques de résolution de ces équations et quelques exemples.
- *Le troisième chapitre* est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce en utilisant les méthodes de projection Galerkin et collocation avec le polynôme de Legendre tout en montrant l'efficacité de ces méthodes par des exemples illustrés.

## 1.1 Généralités sur les équations intégrales

### 1.1.1 Définition des équations intégrales

**Définition 1.1** Une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral est dite équation intégrale. Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe de problèmes formulés auparavant par des opérateurs différentiels, notamment les problèmes aux limites et ceux de Cauchy. La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt \quad (1.1)$$

où  $\alpha(x)$ ,  $f(x)$  et  $k(x,t)$  sont des fonctions données, la fonction  $u(x)$  qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer,  $\lambda$  est un paramètre réel différent de zéro. La fonction  $k(x,t)$  est appelée noyau de l'équation intégrale.

### 1.1.2 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrivent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

— Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour

les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

- La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.
- L'adjectif singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné, évidemment, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

### Équations intégrales de Fredholm

Une équation de la forme 1.1 dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

1. si  $\alpha(x) = 0$  alors l'équation 1.1 s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0$$

et elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

2. si  $\alpha(x) = 1$ , alors l'équation 1.1 s'écrit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

et elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

3. si  $f(x) = 0$ , l'équation 1.1 s'écrit :

$$\alpha(x)u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

et elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm homogène.

**Exemple 1.1**     1. *Équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce*

$$x^2 + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt = 0$$

2. *Équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce*

$$u(x) = 2x + \lambda \int_0^1 e^{xt} u(t) dt$$

### Équations intégrales de Volterra

Les équations intégrales linéaire de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c-à-d  $b = x$ , et on a :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t) dt \quad (1.2)$$

1. si  $\alpha(x) = 0$ , alors l'équation 1.2 s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t) dt = 0$$

et elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

2. si  $\alpha(x) = 1$ , alors l'équation 1.2 s'écrit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t) dt$$

et elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

3. si  $f(x) = 0$ , alors l'équation 1.2 s'écrit :

$$\alpha(x)u(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)u(t) dt$$

et elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra homogène.

**Exemple 1.2**    1. *Équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce*

$$\cos(x) + \lambda \int_0^x (xt)u(t) dt = 0$$

2. *Équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce*

$$u(x) = \sin(x) + \lambda \int_0^x (x^2 t)u(t) dt$$

## Équations intégrales singulières

Une équation intégrale est dite singulière si :

- L'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies.
- Le noyau est non borné sur l'intervalle donné.

**Exemple 1.3** 1. *Le noyau faiblement singulier de la forme*

$$k(x, t) = \frac{g(x, t)}{|x - t|^\alpha}, 0 < \alpha < 1 \quad (1.3)$$

où  $\alpha$  est donné et  $g(x, t)$  une fonction bornée, est un exemple d'un noyau non borné. Cependant, une équation intégrale définie avec un noyau de type 1.3 est dite équation intégrale faiblement singulière.

2. *Le noyau à singularité logarithmique*

$$k(x, t) = g(x, t) \ln |x - t| \quad (1.4)$$

où  $g$  est bornée, peut être considéré comme un noyau faiblement singulier.

3. *Comme un exemple de noyau qui possède une forte singularité, on considère le noyau de Cauchy, il est caractérisé par :*

$$k(x, t) = \frac{g(x, t)}{|x - t|} \quad (1.5)$$

où  $g$  est toujours bornée.

## Équations intégral-différentielles

Dans ce type d'équation intégrale, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît dans l'équation par l'une de ses fonctions dérivées ordinaires et dans l'intégration avec des conditions initiales :

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x - t)u(t)dt, u(0) = 1; \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{du}{dx}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt)u(t)dt, u(0) = 1 \quad (1.7)$$

Similairement aux cas précédents. On remarquera que l'équation intégrale 1.6 est une équation intégrale linéaire de Volterra de la deuxième espèce tandis que l'équation intégrale 1.7 est une équation intégrale linéaire de Fredholm de la seconde espèce.

**Exemple 1.4** 1.

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{4}x^4 - \int_0^x (x-t)u(t)dt, u(0) = 1$$

2.

$$\frac{d^3u}{dx^3}(x) = 2x^5 - x - \int_0^3 (x-t)u(t)dt, u(0) = 1; \frac{du}{dx}(0) = 0; \frac{d^2u}{dx^2}(0) = -\frac{1}{4}$$

### 1.1.3 Relation avec les équations différentielles

Divers problèmes classiques dans la théorie des équations différentielles mènent aux équations intégrales, et dans la plupart des cas, ces problèmes peuvent être traités d'une façon plus satisfaisante en utilisant ces dernières que d'utiliser directement des équations différentielles.

