

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DU 20 AOUT 1955 SKIKDA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN ELECTRONIQUE DE SKIKDA



N° d'ordre : D012115003D

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de doctorat en Sciences

Spécialité: Electronique

Option: Traitement du signal

THEME

DISCRETISATION DES SYSTEMES: ALGORITHMES ET APPLICATIONS

Par:

Mekhnache Chafia

Soutenue publiquement le 26/04/2015

Devant le Jury:

Président:	Lashab Mohamed	<i>Maitre de Conférence "A", Université de Skikda</i>
Rapporteur:	Ferdi Youcef	<i>Professeur, Université de Skikda</i>
Examineurs:	Tebbikh Hicham	<i>Professeur, Université de Guelma</i>
	Ladaci Samir	<i>Maitre de Conférence "A", Ecole Nationale Polytechnique de Constantine</i>

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le directeur de thèse Monsieur Ferdi Youcef, professeur à l'université du 20 août 1955 -SKIKDA- d'avoir dirigé mon travail. Ses conseils très encourageants, son aide sont autant d'éléments qui m'ont conforté tout au long de l'avancement de mes travaux.

Mon vifs remerciements vont également à monsieur le président et aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Monsieur **Lashab Mohamed**, Maitre de Conférence "A" de l'université de
20 Aout 1955, Skikda.

Monsieur **Tebbikh Hicham**, Professeur de l'université de Guelma.

Monsieur **Ladaci Samir**, Maitre de Conférence "A" de l'Ecole Nationale
Polytechnique de Constantine.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes amies, et aux doctorants de l'université de SKIKDA. Leurs amitiés, et leurs conseils m'ont été très utiles. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Enfin, je remercie énormément tous ceux qui ont contribué de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études. Plus particulièrement à ma famille pour leurs précieuses aides et tous les sacrifices consentis pendant les moments difficiles de mon travail.

Liste des figures

Fig. 1.1	Schéma fonctionnel d'un système.....	7
Fig. 1.2	Système linéaire.....	8
Fig. 1.3	Système à temps continu.....	9
Fig. 1.4	Traitement numérique d'un signal.....	9
Fig. 1.5	Système à temps discret.....	9
Fig. 1.6	Système discret linéaire et invariant.....	10
Fig. 1.7	Schéma fonctionnel de système à temps discret.....	10
Fig. 1.8	Recherche d'une équivalence temps continu-temps discret.....	11
Fig. 1.9	Illustration de (a) le plan s et (b) le plan z.....	11
Fig. 1.10	Réponses fréquentielles des filtres: analogique ($H(s)=2/(s+2)$) et numérique.....	15
Fig. 1.11	Principe de l'échantillonneur-bloqueur.....	15
Fig. 1.12	Blocage d'ordre 0 du signal $e(t)$	16
Fig. 1.13	Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro.....	17
Fig. 1.14	Diagrammes de bode des systèmes: analogique ($H(s)=0.5/(s+1)$) et numérique.....	19
Fig. 1.15	Blocage d'ordre 1 du signal $e(t)$	20
Fig. 1.16	Réponses fréquentielles des systèmes: analogique $H(s)=2.25/(s^2+0.3s+2.25)$ et numérique.....	22
Fig. 1.17	Approximation d'Euler en avant (progressif).....	24
Fig. 1.18	Diagrammes de bode des systèmes analogique ($H(s)=394800/(s^2+888.6s+394800)$) et numérique.....	26
Fig. 1.19	Approximation d'Euler en arrière (rétrograde).....	27
Fig. 1.20	Diagrammes de bode des systèmes: analogique ($H(s)=1/(1+10s)$) et numérique.....	28
Fig. 1.21	Approximation bilinéaire.....	29
Fig. 1.22	Diagrammes de bode des système: analogique ($H(s)=10/(s+10)$) et numérique.....	31
Fig. 1. 23	Réponses fréquentielles de l'intégrateur idéal.....	33
Fig. 1. 24	Réponses fréquentielles du dérivateur idéal.....	34

Fig. 1.25	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, bilinéaire, Simpson.....	35
Fig. 1.26	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, bilinéaire, Al-Alaoui 1.....	36
Fig. 1.27	Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin et Al-Alaoui 1.....	37
Fig. 1.28	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin et Al-Alaoui 2 pour un paramètre $\beta_2=0.6$	38
Fig. 1.29	Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin et Al-Alaoui 2.....	39
Fig. 1.30	Réponses fréquentielles d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 1.....	41
Fig. 1.31	Réponses fréquentielles d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 2 ($\beta_2=0.6$).....	42
Fig. 2.1	Réponses d'amplitude et de phase de l'intégrateur idéal (supérieur), délai idéal d'un demi d'échantillon (milieu), et intégrateur idéal avec un délai de demi-échantillon (inférieur).....	47
Fig. 2.2	Erreur relative des réponses d'amplitude pour $\beta_3=0.12$ jusqu'à 0.92 avec un incrément de 0.1.....	49
Fig. 2.3	Erreur relative des réponses de phase pour $\beta_3=0.12$ jusqu'à 0.92 avec un incrément de 0.1.....	49
Fig. 2.4	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Schneider, Euler et le nouvel intégrateur (Schneider-Euler).....	50
Fig. 2.5	Phases des intégrateurs: idéal, Schneider, Euler et Schneider-Euler.....	51
Fig. 2.6	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et le nouvel intégrateur (F_{012} -Euler 1).....	52
Fig. 2.7	Réponses de phases des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et F_{012} -Euler 1.....	53
Fig. 2.8	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, F_{012} , Simpson et le nouvel intégrateur F_{012} -Simpson.....	55
Fig. 2.9	Réponses de phase des intégrateurs: idéal, F_{012} , Simpson et le nouvel intégrateur F_{012} -Simpson.....	55
Fig. 2.10	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Schneider, Simpson et le nouvel intégrateur Schneider-Simpson.....	55
Fig. 2.11	Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Schneider, Simpson et le nouvel intégrateur Schneider-Simpson.....	55
Fig. 2.12	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Simpson, bilinéaire et le nouvel intégrateur Simpson-Euler-bilinéaire.....	56

Fig. 2.13	Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Simpson, bilinéaire et le nouvel intégrateur Simpson-Euler-bilinéaire.....	56
Fig. 2.14	Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Simpson, Euler et le nouvel intégrateur Euler-Simpson.....	56
Fig. 2.15	Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Simpson, Euler et le nouvel intégrateur Euler-Simpson.....	56
Fig. 2.16	Réponses fréquentielles du dérivateur idéal, (phase1 = $-\tau_d \omega$, la phase 2 est la somme des deux phases: phase 1 et celle du dérivateur idéal).....	57
Fig. 2.17	Erreurs relatives pour différentes valeurs de τ_d (ER1) et l'erreur Al-Alaoui (ER2).....	60
Fig. 2.18	Variation de la minimisation de ε par rapport au temps de propagation de groupe τ_d	61
Fig. 2.19	Réponses d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 1, et le dérivateur approximé pour $\beta_1= 0.703197779214486$	62
Fig. 2.20	Erreurs relatives.....	63
Fig. 2.21	Phases des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui et optimal.....	63
Fig. 2.22	Erreurs relatives pour différentes valeurs de τ_d et l'erreur de Al-Alaoui 1....	65
Fig. 2.23	Réponses d'amplitude des dérivateurs: idéal, F_{012} , Euler et le nouvel dérivateur (F_{012} -Euler 2).....	66
Fig. 2.24	Réponses de phases des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et F_{012} -Euler 1.....	
Fig. 3.1	Réponse d'amplitude de l'intégrateur idéal et les intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$	75
Fig. 3.2a	Erreurs des réponses d'amplitude des intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$	76
Fig. 3.2b	Erreurs des réponses d'amplitude des intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$ (figure détaillée).....	76
Fig. 3.3	Réponse de phase de l'intégrateur idéal et les intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$	77
Fig. 3.4a	Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=0$ et $\alpha=0.7$	78
Fig. 3.4b	Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=0$ et $\alpha=0.7$ (figure détaillée).....	78
Fig. 3.5a	Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=1$ et $\alpha=0.7$	79
Fig. 3.5b	Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=1$ et $\alpha=0.7$ (figure détaillée).....	79
Fig. 3.5c	Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=1$ et $\alpha=0.7$ (figure détaillée).....	80

Fig. 3.6a	Intégrale fractionnaire du signal en dent de scie pour $\alpha=0.4$	83
Fig. 3.6b	Intégrale fractionnaire du signal en dent de scie pour $\alpha=0.4$ (détaillée).....	83
Fig. 3.7a	Intégrale fractionnaire du signal échelon pour $\alpha=0.7$	86
Fig. 3.7b	Intégrale fractionnaire du signal échelon pour $\alpha=0.7$ (détaillée).....	87

Liste des tableaux

Tableau 1.1	Transformations de Simpson et d'Adams – Moulton.....	31
Tableau 1.2	Transformations du plan s au plan z	43
Tableau 2.1	Intégrateurs à bande complète proposés.....	53
Tableau 2.2	Intégrateurs à bande incomplète proposés.....	54
Tableau 3.1	Valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_a(n)$ de l'exemple 1.....	72-73
Tableau 3.2	Coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ de l'exemple 1.....	73-74
Tableau 3.3	Valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_a(n)$ de l'exemple 2.....	81
Tableau 3.4	Coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ de l'exemple 2.....	81-82
Tableau 3.5	Valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_a(n)$ de l'exemple 3.....	84
Tableau 3.6	Coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ de l'exemple 3.....	84-86

Tables des matières

Introduction générale	2
Chapitre 1: Généralités sur les transformations du plan s au plan z	3
Introduction.....	7
I.1 Discrétisation des systèmes analogiques.....	7
I.1.1 Notion de système.....	7
I.1.2 Système continu.....	8
I.1.3 Système discret.....	9
I.1.4 Problématique.....	10
I.1.5 Correspondance entre le plan s et le plan z	11
I.2 Méthodes de discrétisation.....	12
I.2.1 Méthode d'invariance impulsionnelle.....	12
I.2.2 Discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro.....	15
I.2.2.1 Principe.....	15
I.2.2.2 Bloqueur d'ordre 0.....	16
I.2.2.3 Autres bloqueurs.....	19
I.2.3 Discrétisation par la méthode des pôles-zéros.....	20
I.2.4 Discrétisation en utilisant les approximations Euler, Tustin, Al-Alaoui, ... etc... ..	22
I.2.4.1 La règle rectangulaire en avant.....	23
I.2.4.2 La règle rectangulaire en arrière.....	26
I.2.4.3 La règle trapézoïdale.....	29
I.2.4.4 Transformations d'Al-Alaoui.....	32
<i>a- Intégrateur/dérivateur idéal</i>	32
<i>b- Intégrateurs d'Al-Alaoui</i>	34
<i>b-1 Intégrateur d'Al-Alaoui d'ordre 1</i>	34
<i>b-2 Intégrateur d'Al-Alaoui d'ordre 2</i>	37
<i>c- Dérivateurs d'Al-Alaoui</i>	39
<i>c-1 Dérivateur d'Al-Alaoui d'ordre 1</i>	39
<i>c-2 Dérivateur d'Al-Alaoui d'ordre 2</i>	41
I.3 Les transformations du plan s au plan z	42
Conclusion.....	44

Chapitre 2 : Proposition des nouveaux opérateurs “s à z”	45
Introduction.....	46
II.1 Proposition des nouvelles transformations “s à z”	46
II.1.1 Les intégrateurs à bande complète et à bande incomplète proposés.....	46
II.1.1.1 Les intégrateurs à bande complète proposés.....	47
<i>a- L’intégrateur Schneider-Euler</i>	48
<i>b- L’intégrateur F_{012}-Euler 1</i>	51
II.1.1.2 Les intégrateurs à bande incomplète proposés.....	54
II.1.2 Les dérivateurs à bande complète proposés.....	57
<i>a- L’opérateur d’Al-Alaoui modifié</i>	58
<i>b- L’opérateur F_{012}-Euler 2</i>	64
Conclusion.....	67
Chapitre 3: Application des nouveaux opérateurs “s à z”	68
Introduction.....	69
III.1 Méthode d’invariance impulsionnelle et la modélisation du signal.....	69
III.1.1 Sélection du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète.....	70
III.1.2 Approximation de la fonction de transfert de l’intégrateur fractionnaire numérique en utilisant les techniques de modélisation des signaux déterministes.....	71
III.2 Résultat et discussions.....	71
Conclusion.....	87

Introduction générale

Introduction générale

Le monde physique est par nature analogique. Il est perçu via des signaux analogiques (son, ondes visuelles, ... etc.) qui peuvent être traités par des systèmes analogiques. Depuis les années quatre-vingt, le traitement numérique des données prend le pas sur les approches purement analogiques. Ce traitement numérique présente un certain nombre d'avantages [1]:

- Immunité au bruit: un signal codé numériquement n'est pas bruité lors de son traitement. Nous pouvons donc réaliser des calculs de précision arbitraire et mettre en cascade un grand nombre d'opérations.
- Souplesse: un traitement numérique est facilement ajustable ou paramétrable en cours de fonctionnement. Le traitement peut même s'adapter de lui-même à la situation (évolution du signal d'entrée au cours du temps). L'aptitude des machines numériques à enchaîner des séquences d'opérations facilite également la réalisation d'algorithmes de traitement complexes. Un exemple important est la transformée de Fourier.
- Mémorisation: la facilité de mettre un signal en mémoire permet de réaliser facilement des retards et donc une grande variété de filtres ou des opérations de corrélation. Nous avons également accès par ce biais à des traitements itératifs, fonctionnant par raffinements successifs, ce qui ouvre considérablement les possibilités.

Puisque les signaux naturels sont presque tous des signaux continus et que les circuits numériques ne manipulent que des données discrètes, il faut d'abord transformer ces signaux avant de pouvoir leur appliquer un traitement numérique. Cette transformation s'appelle la digitalisation ou la numérisation.

Les systèmes analogiques sont généralement décrits par leurs fonctions de transfert continues (la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle) $H(s)$, qui est le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée à des conditions initiales nulles. La résolution du problème du passage du temps continu au temps discret revient à trouver les fonctions de transfert discrètes $H(z)$, qui caractérisent le comportement des systèmes numériques, à partir des fonctions de transfert continues. En général, aucune équivalence unique entre les domaines temps continu et temps discret n'existe, et donc une variété d'approche est disponible pour la conversion [2].

Les méthodes les plus utilisées de discrétisation des fonctions de transfert $H(s)$ sont: la méthode d'invariance impulsionnelle [3-8], discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro [4], discrétisation par la méthode des pôles-zéros [5], discrétisation en utilisant les méthodes d'intégration classiques telles que les approximations Euler [3-5,9], Tustin [3-9], Simpson [10], Al-Alaoui [10]... etc. Chaque méthode de discrétisation des systèmes analogiques est utilisée seulement dans certaines applications, par exemple, la méthode d'invariance impulsionnelle est utilisée dans la synthèse des filtres, particulièrement elle ne convient que pour les prototypes en temps continu avec des réponses fréquentielles qui diminuent de façon monotone en hautes fréquences [1]. Par contre, la méthode d'invariance indicielle et la méthode d'invariance rampe sont couramment utilisées dans les applications de systèmes de commande [8]. Bien qu'un grand nombre de méthodes de discrétisation ont été jusqu'ici référés dans [2, 11-18], la meilleure méthode n'existe pas, donc des travaux de recherche devront être effectués en vue de l'amélioration et du perfectionnement de cette opération. Dans notre thèse, nous nous sommes intéressés par les méthodes basées sur les formules d'intégration classique qui peuvent être utilisées pour l'implémentation des intégrateurs/dérivateurs d'ordre fractionnaire ($1/s^\alpha$ ou s^α). Beaucoup de travaux autant théoriques que pratiques ont montré l'importance de ces systèmes fractionnaires et leur intérêt dans différentes applications [19-31]. Parmi les principales grandes familles de l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, celle appelée les méthodes directes dont le résumé est donné comme suit: la fonction de transfert analogique est convertie en une fonction de transfert numérique en remplaçant l'opérateur s par son équivalent en z , en utilisant une transformation du plan s au plan z . Ensuite, la fonction de transfert obtenue est approximée par un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF, en anglais FIR: Finite Impulse Response) ou par un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII, en anglais IIR: Infinite Impulse Response). Celle approximée par un filtre RII peut être obtenue en utilisant la méthode d'invariance impulsionnelle et la modélisation des signaux [27]. Cette dernière a été proposée par Ferdi pour résoudre les problèmes du nombre infini des échantillons de la réponse impulsionnelle et sa valeur initiale infinie. Elle contient deux étapes: la première est de choisir la valeur initiale de la réponse impulsionnelle, et la deuxième étape est d'appliquer l'une des techniques de modélisation des signaux déterministes (Padé, Prony, Shanks, Steiglitz-McBride, etc...) [32-35] pour trouver les coefficients du modèle rationnel d'approximation.

Les éléments constitutifs de la transformation "s à z" sont les dérivateurs numériques (ou bien les intégrateurs numériques) d'ordre réduit qui peuvent remplacer l'opérateur de Laplace s

dans une fonction de transfert en temps continu $H(s)$ afin d'obtenir la fonction de transfert équivalente en temps discret. Dans le domaine numérique, les dérivateurs sont classés en deux catégories: les dérivateurs RIF et RII. Nos travaux ont commencé d'abord par une étude des dérivateurs numériques RIF dans la référence [36] où nous avons fait une comparaison entre plusieurs méthodes, celle des séries de Taylor, les méthodes optimales: L_1 , L_2 , L_∞ . Dans la référence [37] nous avons étendu l'algorithme de la programmation linéaire, qui est utilisée seulement dans la littérature pour la synthèse des dérivateurs RII d'ordre 1, aux dérivateurs d'ordre supérieurs et nous avons comparé ses performances avec celles de l'algorithme de la programmation quadratique. Dans la référence [38] un nouveau dérivateur RII est obtenu en combinant les deux dérivateurs: Schneider [39, 40] et Simpson avec un paramètre " β " choisi arbitrairement. La comparaison des réponses d'amplitude du dérivateur obtenu avec d'autres existants dans la littérature montre que le dérivateur Schneider-Simpson est le plus précis. L'inconvénient de ce dérivateur est son ordre qui est plus élevé. Pour pallier cet inconvénient, nous avons proposé dans la référence [41] une autre interpolation entre les dérivateurs Euler, et celui de Graham-Lindquist F_{012} [42] avec un autre paramètre.

Dans cette thèse, plusieurs transformations entre le plan s et le plan z seront proposées. D'abord, nous interpolons les intégrateurs Schneider, Euler, les intégrateurs d'Euler et F_{012} . Ensuite, nous combinons les intégrateurs F_{012} , Simpson; les intégrateurs Schneider et Simpson; les intégrateurs Simpson, Euler, bilinéaire et enfin les intégrateurs Euler, Simpson. Tous ces nouveaux intégrateurs hybrides seront employés pour synthétiser un intégrateur récursif d'ordre fractionnaire via la méthode d'invariance impulsionnelle et la modélisation des signaux. Nous exploitons les résultats obtenus pour l'intégration fractionnaire de quelques signaux déterministes. Ces travaux réalisés ont fait l'objet d'une publication dont la référence est [43]. Nous avons aussi modifié le dérivateur d'Al-Alaoui [44] en cherchant une valeur optimale du paramètre utilisé pour la combinaison en appliquant l'approche de la programmation linéaire [45-46]. Cette dernière approche optimale est appliquée aussi dans notre dernière interpolation entre les deux dérivateurs F_{012} stabilisé et Euler. Ces dérivateurs seront développés dont le but de les exploiter pour l'approximation des intégrateurs d'ordre fractionnaire.

Cette thèse est organisée en trois chapitres:

- Le premier chapitre présente les notions de base de la transformation du plan s au plan z . Nous commençons par une définition de la discrétisation et l'objectif de cette

opération. Ensuite, les méthodes de discrétisation existant dans la littérature y sont répertoriées.

- Le deuxième chapitre est dédié à la proposition des nouveaux opérateurs “s à z”. Nous introduisons dans ce chapitre des intégrateurs/dérivateurs basés sur la combinaison entre quelques intégrateurs/dérivateurs existant dans la littérature.
- Le chapitre 3 est consacré à l’application de l’opérateur “s à z” développés dans cette thèse pour la discrétisation des intégrateurs fractionnaires RII. La méthode d’invariance impulsionnelle et la modélisation du signal sont présentées en bref. Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l’objet de cette thèse sont illustrés dans le même chapitre intitulé: Application des nouveaux opérateurs “s à z” pour la synthèse des intégrateurs d'ordre fractionnaire.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

Chapitre 1 :

Généralités sur les transformations du plan s au plan z

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner les notions nécessaires de la discrétisation des systèmes continus, et de présenter en détail les différentes méthodes nécessaires pour cette opération. Des exemples d'application de chaque méthode sur des systèmes analogiques pour obtenir leurs équivalents dans le temps discret sont présentés, ainsi que leurs comportements dans le domaine fréquentiel pour des raisons de simplicité.

I.1 Discrétisation des systèmes analogiques

Dans les applications des ordinateurs et des microprocesseurs comme le traitement numérique de signal, et les systèmes de commande numériques, les signaux sont souvent manipulés sous forme numérique pour mettre en œuvre des algorithmes complexes et réaliser la plus haute performance. Le problème du passage du temps continu au temps discret se pose dans plusieurs domaines. Par exemple, lorsque nous voulons synthétiser un filtre à “temps discret” à partir d'un filtre à “temps continu”. Autre domaine où ce passage est essentiel, celui de l'automatique pour calculer un compensateur à “temps discret” à partir d'un compensateur à “temps continu” ou lorsque nous désirons effectuer une simulation d'un système [13, 47]. La conversion “ s à z ” peut être utilisée aussi pour discrétiser les systèmes fractionnaires. La précision de la conversion est critique et affecte directement la performance finale du système [47].

I.1.1 Notion de système

Un système est une combinaison de composants interconnectés pour atteindre un objectif, rendre un service à un ou plusieurs opérateurs humains. Il est affecté par une (ou plusieurs) grandeurs (s): les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système caractérisée par l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs: les sorties. On note souvent par les lettres e et y , respectivement les entrées et les sorties, de sorte qu'un système peut être représenté par le schéma de la figure 1.1 [48].

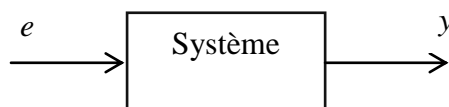


Fig. 1.1 Schéma fonctionnel d'un système

I.1.2 Système continu

Un système est continu [49], si les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues). Nous parlons aussi dans ce cas de système analogique. La plupart des systèmes physiques, d'un point de vue macroscopique, sont continus (température, vitesse, position, tension, ...). Nous disons qu'un système est invariant si une même commande, appliquée à deux instants différents produit la même sortie aux instants considérés. Un système est dit linéaire si, soumis à un signal d'entrée qui est combinaison linéaire de plusieurs entrées e_1, e_2, \dots, e_l , il élabore une sortie qui est la même combinaison linéaire des sorties correspondant à chaque entrée (chaque $y_i(t)$ étant la sortie correspondant à $e_i(t)$) [50].

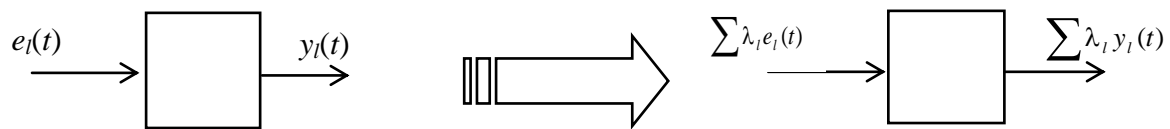


Fig. 1.2 Système linéaire

La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants liant la sortie $y(t)$ à l'entrée $e(t)$. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante [51]:

$$a_k \frac{d^k y(t)}{dt} + \dots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt} + \dots + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt} + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad (1.1)$$

où les a_i et b_i sont des constantes.

Nous désignons par $H(s)$ et nous appelons fonction de transfert du système, le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée du système lorsque les conditions initiales sont nulles:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_k s^k} \quad (1.2)$$

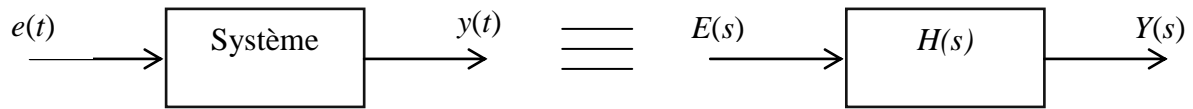


Fig. 1.3 Système à temps continu

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que des systèmes continus linéaires, dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement: ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre. De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités (figure 1.4). De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques [52].

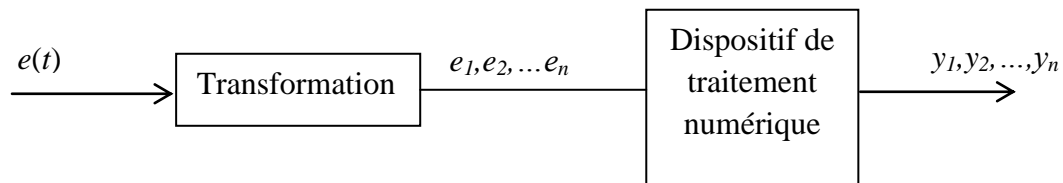


Fig. 1.4 Traitement numérique d'un signal

I.1.3 Système discret

Un système discret [53] est un système qui convertit une suite de données d'entrée en une suite de sortie. Ce système est représenté sur la figure 1.5, où e_n représente le terme général de la séquence d'entrée et y_n le terme général de la séquence de sortie.

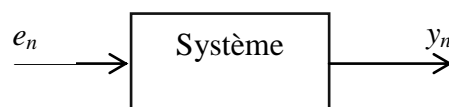


Fig. 1.5 Système à temps discret

Un système discret est linéaire et invariant s'il répond en outre aux conditions classiques illustrées à la Fig. 1.6.

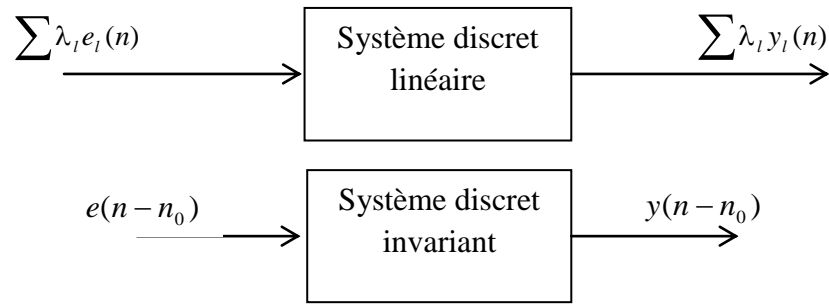


Fig. 1.6 Système discret linéaire et invariant

Un système discret linéaire et invariant dans le temps est peut être décrit par une équation récurrente qui joue un rôle équivalent, dans l'étude des systèmes à temps discret, à celui que joue l'équation différentielle dans l'étude des systèmes à temps continu: c'est un modèle mathématique de la relation entre le signal d'entrée à temps discret et le signal de sortie à temps discret du système. De façon formelle, l'équation récurrente d'un système à temps discret s'écrit [54]:

$$y_{n-p} + a_{p-1}y_{n-p+1} + \dots + a_0y_n = b_qe_{n-q} + b_{q-1}e_{n-q+1} + \dots + b_0e_n \quad (1.3)$$

Nous définissons alors la fonction de transfert $H(z)$ du système à temps discret comme le rapport de la transformée en z de la séquence de sortie sur la transformée en z de la séquence d'entrée [54]:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_qz^{-q}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}} \quad (1.4)$$

Le système à temps discret peut donc être représenté par un schéma fonctionnel:

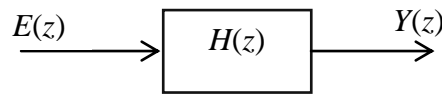


Fig. 1.7 Schéma fonctionnel de système à temps discret.

I.1.4 Problématique

Considérons (Fig. 1.8) un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert $H(s)$. Nous possédons une bonne connaissance de ce type de modèles et il est tout à fait légitime de s'interroger sur l'existence d'un système discret possédant les mêmes caractéristiques.