**Lemme 1.1** *Pour toute fonction  $u(x)$*

$$\int_a^x \int_a^s u(t)dt ds = \int_a^x (x-t)u(t)dt \quad (1.8)$$

*En général, on a*

$$\underbrace{\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}}}_{n \text{ intégrations}} u(x_n) dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x) dx_1 \quad (1.9)$$

**Preuve 1.1** *Soit*

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^s u(t)dt \\ \int_a^x \int_a^s u(t)dt ds &= \int_a^x g(s)ds = \int_a^x 1 \cdot g(s)ds \\ &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x sg'(s)ds \end{aligned}$$

*(intégration par partie)*

$$\begin{aligned} &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s)ds \\ &= x \int_a^x u(t)dt - 0 - \int_a^x tu(t)dt = \int_a^x (x-t)u(t)dt \end{aligned}$$

*et par récurrence on obtient 1.9*

## Problèmes avec conditions initiales

On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u'_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

L'intégration des deux cotés de l'équation différentielle 1.10 de zéro à  $x$ , donne

$$u'(x) = u'_0 + \int_0^x g(t, u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.11)$$

En intégrant une seconde fois,

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x \int_0^s g(t, u(t)) dt ds, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.12)$$

En utilisant la relation 1.8, on obtient

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x (x-t)g(t, u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.13)$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

## Problèmes aux limites de second type

On considère le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

De la même manière, on intègre les deux cotés de zéro à  $x$ , on obtient

$$u'(x) = c + \int_0^x g(t, u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

et

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x-t)g(t, u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.15)$$

Pour déterminer la constante  $c$ , on prend  $x = 1$  et on utilise la condition  $u(1) = u_1$ , ce qui donne

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1-t)g(t, u(t)) dt,$$

Ainsi, l'équation 1.15 devient

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dt - x \int_0^1 (1-t)g(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^x t(1-x)g(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1-t)g(t, u(t))dt \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^1 k(x, t)g(t, u(t))dt \quad (1.16)$$

où

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x \\ x(1-t), & t \geq x \end{cases} \quad (1.17)$$

**Exemple 1.5** On considère l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

on pose  $y'' = u(x)$ , alors on obtient

$$y' = \int_0^x u(t)dt + y'(0) \Rightarrow y = \int_0^x (x-t)u(t)dt + 1$$

Donc, l'équation différentielle donnée, il vient

$$u(x) + \int_0^x u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt + 1 = 0,$$

ou

$$u(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)u(t)dt$$

## 1.2 Polynômes orthogonaux

### 1.2.1 Généralités

**Définition 1.2 (L'espace  $L^2(a, b)$ )** L'espace  $L^2(a, b)$  des fonctions carrés intégrables défini par :

$$L^2(a, b) = \left\{ f; \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

On muni  $L^2$  du produit scalaire définie par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

On définit la norme d'une fonction  $f$  sur  $L^2$  par :

$$\| f \|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Définition 1.3 (Polynômes Orthogonaux)** on dit que la famille de polynômes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynômes orthogonaux sur  $[a, b]$  si  $\forall i \neq j$  on a :

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_a^b P_i(x)P_j(x)dx = 0$$

généralement on dit que la famille de polynômes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynômes orthogonaux sur  $[a, b]$  avec poids  $\omega$  si :

$$\langle P_i, P_j \rangle_\omega = \int_a^b P_i(x)P_j(x)\omega dx = 0 \quad \forall i \neq j$$

la famille  $(P_i)_{i \geq 0}$  est orthonormale si :

$$\langle P_i, P_j \rangle_\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

### 1.2.2 Polynômes de Legendre

**Définition 1.4** On appelle famille de polynômes de Legendre la famille  $(L_n)_n$  de polynômes sur  $[-1; 1]$ , deux à deux orthogonaux dans l'espace  $L^2([-1, 1])$  et tels que pour tout entier  $n \geq 0$  le polynôme  $L_n$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)L'_n) + n(n+1)L_n = 0 \tag{1.18}$$

avec la condition initiale :  $L_n(1) = 1$

De plus, le polynôme  $L_n$  est donné par la formule de Rodrigues suivante :

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n) \right)$$

**Formule de récurrence** La famille  $(L_n)_n$  vérifie la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) & n \geq 1 \\ L_0(x) = 1 & L_1(x) = x \end{cases} \quad (1.19)$$

**Orthogonalité des polynômes de Legendre** Pour tout entiers  $n, m \geq 0$ , le polynôme de Legendre vérifie

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (1.20)$$

Ainsi donc les  $\{L_n\}$  forment une base orthogonale de  $L^2([-1, 1])$ .

le polynôme de Legendre  $L_n$  translaté sur l'intervalle  $[a, b]$  est donné par :

$$L_n^{[a,b]}(x) = L_n \left( \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a} \right) \quad (1.21)$$