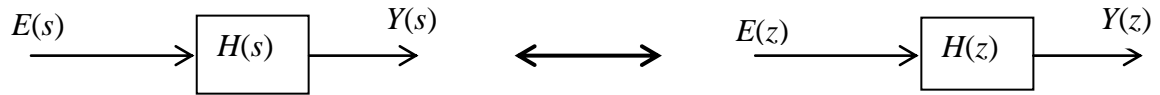
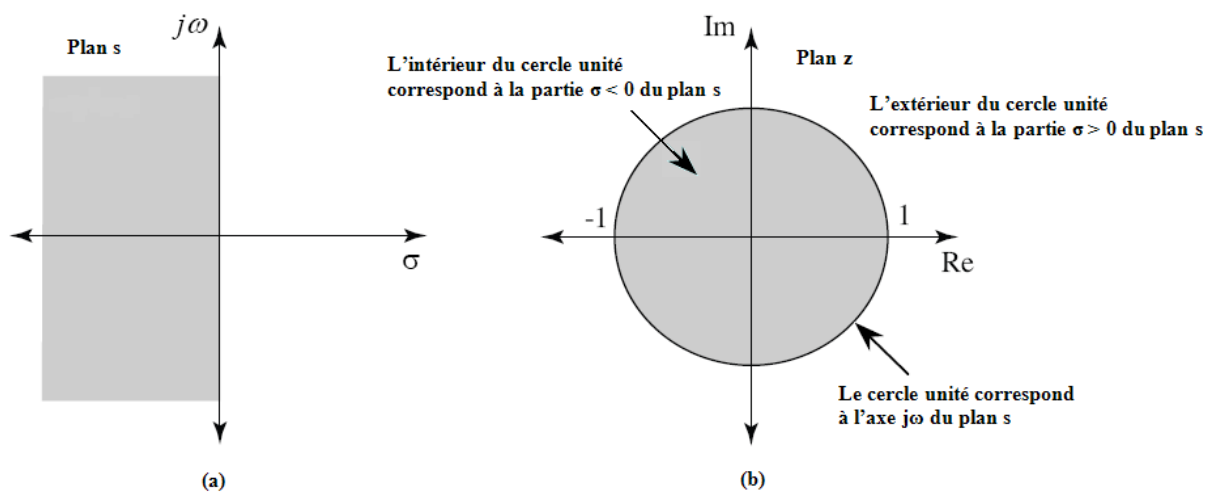


Fig. 1.8 Recherche d'une équivalence temps continu-temps discret

Le système échantillonné $H(z)$ sera réputé équivalent au système $H(s)$ si, soumis à un signal d'entrée $E(z)$ correspondant à l'échantillonnage du signal continu $e(t)$ représenté par $E(s)$, il délivre à sa sortie un signal $Y(z)$ correspondant à l'échantillonnage du signal $y(t)$ qui aurait été délivré par le système $H(s)$ [52].

I.1.5 Correspondance entre le plan s et le plan z

Les variables de fréquence de la transformée de Laplace $s = \sigma + j\omega$, et la transformation $z = re^{j\omega Ts}$ sont des variables complexes avec des parties réelle et imaginaire et peuvent être visualisées dans un plan bidimensionnel. Du fait de la périodicité du terme $e^{j\omega Ts}$, à tout axe vertical d'abscisse x du plan des s correspondra un cercle de centre 0 et de rayon r dans le plan des z . En particulier, l'axe imaginaire aura pour transformé le cercle de centre 0 et de rayon unité. À tout point situé dans le demi-plan droit du plan complexe (plan des s) correspondra un point situé à l'extérieur du cercle unité dans le plan des z . Inversement, l'intérieur de ce cercle correspondra au demi-plan gauche du plan complexe. Les figures 1.9.a et 1.9.b montre cette correspondance entre le plan de la transformation de Laplace s et le plan de la transformée en z [55].

Fig. 1.9 Illustration de: (a) le plan s et (b) le plan z

Donc il est souhaitable que la procédure de la conversion “ s à z ” ait les deux propriétés suivantes [18]:

- 1- Transformation de la moitié gauche du plan s à l'intérieur du cercle unité dans le plan z pour assurer que les fonctions de transfert analogiques rationnelles stables entraînent des fonctions de transfert rationnelles à temps discret stables.
- 2- L'axe imaginaire du plan s doit être transformé sur le cercle unité dans le plan z .

I.2 Méthodes de discrétisation

Il existe plusieurs méthodes de la discrétisation d'une fonction de transfert $H(s)$. Les méthodes peuvent être classées comme suit:

- Méthode d'invariance impulsionnelle [3-8], [18], [56].
- Discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro [4, 57-58].
- Discrétisation par la méthode des pôles-zéros [5,58-59].
- Discrétisation en utilisant les approximations Euler [3-5,9] et Tustin [3-9], ... etc.

Certaines de ces méthodes sont utilisées pour synthétiser des filtres numériques, d'autres sont convenables pour réaliser des régulateurs des systèmes de commande. Une troisième application où quelques méthodes de discrétisation sont employées est la synthèse des systèmes fractionnaires. Toutes les méthodes sont décrites dans les sections suivantes.

I.2.1 Méthode d'invariance impulsionnelle

L'idée dans cette section, pour réaliser la transposition continu-discret, est de se rappeler qu'un système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Nous pouvons donc prendre comme système discret celui dont la réponse impulsionnelle est la version échantillonnée de celle du système continu d'origine. D'un point de vue mathématique l'opération est donc simple: pour un système continu de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de fonction de transfert $H(s)$ nous obtiendrons un système discret de fonction de transfert $H(z)$ correspondant à une réponse impulsionnelle $h_1(t)$.

$$h_1(t) = h(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1.5)$$

$\delta(t)$: est la fonction de Dirac.

et

$$H(s) = L[h(t)] \Rightarrow H_1(z) = Z[h_1(t)] = Z[L^{-1}[H(s)]] \quad (1.6)$$

L désigne la transformée de Laplace, L^{-1} : la transformée inverse de Laplace et Z : la transformée en z .

L'éq. (1.6) rappelle que, lors d'une discrétisation, nous avons une périodisation du spectre qui donne lieu éventuellement à un phénomène de repliement. Si la condition d'échantillonnage (ici de discrétisation) de Shannon est respectée, ce phénomène n'a pas lieu. La réponse fréquentielle du système discret coïncide donc, dans la bande de fréquences de Shannon, avec celle du système continu cependant il y a un coefficient $1/T_s$ entre les deux introduit par l'échantillonnage. Un coefficient T_s annulera cet effet.

$$H(z) = T_s Z[L^{-1}[H(s)]] \quad (1.7)$$

Le principe de cette méthode est résumé comme suit:

- * Déterminer la réponse impulsionnelle désirée $h(t)$.
- * Échantillonner cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_s et on en déduit la suite $\{h_n\}$.
- * Rechercher la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $\{h_n\}$.

Exemple

Considérons la fonction de transfert continue suivante [43]:

$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

Le problème est de déterminer $H(z)$ en utilisant la méthode d'invariance impulsionnelle, la fréquence d'échantillonnage $f_s = 10 \text{ Hz}$.

En prenant la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert du système analogique, la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = 2e^{-2t}u(t)$$

où $u(t)$ est la fonction échelon unitaire définie comme: $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

En échantillonnant la réponse impulsionnelle $h(t)$ avec $T_s = 1/f_s = 0.1$ sec, nous obtenons:

$$T_s h(n) = T_s 2e^{-2nT_s} u(n) = 0.2e^{-0.2n} u(n)$$

En appliquant la transformée en z, nous obtenons:

$$T_s H(z) = 0.1 \frac{2}{1 - 0.8187z^{-1}} = \frac{0.2}{1 - 0.8187z^{-1}}$$

Le gain statique est donné par:

$$H(e^{j\omega T_s}) \Big|_{\omega=0} = H(1) = 1.1031$$

Donc le filtre de gain unité est donné comme suit:

$$H(z) = \frac{1}{1.1031} \frac{0.2}{1 - 0.8187z^{-1}} = \frac{0.1813}{1 - 0.8187z^{-1}}$$

Les comportements fréquentiels des systèmes analogique et son équivalent numérique sont donnés à la figure 1.10.

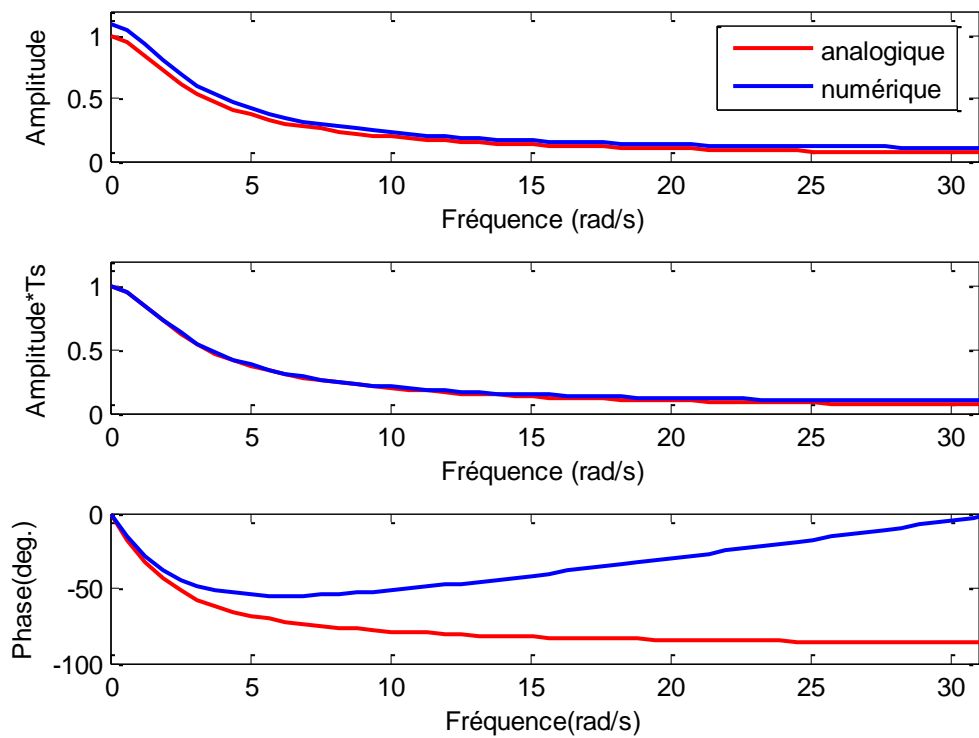


Fig. 1.10 Réponses fréquentielles des filtres: analogique ($H(s)=2/(s+2)$) et numérique

I.2.2 Discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro

I.2.2.1 Principe

Le principe est résumé comme suit [4]:

- Le signal continu $e(t)$ est échantillonné ce qui donne le signal $x(nT_s)$.
- Le signal discret $x(nT_s)$ est mis en forme par un dispositif de transfert $B(s)$ pour donner un nouveau signal continu $\hat{e}(t)$.
- Le signal continu $\hat{e}(t)$ est filtré par le filtre continu de fonction de transfert $H(s)$ qui fournit le signal continu de sortie $s(t)$.
- Ce signal de sortie $s(t)$ est échantillonné pour fournir le signal discret $y(nT_s)$.

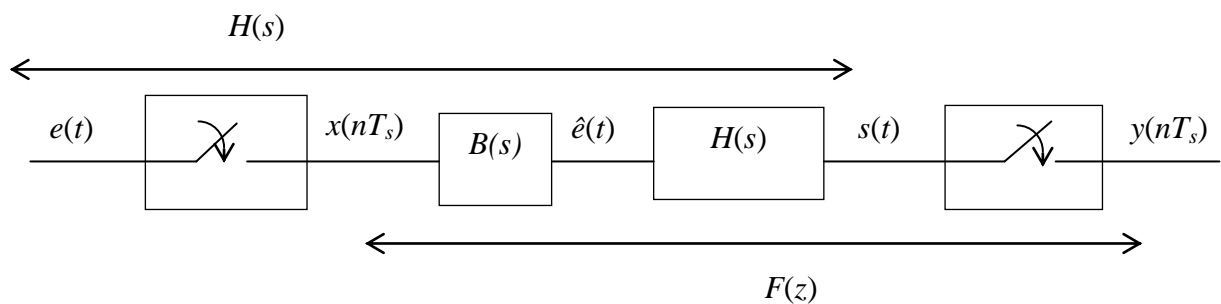


Fig. 1.11 Principe de l'échantillonneur-bloqueur

Le système qui relie $x(nT_s)$ discret à $y(nT_s)$ discret a pour fonction de transfert nommée dans cette section $F(z)$ et le système qui relie $e(t)$ continu à $s(t)$ continu a pour fonction de transfert $H(s)$. La condition évidente pour que ces systèmes aient des comportements fréquentiels identiques est que $\hat{e}(t)=e(t)$. C'est le rôle du système de transfert $B(s)$. Aucun système linéaire ne peut remplir cette condition et nous sommes donc amenés à envisager une approximation $\hat{e}(t)\approx e(t)$.

1.2.2.2 Bloqueur d'ordre 0

Le bloqueur d'ordre 0 est un des dispositifs les plus simples pour reconstruire approximativement un signal continu. Il suffit de maintenir le signal à sa valeur x_n entre les instants nT_s et $(n+1)T_s$: blocage du signal entre les deux instants d'échantillonnage.

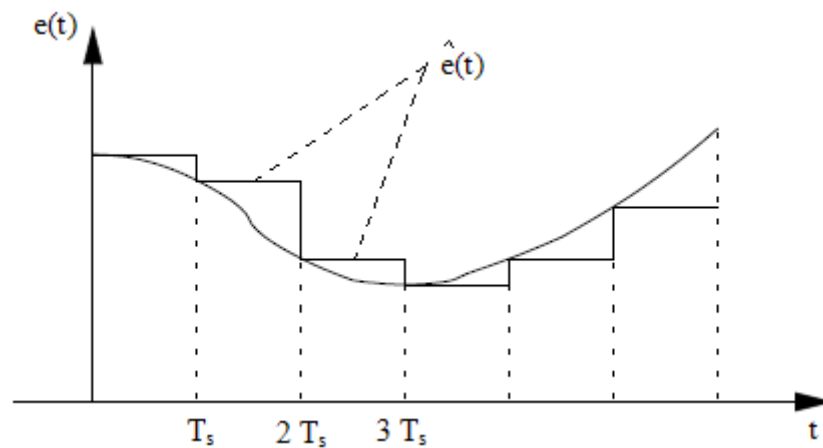


Fig. 1.12 Blocage d'ordre 0 du signal $e(t)$

Un bloqueur d'ordre 0 est donc un dispositif qui transforme une impulsion en un signal maintenu pendant une période d'échantillonnage. Sa réponse impulsionnelle $b_0(t)$ et sa fonction de transfert $B_0(s)$ sont donc les suivantes [4, 57]:

$$b_0(t) = u(t) - u(t - T_s) \quad \Rightarrow \quad B_0(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_s}) \quad (1.8)$$

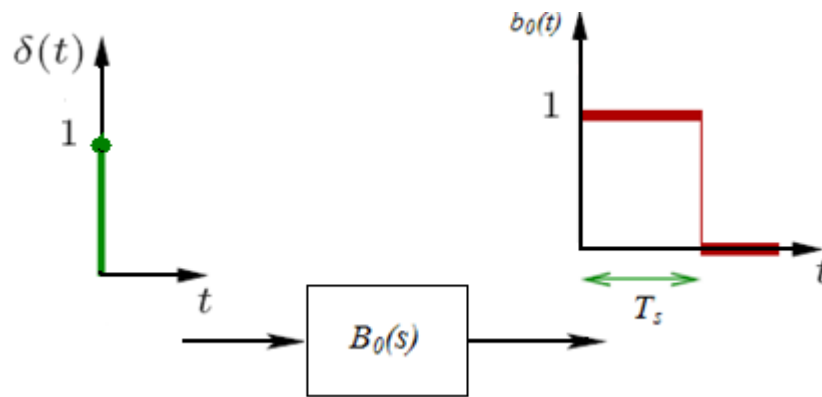


Fig. 1.13 Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro

La fonction de transfert ainsi obtenue est la fonction de transfert échantillonnée-bloquée notée $F(z) = B_0 H(z)$.

Son expression s'établit comme suit:

La réponse temporelle du système continu de transfert $B_0(s)H(s)$ est:

$$L^{-1}[B_0(s)H(s)] = L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}(1 - e^{-sT_s})\right] = L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right] - L^{-1}\left[e^{-sT_s} \frac{H(s)}{s}\right]$$

$$L^{-1}[B_0(s)H(s)] = f(t) - f(t - T_s) \quad (1.9)$$

avec $f(t) = L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$

Si nous échantillonnons l'entrée et la sortie de ce système, nous obtiendrons le système discret de fonction de transfert $F(z)$ [57]:

$$F(z) = Z[f(t) - f(t - T_s)] = (1 - z^{-1})Z[f(t)] = (1 - z^{-1})Z\left[L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]\right]$$

$$F(z) = (1 - z^{-1})Z\left[L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]\right] \quad (1.10)$$

Cette méthode s'appelle aussi méthode d'invariance indicielle [58].

Exemple

Dans cet exemple nous voulons trouver la fonction de transfert discrète du système continu suivant:

$$H(s) = \frac{K_1}{K_2 s + 1} = \frac{\frac{K_1}{K_2}}{s + \frac{1}{K_2}}$$

en utilisant la méthode du bloqueur d'ordre 0.

En appliquant:

$$F(z) = (1 - z^{-1})Z \left[L^{-1} \left\{ \frac{\frac{K_1}{K_2}}{\left(s + \frac{1}{K_2} \right) s} \right\} \right]_{t=nT_s}$$

En calculant:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\frac{K_1}{K_2}}{\left(s + \frac{1}{K_2} \right) s} \right\} \bigg|_{t=nT_s} = K_1 (1 - e^{-t/K_2}) \bigg|_{t=nT_s} = K_1 (1 - e^{-nT_s/K_2})$$

Nous obtiendrons le système discret:

$$F(z) = \frac{K_1 (1 - e^{-T_s/K_2})}{z - e^{-T_s/K_2}}$$

Pour $T_s=1$, $K_1=0.5$, et $K_2=1$, les réponses d'amplitude et de phase sont montrées à la figure 1.14.

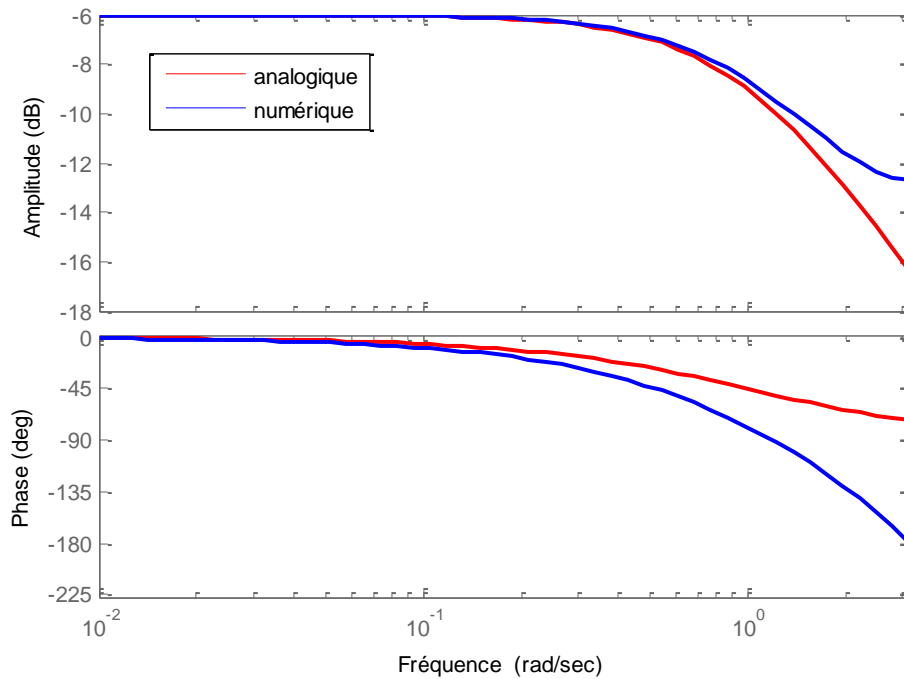


Fig. 1.14 Diagrammes de bode des systèmes: analogique ($H(s)=0.5/(s+1)$) et numérique

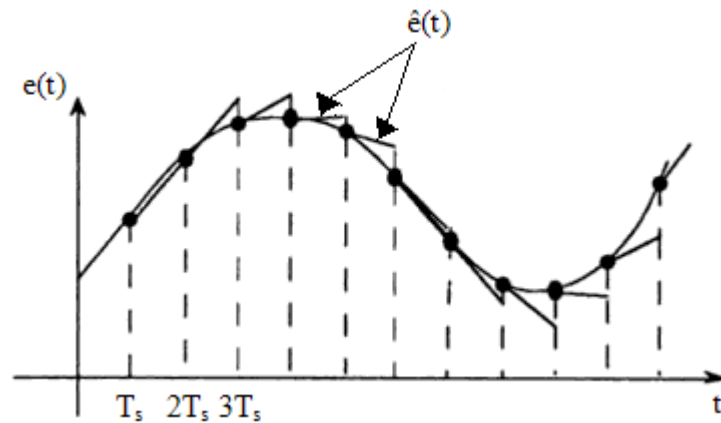
I.2.2.3 Autres bloqueurs

Bloqueur d'ordre 1

Plutôt que de bloquer simplement le signal échantillonné entre deux périodes d'échantillonnage, une meilleure approximation $\hat{e}(t)$ peut être obtenue en maintenant pendant l'intervalle $[nT_s, (n+1)T_s]$ la pente à l'instant $t = nT_s$.

Nous utilisons alors un bloqueur d'ordre 1 dont la fonction de transfert est une fonction triangle $Tri(t/T_s)$. La même démarche que pour le bloqueur d'ordre 0 permet de calculer la fonction échantillonnée-bloquée d'ordre 1 [57]:

$$F(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{z^{-1}T_s} Z \left[L^{-1} \left(\frac{H(s)}{s^2} \right) \right] \quad (1.11)$$

Fig. 1.15 Blocage d'ordre 1 du signal $e(t)$

Cette méthode s'appelle aussi méthode d'invariance rampe.

Bloqueurs d'ordre 2,3,...

Obtenus en maintenant le signal pendant une période d'échantillonnage avec des approximations polynomiales d'ordre supérieur à 1. Les expressions de calcul deviennent plus complexes, ces cas sont peu intéressants pour les applications [57].

I.2.3 Discrétisation par la méthode des pôles-zéros

Un filtre est caractérisé par la position de ses pôles et ses zéros dans le plan s (en continu) ou dans le plan z (en discret). La donnée de ces points singuliers permet de calculer la fonction de transfert du système à une constante près. Cette constante est précisée par une donnée supplémentaire par exemple le gain statique.

L'idée de cette méthode de transposition est [58]:

$$z = e^{sT_s} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T_s} \ln(z) \quad (1.12)$$

Cette transposition n'est pas applicable pour conserver à la fonction de transfert une forme polynomiale, elle est par contre applicable sur les points singuliers que sont les pôles et les zéros.

La transposition par pôles et zéros calcule la fonction de transfert discrète $H(z)$ ayant comme points singuliers les transposés rigoureux des points singuliers de la fonction de transfert continue $H(s)$.

$$H(s) = K_p \frac{\prod_n (s - s_n)}{\prod_k (s - s_k)} \Rightarrow H(z) = K_d \frac{\prod_n (z - z_n)}{\prod_k (z - z_k)} \quad (1.13)$$

La transposition des points singuliers étant faite par:

$$z_n = e^{s_n T_s} \quad , \quad z_k = e^{s_k T_s}$$

et l'ajustement du coefficient K_d par l'ajustement du gain statique.

Exemple

Nous voulons discrétiser un filtre continu de fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{2.25}{s^2 + 0.3s + 2.25}$$

Les caractéristiques de ce filtre sont : $\omega_r = 1.492$ rad/s, $H(0) = 1$, $|H(\omega_r)| = 5$.

La période d'échantillonnage $T_s = 1$ sec.

Soit un système discret ayant:

- deux pôles transposés $z_{1,2} = 0.0671 \pm j 0.8574$ d'où une résonance pour $\omega T_s = \arctg(0.8574 / 0.0671)$ donc $\omega_r = 1.493$ rad/s.
- pas de zéro à transposer: caractère passe-bas complété en plaçant deux zéros en $z = -1$.
- Le coefficient K_d est ajusté pour avoir un module de 5 à la résonance.

$$H(s) = \frac{2.25}{s^2 + 0.3s + 2.25} \rightarrow H(z) = \frac{K_d (z+1)^2}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$$

La figure 1.16 illustre la différence entre les réponses fréquentielles des systèmes analogique et numérique.

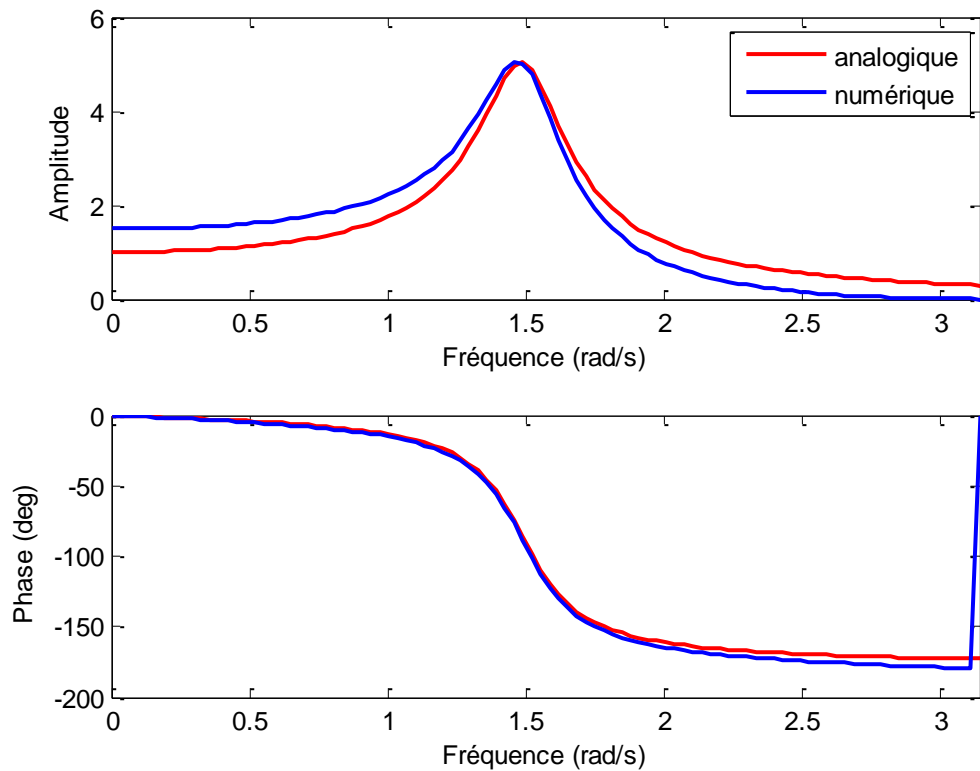


Fig. 1.16 Réponses fréquentielles des systèmes: analogique ($H(s)=2.25/(s^2+0.3s+2.25)$) et numérique

I.2.4 Discrétisation en utilisant les approximations Euler et Tustin

Dans cette sous-section, nous présentons des formules de substitution pour remplacer s dans les fonctions de transfert en temps continu par son équivalent en fonction de z pour obtenir des fonctions de transfert en temps discret. Une fonction de transfert en temps continu est issue d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation est formée de dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie. Un des moyens les plus simples d'effectuer le lien entre une représentation en temps continu et en temps discret est de considérer les approximations numériques des intégrales et des dérivées par rapport au temps.

Considérons par exemple l'équation différentielle d'ordre 1 d'un système linéaire continu suivante [6]:

$$\dot{y} + ay = ae \quad (1.14)$$

La fonction de transfert du système analogique est:

$$H_a(s) = \frac{a}{s+a} \quad (1.15)$$

Nous pouvons écrire [6]:

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t \dot{y}_a(\tau) d\tau + y_a(t_0) \quad (1.16)$$

Un cas particulier est de prendre $t_0=(n-1)T_s$ et $t=nT_s$, donc nous avons:

$$y_a(nT_s) = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} \dot{y}_a(\tau) d\tau + y_a((n-1)T_s) \quad (1.17)$$

En se basant sur la sélection de l'approximation de l'intégrale $\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} \dot{y}_a(\tau) d\tau$, de nombreuses règles peuvent être développées: la règle rectangulaire en avant (la règle d'Euler progressif), la règle rectangulaire en arrière (la règle d'Euler rétrograde), la règle trapézoïdale (la règle de Tustin), la règle de Simpson, ...etc., nous allons aborder ici les principes élémentaires et de base du calcul intégral.

I.2.4.1 La règle rectangulaire en avant

Dans cette approximation nous approchons la surface à calculer par un rectangle à gauche, l'intégration est effectuée entre les instants $(n-1)T_s$ et nT_s et en prenant l'amplitude du rectangle à la valeur de l'intégrale à $(n-1)T_s$. La largeur du rectangle est T_s . Cela est illustré sur la figure 1.17.

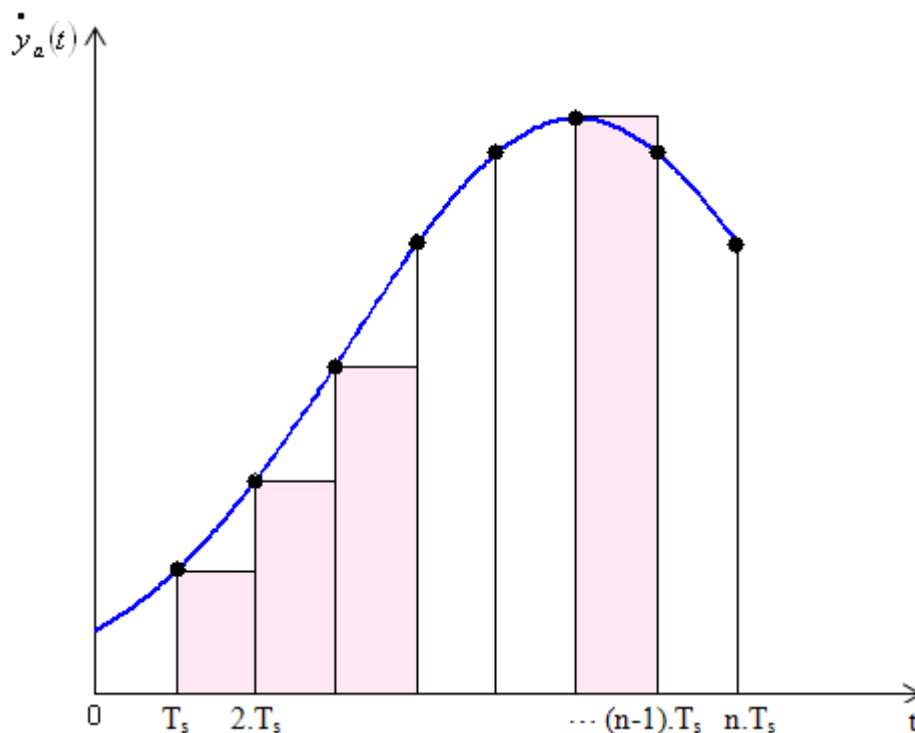


Fig. 1.17 Approximation d'Euler en avant (progressif)

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} \dot{y}_a(\tau) d\tau \approx T_s \left[\dot{y}_a((n-1)T_s) \right] \quad (1.18)$$

En remplaçant cette intégrale dans l'éq. (1.17)

$$y_a(nT_s) = T_s \left[\dot{y}_a((n-1)T_s) \right] + y_a((n-1)T_s)$$

mais: $\dot{y} = -ay + ae$,

et en posant: $y(n) = y_a(nT_s)$, et $e(n) = e_a(nT_s)$

$$y(n) - y(n-1) = T_s [-ay(n-1) + ae(n-1)] \quad (1.19)$$

En prenant la transformée en z de l'équation au différence de l'éq. (1.19), nous obtenons:

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{aT_s z^{-1}}{1 - (1 - aT_s)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{z-1}{T_s} + a} \quad (1.20)$$

En comparant $H_a(s)$ et $H_I(z)$, il est clair que nous pouvons obtenir $H_I(z)$ à partir de $H_a(s)$ en posant:

$$s = \frac{z-1}{T_s} \quad (1.21)$$

Cette règle est appelée la transformation rectangulaire en avant (ou la règle d'Euler progressif).

Exemple:

Considérons un système continu de fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{394800}{s^2 + 888.6s + 394800}$$

qui sera discrétisé par une période d'échantillonnage $T_s = 5 \times 10^{-4}$ sec.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_s}} = \frac{394800}{s^2 + 888.6s + 394800} \Big|_{s=\frac{z-1}{T_s}}$$

$$H(z) = \frac{987}{10000z^2 - 15557z + \pi^2 + 6544}$$

Les réponses fréquentielles des systèmes analogique et numérique sont montrées sur la figure 1.18.

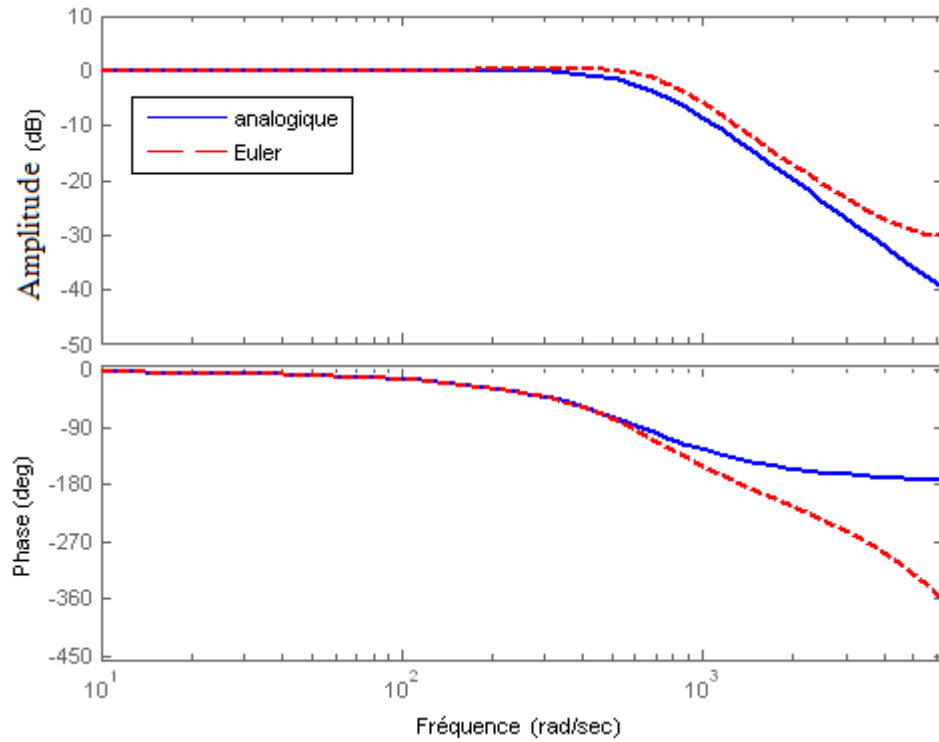


Fig. 1.18 Diagrammes de bode des systèmes: analogique ($H(s)=394800/(s^2+888.6s+394800)$) et numérique

I.2.4.2 La règle rectangulaire en arrière

La deuxième règle est obtenue en prenant l'amplitude du rectangle approximé entre les instants $(n-1)T_s$ et nT_s qui est: $(-ay(nT_s)+ae(nT_s))$. La deuxième approximation est montrée sur la figure 1.19.

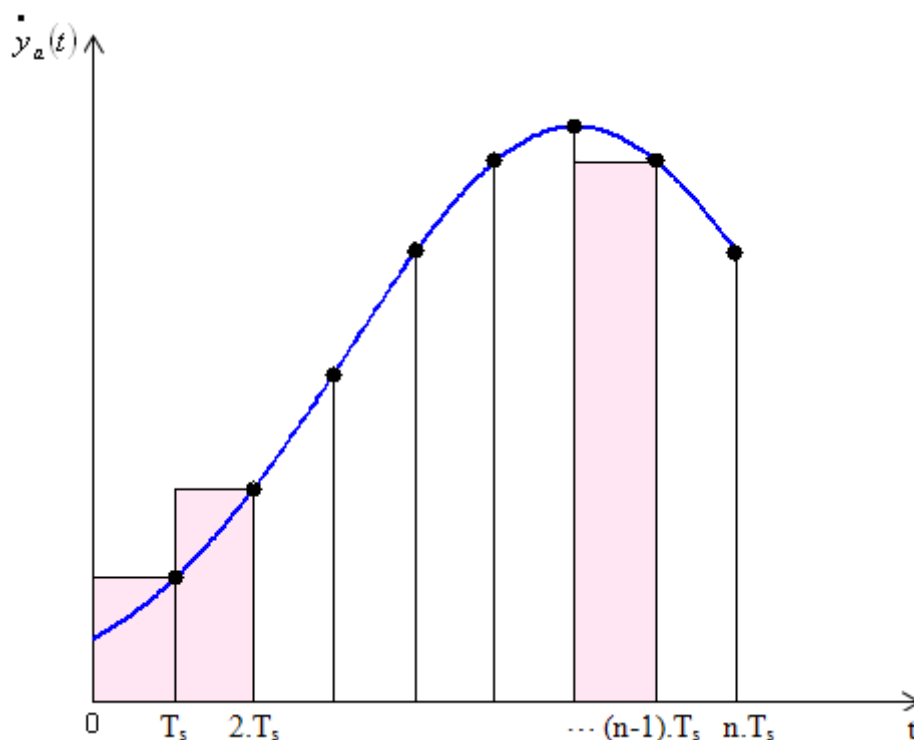


Fig. 1.19 Approximation d'Euler en arrière (rétrograde)

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} \dot{y}_a(\tau) d\tau \approx T_s \left[\dot{y}_a(nT_s) \right] \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} y(n) - y(n-1) &= T_s \left[\dot{y}_a(nT_s) \right] \\ &= T_s [-ay(n) + ae(n)] \end{aligned} \quad (1.23)$$

En prenant la transformée en z de l'équation au différence de l'éq. (1.23), et en calculant la fonction de transfert correspondante, nous obtenons:

$$H_2(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = \frac{aT_s}{1 + aT_s - z^{-1}} = \frac{aT_s z}{(1 + aT_s)z - 1}$$

$$H_2(z) = \frac{a}{\frac{(z-1)}{T_s z} + a} \quad (1.24)$$

En comparant $H_a(s)$ et $H_2(z)$, il est clair qu'on peut obtenir $H_2(z)$ à partir de $H_a(s)$ en posant:

$$s = \frac{(z-1)}{T_s z} \quad (1.25)$$

Cette règle est appelée la transformation rectangulaire en arrière (ou la règle d'Euler rétrograde).

Exemple

Considérons un système continu de fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{1}{1+10s}$$

qui sera discrétisé par une période d'échantillonnage $T_s=1$ sec.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_s z}} = \frac{1}{1+10s} \Big|_{s=\frac{z-1}{T_s z}}$$

$$H(z) = \frac{z}{11z-10}$$

Les réponses fréquentielles des systèmes analogique et numérique sont montrées sur la figure 1.20.

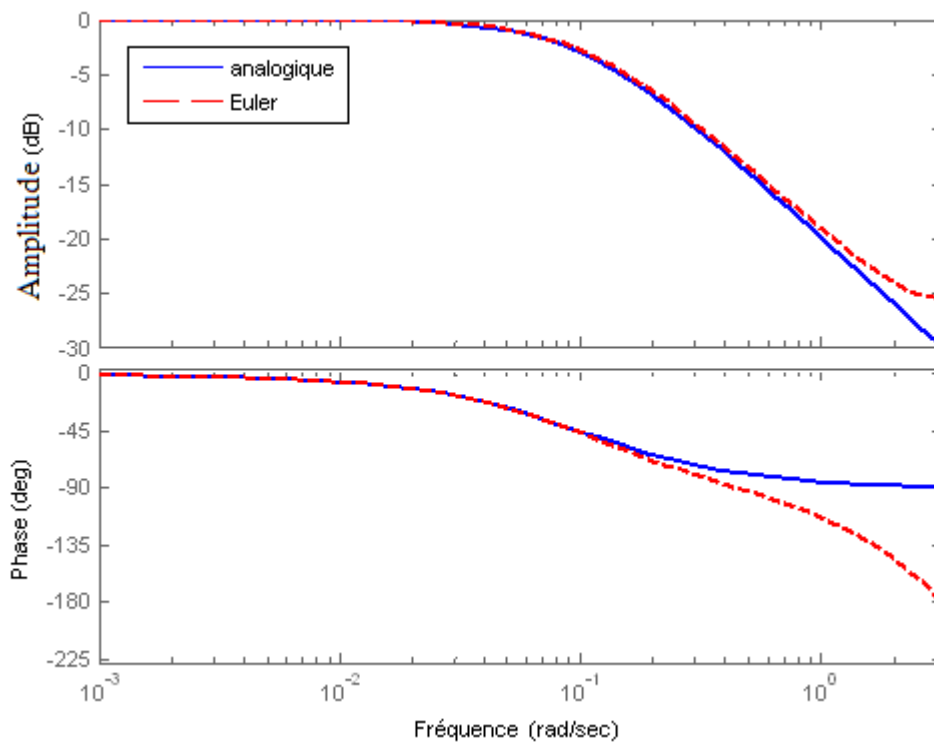


Fig. 1.20 Diagrammes de bode des systèmes: analogique ($H(s)=1/(1+10s)$) et numérique

I.2.4.3 La règle trapézoïdale

La méthode des trapèzes est du même principe que celle des rectangles. Nous utilisons non

plus des rectangles pour paver l'aire $\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} \dot{y}_a(\tau) d\tau$ mais des trapèzes. Cette approximation

trapézoïdale est représentée sur la figure 1.21.

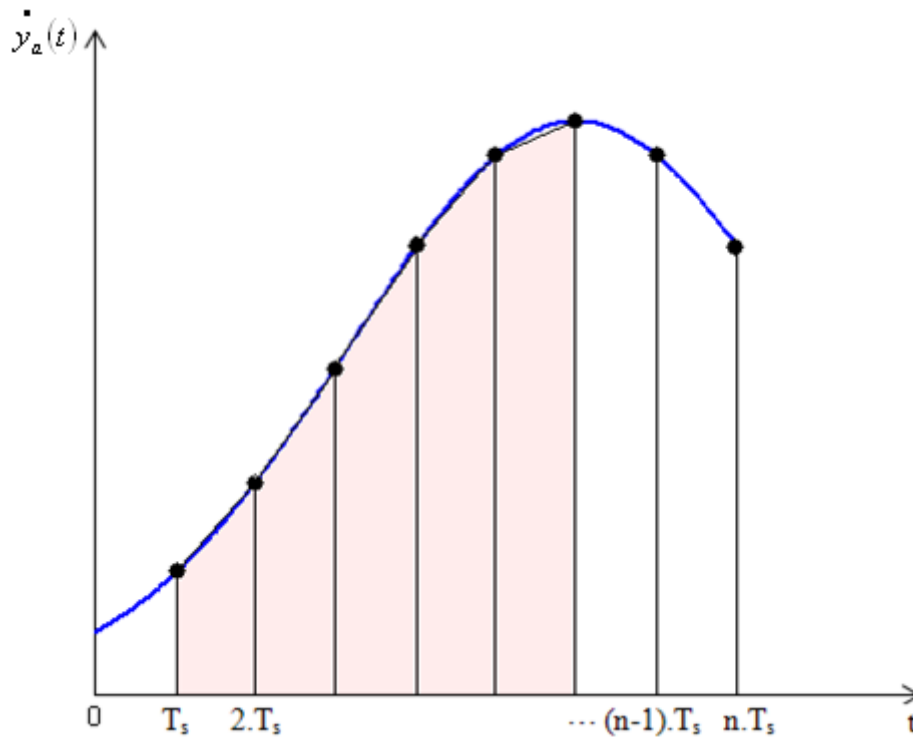


Fig. 1.21 Approximation bilinéaire

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} \dot{y}_a(\tau) d\tau \approx \frac{T_s}{2} \left[\dot{y}_a((n-1)T_s) + \dot{y}_a(nT_s) \right] \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} y(n) - y(n-1) &= \frac{T_s}{2} \left[\dot{y}_a((n-1)T_s) + \dot{y}_a(nT_s) \right] \\ &= \frac{T_s}{2} \left[-a(y(n) + y(n-1)) + a(e(n) + e(n-1)) \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

En prenant la transformée en z des deux membres, nous obtenons la fonction de transfert en z:

$$H_3(z) = \frac{aT_s(z+1)}{(2+aT_s)z + aT_s - 2}$$

$$H_3(z) = \frac{a}{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + a} \quad (1.28)$$

qui fait apparaître une relation entre s et z :

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad (1.29)$$

Cette transformation est couramment désignée par transformation trapézoïdale, ou bilinéaire ou de Tustin.

Exemple

Considérons un système continu de fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{10}{s+10}$$

qui sera discrétisé par une période d'échantillonnage $T_s=0.01$ sec, et en appliquant la transformation bilinéaire:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{10}{s+10} \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{0.0476z + 0.0476}{z - 0.9048}$$

La figure 1.22 présente les réponses fréquentielles des systèmes analogique et numérique.

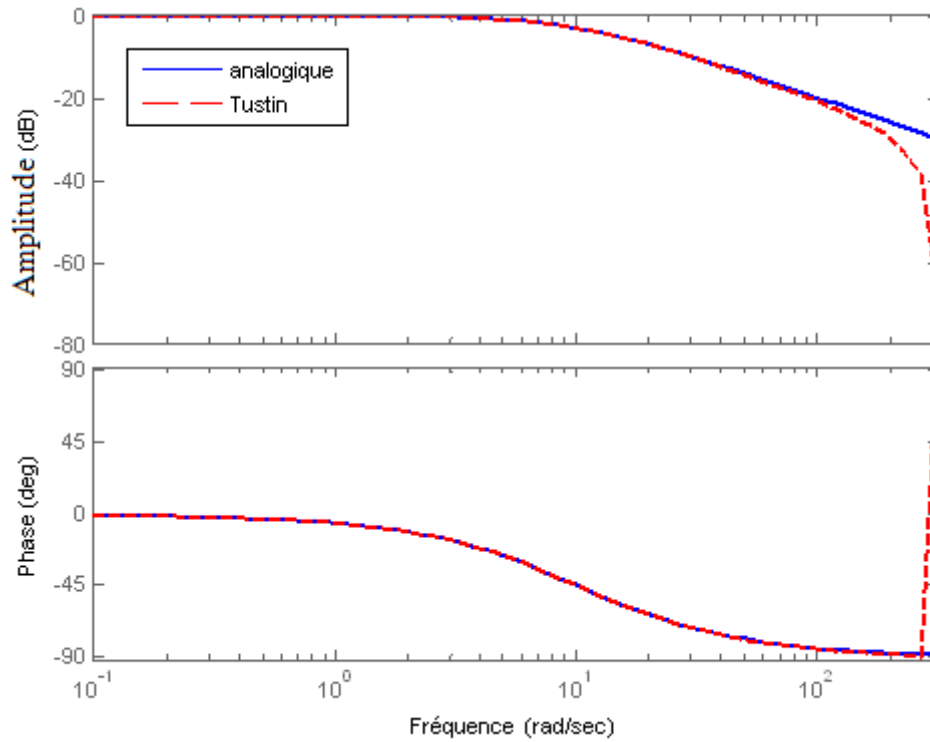


Fig. 1.22 Diagrammes de bode des systèmes: analogique ($H(s)=10/(s+10)$) et numérique

D'autres transformations existant dans la littérature: transformation de Simpson [10,59] et celles qui sont basés sur les formules numériques d'Adams Moulton [40], sont résumés dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1 Transformations de Simpson et d'Adams - Moulton

Transformations de Simpson et d'Adams - Moulton	
$s = \frac{3}{T_s} \frac{(z^2 - 1)}{(z^2 + 4z + 1)}$	(1.30)
$s = \frac{12z(z-1)}{T_s(5z^2 + 8z - 1)}$	(1.31)
$s = \frac{24}{T_s} \frac{(z^3 - z^2)}{(9z^3 + 19z^2 - 5z + 1)}$	(1.32)
$s = \frac{720}{T_s} \frac{(z^4 - z^3)}{(251z^4 + 646z^3 - 264z^2 + 106z - 19)}$	(1.33)
$s = \frac{1440}{T_s} \frac{(z^5 - z^4)}{(475z^5 + 1427z^4 - 798z^3 + 482z^2 - 173z + 27)}$	(1.34)

I.2.4.4 Transformations d'Al-Alaoui

Les sections précédentes ont permis de définir les transformations dérivées à partir de méthodes classiques Euler, Tustin et Simpson, ...etc, d'autres méthodes sont obtenues en combinant deux méthodes celle d'Euler, et de Tustin, ou Tustin et Simpson, appelées transformations d'Al-Alaoui, c'est le but des prochaines sections. Mais avant de détailler ces transformations, nous présentons d'abord le dérivateur/intégrateur idéal.

a- Intégrateur/dérivateur idéal

L'intégrale $y(t)$ d'un signal continu $x(t)$ donné par:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (1.35)$$

peut être vue comme la sortie du système linéaire qui est appelé intégrateur analogique. La fonction de transfert $H_{ia}(s)$ de cet opérateur est obtenue en prenant la transformée de Laplace de (1.35) sous des conditions initiales nulles [49]:

$$H_{ia}(s) = 1/s \quad (1.36)$$

La réponse fréquentielle de l'intégrateur analogique idéal est donnée par: $H_{ia}(\omega) = 1/j\omega$ où $\omega = 2\pi f$, f : représente la fréquence en Hz . Celle de l'intégrateur numérique idéal est donnée par [49]:

$$D_i(\omega) = 1/(j\omega) \quad |\omega| \leq \pi \quad (1.37)$$

et se répète avec une période 2π .

Les caractéristiques de la réponse en fréquence idéale d'un intégrateur numérique sont montrées à la Fig.1. 23.

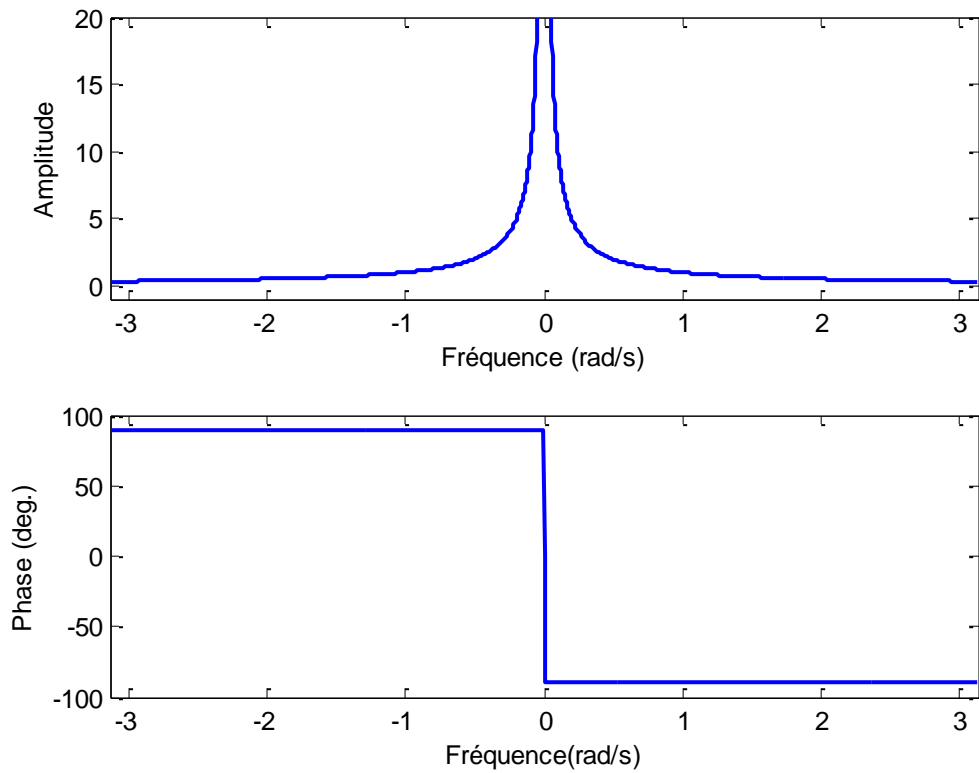


Fig. 1.23 Réponses fréquentielles de l'intégrateur idéal

De la même façon nous définissons le dérivateur idéal. La fonction de transfert $H_{da}(s)$ du dérivateur analogique est donnée par [49]:

$$H_{da}(s) = s \quad (1.38)$$

La réponse fréquentielle du dérivateur analogique idéal est donnée par: $H_{da}(\omega) = j\omega$. Celle du dérivateur numérique idéal est donnée par [49]:

$$D_d(\omega) = j\omega \quad \text{pour } |\omega| \leq \pi \quad (1.39)$$

La figure 1.24 présente les caractéristiques de la réponse en fréquence idéale d'un dérivateur numérique.

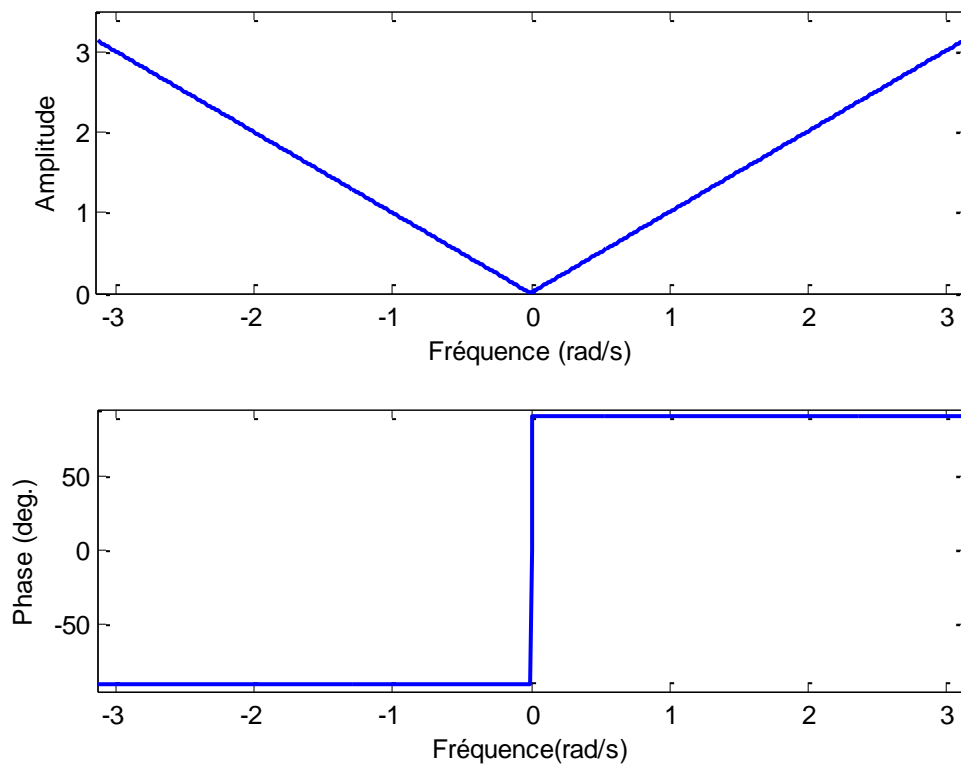


Fig. 1. 24 Réponses fréquentielles du dérivateur idéal

b- Intégrateurs d'Al-Alaoui

b-1 Intégrateur d'Al-Alaoui d'ordre 1

La figure 1.25 montre que la réponse en fréquence d'amplitude de l'intégrateur idéal se trouve entre les amplitudes de l'intégrateur rectangulaire et trapézoïdal. Cela suggère d'approximer l'intégrateur idéal comme une somme pondérée de l'intégrateur rectangulaire (Euler) et l'intégrateur trapézoïdal (bilinéaire) [18], [44].

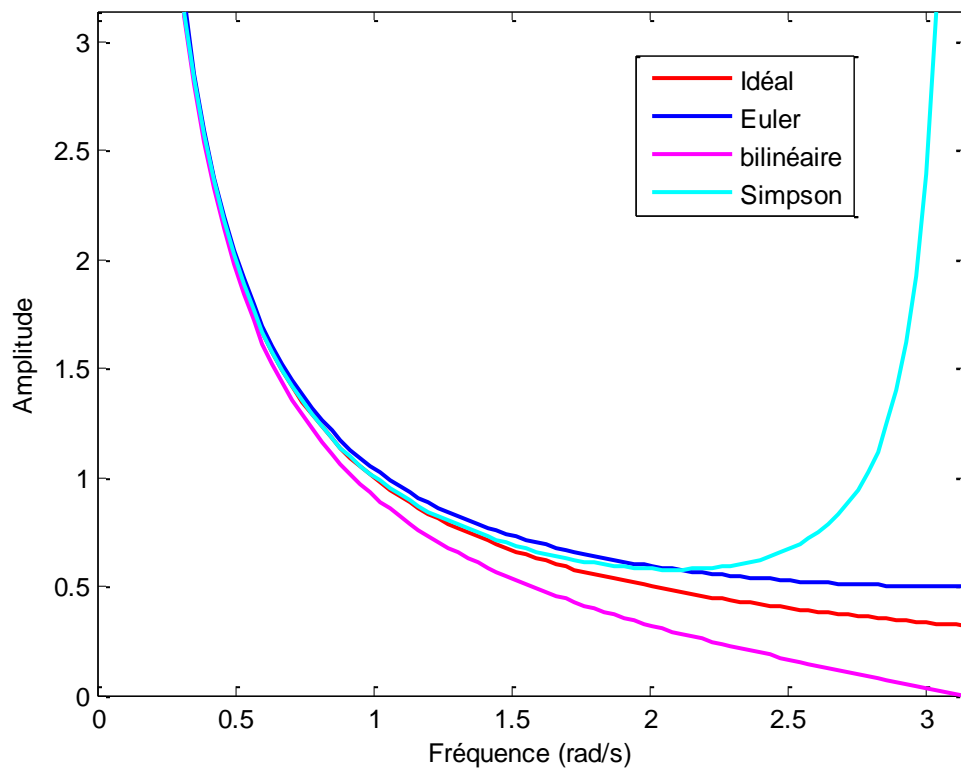


Fig. 1.25 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, bilinéaire, Simpson

En attribuant des facteurs de pondération de 3/4 et 1/4 aux fonctions de transfert des intégrateurs respectivement, le nouvel intégrateur qui a la fonction de transfert donnée par l'équation qui suit (1.40), est approximé.

$$H_{RT}(z) = \frac{3}{4}H_R(z) + \frac{1}{4}H_T(z) \tag{1.40}$$

où $H_R(z) = \frac{T_s}{z-1}$ est l'intégrateur rectangulaire ou d'Euler.

et $H_T(z) = \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1}$ est l'intégrateur trapézoïdal ou de Tustin (bilinéaire).