**Formule de quadrature :**

Il est bien connu que les zéros des polynômes de Legendre (ou autre famille de polynômes orthogonaux) servent à la construction de formules de quadrature numérique de grande précision , telle la formule de Gauss-Legendre donnée par :

**Proposition 1.1** [5, 13] Soit  $N$  un entier positif fixé. Il existe un unique ensemble de  $N$  points  $\zeta_j$  de  $\Omega$ ,  $1 \leq j \leq N$ , et un unique ensemble de  $N$  réels  $w_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme  $\Phi$  de  $P_{2N-1}(\Omega)$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{j=1}^N f(x_j)\omega_j$$

Les nœuds  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont les zéros du polynôme  $L_n$ .

Les poids  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont positifs

### 1.2.3 Polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n$

Les polynômes de Tchebychev de première espèce donnés par la formule suivante :

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad (1.22)$$

les premiers polynômes sont

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

**Quelques propriétés :**

1.  $T_n$  satisfait la relation de récurrence :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n, \quad \forall n \geq 0$$

2.  $T_n$  est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

3. Les polynômes  $T_n$  sont orthogonaux sur  $[-1, 1]$  avec  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Plus précisément, on a :

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

4.  $T_n$  admet  $n$  racines simples qui sont :

$$x_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

## CHAPITRE 2

# ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM DE SECONDE

## ESPÈCE

L'équation qui va nous intéresser dans la suite de ce mémoire est l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$u(x) - \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (2.1)$$

où  $k(x, t) \in L^2([a, b]^2)$  est le noyau, qui est en général non dégénéré,  $f(x) \in L^2(a, b)$  est la donnée et  $u(t) \in L^2(a, b)$  est l'inconnu recherché.

**Définition 2.1** Soit  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle opérateur intégrale à noyau  $k(., .)$  l'opérateur défini par :

$$A : u \in C([a, b]) \rightarrow A(u) \in C([a, b]) \quad (2.2)$$

$$A(u)(x) = \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.3)$$

Cet opérateur est continu, de norme

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, t)| dt. \quad (2.4)$$

Ainsi, l'équation (2.1) s'écrit sous la forme :

$$u - Au = f \quad (2.5)$$

## 2.1 Existence et unicité des solutions pour l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Pour résoudre une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce avec les méthodes classiques où avec les méthodes numériques, il faut connaître l'existence et l'unicité de la solution. Cette étude est nécessaire avant toute démarche de résolution. Notons ici, que le concept de compacité d'un opérateur va jouer un rôle crucial.

### 2.1.1 Opérateur compact

**Définition 2.2 (Ensemble relativement compact)** *Un ensemble  $S$  d'un espace normé  $X$  est dit relativement compact (ou bien pré-compact) si sa fermeture est compact. Où encore si seulement toute suite de  $S$  contient une sous suite convergente.*

**Définition 2.3** *Un opérateur linéaire  $A : X \rightarrow Y$  d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$  est dit compact si l'image de la boule unité  $B_X$  est relativement compact, i.e si l'ensemble*

$$\overline{A(B_X)} = \overline{\{A(\varphi) / \|\varphi\| \leq 1\}}$$

*est compact. Ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée  $(\varphi_n)$  de  $X$ , on peut extraire de la suite  $(A\varphi_n)$  de  $Y$  une sous suite convergente.*

Voici le principal résultat pour l'étude des équations intégrales. Sa démonstration se fait facilement à l'aide du théorème d'Ascoli, qui donne une condition pour qu'une famille d'opérateurs soit relativement compact dans l'ensemble des applications continues,  $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Théorème 2.1** *L'opérateur intégral avec noyau continu défini par 2.3 est compact sur  $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ .*

### 2.1.2 La théorie de Riesz

Dans cette partie, nous allons présenter la théorie de Riesz pour une équation formelle de second type de la forme  $u - Au = f$ , avec un opérateur linéaire compact  $A : X \rightarrow X$  dans un espace normé  $X$ . On note  $L = I - A$ , où  $I$  désigne l'opérateur identique.

**Théorème 2.2** 1. *Le noyau de l'opérateur  $L$*

$$N(L) = \{u \in X : Lu = 0\} \tag{2.6}$$

est un sous espace de dimension finie.

2. L'image de l'opérateur  $L$

$$R(L) = \{Lu : u \in X\} \quad (2.7)$$

est un sous espace linéaire fermé.