En substituant les fonctions de transfert correspondantes dans l'équation (1.40), nous aurons:

$$H_{RT}(z) = \frac{3}{4} \frac{T_s}{z-1} + \frac{1}{4} \frac{T_s(z+1)}{2(z-1)} \tag{1.41}$$

En simplifiant l'équation (1.40), nous obtenons la fonction de transfert suivante:

$$H_{RT}(z) = \frac{T_s}{8} \frac{(z+7)}{(z-1)} \quad (1.42)$$

Les réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin, et Al-Alaoui 1 sont illustrées à la figure 1.26.

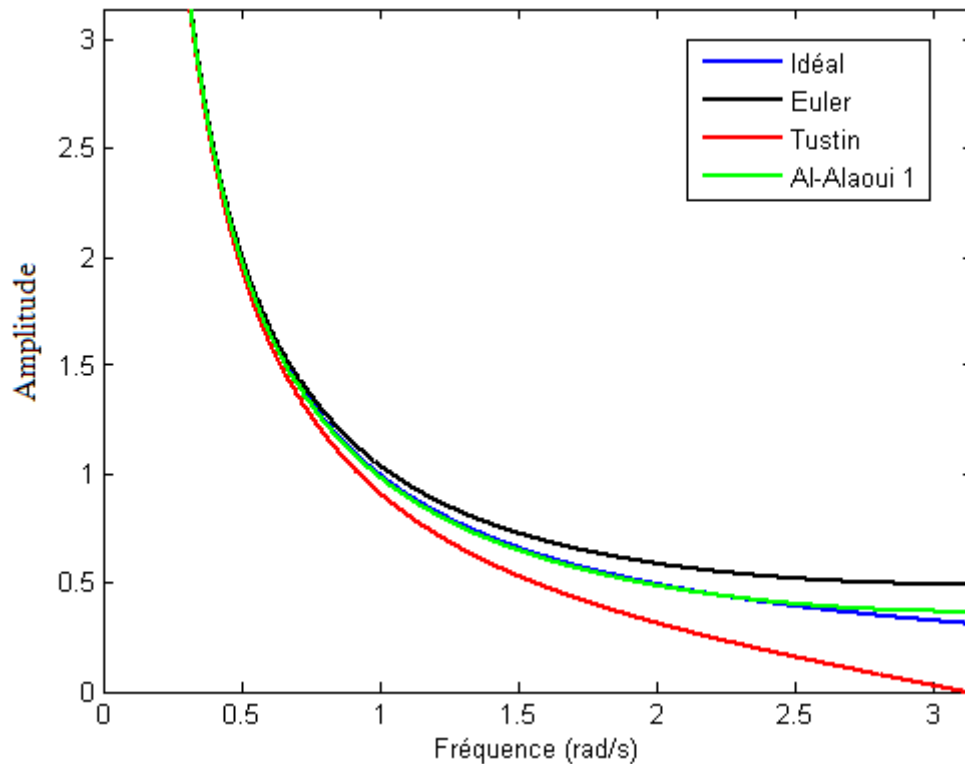


Fig. 1.26 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, bilinéaire, Al-Alaoui 1

Nous remarquons d'après cette figure que la réponse fréquentielle d'amplitude des dérivateurs approximés par la méthode d'Al-Alaoui 1 est plus proche de celle du dérivateur idéal sauf dans une région près de $\omega = \pi$.

La figure 1.27 montre les réponses de phase des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin, Al-Alaoui 1.

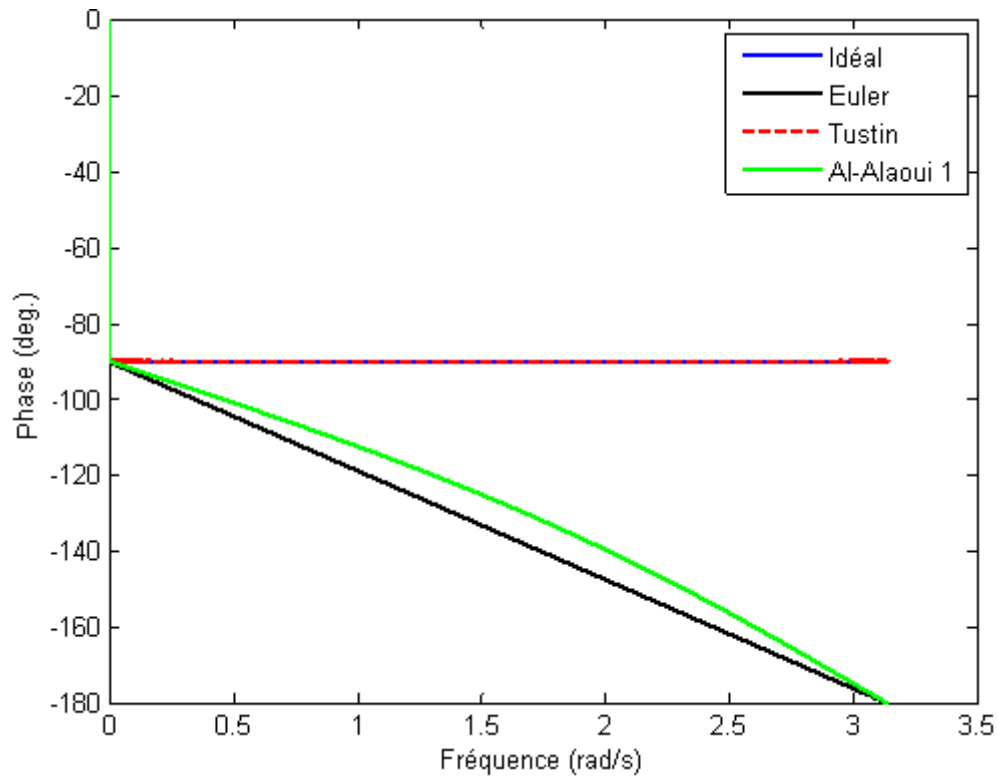


Fig. 1.27 Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin et Al-Alaoui 1

Comme il est déjà mentionné ci-dessus, la phase de l'intégrateur Tustin est de -90° , celle de l'intégrateur d'Euler est linéaire, Ceci est ré-illustré à la figure 1.27. Cette figure montre aussi que la phase de l'intégrateur obtenu de la combinaison entre les intégrateurs Euler et Tustin (Al-Alaoui 1) est presque linéaire.

L'équation de l'intégrateur d'Al-Alaoui d'ordre 1 est généralisée comme suit [60]:

$$H_{Al}(z) = \frac{T_s((1+\beta_1)z + (1-\beta_1))}{2(z-1)} \quad (1.43)$$

où " β_1 " est un paramètre réel défini sur l'intervalle $[0, 1]$.

b-2 Intégrateur d'Al-Alaoui d'ordre 2

La même procédure précédente est appliquée dans ce paragraphe mais cette fois Al-Alaoui a proposé de combiner les intégrateurs de Simpson et celui de Tustin [10], [59]. Cette classe des intégrateurs a la propriété que ses zéros sont des paires réciproques autour du cercle unité dans le plan z, puisque $r_1 = 1/r_2$.

L'interpolation des deux intégrateurs dans une manière semblable à celle utilisé pour obtenir l'intégrateur mixte rectangulaire et trapézoïdal nous donne:

$$H_{ST}(z) = \beta_2 H_s(z) + (1 - \beta_2) H_T(z) \quad 0 \leq \beta_2 \leq 1 \quad (1.44)$$

où $H_s(z) = \frac{T_s}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{(z^2 - 1)}$ est l'intégrateur de Simpson.

La fonction de transfert de la nouvelle classe des intégrateurs à phase non minimale est donnée par:

$$H_{ST}(z) = \frac{T_s (3 - \beta_2) [(z + r_1)(z + r_2)]}{6(z^2 - 1)} \quad (1.45)$$

où

$$r_1 = \frac{(3 + \beta_2 + 2\sqrt{3\beta_2})}{(3 - \beta_2)} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{(3 + \beta_2 - 2\sqrt{3\beta_2})}{(3 - \beta_2)}$$

Les réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Tustin, Simpson et du nouvel intégrateur pour un paramètre $\beta_2=0.6$ (Al-Alaoui 2) sont montrées à la figure 1.28.

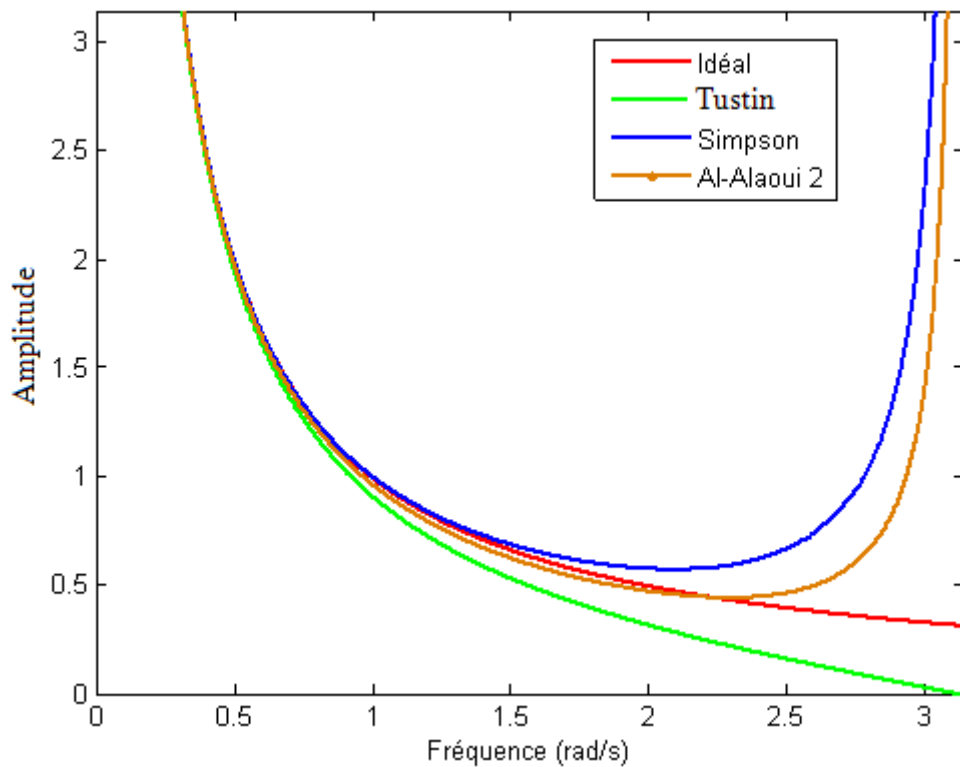


Fig.1. 28 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin et Al-Alaoui 2 pour un paramètre $\beta_2=0.6$

Il est clair de cette figure que le nouvel intégrateur obtenu en combinant l'intégrateur de Tustin et celui de Simpson approxime bien l'intégrateur idéal. Il est clair aussi que cet intégrateur s'éloigne beaucoup de l'intégrateur idéal à $\omega=\pi$.

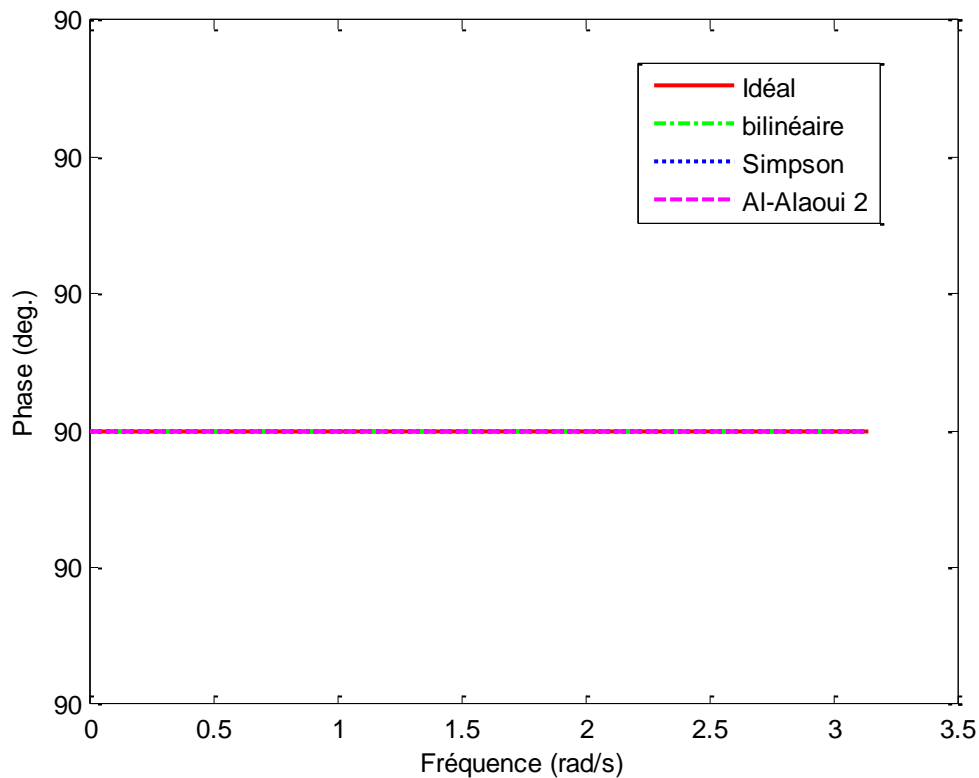


Fig. 1.29 Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Euler, Tustin et Al-Alaoui 2

Toutes les phases sont superposées sur la phase idéale. La phase de l'intégrateur Tustin-Simpson (Al-Alaoui 2) est de -90° .

c- Dérivateurs d'Al-Alaoui

c-1 Dérivateur d'Al-Alaoui d'ordre 1

C'est un dérivateur RII d'ordre 1, basé sur l'intégrateur numérique à phase non minimale, développé par Al-Alaoui [44]. L'approche de la synthèse de ce dérivateur comprend 4 étapes:

Etape 1

Obtenir ou synthétiser un intégrateur, il est donné par l'équation (1.40).

Etape 2

Inverser la fonction de transfert de l'intégrateur obtenu à l'étape 1.

Etape 3

Stabiliser la fonction de transfert obtenue à l'étape 2, en mettant les pôles qui se trouvent à l'extérieur du cercle unité à l'intérieur du cercle unité.

Etape 4

Compenser convenablement l'amplitude en notant que si un pôle qui se trouve à un rayon r est remplacé par un pôle qui se trouve à un rayon $1/r$, l'amplitude de la fonction de transfert résultante sera multipliée par r ; donc pour compenser le changement d'amplitude, la fonction de transfert résultante doit être multipliée par $1/r$.

Pour obtenir un intégrateur numérique à phase minimale, on applique la règle qui consiste à mettre le zéro: $z = -7$ à $z = -1/7$ et compenser convenablement l'amplitude par la multiplication de la fonction de transfert à phase minimale résultante par $r = 7$ [44]. Donc la fonction du transfert résultante de l'intégrateur à phase minimale est:

$$H_{RTph}(z) = 7 \frac{T_s}{8} \frac{(z + 1/7)}{(z - 1)} \quad (1.46)$$

La réponse d'amplitude est la même de celle de l'intégrateur à phase non minimale.

L'inversion de la fonction de transfert H_{RTph} de l'intégrateur à phase minimale mène à l'expression de la fonction de transfert du dérivateur numérique à phase minimale:

$$G_{RT}(z) = \frac{8(z - 1)}{7T_s (z + 1/7)} \quad (1.47)$$

La figure 1. 30 présente les réponses d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 1.

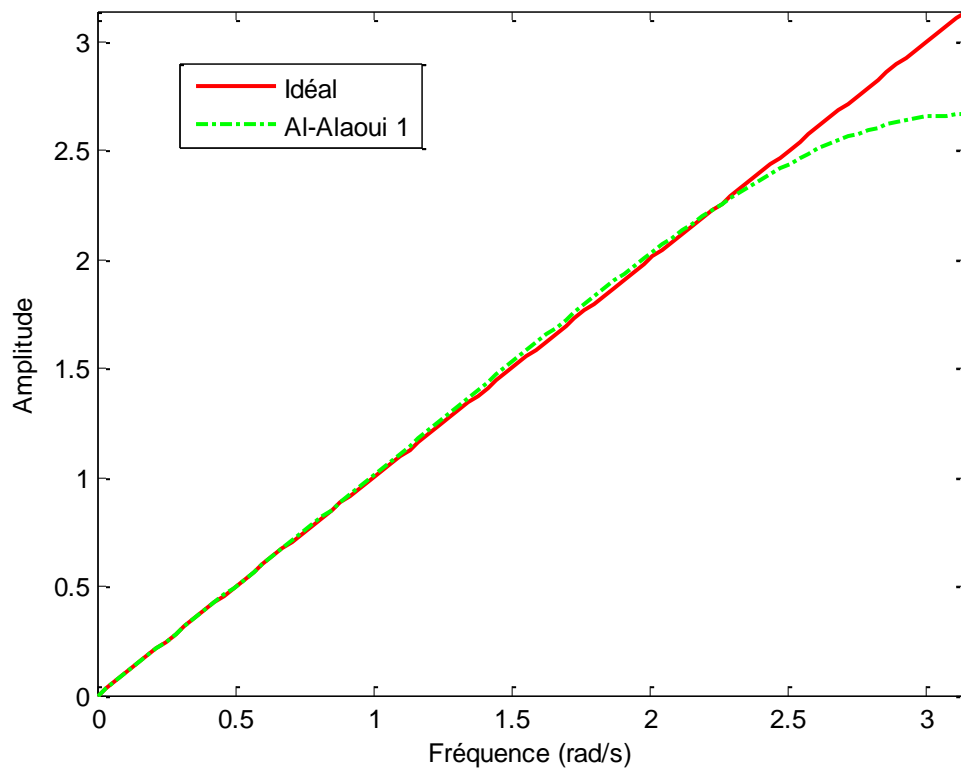


Fig. 1.30 Réponses fréquentielles d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 1

Le dérivateur résultant Al-Alaoui 1 offre une bonne approximation du dérivateur idéal jusqu'à la fréquence 2.4 rad/s de la gamme totale. La phase de ce dérivateur est linéaire, la figure est omise pour des raisons de simplicité.

c-2 Dérivateur d'Al-Alaoui d'ordre 2

La fonction de transfert suivante pour une classe des dérivateurs stables à bande incomplète et à phase minimale est obtenue [10], en appliquant l'approche donnée précédemment à la fonction de transfert définie par l'équation (1.45).

$$G_{ST}(z) = \frac{6(z^2 - 1)}{T_s r_1 (3 - \beta_2)(z + r_2)^2} \quad (1.48)$$

r_1 et r_2 sont données par l'eq. (1.45).

Nous traçons les réponses fréquentielles d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 2 ($\beta_2=0.6$) sur la figure 1. 31.

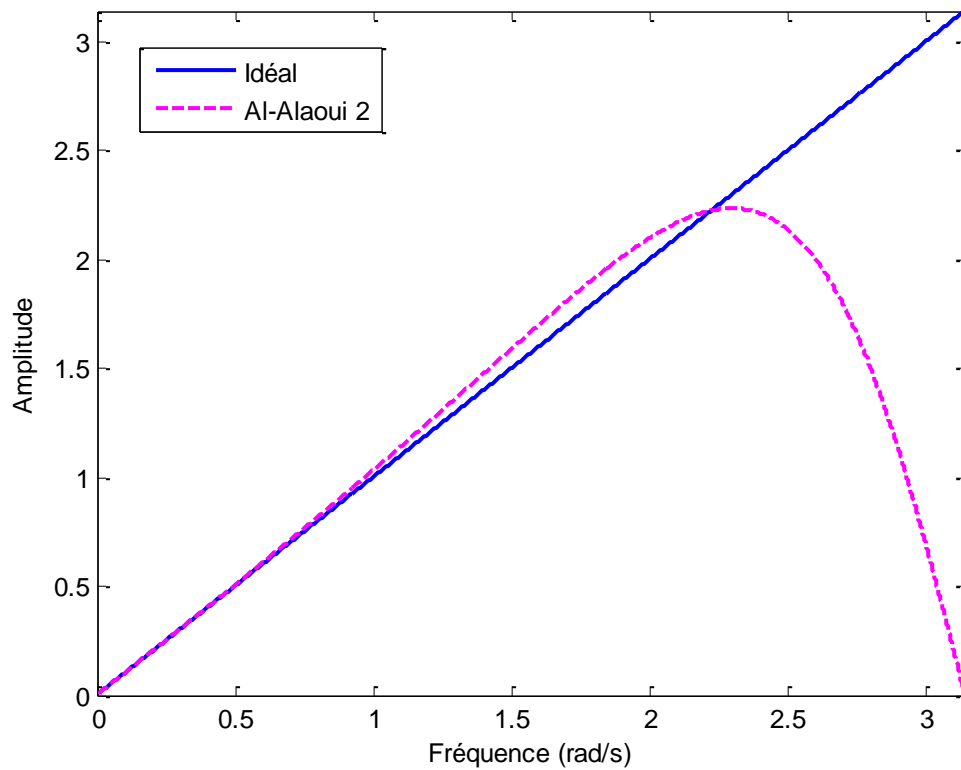


Fig. 1.31 Réponses fréquentielles d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 2 ($\beta_2=0.6$)

La réponse d'amplitude du dérivateur Al-Alaoui 2 se rapproche de celle du dérivateur idéal dans une large bande de fréquence en la comparant avec les réponses de Tustin et de Simpson. La réponse de phase du dérivateur combiné Tustin-Simpson est de 90° , la figure est omise pour des raisons de simplicité.

I.3 Les transformations du plan s au plan z

En égalant chacune des fonctions de transfert des dérivateurs étudiés ci-dessus à la fonction d'un dérivateur analogique s , nous pouvons obtenir la transformation du plan s au plan z . Elles sont résumées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 Transformations du plan s au plan z

Appellation de la transformation	Transformation “s à z”
Euler (progressif)	$s = \frac{z-1}{T_s}$ (1.21)
Euler (rétrograde)	$s = \frac{z-1}{T_s z}$ (1.25)
Tustin	$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$ (1.29)
Simpson	$s = \frac{3}{T_s} \frac{(z^2-1)}{(z^2+4z+1)}$ (1.30)
Schneider	$s = \frac{12z(z-1)}{T_s(5z^2+8z-1)}$ (1.31)
F ₀₁₂	$s = \frac{5z^2-4z-1}{2T_s z(z+2)}$ (1.49)
Schneider-Kaneshige- Groutage (SKG)	$s = \frac{24}{T_s} \frac{(z^3-z^2)}{(9z^3+19z^2-5z+1)}$ (1.32)
/	$s = \frac{720}{T_s} \frac{(z^4-z^3)}{(251z^4+646z^3-264z^2+106z-19)}$ (1.33)
/	$s = \frac{1440}{T_s} \frac{(z^5-z^4)}{(475z^5+1427z^4-798z^3+482z^2-173z+27)}$ (1.34)
Al-Alaoui 1	$s = \frac{8(z-1)}{7T_s(z+1/7)}$ (1.50)
Al-Alaoui 1 généralisé	$s = \frac{2(z-1)}{T_s((1+\beta_1)z+(1-\beta_1))}$ (1.51)
Al-Alaoui 2	$s = \frac{6(z^2-1)}{T_s r_1(3-\beta_2)(z+r_2)^2}$ (1.52) $r_1 = \frac{3+\beta_2+2\sqrt{3\beta_2}}{3-\beta_2}$ et $r_2 = \frac{3+\beta_2-2\sqrt{3\beta_2}}{3-\beta_2}$

En réalité, il n'existe pas d'équivalents exacts entre une fonction de transfert en temps continu, de type Laplace et une fonction de transfert en temps discret en z. Dans la littérature et selon les exemples cités précédemment nous constatons que les équivalents utilisés sont plus ou moins précis, plus ou moins efficaces et plus ou moins délicats à manipuler. En plus, aucune méthode n'est parfaite et nous n'aurons jamais en même temps: la même réponse

indicielle, la même réponse impulsionnelle, la correspondance des pôles et des zéros, la correspondance des réponses fréquentielles.

Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la discrétisation des systèmes analogiques, précisément l'objectif de cette opération, les méthodes de transformation du plan s au plan z et quelques exemples d'application de ces opérateurs. Un intérêt particulier est destiné aux méthodes d'intégration numérique Euler, Tustin et d'autres qui ont été entièrement détaillées. D'autres transformations suggérées dans cette thèse font l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 2 :

Proposition des nouveaux opérateurs “s à z”

Introduction

L'une des questions fondamentales, lors de la proposition d'une équivalence de fonctionnement entre un modèle à temps continu et un modèle à temps discret, réside dans la justesse du modèle d'un point de vue temporel et fréquentiel. Nous avons dit dans le chapitre précédent qu'aucune méthode n'est parfaite et précise. Pour cette raison, nous avons pensé alors à proposer dans ce chapitre d'autres opérateurs “s à z”, dont le but d'améliorer la précision des résultats obtenus et d'enrichir le domaine du traitement de signal pour que nous puissions les utiliser dans différentes applications.

II.1 Proposition des nouvelles transformations “s à z”

Pour obtenir des nouvelles transformations du plan s au plan z, nous proposons dans ce qui suit des intégrateurs à bande complète et à bande incomplète et des dérivateurs à bande complète. En égalant les fonctions de transfert obtenues à la fonction de transfert $1/s$ d'un intégrateur analogique idéal (ou à s dans le cas d'un dérivateur), nous obtenons la conversion du plan s au plan z.

II.1.1 Les intégrateurs à bande complète et à bande incomplète proposés

Nous avons vu déjà des notions fondamentales sur l'intégrateur idéal dans le chapitre précédent. Selon les réponses fréquentielles, l'intégrateur numérique a une réponse de phase constante de -90° , il est discontinu à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, cela rend l'approximation de cette réponse de phase difficile. Pour résoudre le problème de la discontinuité de phase, nous ajoutons un délai constant appelé temps de propagation de groupe τ_d . Donc, la réponse fréquentielle peut être écrite sous la forme suivante:

$$H_{id\tau_d}(\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \tau_d\omega\right)}, \quad |\omega| \leq \pi \quad (2.1)$$

L'intégrateur idéal utilisé dans le présent document est supposé être pour $\tau_d=0.5$, c'est celui du chercheur L. Bihan donné dans la référence [60]:

$$H_{id}(\omega) = e^{j\omega T_s/2} / j\omega \quad (2.2)$$

La réponse d'amplitude n'est pas affectée en utilisant cet intégrateur [61] (voir Fig. 2.1).

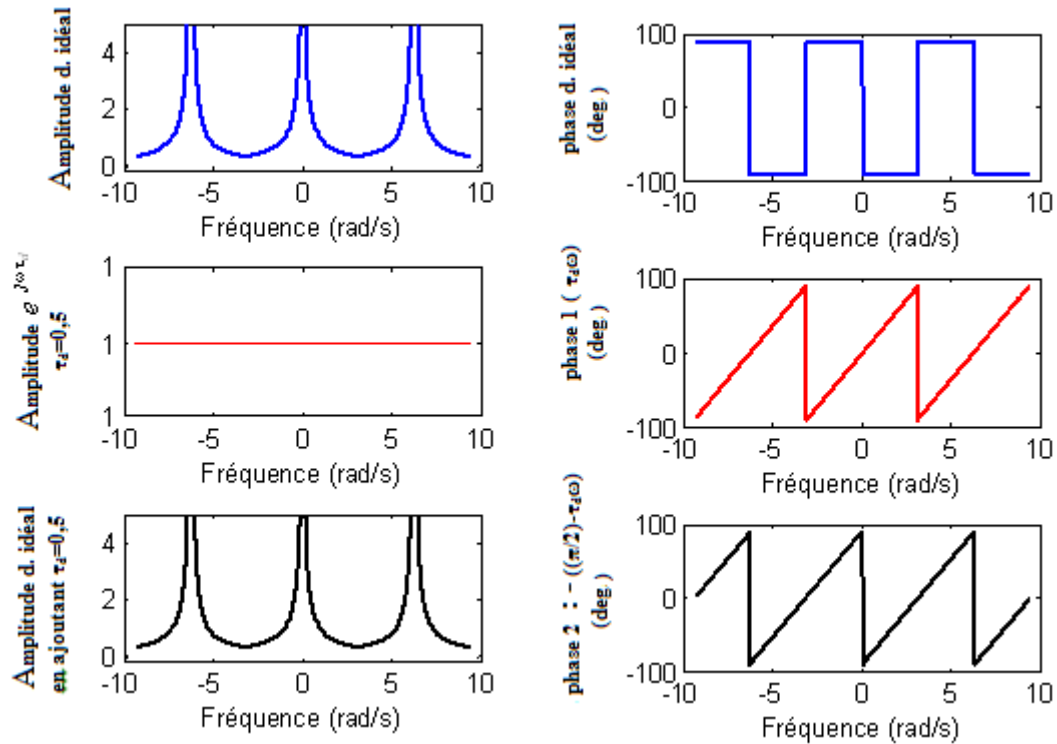


Fig. 2.1 Réponses d'amplitude et de phase de l'intégrateur idéal (supérieur), délai idéal d'un demi d'échantillon (milieu), et intégrateur idéal avec un délai de demi-échantillon (inférieur)

L'idée principale de notre contribution dans cette thèse est basée sur le travail d'Al-Alaoui qui est basée sur l'interpolation des intégrateurs bien connus (Euler [3-5,9], bilinéaire [3-9] et Simpson [10], [59]). Tout d'abord, nous interpolons les intégrateurs Schneider [39], Euler avec un paramètre, les intégrateurs d'Euler et F_{012} [42] avec un autre paramètre pour obtenir des intégrateurs à bande complète. Ensuite, pour la synthèse des intégrateurs à bande incomplète, nous combinons les intégrateurs F_{012} , Simpson; les intégrateurs Schneider et Simpson; les intégrateurs Simpson, Euler, bilinéaire et enfin les intégrateurs Euler, Simpson avec des paramètres de pondération. La sélection proposée de tous les paramètres est basée sur les erreurs relatives des réponses d'amplitude et de phase pour différentes valeurs de chaque paramètre.