3. Il existe un entier positif non nul  $r$ , appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$  tel que

$$\{0\} = N(L^0) \subsetneq N(L^1) \subsetneq \dots \subsetneq N(L^r) = N(L^{r+1}) = \dots, \quad (2.8)$$

et

$$X = L^0(X) \supsetneq L^1(X) \supsetneq \dots \supsetneq L^r(X) = L^{r+1}(X) = \dots \quad (2.9)$$

D'autre part, on a la somme directe

$$X = N(L^r) \oplus L^r(X) \quad (2.10)$$

C'est-à-dire, pour tout  $u \in X \exists! \psi \in N(L^r), \exists! \chi \in L^r(X)$  tels que  $u = \psi + \chi$

**Théorème 2.3** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact. Alors  $I - A$  est injectif si et seulement s'il est surjectif. En outre si  $I - A$  est injectif (donc bijectif), alors l'opérateur inverse  $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$  est borné.

**Preuve 2.1** D'après le premier résultat du théorème de Riesz (1) l'injectivité de  $I - A$  est équivalente à  $r = 0$  et d'après (2) du même théorème, la surjectivité de  $I - A$  est aussi équivalente à  $r = 0$ . Par conséquent l'injectivité de  $I - A$  et la surjectivité de  $I - A$  sont équivalentes.

Il reste à montrer que  $L^{-1}$  est borné si  $L = I - A$  est injectif. Supposons que  $L^{-1}$  n'est pas borné. Alors il existe une suite  $(f_n)$  dans  $X$  avec  $\|f_n\| = 1$  telle que  $\|L^{-1}f_n\| \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soient

$$g_n = \frac{f_n}{\|L^{-1}f_n\|} \quad u_n = \frac{L^{-1}f_n}{\|L^{-1}f_n\|}$$

Alors  $g_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , et  $\|u_n\| = 1$  pour tout  $n$ . Comme  $A$  est compact, on peut choisir une sous suite  $u_{n(k)}$  telle que  $u_{n(k)} \rightarrow u \in X, k \rightarrow \infty$ . Alors, comme

$$u_n - Au_n = g_n$$

On remarque que  $u_{n(k)} \rightarrow u, k \rightarrow \infty$  et  $u \in N(L)$  Par conséquent  $u = 0$ , et ceci contredit  $\|u_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corollaire 2.1** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact sur un espace normé  $X$ .

— Si l'équation homogène

$$u - Au = 0 \quad (2.11)$$

admet uniquement la solution triviale  $u = 0$ , alors pour toute  $f \in X$ , l'équation non homogène

$$u - Au = f \quad (2.12)$$

admet une solution unique  $u \in X$ , dépendante de  $f$ .

— Si l'équation homogène 2.11 admet une solution non triviale, alors elle admet un nombre fini  $m \in \mathbb{N}$  de solutions linéairement indépendantes  $u_1, \dots, u_m$  et l'équation non homogène 2.12 ou bien, elle n'admet aucune solution ou bien, sa solution générale est de la forme

$$u = \tilde{u} + \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k, \quad (2.13)$$

où  $\tilde{u}$  la solution particulière de l'équation non homogène.

## 2.2 Résolution exacte des équations Intégrales de Fredholm de seconde espèce

### 2.2.1 Méthode des noyaux dégénérés

Dans ce chapitre on va présenter quelques méthodes de résolution exactes pour les équations intégrales de seconde espèce.

$$K(x; t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \beta_k(t) \quad (2.14)$$

les fonctions  $\alpha_k(x)$  et  $\beta_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) seront supposées continues dans le carrés  $[a, b]^2$  et linéairement indépendantes. L'équation intégrale à noyau dégénéré 2.14 s'écrit :

$$u(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \beta_k(t) \right] u(t) dt = f(x) \quad (2.15)$$

et

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \int_a^b \beta_k(t) u(t) dt \quad (2.16)$$

En posant

$$c_k = \int_a^b \beta_k(t) u(t) dt \quad (2.17)$$

on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k(x) \quad (2.18)$$

où les  $c_k$  sont des constantes à déterminer. Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la recherche des constantes  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . D'abord, en substituant l'expression 2.18 dans l'équation 2.16, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \left\{ c_i - \int_a^b \beta_i(t) \left[ f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k(t) \right] dt \right\} = 0 \quad (2.19)$$

Les fonctions  $\alpha_i(x)$ ,  $i = 1; 2; \dots; n$  étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$c_i - \int_a^b \beta_i(t) \left[ f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k(t) \right] dt = 0 \quad (2.20)$$

et, on a

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b \alpha_k(t) \beta_i(t) dt = \int_a^b \beta_i(t) f(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.21)$$

En utilisant les notations suivantes :

$$a_{ik} = \int_a^b \alpha_k(t) \beta_i(t) dt \quad \text{et} \quad f_i = \int_a^b \beta_i(t) f(t) dt \quad (2.22)$$

l'équation 2.21 devient

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_{ik} = f_i \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

qui est un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues de la forme :

$$(I - \lambda A) c = f \quad (2.24)$$

où  $I$  est la matrice identité d'ordre  $n$ ,  $A$  est la matrice  $\{a_{ik}\}$ .  $c$  et  $f$  sont des matrices colonnes. Le déterminant  $D(\lambda)$  du système algébrique 2.24 est :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

si  $D(\lambda) \neq 0$ , le système 2.24 admet une solution unique  $c_1, c_2, \dots, c_n$  obtenue par les formules de Cramer