II.1.1.1 Les intégrateurs à bande complète proposés

Dans cette section, des intégrateurs numériques à bande complète RII sont proposés tels que leurs réponses en fréquence se rapprochent de celle de l'intégrateur idéal $H_{id}(\omega)$ donnée par l'éq. (2.2) aussi bien que possible dans toute la gamme de fréquence ($\omega = [0, \pi)$). Les coefficients du filtre sont obtenus en combinant les intégrateurs Schneider, Euler et les

intégrateurs F_{012} , Euler pour obtenir des intégrateurs à bande complète. Les détails de ces combinaisons sont montrés dans ce qui suit.

a- L'intégrateur Schneider-Euler

Dans ce paragraphe, nous combinons l'intégrateur Schneider et l'intégrateur Euler. Les fonctions de transfert des intégrateurs utilisés Schneider et Euler sont données respectivement par:

$$H_{Sch}(z) = \frac{T_s(5z^2 + 8z - 1)}{12z(z - 1)} \quad (2.3)$$

$$H_{Eu}(z) = \frac{T_s z}{(z - 1)} \quad (2.4)$$

L'interpolation peut être écrite sous la forme suivante:

$$H_{SchEu}(z) = \beta_3 H_{Sch}(z) + (1 - \beta_3) H_{Eu}(z) \quad (2.5)$$

où β_3 est un paramètre réel défini dans l'intervalle $[0, 1]$.

En substituant (2.3) et (2.4) dans l'équation (2.5), nous obtenons:

$$H_{SchEu}(z) = \frac{T_s((12 - 7\beta_3)z^2 + 8\beta_3 z - \beta_3)}{12z(z - 1)} \quad (2.6)$$

Nous avons noté que les sélections des paramètres sont effectuées graphiquement. Pour la première interpolation entre les règles de Schneider et Euler, les erreurs relatives des réponses d'amplitude et celles des réponses de phase sont données par les éq. (2.7) et éq. (2.8) respectivement.

$$ER_1 = \frac{|H_{id}| - |H_{SchEu}|}{|H_{id}|} \quad (2.7)$$

$$ER_2 = \frac{\Phi_{H_{id}} - \Phi_{H_{SchEu}}}{\Phi_{H_{id}}} \quad (2.8)$$

Nous présentons les erreurs relatives des réponses d'amplitude et de phase pour β_3 allant de 0.12 à 0.92 avec un incrément de 0.1, sur la Fig. 2. 2 et la Fig. 2. 3 respectivement.

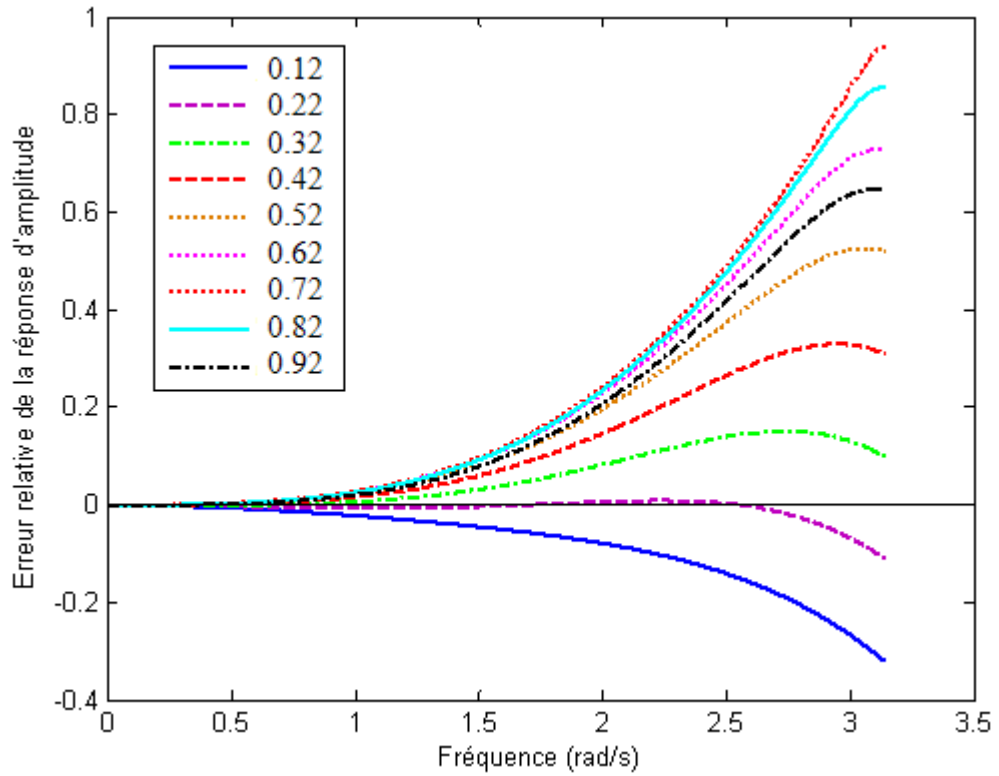


Fig. 2.2 Erreur relative des réponses d'amplitude pour $\beta_3=0.12$ jusqu'à 0.92 avec un incrément de 0.1

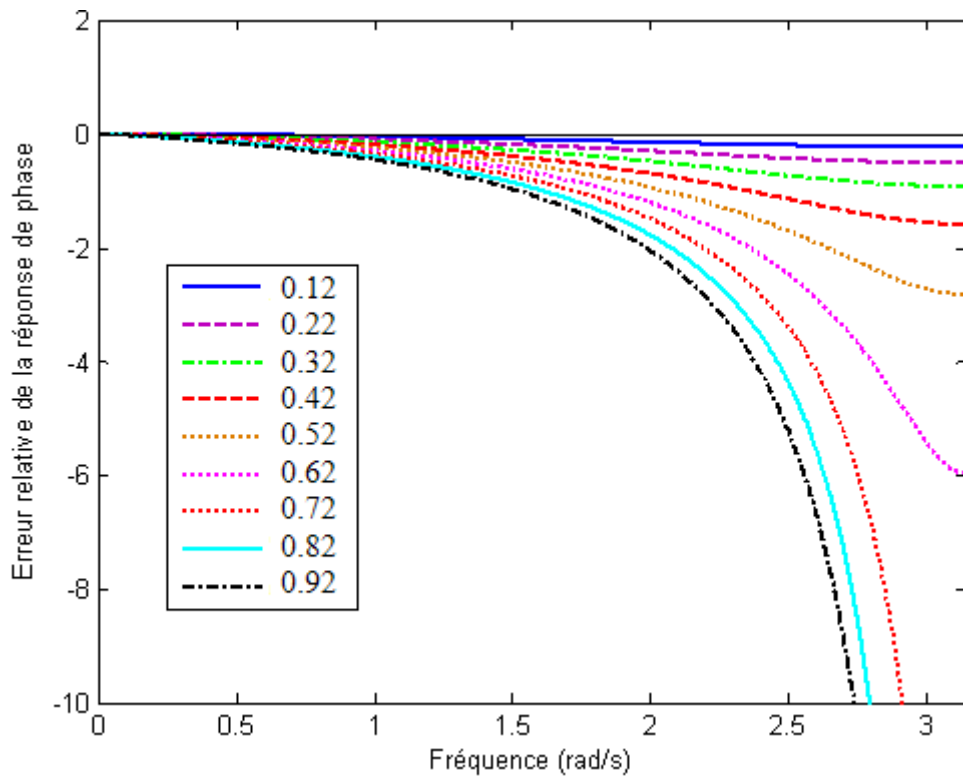


Fig. 2.3 Erreur relative des réponses de phase pour $\beta_3=0.12$ jusqu'à 0.92 avec un incrément de 0.1

Nous remarquons d'après ces figures que l'erreur relative d'amplitude pour " $\beta_3 = 0.22$ " est presque nulle dans la gamme de fréquence de 0 à 2.635 rad/s. Les autres erreurs sont trop petites, mais sur une gamme étroite de fréquence. L'erreur relative de la réponse en phase est loin d'être nulle sur toute la gamme de fréquence avec l'augmentation de " β_3 ". Elle est proche de zéro pour les valeurs 0.12, et 0.22. En se basant sur toutes ces remarques, nous choisissons l'intégrateur obtenu pour " $\beta_3 = 0.22$ ". Alors, la fonction de transfert de l'intégrateur Schneider-Euler dans ce cas est:

$$\frac{1}{s} \approx H_{SchEu(\beta_3=0.22)}(z) = \frac{T_s(523z^2 + 88z - 11)}{600z(z-1)} \quad (2.9)$$

Les réponses d'amplitude et de phase des intégrateurs: idéal, Schneider, Euler et le nouvel intégrateur sont présentés sur la figure 2.4 et la figure 2.5 respectivement.

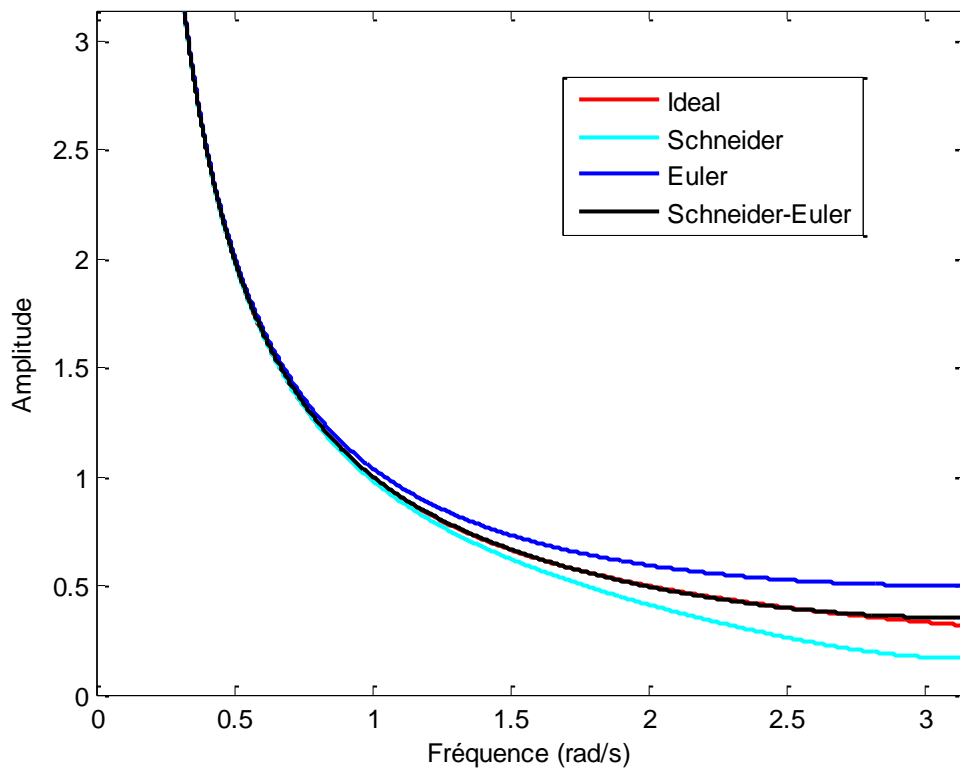


Fig. 2.4 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Schneider, Euler et le nouvel intégrateur (Schneider-Euler)

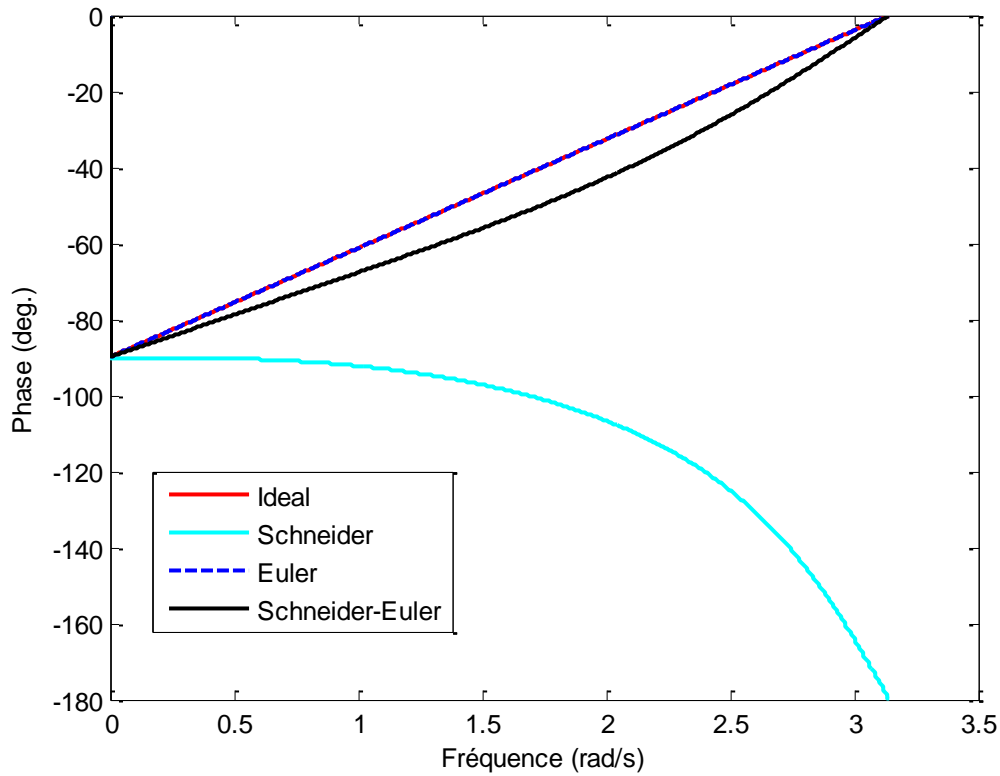


Fig. 2.5 Phases des intégrateurs: idéal, Schneider, Euler et Schneider-Euler

D'après les figures 2.4 et 2.5, la réponse fréquentielle d'amplitude du nouvel intégrateur Schneider-Euler est plus proche de celle de l'intégrateur idéal. La phase de l'intégrateur obtenu est linéaire.

b- L'intégrateur F_{012} -Euler 1

Dans ce paragraphe, nous décrivons l'intégrateur mixte F_{012} -Euler 1. La fonction de transfert de l'intégrateur F_{012} est donnée par:

$$F_{012}(z) = \frac{2T_s z(z+2)}{5z^2 - 4z - 1} \quad (2.10)$$

L'interpolation peut être écrite comme suit:

$$H_{012Eu}(z) = \beta_4 F_{012}(z) + (1-\beta_4) H_{Eu}(z) \quad (2.11)$$

où β_4 est un paramètre réel défini dans l'intervalle $[0, 1]$.

En substituant (2.4) et (2.10) dans l'équation (2.11), nous obtenons:

$$H_{012Eu}(z) = \beta_4 \frac{2T_s z(z+2)}{5z^2 - 4z - 1} + (1 - \beta_4) \frac{T_s z}{(z-1)}$$

$$H_{012Eu}(z) = T_s \frac{(5 - 3\beta_4)z^2 + (1 + 3\beta_4)z}{5z^2 - 4z - 1} \quad (2.12)$$

Comme dans le paragraphe précédent, le choix du paramètre β_4 est basé sur les erreurs relatives des réponses d'amplitude et celles des réponses de phase pour des valeurs de β_4 allant de 0.14 à 0.94 avec un incrément de 0.1. Nous choisissons “ $\beta_4 = 0.24$ ”. Donc, la fonction de transfert de l'intégrateur F_{012} -Euler 1 devient:

$$\frac{1}{s} \approx H_{012Eu(\beta_4=0.24)}(z) = \frac{T_s z(107z + 43)}{25(5z^2 - 4z - 1)} \quad (2.13)$$

Nous montrons les réponses d'amplitude et de phase des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et le nouvel intégrateur sur les figures 2.6 et 2.7 respectivement.

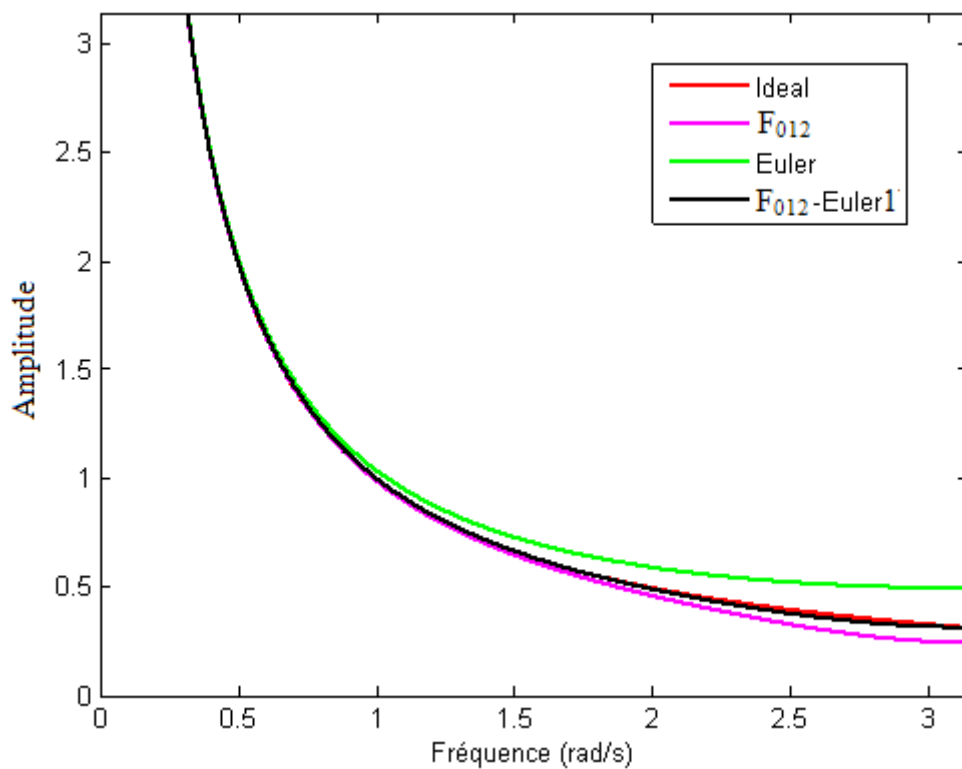


Fig. 2.6 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et le nouvel intégrateur (F_{012} -Euler 1)

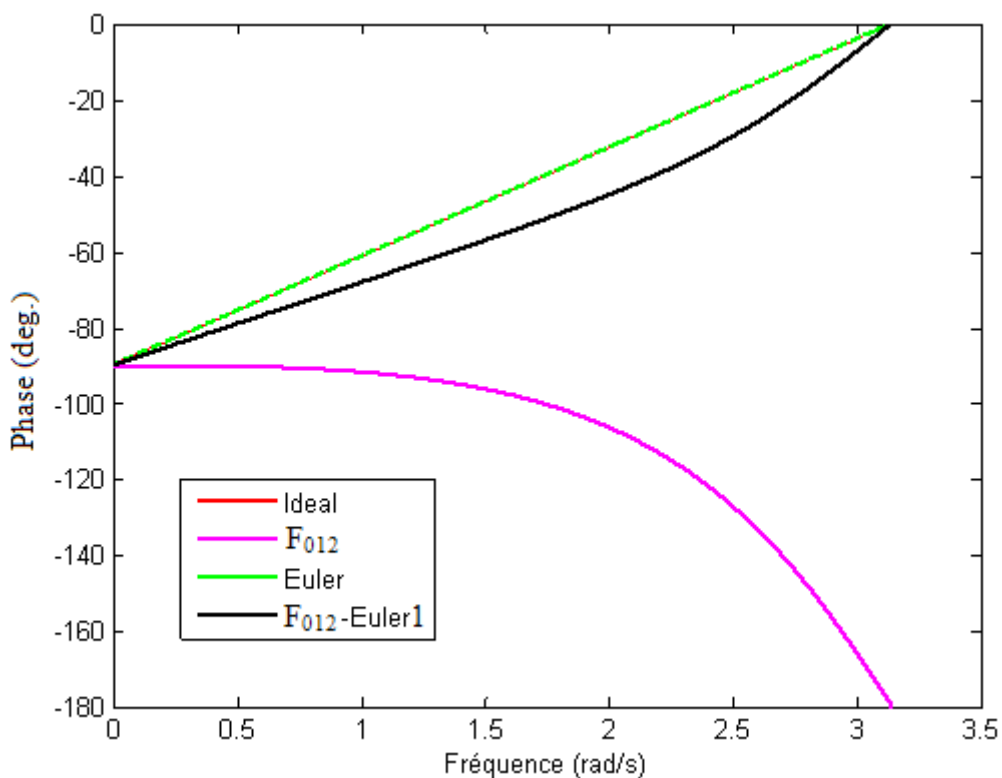


Fig. 2.7 Réponses de phases des intégrateurs: idéal, F₀₁₂, Euler et F₀₁₂-Euler 1

Il est clair d'après les figures 2.6 et 2.7 que la réponse d'amplitude du nouvel intégrateur F₀₁₂-Euler 1 est plus proche de celle de l'intégrateur idéal en le comparant avec les intégrateurs d'Euler et le F₀₁₂. Les phases des intégrateurs Euler et F₀₁₂- Euler sont linéaires.

Les intégrateurs obtenus après l'interpolation sont résumés dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1: Intégrateurs à bande complète proposés

Règle 1	Règle 2	La combinaison des deux règles	L'intégrateur obtenu
<p>Schneider</p> $H_{Sch}(z) = \frac{T_s(5z^2 + 8z - 1)}{12z(z - 1)}$	<p>Euler</p> $H_{Eu}(z) = \frac{T_s z}{(z - 1)}$	$H_{SchEu}(z) = \beta_3 H_{Sch}(z) + (1 - \beta_3) H_{Eu}(z)$	<p>Pour $\beta_3=0.22$</p> $H_{SchEu}(z) = \frac{T_s(523z^2 + 88z - 11)}{600z(z - 1)}$ <p>(2.9)</p>
<p>F₀₁₂</p> $F_{012}(z) = \frac{2T_s z(z + 2)}{5z^2 - 4z - 1}$	<p>Euler</p> $H_{Eu}(z) = \frac{T_s z}{(z - 1)}$	$H_{012Eu}(z) = \beta_4 F_{012}(z) + (1 - \beta_4) H_{Eu}(z)$	<p>Pour $\beta_4=0.24$</p> $H_{012Eu}(z) = \frac{T_s z(107z + 43)}{25(5z^2 - 4z - 1)}$ <p>(2.13)</p>

II.1.1.2 Les intégrateurs à bande incomplète proposés

Cette sous-section traite la synthèse des intégrateurs à bande incomplète. Dans ce cas, les réponses en fréquence des intégrateurs se rapprochent de celle de l'intégrateur idéal aussi bien que possible dans une certaine bande de fréquence ($\omega < \pi$). Cela peut être obtenu en combinant les intégrateurs F_{012} , Simpson, les intégrateurs Schneider, Simpson, l'intégrateur mixte Simpson-Euler avec un paramètre fixé $\beta_7 = 0.1$ et l'intégrateur bilinéaire et enfin les intégrateurs Euler, Simpson. Les paramètres β_5 , β_6 , β_8 et β_9 sont obtenus de la même manière que celle décrite dans le paragraphe précédent. Les intégrateurs obtenus sont donnés par les équations (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17) dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2: Intégrateurs à bande incomplète proposés

Règle 1	Règle 2	Règle 3	La combinaison des règles	L'intégrateur obtenu
F₀₁₂ $F_{012}(z) = T_s \frac{2z(z+2)}{5z^2 - 4z - 1}$	Simpson $H_s(z) = \frac{T_s}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}$	/	$H_{012s}(z) = \beta_5 H_{012}(z) + (1 - \beta_5) H_s(z)$	Pour $\beta_5 = 0.7$ $\frac{1}{s} \approx H_{012s}(z) = \frac{T_s}{10} \frac{19z^3 + 63z^2 + 37z + 1}{(5z^3 + z^2 - 5z - 1)}$ (2.14)
Schneider $H_{sch}(z) = \frac{T_s}{12} \frac{5z^2 + 8z - 1}{z^2 - z}$	Simpson $H_s(z) = \frac{T_s}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}$	/	$H_{SSch}(z) = \beta_6 H_{sch}(z) + (1 - \beta_6) H_s(z)$	Pour $\beta_6 = 0.4$ $\frac{1}{s} \approx H_{SSch}(z) = \frac{T_s}{30} \frac{11z^3 + 37z^2 + 13z - 1}{(z^2 - 1)z}$ (2.15)
Simpson $H_s(z) = \frac{T_s}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}$	Euler $H_{Eu}(z) = \frac{T_s z}{(z - 1)}$	bilinéaire $H_b(z) = \frac{T_s}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$	$H_{SEu}(z) = \beta_7 H_s(z) + (1 - \beta_7) H_{Eu}(z)$ $H_{SEub}(z) = \beta_8 H_{SEu}(z) + (1 - \beta_8) H_b(z)$	Pour $\beta_7 = 0.1$, $\beta_8 = 0.8$ $\frac{1}{s} \approx H_{SEub}(z) = \frac{T_s}{150} \frac{127z^2 + 154z + 19}{(z^2 - 1)}$ (2.16)
Simpson $H_s(z) = \frac{T_s}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}$	Euler $H_{Eu}(z) = \frac{T_s z}{(z - 1)}$	/	$H_{SEu}(z) = \beta_9 H_s(z) + (1 - \beta_9) H_{Eu}(z)$	Pour $\beta_9 = 0.5$ $\frac{1}{s} \approx H_{Eus}(z) = \frac{T_s}{6} \frac{4z^2 + 7z + 1}{z^2 - 1}$ (2.17)

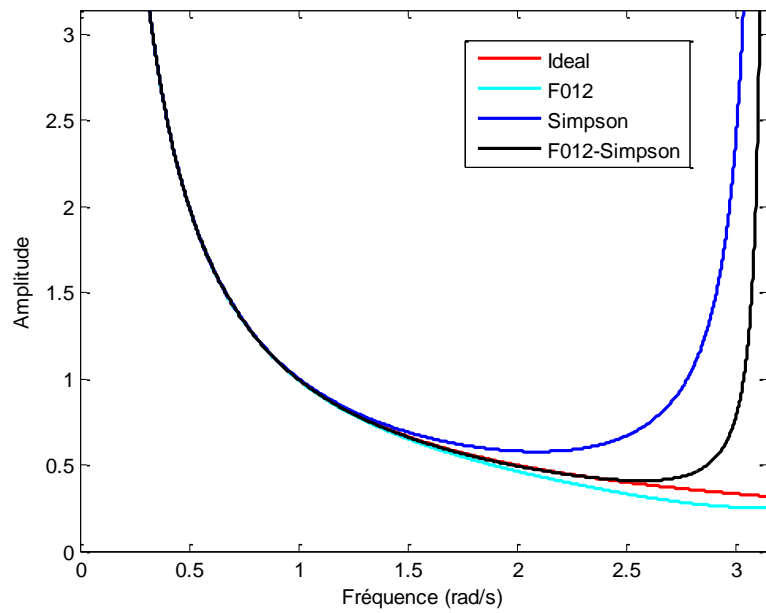


Fig. 2.8 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, F_{012} , Simpson et le nouvel intégrateur F_{012} -Simpson

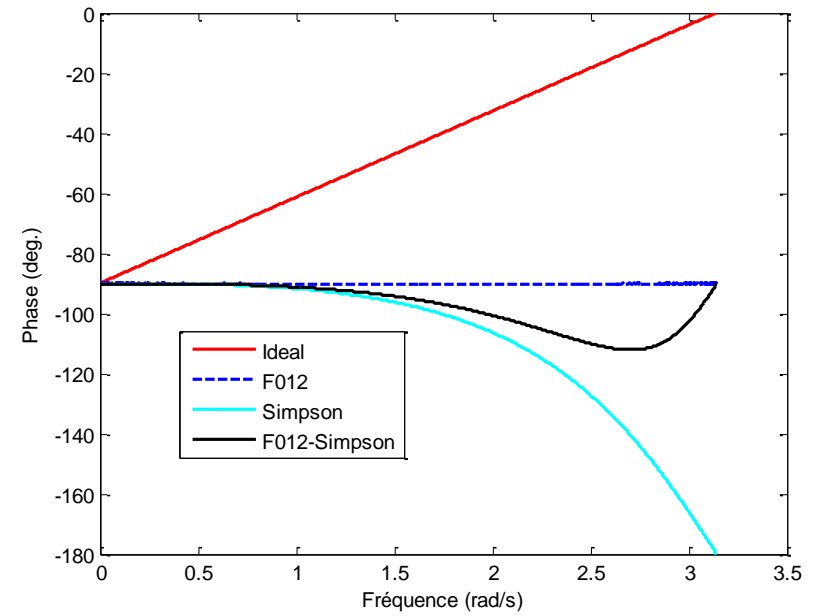


Fig. 2.9 Réponses de phase des intégrateurs: idéal, F_{012} , Simpson et le nouvel intégrateur F_{012} -Simpson

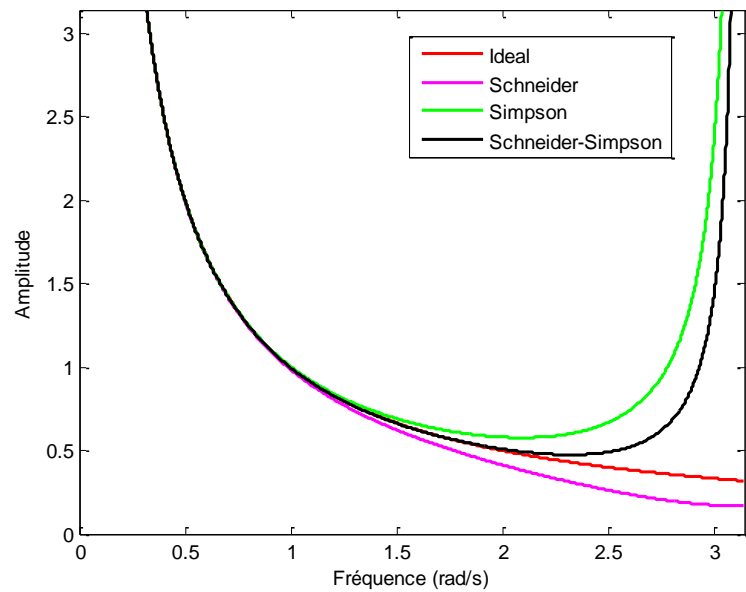


Fig. 2.10 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Schneider, Simpson et le nouvel intégrateur Schneider-Simpson

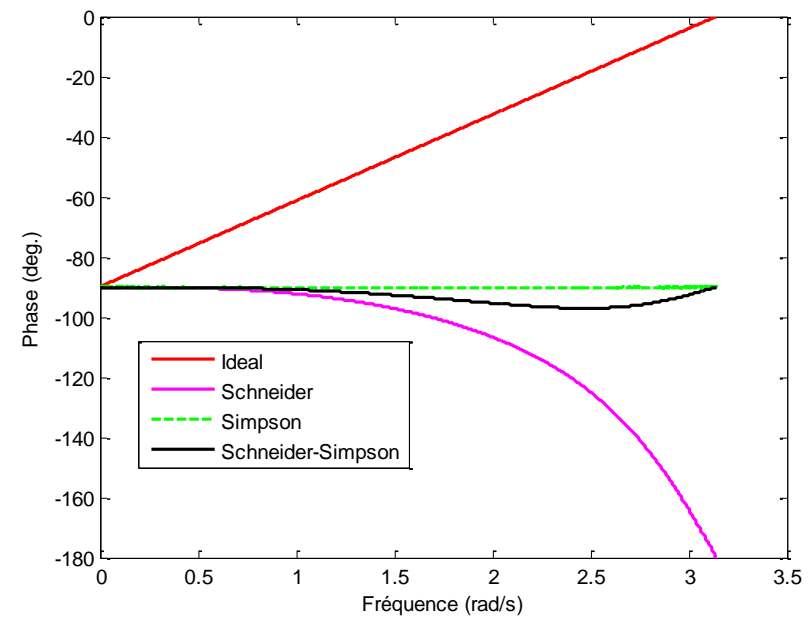


Fig. 2.11 Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Schneider, Simpson et le nouvel intégrateur Schneider-Simpson

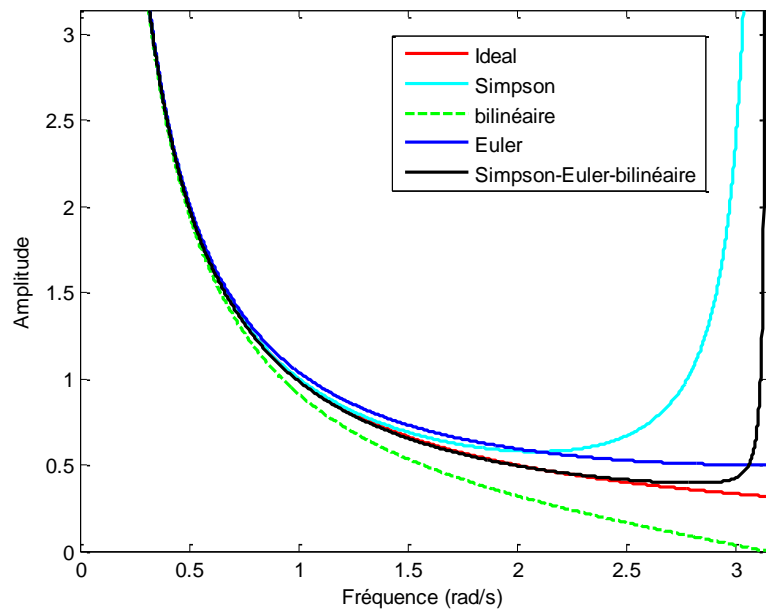


Fig. 2.12 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Simpson, bilinéaire et le nouvel intégrateur Simpson-Euler-bilinéaire

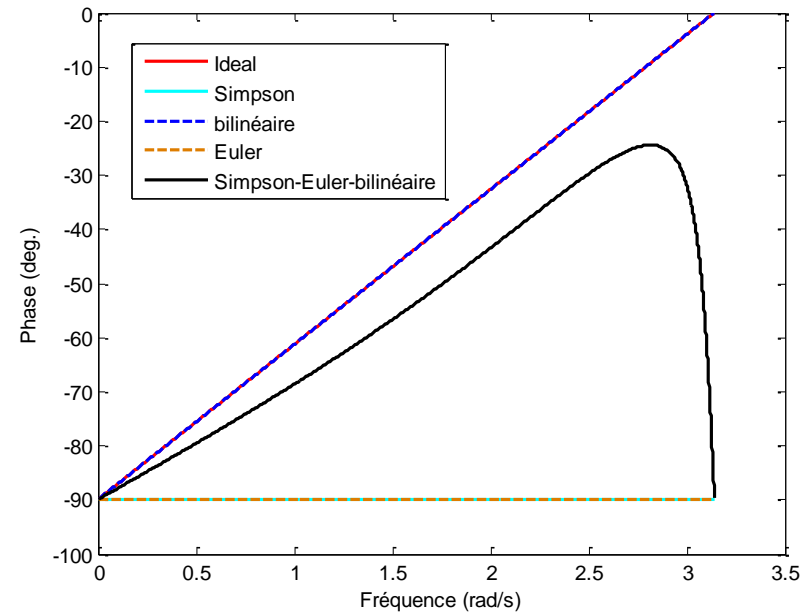


Fig. 2.13 Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Simpson, bilinéaire et le nouvel intégrateur Simpson-Euler-bilinéaire

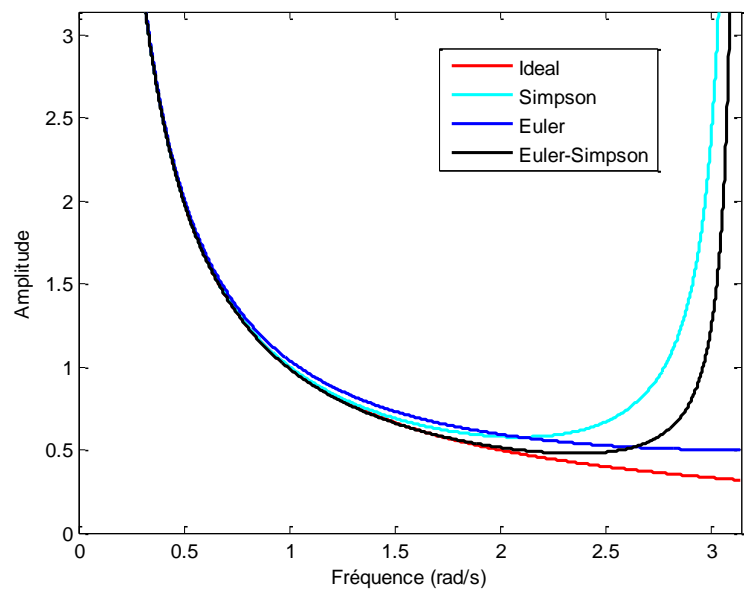


Fig. 2.14 Réponses d'amplitude des intégrateurs: idéal, Simpson, Euler et le nouvel intégrateur Euler-Simpson

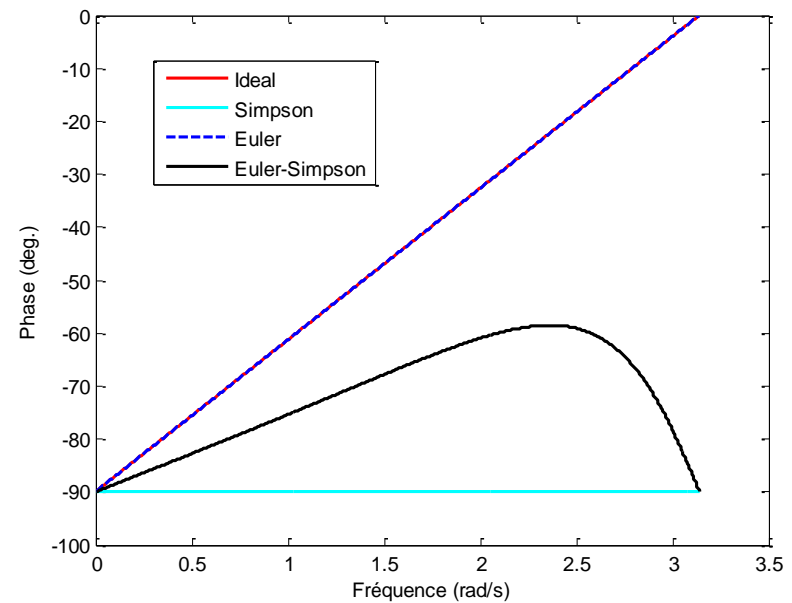


Fig. 2.15 Réponses de phase des intégrateurs: idéal, Simpson, Euler et le nouvel intégrateur Euler-Simpson

Il apparait des figures 2.8, 2.10, 2.12, et 2.14 que les réponses fréquentielles d'amplitude des intégrateurs approximatés sont plus proches de celle de l'intégrateur idéal sauf dans une petite région près de la fréquence $\omega=\pi$. Les phases des intégrateurs obtenus: Euler-Simpson-bilinéaire et Euler-Simpson sont linéaires. Elles deviendront égales à -90° à $\omega=\pi$.

II.1.2 Les dérivateurs à bande complète proposés

La réponse de phase du dérivateur idéal est aussi discontinue à un demi de la fréquence d'échantillonnage $\omega_s / 2$, ce problème est résolu de la même manière précédente concernant l'intégrateur idéal. Donc, la réponse de phase linéaire désirée peut être donnée par:

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tau_d \omega \quad (2.18)$$

Les caractéristiques de la réponse en fréquence idéale d'un dérivateur numérique sont montrées à la Fig. 2.16 [61].

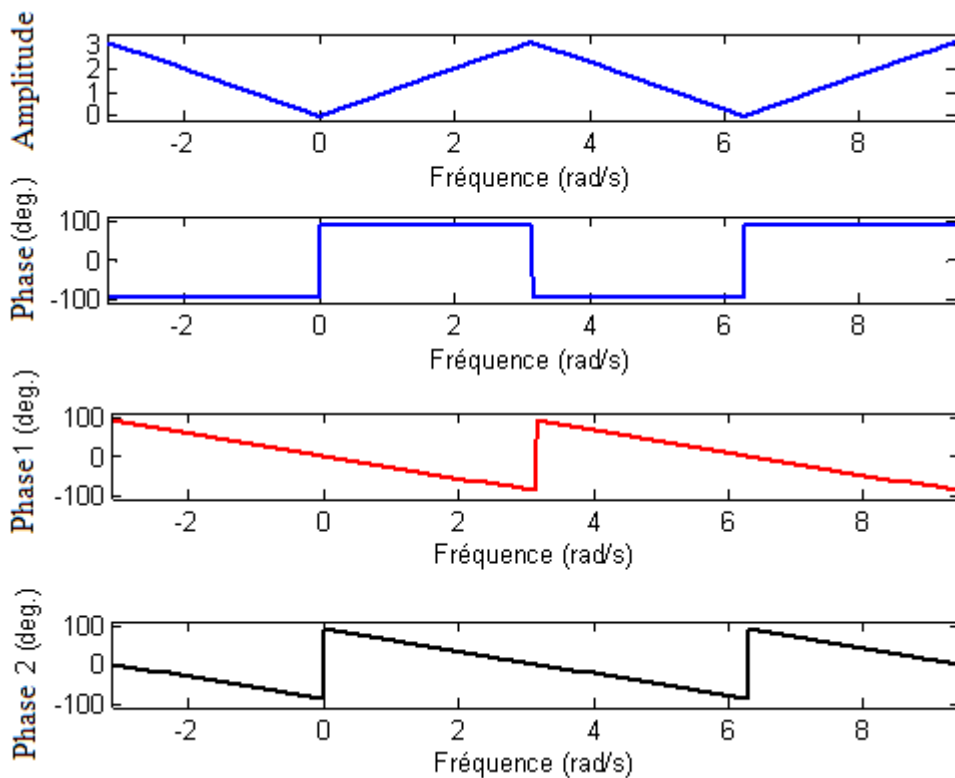


Fig. 2.16 Réponses fréquentielles du dérivateur idéal, (phase1 = $-\tau_d \omega$, la phase 2 est la somme des deux phases: phase 1 et celle du dérivateur idéal)

a- L'opérateur d'Al-Alaoui modifié

Nous rappelons que le dérivateur d'Al-Alaoui d'ordre 1 est obtenu en inversant la fonction de transfert de l'intégrateur approximé en combinant les deux intégrateurs rectangulaire et trapézoïdal. La fonction de transfert de ce dérivateur est définie par:

$$H_{\beta}(z) = \frac{2(1 - z^{-1})}{T_s((1 + \beta_1) + (1 - \beta_1)z^{-1})} \quad (2.19)$$

Dans cette contribution, notre travail vise à trouver une valeur optimale du paramètre " β_1 " en utilisant l'approche de la programmation linéaire [37, 45, 46], afin d'améliorer les résultats de la conversion du plan s au plan z.

Procédure optimale de synthèse

Soit la fonction de transfert du dérivateur du premier ordre RII donné par (2.19).

Le problème de la synthèse de ce filtre est de trouver le vecteur de ses coefficients " $(1 + \beta_1)$ ", " $(1 - \beta_1)$ " tel que la réponse en fréquence $H_{\beta}(\omega)$ se rapproche de la réponse idéale du dérivateur d'ordre 1, $H_d(\omega)$ le plus possible.

$$H_d(\omega) = \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \tau_d \omega\right)}, \quad |\omega| \leq \pi \quad (2.20)$$

L'erreur complexe $E(\omega_i)$ entre la réponse en fréquence idéale et celle du filtre synthétisé est définie par:

$$E(\omega_i) = H_d(\omega_i) - H_{\beta}(\omega_i) \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (2.21)$$

où L est le nombre de fréquences prises dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Les parties réelle et imaginaire de l'erreur complexe sont données par:

$$e_R(\omega_i) = \beta_1 \omega_i [\sin(\tau_d \omega_i) - \sin((\tau_d + 1)\omega_i)] + \omega_i [\sin(\tau_d \omega_i) + \sin((\tau_d + 1)\omega_i)] - 2 + 2 \cos(\omega_i T_s) \quad (2.22)$$

$$e_I(\omega_i) = \beta_1 \omega_i [\cos(\tau_d \omega_i) - \cos((\tau_d + 1)\omega_i)] + \omega_i [\cos(\tau_d \omega_i) + \cos((\tau_d + 1)\omega_i)] - 2 \sin(\omega_i T_s) \quad (2.23)$$

Une bonne approximation pour les spécifications désirées peut être obtenue par la minimisation d'une variable positive ε de telle sorte que:

$$|e_R(\omega_i)| \leq \varepsilon \quad (2.24)$$

$$|e_I(\omega_i)| \leq \varepsilon \quad (2.25)$$

Le problème de l'approximation précité est un problème de programmation linéaire puisque $e_R(\omega_i)$ et $e_I(\omega_i)$ sont linéaires en termes des coefficients a_i 's. Le problème est de:

Minimiser:

$$f_1 = [\beta_1, \varepsilon] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Selon:

$$\begin{aligned} \beta_1 \omega_i [\sin(\tau_d \omega_i) - \sin((\tau_d + 1)\omega_i)] - \varepsilon &\leq \\ -\omega_i [\sin(\tau_d \omega_i) + \sin((\tau_d + 1)\omega_i)] + 2 - 2 \cos(\omega_i T_s) & \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} -\beta_1 \omega_i [\sin(\tau_d \omega_i) - \sin((\tau_d + 1)\omega_i)] - \varepsilon &\leq \\ \omega_i [\sin(\tau_d \omega_i) + \sin((\tau_d + 1)\omega_i)] - 2 + 2 \cos(\omega_i T_s) & \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \omega_i [\cos(\tau_d \omega_i) - \cos((\tau_d + 1)\omega_i)] - \varepsilon &\leq \\ -\omega_i [\cos(\tau_d \omega_i) + \cos((\tau_d + 1)\omega_i)] + 2 \sin(\omega_i T_s) & \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} -\beta_1 \omega_i [\cos(\tau_d \omega_i) - \cos((\tau_d + 1)\omega_i)] - \varepsilon &\leq \\ \omega_i [\cos(\tau_d \omega_i) + \cos((\tau_d + 1)\omega_i)] - 2 \sin(\omega_i T_s) & \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les contraintes indiquées ci-dessus sont suffisantes pour l'approximation, mais n'assurent pas la stabilité du filtre. Par conséquent, des contraintes supplémentaires sont nécessaires pour synthétiser un filtre stable.

La contrainte utilisée dans l'algorithme de synthèse est [45]:

$$2\beta_1 (\sin(\omega T_s / 2))^2 - 2(\cos(\omega T_s / 2))^2 \leq \delta \quad (2.31)$$

où δ est un nombre réel positif.

Nous présentons un exemple avec différentes valeurs du paramètre τ_d , afin d'étudier l'effet de ce paramètre sur les résultats de la synthèse. L'objectif principal de choisir τ_d est d'introduire une nouvelle formule de discrétisation.

Les paramètres pris en compte dans le présent travail sont les suivants:

- Fréquence d'échantillonnage: $f_s = 1$.
- Nombre de points de fréquences $L = 120$.
- La valeur de $\delta = 0.000001$.
- Différentes valeurs du temps de propagation de groupe τ_d .

La figure 2.17 montre les erreurs relatives pour différentes valeurs du temps de propagation de groupe τ_d (ER1) et l'erreur Al-Alaoui 1 (ER2).

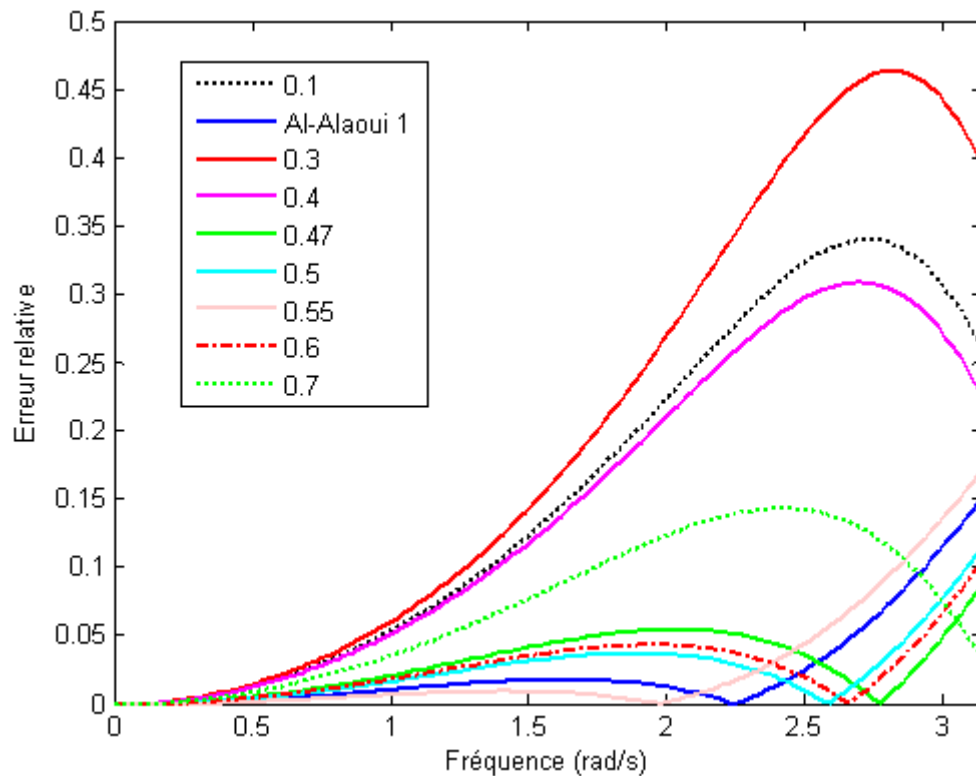


Fig. 2.17 Erreurs relatives pour différentes valeurs de τ_d (ER1) et l'erreur Al-Alaoui 1 (ER2)

Il est clair d'après la figure 2.17 que la petite erreur relative maximale est obtenue pour $\tau_d = 0,55$ ($ER1 \leq 0.007935$), cette valeur de τ_d couvre une gamme de fréquence de 0 à 2.121 rad/s. L'erreur relative la plus élevée est obtenue pour les valeurs du temps de propagation de groupe suivantes $\tau_d = 0.1, 0.3, 0.4$. Pour les autres valeurs de τ_d , les erreurs relatives sont élevées aux basses et aux moyennes fréquences. Elles deviennent petites en hautes fréquences.

Nos expériences ont cependant montré que pour chaque valeur différente de τ_d , il y aura un nouveau problème de programmation linéaire. La variation de la minimisation de ε par rapport au temps de propagation de groupe τ_d est illustrée à la figure 2.18.

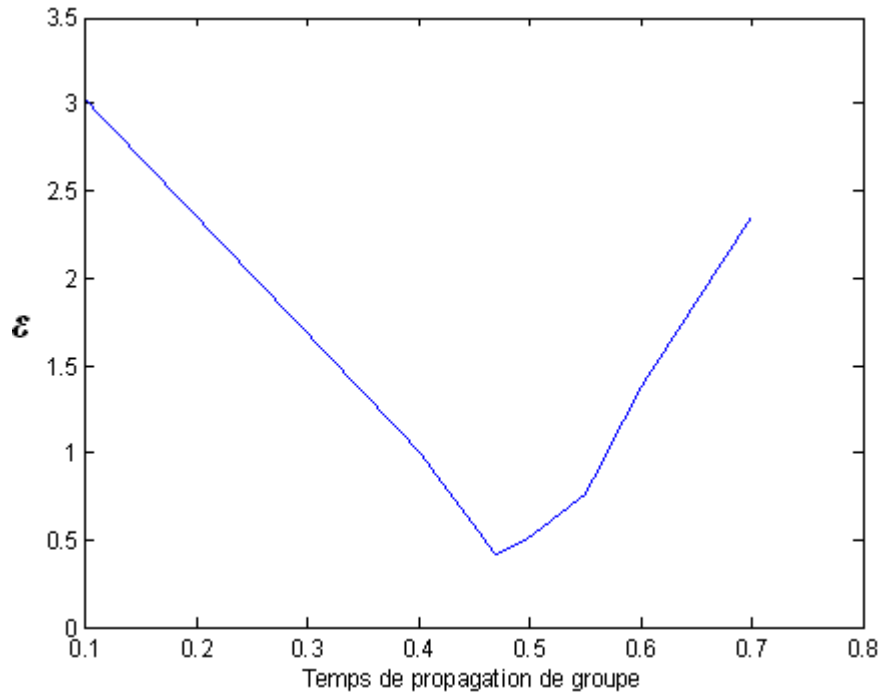


Fig. 2.18 Variation de la minimisation de ϵ par rapport au temps de propagation de groupe τ_d

Les résultats obtenus montrent que la valeur minimale de ϵ est achevée (0.412220802802494) pour $\tau_d = 0.47$ (Fig. 2.6). Pour plus de précision, la procédure est répétée pour onze valeurs de τ_d ($\tau_d = 0.4, 0.4711-0.4716$ (pas de 0.01), $0.472-0.474$ (pas de 0.01), 0.478), la valeur optimale du temps de propagation de groupe est $\tau_d = 0.4712$. La valeur optimale de " β_1 " est 0.703197779214486, ce qui donne la fonction de transfert optimale suivante:

$$s \approx H_{\beta}(z) = \frac{2(z-1)}{T_s(1.7031977792 \ 14486 \ z + 0.2968022207 \ 85514)} \quad (2.32)$$

Les réponses d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 1, et le dérivateur approximé sont présentés sur la figure 2.19.

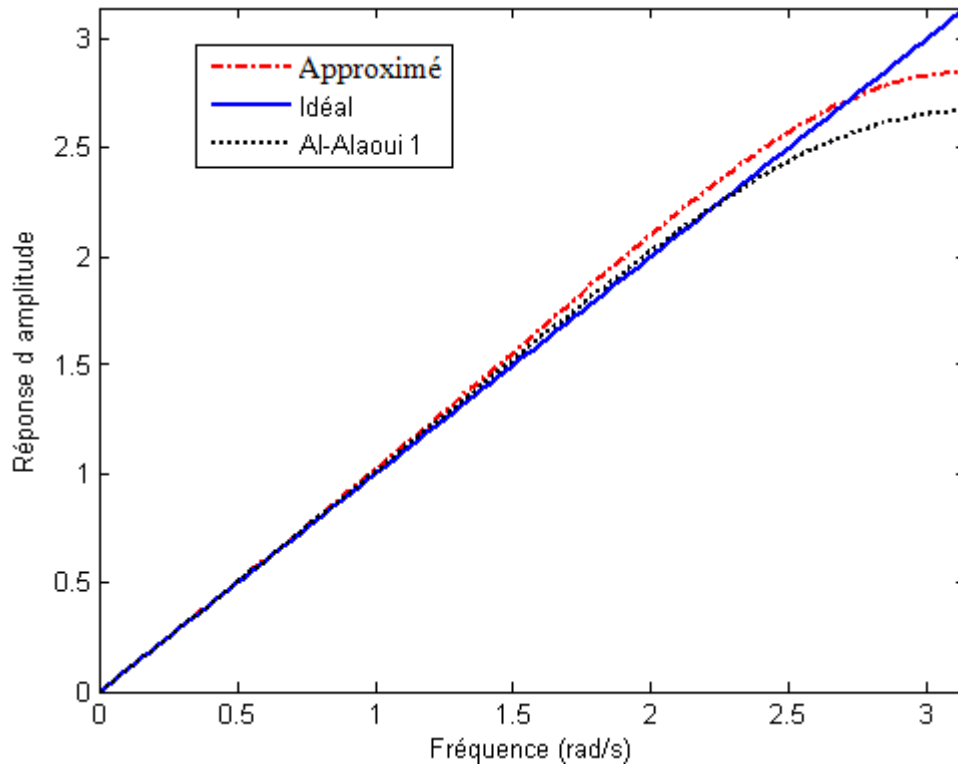


Fig. 2.19 Réponses d'amplitude des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui 1, et le dérivateur approximé pour $\beta_1 = 0.703197779214486$

Cette figure montre clairement que la réponse d'amplitude du dérivateur approximé est plus proche de celle du dérivateur idéal dans les hautes fréquences en le comparant avec la réponse d'amplitude du dérivateur d'Al-Alaoui 1. Cependant, dans les basses et les moyennes fréquences le dérivateur Al-Alaoui 1 donne une bonne approximation du dérivateur idéal. En tant que mesure de la qualité de l'approximation de la réponse d'amplitude, l'erreur relative a été utilisée. Les courbes des erreurs relatives sont présentées sur la figure. 2.20.

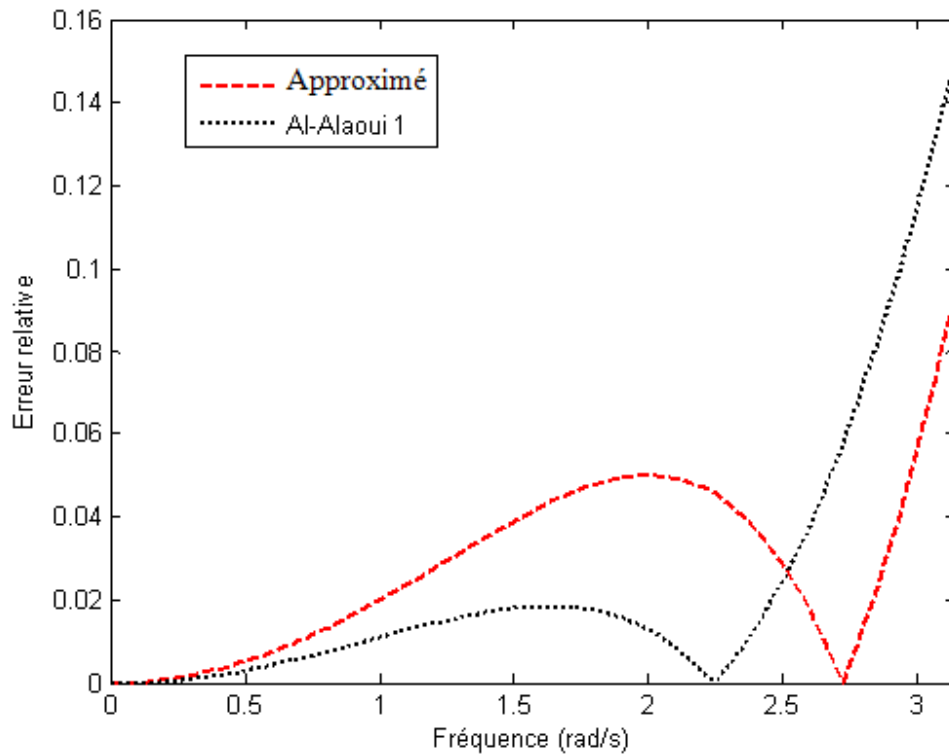


Fig. 2.20 Erreurs relatives

Nous remarquons d’après la figure. 2.20 que l’erreur relative du dérivateur Al-Alaoui 1 est inférieure à celle du dérivateur approximé jusqu’à la fréquence 2.513 rad/s. Par ailleurs, cette erreur devient plus élevée par rapport à celle du dérivateur obtenu.