$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{1,i-1} & f_1 & -\lambda a_{1,i+1} & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & -\lambda a_{2,i-1} & f_2 & -\lambda a_{2,i+1} & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n,i-1} & f_n & -\lambda a_{n,i+1} & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

L'équation intégrale 2.15 a pour solution une fonction  $u(x)$  définie par l'égalité

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k(x) \quad (2.27)$$

**Exemple 2.1** On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à noyau dégénéré de la forme :

$$u(x) = -\frac{2}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t) u(t) dt \quad (2.28)$$

On remarque que le noyau de l'équation intégrale 2.28 est dégénéré

$$K(x;t) = \cos(x-t) = \cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t) \quad (2.29)$$

tel que :

$$\alpha_1(x) = \cos(x), \quad \alpha_2(x) = \sin(x), \quad \beta_1(t) = \cos(t), \quad \beta_2(t) = \sin(t) \quad (2.30)$$

En utilisant les notations 2.22, après un simple calcul on obtient

$$a_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_1(t) \beta_1(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad (2.32)$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_1(t) \beta_2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(t) dt \quad (2.33)$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \sin^2(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \quad (2.34)$$

$$a_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_2(t) \beta_2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \sin(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad (2.36)$$

et

$$f_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta_1(t) f(t) dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t) dt = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \quad (2.37)$$

$$f_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta_2(t) f(t) dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t) dt = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{\pi} \quad (2.38)$$

en substituant ces valeurs dans 2.23, on obtient le système

$$\left[ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) - \frac{4}{\pi} \left( \begin{array}{cc} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{array} \right) \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$\left[ \left( \begin{array}{cc} 0 & -\frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} & 0 \end{array} \right) \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donc

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

d'après 2.18 notre solution est :

$$u(x) = -\frac{2}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2}\right) \cos(x) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) \quad (2.42)$$

donc la solution exacte de l'équation 2.28 est :

$$u(x) = \sin(x) \quad (2.43)$$

## 2.2.2 La méthode des Noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de seconde espèce :

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (2.44)$$

on pose

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Psi_n(x) \quad (2.45)$$

avec  $\Psi_n(x)$  définis par les formules

$$\Psi_1(x) = \int_a^b k(x, t) u(t) dt \quad (2.46)$$

$$\Psi_2(x) = \int_a^b k(x, t) \Psi_1(t) dt = \int_a^b k_2(x, t) u(t) dt \quad (2.47)$$

$$\Psi_3(x) = \int_a^b k(x, t) \Psi_2(t) dt = \int_a^b k_3(x, t) u(t) dt, \quad \text{et ainsi de suite} \quad (2.48)$$

Ici, on a

$$k_n(x, t) = \int_a^b k(x, s) k_n(s, t) ds \quad (2.49)$$

avec

$$k_1(x, t) = k(x, t) \quad (2.50)$$

Les fonctions  $k_n(x, t)$  définies par les formules 2.49 s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation

$$k_n(x, t) = \int_a^b k_m(x, s) k_{n-m}(s, t) ds \quad (2.51)$$

où  $m$  est un entier naturel quelconque inférieur à  $n$ .

La résolvante de l'équation intégrale 2.44 est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x, t) \quad (2.52)$$

cette série est la série de Neumann du noyau  $k(x, t)$ . Elle est convergente si :

$$|\lambda| < \frac{1}{M} \quad (2.53)$$

avec

$$M = \left( \int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

la solution de l'équation intégrale de seconde espèce 2.44 s'exprime par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt \quad (2.55)$$

**Exemple 2.2** Trouver les itérés du noyau  $k(x, t) = x - t$  si  $a = 0$ ,  $b = 1$  :

Utilisant les formules 2.49 on obtient de proche en proche  $k_1(x, t) = x - t$

$$k_2(x, t) = \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}$$

$$k_3(x, t) = \int_0^1 (x - s) \left( \frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{x-t}{12}$$

$$k_4(x, t) = \frac{1}{12} \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = -\frac{1}{12} \left( \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

$$k_5(x, t) = -\frac{1}{12} \int_0^1 (x - s) \left( \frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{k_3(x, t)}{12} = \frac{x-t}{12^2}$$

$$k_6(x, t) = \frac{1}{12^2} \int_0^1 (x - s)(s - t) ds = \frac{k_2(x, t)}{12^2} = -\frac{1}{12^2} \left( \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme :

$$- k_{2n-1}(x, t) = \frac{(-1)^{n-1}}{12^{n-1}} (x - t)$$

$$- k_{2n}(x, t) = \frac{(-1)^{n-1}}{12^{n-1}} \left( \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

## CHAPITRE 3

# RÉSOLUTION NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM DE SECONDE ESPÈCE

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour résoudre des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Parmi ces méthodes, on distingue deux variétés les plus utilisées : les méthodes de quadrature qui sont basées sur l'approximation numérique des intégrales par des sommes pondérées supportées sur un ensemble de points (nœuds). La seconde variété est connue sous le nom méthode de projection (méthodes spectrales) qui consiste à projeter l'équation sur un sous-espace de dimension finie, où la solution recherchée s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base de cet espace.