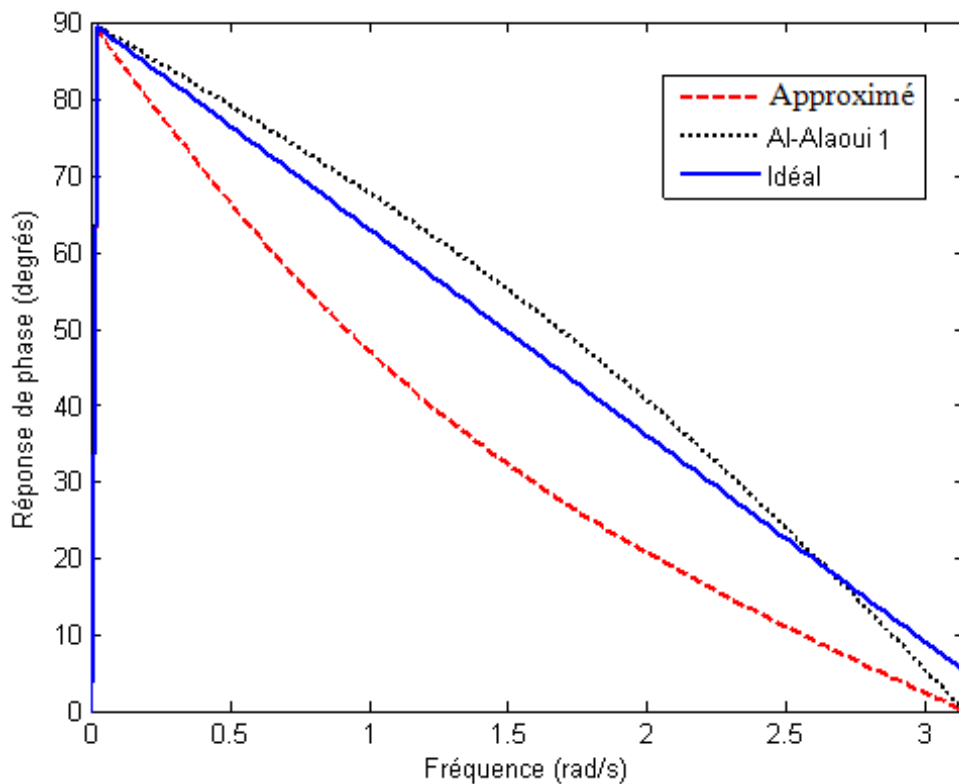


Fig. 2.21 Phases des dérivateurs: idéal, Al-Alaoui et optimal

Nous remarquons d’après cette figure que toutes les phases sont presque linéaires sur toute la gamme de fréquence. L’erreur maximale de la réponse en phase est obtenue pour le dérivateur optimal.

b- L’opérateur F_{012} -Euler 2

Nous proposons ici de combiner deux dérivateurs avec un paramètre β_{10} au lieu de deux intégrateurs, nous avons choisi le F_{012} stabilisé et Euler. Le choix du paramètre β_{10} est étudié en appliquant la même procédure précédente, la programmation linéaire.

La fonction de transfert du dérivateur F_{012} est donnée par l’éq. (1.49):

$$F_{012}(z) = \frac{5z^2 - 4z - 1}{2T_s(z + 2)}$$

Ce dérivateur est instable, Nous appliquons la méthode utilisée par Al-Alaoui pour résoudre ce problème [10], en mettant les pôles qui se trouvent à l’extérieur du cercle unité à l’intérieur du cercle unité. Donc nous remplaçons le pôle $z = -2$ par le nouveau pôle $z = -1/2$, Ensuite nous compensons le changement d’amplitude en multipliant la fonction de transfert résultante par $1/2$. Donc, nous obtenons:

$$F_{012}(z) = \frac{5z^2 - 4z - 1}{4T_s z(z + 1/2)} \quad (2.33)$$

Après une étude d’un exemple avec différentes valeurs du paramètre τ_d pour choisir le temps de propagation de groupe optimal τ_d , avec les paramètres suivants:

- Fréquence d’échantillonnage: $f_s = 1$.
- Nombre de points de fréquences $L = 118$.
- La valeur de $\delta = 0.000001$.
- Différentes valeurs du temps de propagation de groupe τ_d .

Les erreurs relatives pour différentes valeurs du temps de propagation de groupe τ_d et l’erreur Al-Alaoui 1 sont présentés sur la figure 2.22.

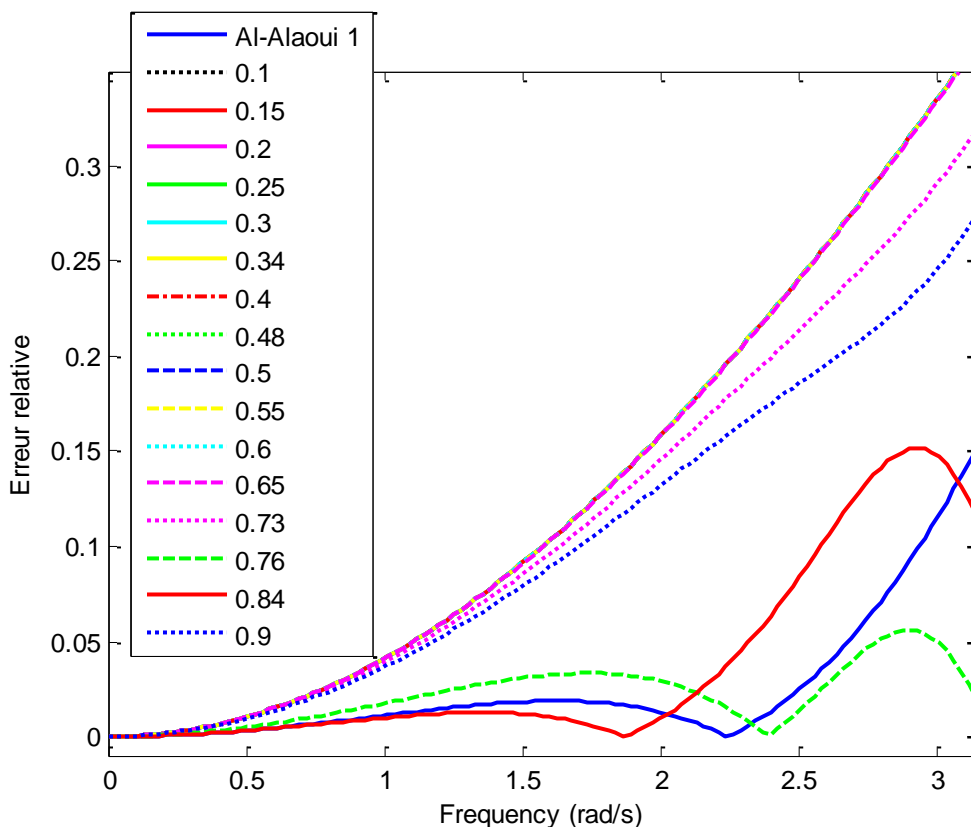


Fig. 2. 22 Erreurs relatives pour différentes valeurs de τ_d et l'erreur Al-Alaoui 1

Il apparait de cette figure que la valeur optimale du temps de propagation de groupe τ_d est 0.76 et le paramètre optimal est $\beta_{10}=0.6$. Donc, la fonction de transfert du dérivateur résultant F_{012} -Euler 2 est donnée par l'équation suivante:

$$s \approx H_{Eu012(\beta_{10}=0.6)}(z) = \frac{23z^2 - 16z - 7}{10T_s z(2z + 1)} \tag{2.34}$$

Les réponses d'amplitude et de phase des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et le dérivateur F_{012} -Euler 2 sont illustrées sur les figures 2.23 et 2.24 respectivement.

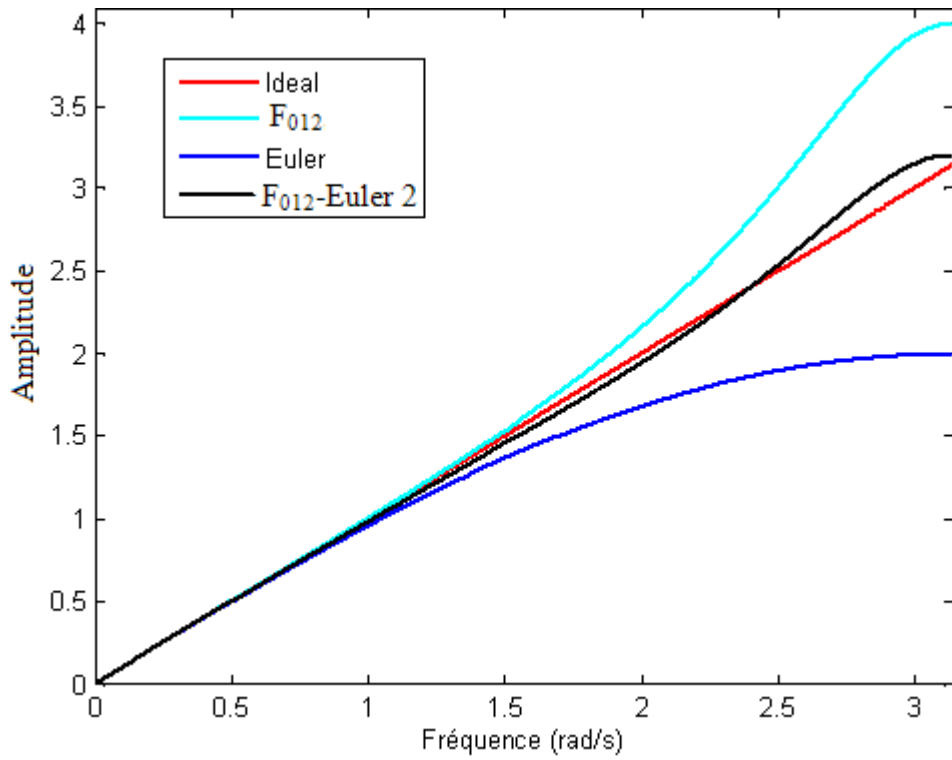


Fig. 2.23 Réponses d'amplitude des dérivateurs: idéal, F_{012} , Euler et le nouvel dérivateur (F_{012} -Euler 2)

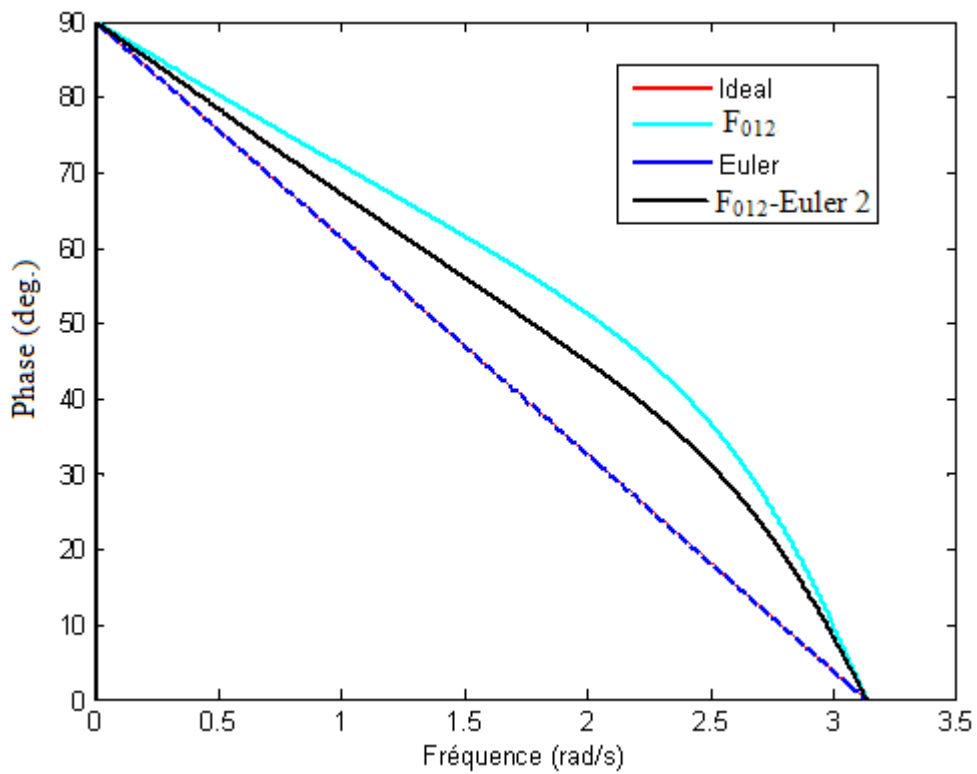


Fig. 2.24 Réponses de phases des intégrateurs: idéal, F_{012} , Euler et F_{012} -Euler 1

La réponse fréquentielle d'amplitude du dérivateur obtenu, en combinant les dérivateurs F_{012} stabilisé et Euler, est précise et se rapproche de celle du dérivateur idéal. La phase de ce nouveau dérivateur est linéaire.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé huit opérateurs de discrétisation: Schneider-Euler, F_{012} -Euler 1, F_{012} -Simpson, Schneider-Simpson, Simpson-Euler-bilinéaire, Simpson-Euler, Al-Alaoui modifié, F_{012} -Euler 2. Ces transformations entre le plan s et le plan z peuvent être utilisés pour la discrétisation des systèmes analogiques et la synthèse des intégrateurs fractionnaires dans le prochain chapitre.

Chapitre 3 :

Application des nouveaux opérateurs

“s à z”

Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer l'utilisation des nouveaux opérateurs “s à z” pour la synthèse des intégrateurs numériques d'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$, via la méthode d'invariance impulsionnelle et la technique de modélisation du signal “Steiglitz-McBride”. Les résultats obtenus sont exploités pour le calcul des intégrations fractionnaires des fonctions usuelles telles que l'échelon, la rampe, et le signal en dents de scie.

III.1 Méthode d'invariance impulsionnelle et modélisation du signal

Pour résoudre les problèmes du nombre infini des échantillons de la réponse impulsionnelle et sa valeur initiale infinie, Ferdi a proposé une nouvelle approche [27] qui contient deux étapes: la première étape est basée sur le théorème de la valeur initiale, qui permet de choisir la valeur initiale de la réponse impulsionnelle, la deuxième étape est d'appliquer l'une des techniques de modélisation des signaux déterministes (Padé, Prony, Shanks, Steiglitz-McBride, ...etc.) [32-35] pour trouver les coefficients du modèle rationnel d'approximation.

Soit $w(t)$ un signal en temps continu. L'intégrale fractionnaire d'ordre α de $w(t)$, selon la définition de Riemann-Liouville, est donnée par:

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} w(\tau) d\tau \quad \alpha > 0 \quad (3.1)$$

L'équation (3.1) représente une intégrale de convolution qui décrit la relation entre l'entrée $w(t)$, et la sortie $x(t)$. La réponse impulsionnelle est:

$$h_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(t) \quad (3.2)$$

Nous rappelons que la fonction de transfert de l'intégrateur idéal fractionnaire, c'est à dire la transformée de Laplace de $h_\alpha(t)$, est représentée par:

$$H_\alpha(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (3.3)$$

La réponse en fréquence peut être obtenue à partir de l'éq. (3.3) en remplaçant s par $j2\pi f$.

La réponse impulsionnelle de l'équation (3.2) est échantillonnée avec une période d'échantillonnage T_s pour obtenir la réponse impulsionnelle discrète [4].

$$h_\alpha(n) = T_s h_\alpha(nT_s) = \frac{T_s^\alpha n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

L'équivalent discret de l'équation (3.1) est alors donné par la convolution discrète:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h_\alpha(i) w(n-i) \quad (3.5)$$

Cela se traduit dans le domaine z comme suit:

$$X(z) = H_\alpha(z) W(z) \quad (3.6)$$

où $H_\alpha(z)$ est la fonction de transfert de l'intégrateur fractionnaire numérique. L'application de la méthode d'invariance impulsionnelle permet de résoudre deux problèmes: le premier échantillon de $h_\alpha(n)$ est infini pour $0 < \alpha < 1$, et le nombre de ses échantillons est aussi infini.

III.1.1 Sélection du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète

Il est proposé dans la référence [27] l'utilisation du théorème de la valeur initiale qui est donné par:

$$h_\alpha(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} H_\alpha(z) \quad (3.7)$$

Bien que la fonction de transfert $H_\alpha(z)$ soit inconnue, elle peut être approximativement déterminée en utilisant l'éq. (3.3) dans la gamme de fréquence $0 \leq f \leq 1/2T_s$ [4].

$$H_\alpha(e^{j2\pi f T_s}) \approx \frac{1}{T_s} H_\alpha(j2\pi f) \quad (3.8)$$

Une telle approximation peut être réalisée en remplaçant s de l'éq. (3.3) par une transformation appropriée “s à z”.

III.1.2 Approximation de la fonction de transfert de l'intégrateur fractionnaire numérique en utilisant les techniques de modélisation des signaux déterministes

L'approche de modélisation du signal peut conduire à une approximation d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie RII. La fonction de transfert de ce filtre possède les propriétés désirées: stabilité, phase minimale, zéros et pôles répartis de façon alternée sur l'axe réel. La procédure de calcul estimant les coefficients des modèles rationnels nécessite les arguments suivants: l'ordre fractionnaire α ($0 < \alpha < 1$), la période d'échantillonnage T_s , le nombre des échantillons L_I de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ et les ordres p et q de la fonction de transfert rationnelle donnée par l'équation suivante:

$$H(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^p a_i z^{-i}} \quad (3.9)$$

La détermination des coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert (3.9) peut être faite en minimisant l'erreur de modélisation donnée par [62]:

$$e(n) = h_\alpha(n) - h(n) \quad (3.10)$$

Les méthodes de modélisation des signaux sont regroupées en deux classes: méthodes itératives qui englobent la méthode de Steiglitz-McBride, Shaw et d'Evans Fishel, la deuxième classe c'est les méthodes non itératives qui sont: la méthode de Padé, Prony et Shanks. Dans tous ce qui suit, nous nous sommes intéressés par la méthode de Steiglitz-McBride puisqu'elle donne une amélioration des performances. Elle présente aussi un temps de calcul et un espace mémoire réduits [62].

III.2 Résultats et discussions

Les formules développées précédemment, données par les équations (2.9), de (2.13) jusqu'à (2.17), (2.32) et (2.34), sont utilisées afin d'améliorer la précision de l'approximation des intégrateurs existants, pour sélectionner la valeur initiale de la réponse impulsionnelle. Les coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ sont obtenus ensuite en

appliquant la technique de modélisation du signal “Steiglitz- McBride”, telle que la fonction de transfert $H(z)$ se rapproche de $H_\alpha(z)$ aussi bien que possible.

Dans ce qui suit, nous présentons des exemples pour calculer l'intégrale fractionnaire des signaux dont nous connaissons leurs intégrales fractionnaires exactes: le signal $w(t) = t^\nu$ et le signal en dents de scie, en fixant les paramètres cités ci-dessus: α, T_s, L_I , et p, q .

Exemple 1

L'expression analytique exacte de l'intégrale fractionnaire d'ordre α du signal ($w(t) = t^\nu$) est donnée dans [27]:

$$x(t) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + \alpha + 1)} t^{\nu + \alpha} \quad , \nu > -1 \quad (3.11)$$

Les paramètres utilisés dans ce premier exemple sont les suivants: $\alpha=0.7, T=0.01, p=5, q=5, L_I=1000$. Nous rappelons que les opérateurs “s à z” utilisés sont: F_{012} -Euler 1, Schneider-Euler, Simpson- F_{012} , Simpson-Schneider, Simpson-Euler-Tustin, et Euler-Simpson. La comparaison est faite par rapport aux opérateurs d'Al-Alaoui d'ordre 1 et d'Euler.

Les valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ sont calculées en utilisant l'éq. (3.7). Elles sont résumées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ de l'exemple 1

Transformation	Valeur initiale de $h_\alpha(n)=h_\alpha(0)$
Al-Alaoui 1	$\left(\frac{7T}{8}\right)^\alpha = 0.036258149649614$
Euler	$T^\alpha = 0.039810717055350$
Euler-Simpson	$\left(\frac{2T}{3}\right)^\alpha = 0.029973407536533$
F_{012} -Euler 1	$\left(\frac{107T}{125}\right)^\alpha = 0.035705213580848$
Schneider-Euler	$\left(\frac{523T}{600}\right)^\alpha = 0.036161405908627$

Simpson-F ₀₁₂	$\left(\frac{19T}{50}\right)^\alpha = 0.020223136705270$
Simpson-Schneider	$\left(\frac{11T}{30}\right)^\alpha = 0.019723773258616$
Simpson-Euler-Tustin	$\left(\frac{127T}{150}\right)^\alpha = 0.035432249329597$

Une fois $h_\alpha(0)$ est calculée, il est facile d’obtenir le reste des valeurs de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ (en utilisant $h_\alpha(n) = T^\alpha n^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$ $n = 1, 2, \dots$). Enfin, nous pouvons calculer les coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ en utilisant la technique de “Steiglitz- McBride”. Ils sont résumés dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2 Coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ de l’exemple 1

	a_i	b_i
Al-Alaoui 1	0.036258114067584	1.000000000000000
	-0.125078266122126	-4.294298245948109
	0.157167667337890	7.270473863560898
	-0.082101984859179	-6.043147766829469
	0.011747679022628	2.452078548452029
	0.002006851348041	-0.385106395745429
Euler	0.039810760245209	1.000000000000000
	-0.140334385936214	-4.294298229812013
	0.182997080059046	7.270473804839070
	-0.103571139758053	-6.043147687162840
	0.020459040316766	2.452078500742629
	0.000638705880501	-0.385106385116913
Euler-Simpson	0.029973381329547	1.000000000000000
	-0.098089747909335	-4.294298200513424
	0.111474678464824	7.270473700583381
	-0.044122413211919	-6.043147549497584
	-0.003662979841314	2.452078420989681
	0.004427141941146	-0.385106368072129
F ₀₁₂ -Euler 1	0.035705222266491	1.000000000000000

	-0.122703982361402 0.153147876982704 -0.078760771805160 0.010391941520164 0.002219774190121	-4.294298232182305 7.270473813591790 -6.043147699259311 2.452078508157639 -0.385106386817885
Schneider-Euler	0.036161399039906 -0.124662942291897 0.156464501040724 -0.081517518883631 0.011510524658644 0.002044097230766	1.000000000000000 -4.294298242294985 7.270473851325826 -6.043147751877678 2.452078540642924 -0.385106394306161
Simpson-F ₀₁₂	0.020223124566349 -0.056219237893466 0.040585692577315 0.014799828760764 -0.027571375692054 0.008182028419988	1.000000000000000 -4.294298221973617 7.270473777094322 -6.043147650785580 2.452078479869468 -0.385106380714667
Simpson-Schneider	0.019723790190891 -0.054074946819591 0.036955293356040 0.017817383134553 -0.028795784999042 0.008374325874299	1.000000000000000 -4.294298237515895 7.270473834423203 -6.043147729714648 2.452078527909184 -0.385106391611915
Simpson-Euler-Tustin	0.035432238071750 -0.121531707626593 0.151163155020503 -0.077111090703665 0.009722564062306 0.002324901967660	1.000000000000000 -4.294298244991909 7.270473858648281 -6.043147757887046 2.452078541480463 -0.385106393759866

La figure 3.1 compare les réponses fréquentielles d’amplitude de l’intégrateur idéal et les intégrateurs fractionnaires obtenus.

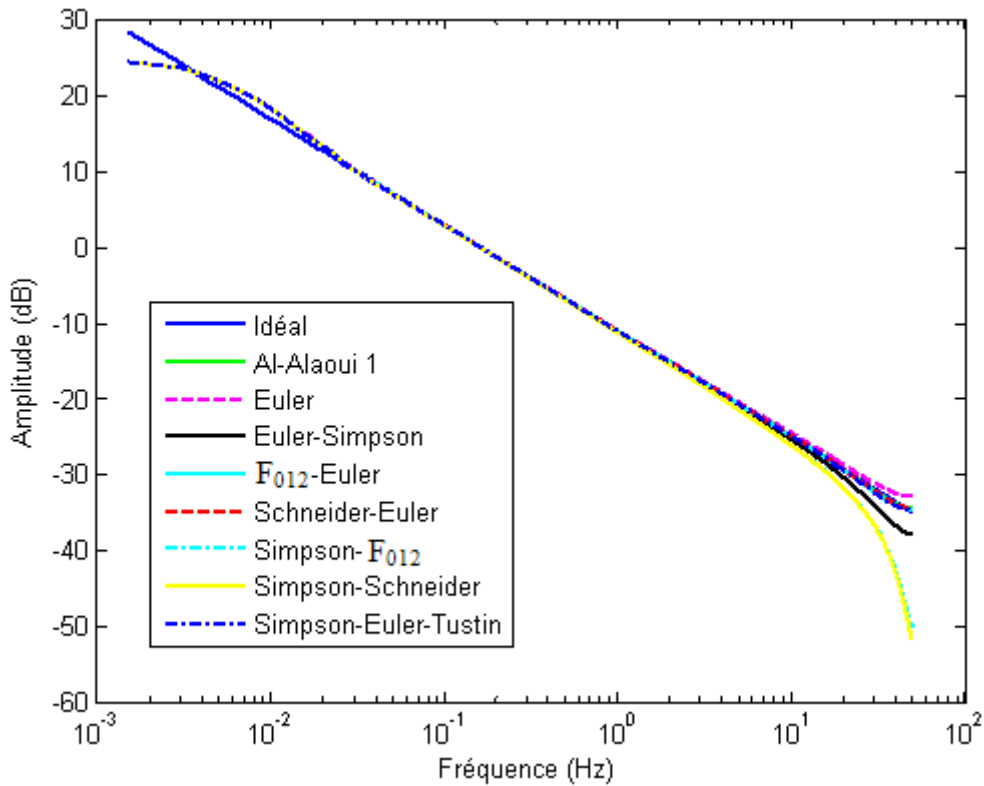


Fig. 3.1 Réponse d’amplitude de l’intégrateur idéal et les intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$

Cette figure montre clairement que les réponses d’amplitude des intégrateurs synthétisés se rapprochent de celle de l’intégrateur idéal dans la gamme de fréquence moyenne $f \in [0.021-10] Hz$, les intégrateurs Simpson-Schneider; Simpson- F_{012} ; Euler-Simpson et Euler donnent moins de précision pour les fréquences $f > 10 Hz$, en les comparant avec les autres intégrateurs. Pour plus d’illustration, les courbes des erreurs entre la réponse d’amplitude idéale et les réponses d’amplitude des intégrateurs obtenus $E = 10 \times \log_{10} |H_d|^{-2\alpha} - 10 \times \log_{10} |H|^2$ sont représentées sur la figure. 3.2 (a et b).