### 3.1 Méthode de Legendre-Collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce :

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (3.1)$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces  $V_n \subset V, n \geq 1$  de dimension finie, généralement des sous espaces de  $L^2([a, b])$ . Soit  $\{L_1, \dots, L_n\}$  une base orthogonale de  $V_n$ . On

cherche une solution approchée  $u_n \in V_n$ , de la forme

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j L_j(x), x \in [a, b] \quad (3.2)$$

En substituant l'expression (3.2) dans l'équation (3.1), on obtient deux expressions

$$u_n(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt = f(x) \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j L_j(x) - \lambda \int_a^b \left( k(x, t) \sum_{j=1}^n c_j L_j(t) \right) dt = f(x) \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \left\{ L_j(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) L_j(t) dt \right\} = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.5)$$

et

$$R_n(x) = u_n(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt - f(x) \quad (3.6)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j L_j(x) - \lambda \int_a^b \left( k(x, t) \sum_{j=1}^n c_j L_j(t) \right) dt - f(x) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ L_j(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) L_j(t) dt \right\} - f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.8)$$

où  $R_n(\cdot)$  est la fonction résiduelle. Pour résoudre l'équation intégrale (3.5), on emploie une méthode de collocation standard, comme dans le calcul des intégrales. On fixe donc un ensemble de points de collocations  $\{x_i\} \in [a, b]$ , puis on calcule les valeurs de la fonction recherchée aux points de collocation. On suppose que la fonction résiduelle s'annule sur les points de collocation :

$$R_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

où les points de collocations  $x_1, x_1, \dots, x_n$  sont les zéros du polynôme de Legendre  $L_n$ . Donc

$$\sum_{j=1}^n c_j \left\{ L_j(x_i) - \lambda \int_a^b k(x_i, t) L_j(t) dt \right\} - f(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Cette équation se traduit par l'écriture matricielle :

$$\sum_{j=1}^n c_j \left\{ L_j(x_i) - \lambda \int_a^b k(x_i, t) L_j(t) dt \right\} = f(x_i), i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Ainsi, l'équation (3.5) prend une nouvelle écriture matricielle :

$$A_n X_n = b_n \quad (3.12)$$

où

$$A_n = \left[ L_j(x_i) - \lambda \int_a^b k(x_i, t) L_j(t) dt \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \quad (3.13)$$

$$X_n = [c_j]_{j=1, \dots, n} \quad (3.14)$$

et

$$b_n = [f(x_i)]_{i=1, \dots, n} \quad (3.15)$$

En utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre donnée par la proposition 1.1, on peut évaluer numériquement les éléments de la matrice  $A_n$  comme suit : On a

$$\int_a^b k(x_i, t) L_j(t) dt \approx \sum_{s=1}^n k(x_i, t_s) L_j(t_s) \omega_s \quad (3.16)$$

Les nœuds  $\{t_s\}_{s=1, \dots, n}$ , sont les zéros du polynôme  $\{L_n\}$  ; les  $\{\omega_s\}_{s=1, \dots, n}$ , sont les poids associés.

On trouve donc

$$A \approx L_j(x_i) - \sum_{s=1}^n k(x_i, t_s) L_j(t_s) \omega_s, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

## 3.2 Méthode de Legendre-Galarkin

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt \quad (3.18)$$

Il s'agit d'une méthode essentiellement hilbertienne c'est à dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation dans un sous espace de dimension finie. Pour ce faire, soit  $V$  un espace d'Hilbert généralement  $L^2([a, b])$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on se donne une suite de sous espace  $V_n \subset V$  de dimension finie. Soit  $\{L_1, \dots, L_n\}$  une base orthogonale de  $V_n$ , on cherche une fonction  $u_n \in V_n$  de la forme

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j L_j(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.19)$$

Pour déterminer les coefficients  $\{c_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ , on impose la condition d'orthogonalité suivante :

$$\langle r_n, L_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

où  $R_n$  c'est la fonction résiduelle défini par :

$$R_n(x) = u_n(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt - f(x) \quad (3.21)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j L_j(x) - \lambda \int_a^b \left( k(x,t) \sum_{j=1}^n c_j L_j(t) \right) dt - f(x) \quad (3.22)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ L_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)L_j(t)dt \right\} - f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.23)$$

on substituant (3.23) dans l'équation (3.20), on trouve :

$$\left\langle \sum_{j=1}^n c_j \left\{ L_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)L_j(t)dt \right\}, L_i \right\rangle = \langle f, L_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

Ce qui implique :

$$\sum_{j=1}^n c_j \left\langle L_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)L_j(t)dt, L_i \right\rangle = \langle f, L_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

et

$$\sum_{i=1}^n c_j \left\{ \langle L_j, L_i \rangle - \lambda \left\langle \int_a^b k(x,t)L_j(t)dt, L_i \right\rangle \right\} = \langle f, L_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.26)$$

Ainsi, l'équation (3.26) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$B_n X_n = g_n \quad (3.27)$$

Où

$$B_n = \langle L_j, L_i \rangle - \lambda \left\langle \int_a^x k(x,t)L_j(t)dt, L_i \right\rangle \quad (3.28)$$

$$= \int_a^b L_j(x)L_i(x)dx - \lambda \int_a^b \int_a^x k(x,t)L_j(t)L_i(x)dt dx, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

$$X_n = (c_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

et

$$g_n = \langle f, L_j \rangle \tag{3.31}$$

$$= \int_a^b f(x)L_i(x)dx, \quad i = 1, \dots, n \tag{3.32}$$

**Remarque 3.1** *En utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre donnée par la proposition 1.1, on peut évaluer numériquement les éléments de la matrice  $B_n$  et du vecteur  $g_n$*

### 3.3 Tests numériques

Le but de cette dernière section est pour valider les résultats théoriques par des exemples numériques. Les expériences numériques sont faites à l'aide du logiciel Maple.

**Exemple 3.1** *Considérons l'équation intégrale :*

$$u(x) = e^x + e^{-x} - \int_0^1 e^{-x-t} u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.33)$$

on a :  $f(x) = e^x + e^{-x}$  et le noyau  $k(x, t) = e^{-x-t}$ .  
avec la solution exacte

$$u(x) = e^x \quad (3.34)$$

On calcule la solution approchée  $u_n(x)$  par la méthode de Legendre collocation, et l'erreur absolue pour différentes valeurs de  $N$ .

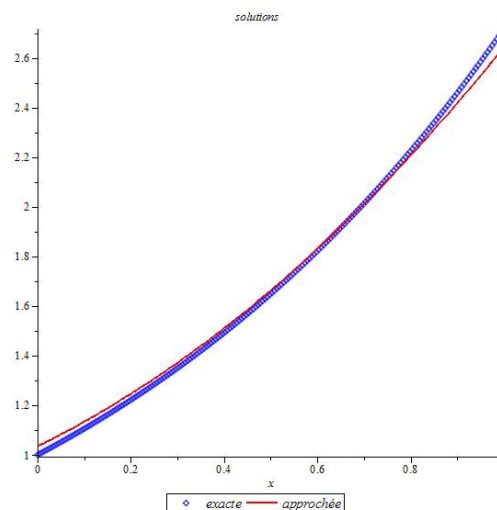


FIGURE 3.1 – Solution approchée, solution exacte : méthode de Legendre collocation,  $N = 5$

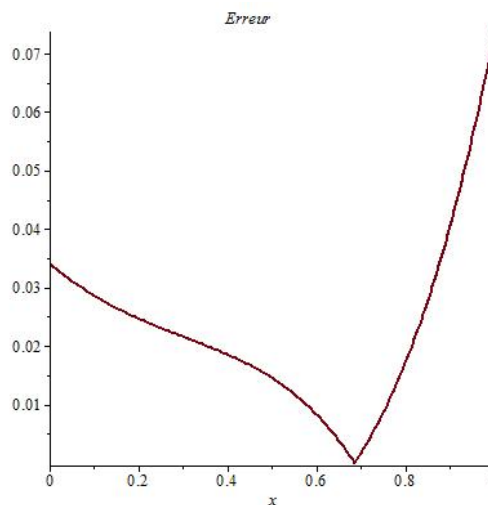


FIGURE 3.2 – Erreur absolue : méthode de Legendre collocation,  $N = 5$

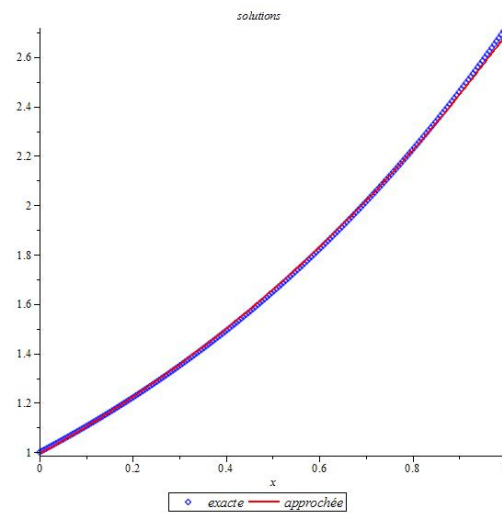


FIGURE 3.3 – Solution approchée, solution exacte : méthode de Legendre collocation,  $N = 10$

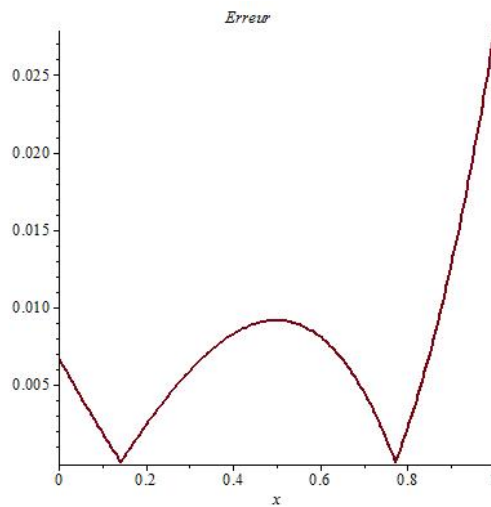


FIGURE 3.4 – Erreur absolue : méthode de Legendre collocation,  $N = 10$

TABLE 3.1 – Méthode Legendre collocation. Erreur absolue .

Erreur absolue $Abs(u)$	
$N =$	$Er(u)$
5	$3.49 \times 1.0e - 2$
10	$5.27 \times 1.0e - 3$

Le présent travail a permis de traiter l'aspect numérique des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Ainsi, nous avons donné les principaux types de méthodes d'approximation numérique que l'on peut partager en trois variantes :

- **La méthode de Projection** : leur stratégie est basé sur la projection de notre équation dans un sous espace de dimension fini, dans lequel on cherche à approcher la solution exacte par une combinaison linéaire des éléments de la base de cet sous espace.
- **La méthode de Collocation** : est une application de la méthode de projection, c'est à dire de choisir des nœud de points distincts de sorte que le résidu soit nul dans ces points.
- **La méthode de Galerkin** : application de la méthode de collocation dans le cas lorsque le problème posé est définie dans un espace de Hilbert, le produit scalaire des éléments de la base par le résidu soient nuls.

- [1] K.E. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, Cambridge University Press (1997).
- [2] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York (1989).
- [3] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang : Spectral Methods, Springer-Verlag (2006).
- [4] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, Équations Intégrales . Edition Mir Moscou. Traduction Française Éditions Mir 1977.
- [5] Christine, B, Yvon, M, Francesca, R : Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004).
- [6] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousefi : Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, Applied Mathematics and Computation 193, 335-339 (2007).
- [7] K. Maleknejad, S. Sohrabi, and Y. Rostami : Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by using Chebyshev polynomials, Applied Mathematics and Computation, 188 (2007) 123 – 128.
- [8] N.M. Thamban : Quadrature based collocation methods for integral equations of the first kind, Adv Comput Math 36 :315-329 (2012).
- [9] Yucheng.Liu : Application of Legendre Polynomials in Solving Volterra Integral Equations of the Second Kind, J. Applied Mathematics 2013, 3(5) : 157-159.
- [10] Yucheng.Liu : Application of the Chebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations, J. Mathematical and Computer Modelling 50 (2009) 465-469.
- [11] M.M.Rahman, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations Using Galerkin method With Hermite Polynomials, Islamic University Kuchita ,Bangladesh, 2013.

- [12] P. Das, M.M. Sahani, G. Nelakanti : Convergence analysis of Legendre spectral projection methods for Hammerstein integral equations of mixed type, *J. Appl. Math. Comput.*, 49, 529-555 (2015)
- [13] A. Mejdji, D. Monique, M. Yvon : Méthodes Spectrales et des Eléments Spectraux, Cours de DEA intensif décentralisé, Nantes (1993)
- [14] A .Njood, Numerical treatment of the Fredholm integral equations of the second type. Thesis for the Degree of master of Science, An- Najah National, University,Nablus,Palestine.
- [15] A.Rahmoune, Sur la Résolution Numérique des équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales.Thèse de Doctorat en science Université de Batna.
- [16] B. LAKEHALI, Sur les Équations Intégrales Singulières. Thèse de Doctorat en science Université de Biskra.
- [17] A. Soukeur : Sur l'aspect numérique des solutions des équations intégrales de Volterra linéaires et non linéaires au moyen d'une nouvelle méthode quadratique intégrale généralisée(QIG).
- [18] B.Neggal : Régularisation et approximation numérique de quelques problèmes mal posés, Thèse de Doctorat, UBMA.