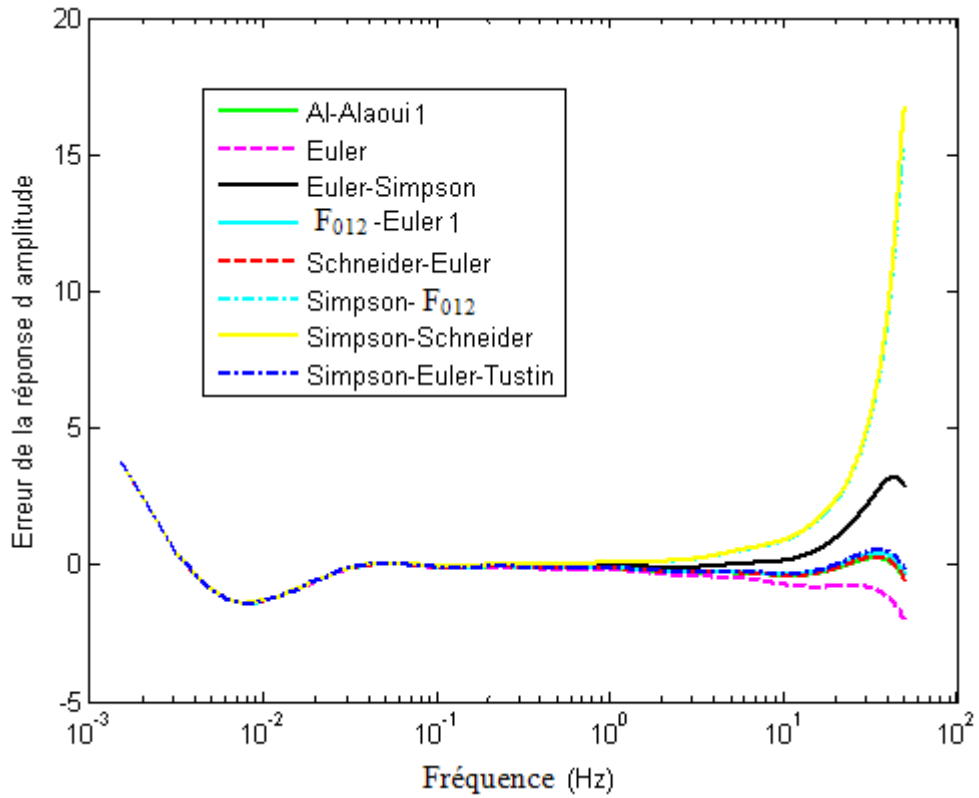


Fig. 3.2a Erreurs des réponses d’amplitude des intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$

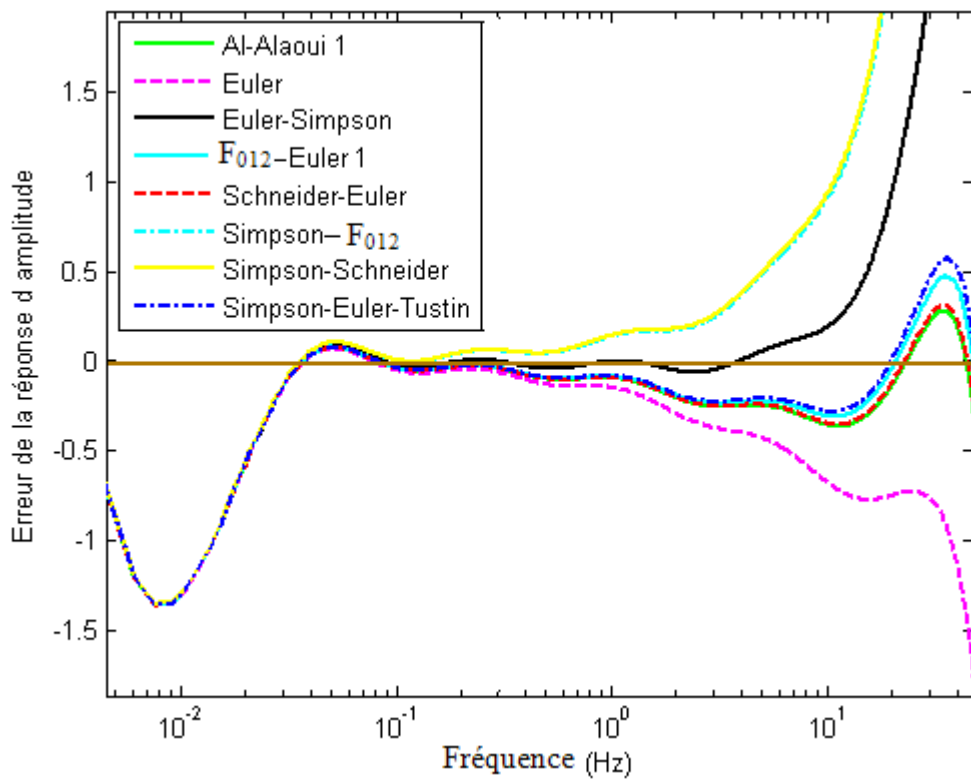


Fig. 3.2b Erreurs des réponses d’amplitude des intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$ (figure détaillée)

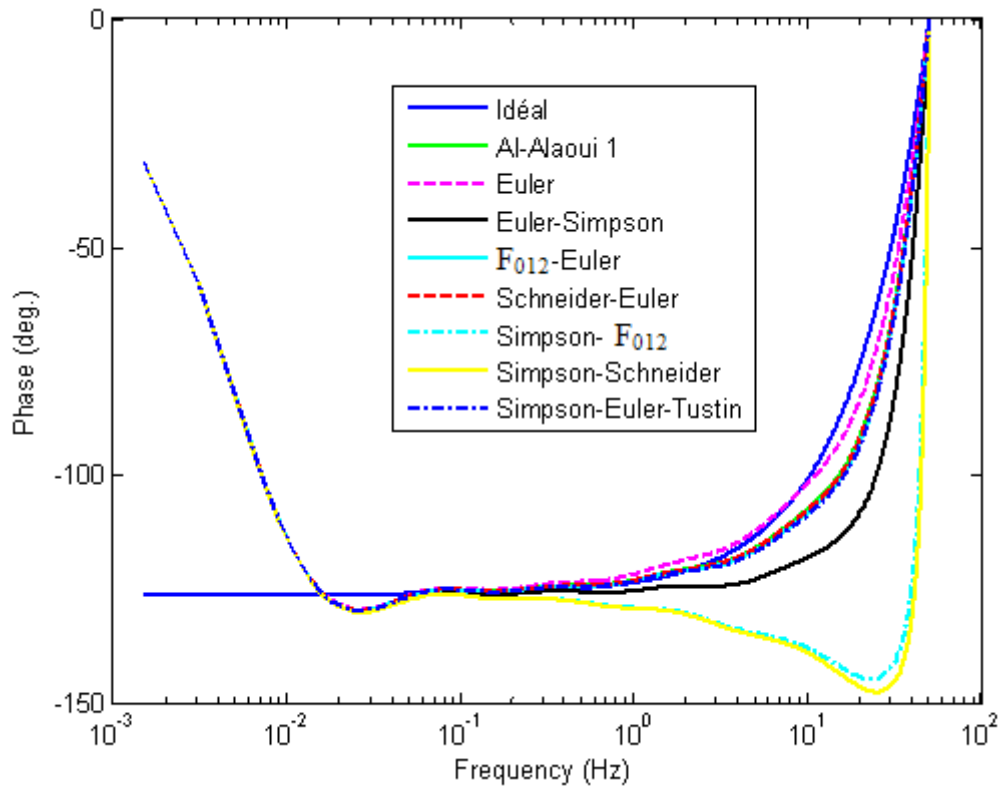


Fig. 3.3 Réponse de phase de l'intégrateur idéal et les intégrateurs obtenus pour $\alpha=0.7$

La figure 3.2b montre que l'erreur de l'intégrateur Euler-Simpson est près de la ligne zéro par rapport aux autres intégrateurs dans la zone intermédiaire des fréquences. La figure 3. 3 représente les réponses de phase de l'intégrateur idéal et celles des intégrateurs obtenus. Il apparait de cette dernière figure que la réponse de phase en utilisant l'intégrateur Euler est plus proche de la phase idéale. En se basant sur les réponses d'amplitude, nous pouvons conclure que l'intégrateur fractionnaire d'Euler-Simpson offre une bonne approximation en le comparant avec les autres intégrateurs dans la zone intermédiaire des fréquences.

Les intégrales fractionnaires du signal ($w(t) = t^\nu$) pour $\nu = 0$ et $\nu = 1$ sont tracées sur la figure 3.4 (a et b) et la figure. 3.5 (a et b) respectivement.

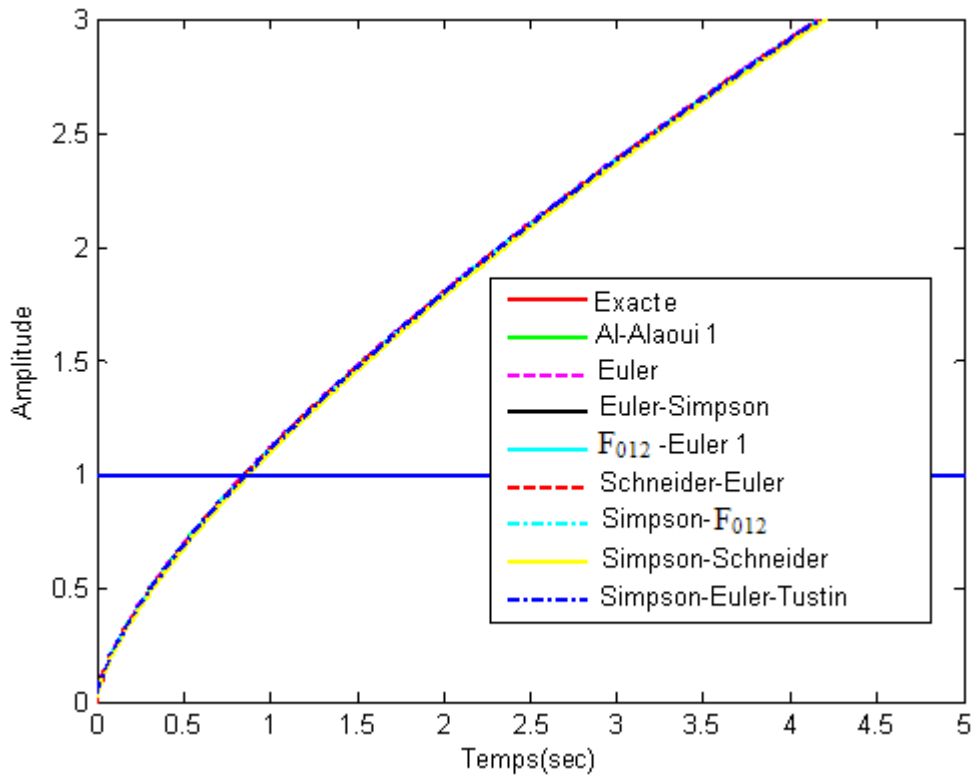


Fig. 3.4a Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=0$ et $\alpha=0.7$

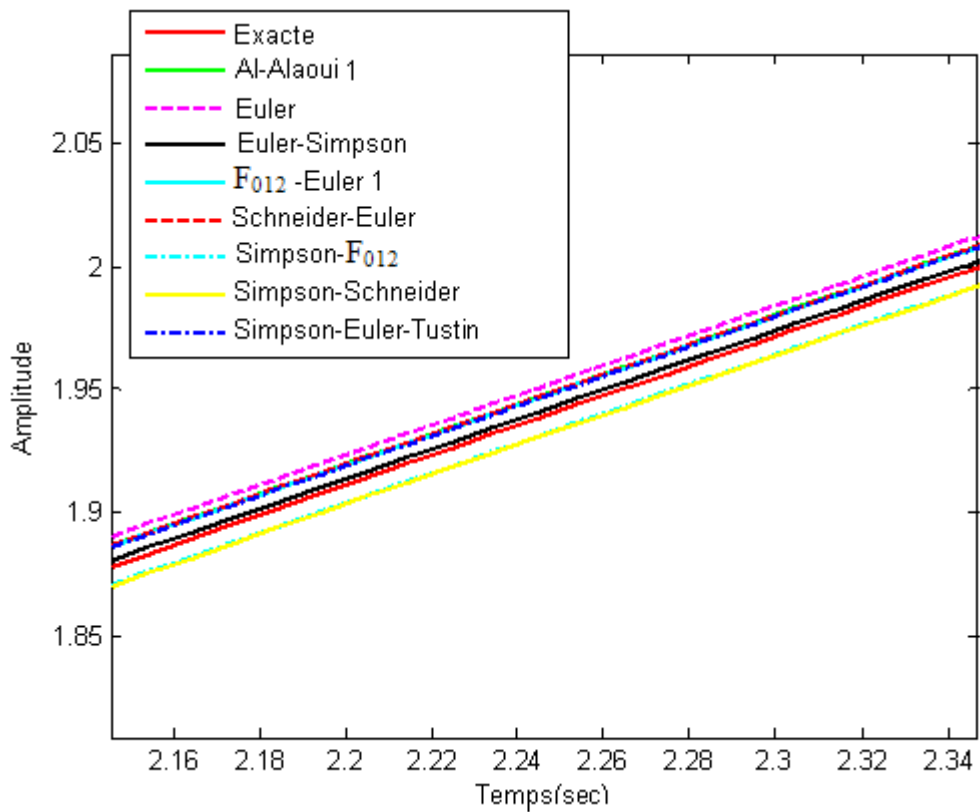


Fig. 3.4b Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=0$ et $\alpha=0.7$ (figure détaillée)

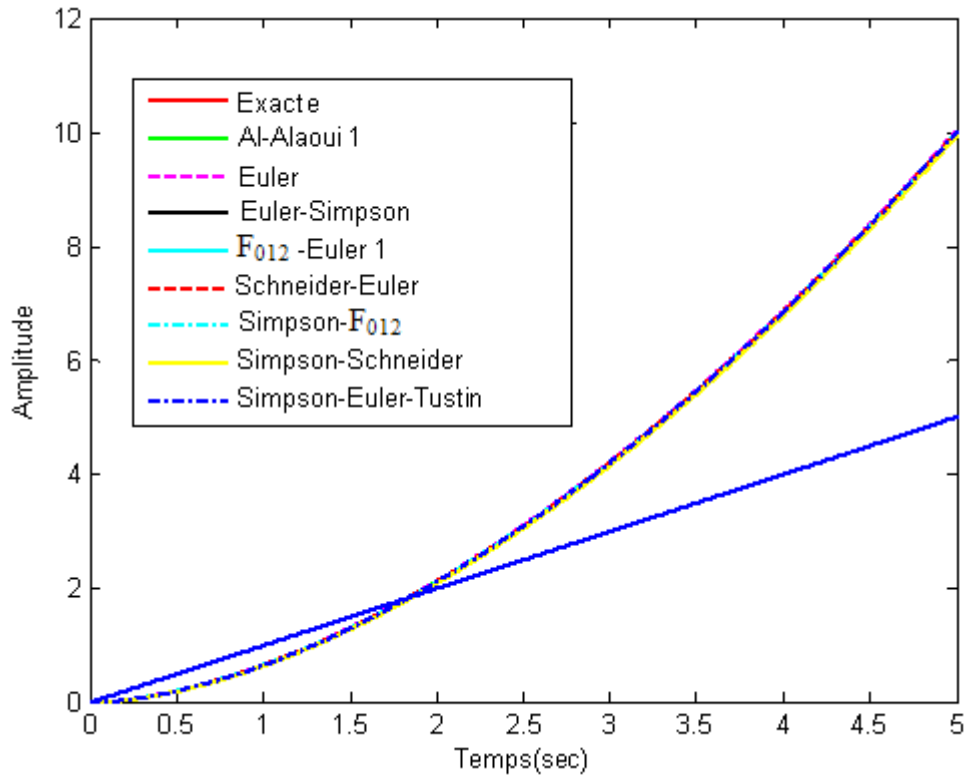


Fig. 3.5a Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=1$ et $\alpha=0.7$

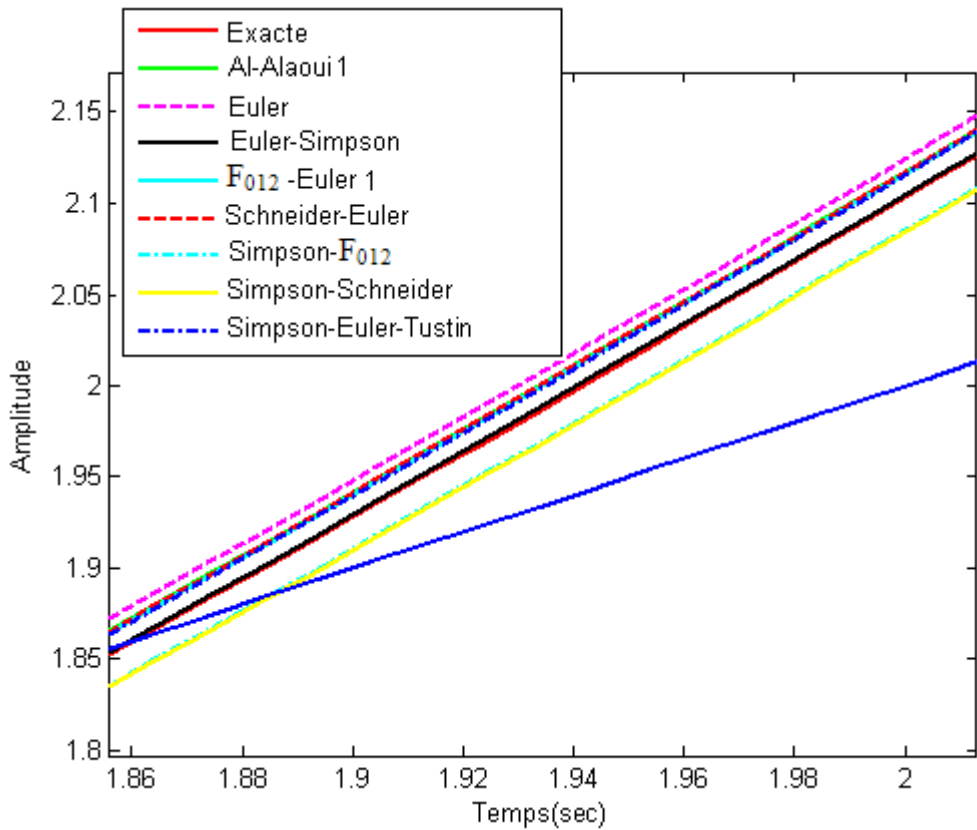


Fig. 3.5b Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=1$ et $\alpha=0.7$ (figure détaillée)

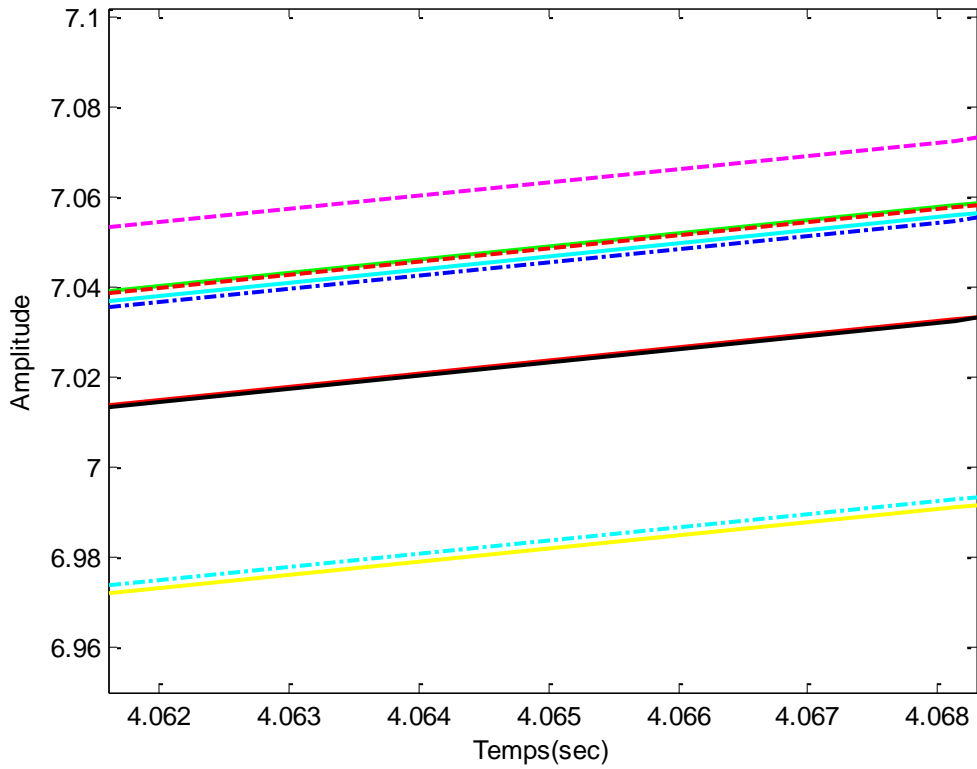


Fig. 3.5c Intégrale fractionnaire du signal t^ν pour $\nu=1$ et $\alpha=0.7$ (figure détaillée)

Nous remarquons d’après ces figures que l’intégrateur fractionnaire Euler-Simpson donne des meilleurs résultats que les autres intégrateurs.

Exemple 2

Dans cet exemple, on calcule l’intégrale fractionnaire d’ordre 0.4 du signal en dents de scie. Son intégrale fractionnaire d’ordre α est donnée dans [63]:

$$x(t) = \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k u(t-2k+1) \frac{(t-2k+1)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \tag{3.12}$$

Les paramètres utilisés ici sont les suivants: $T_s=0.05$, $p=5$, $q=5$, $L_l=1000$. Les opérateurs “s à z” utilisés sont les mêmes utilisés dans l’exemple 1: F₀₁₂-Euler 1, Schneider, Simpson-F₀₁₂, Simpson-Schneider, Simpson-Euler-Tustin, et Euler-Simpson. La comparaison est faite par rapport aux opérateurs d’Al-Alaoui d’ordre 1 et d’Euler.

Les valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ sont calculées comme dans le premier exemple. Elles sont résumées dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ de l'exemple 2

Transformation	Valeur initiale de $h_\alpha(n)=h_\alpha(0)$
Al-Alaoui 1	0.286016588964681
Euler	0.301708816827258
Euler-Simpson	0.256537878024203
F ₀₁₂ -Euler 1	0.283515957319316
Schneider-Euler	0.285580255051013
Simpson-F ₀₁₂	0.204880884502590
Simpson-Schneider	0.201974514987765
Simpson-Euler-Tustin	0.282275370751206

Les coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ obtenus sont résumés dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 Coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ de l'exemple 2

	a_i	b_i
Al-Alaoui 1	0.286016591243644	1.0000000000000000
	-1.034415063565300	-4.091895347857596
	1.404954867682974	6.541546211046942
	-0.859045527093490	-5.066192897396513
	0.210944761048352	1.875380365111439
	-0.008455333577114	-0.258838294266095
Euler	0.301708816708419	1.0000000000000000
	-1.098626007497123	-4.091895346422291
	1.507606284304470	6.541546205979111
	-0.938545366672926	-5.066192890755446
	0.240373651793535	1.875380361292176
	-0.012517082322369	-0.258838293455374
Euler-Simpson	0.256537875363158	1.0000000000000000
	-0.913791243161429	-4.091895347383590
	1.212118485394917	6.541546209195249

	-0.709700665942058 0.155660956043103 -0.000825113038679	-5.066192894712075 1.875380363400772 -0.258838293862185
F ₀₁₂ -Euler 1	0.283515962989145 -1.024182753405230 1.388596889131768 -0.846376858305616 0.206255130197604 -0.007808074960222	1.000000000000000 -4.091895344713348 6.541546199977452 -5.066192882961076 1.875380356872561 -0.258838292537409
Schneider-Euler	0.285580257197242 -1.032629629636345 1.402100566129533 -0.856834971965117 0.210126467361315 -0.008342393363549	1.000000000000000 -4.091895345971281 6.541546204258435 -5.066192888311114 1.875380359760974 -0.258838293098837
Simpson-F ₀₁₂	0.204880890641804 -0.702416267547096 0.874201932262100 -0.447996416344734 0.058784460944505 0.012545692809822	1.000000000000000 -4.091895347363537 6.541546209273365 -5.066192895037625 1.875380363738103 -0.258838293972127
Simpson-Schneider	0.201974515643314 -0.690523684655163 0.855189744129154 -0.433272157931438 0.053333901357050 0.013297974117002	1.000000000000000 -4.091895344892638 6.541546200331801 -5.066192882988226 1.875380356580527 -0.258838292393289
Simpson-Euler-Tustin	0.282275370597271 -1.019106380409844 1.380481500750040 -0.840091782841195 0.203928550111862 -0.007486962606144	1.000000000000000 -4.091895347896097 6.541546211327800 -5.066192898009891 1.875380365649299 -0.258838294432937

Les réponses en fréquence de l'intégrateur idéal et les intégrateurs fractionnaires obtenus ne sont pas représentées dans cet exemple pour des raisons de simplicité. Les intégrales fractionnaires du signal en dent de scie sont tracées sur la figure 3.6 (a et b).

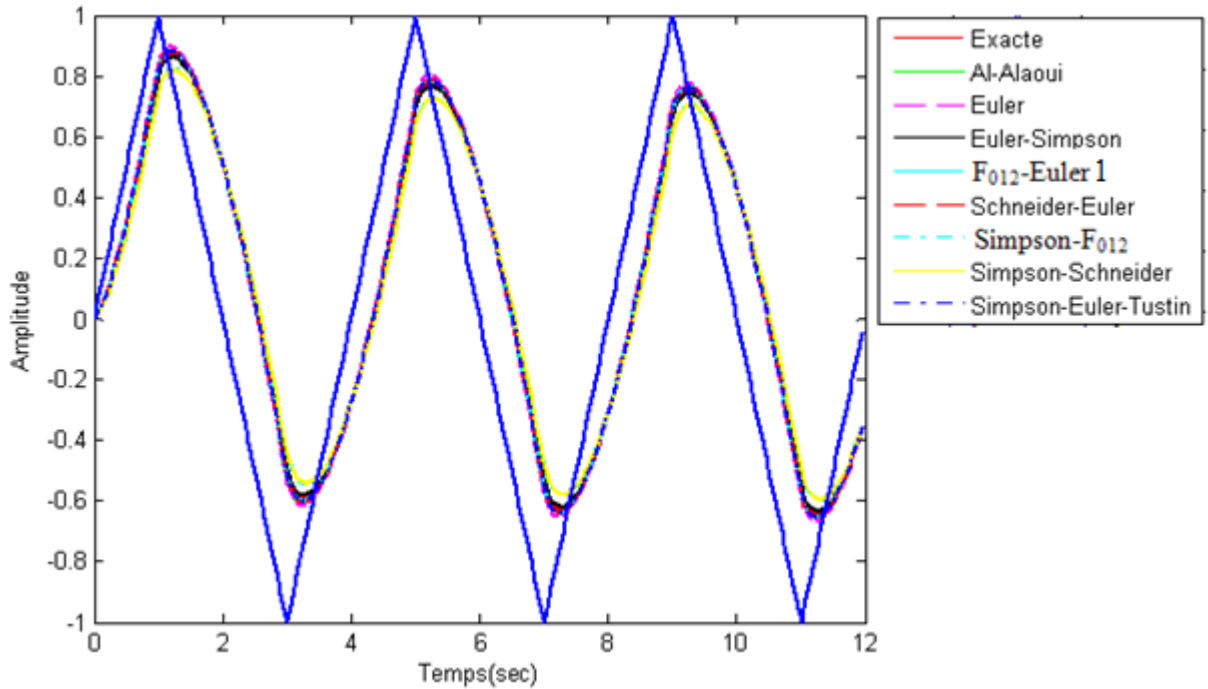


Fig. 3.6a Intégrale fractionnaire du signal en dent de scie pour $\alpha=0.4$

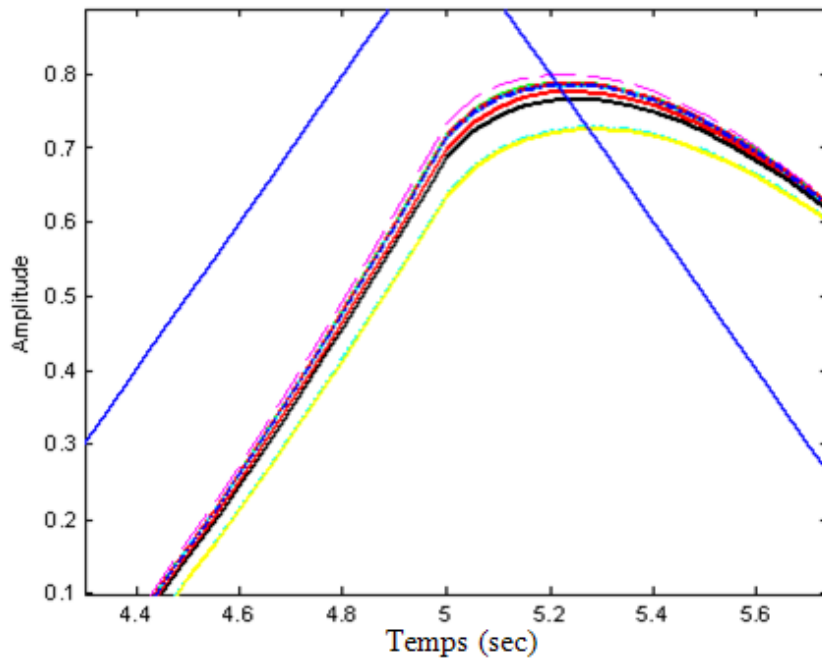


Fig. 3.6b Intégrale fractionnaire du signal en dent de scie pour $\alpha=0.4$ (détaillée)

Il est clair de la figure. 3.6 ((a), (b) détaillée), qui concernent les intégrales fractionnaires du signal en dents de scie, qu'un bon résultat est obtenu en utilisant l'intégrateur fractionnaire Euler-Simpson dans un intervalle de temps de 12 sec, c.-à-d. à 500 fois la période d'échantillonnage T_s .

Exemple 3:

Supposons toujours le signal ($w(t) = t^v$), et les paramètres utilisés dans le premier exemple ($\alpha=0.7$, $T_s=0.01$, $p=5$, $q=5$, $L_I=1000$). Les opérateurs “s à z” utilisés sont: Al-Alaoui 1, Euler-Simpson, F₀₁₂-Euler 1, Schneider-Euler, Simpson-Euler-Tustin, Al-Alaoui modifié et F₀₁₂-Euler 2.

Les valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ sont résumées dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5 Valeurs du premier échantillon de la réponse impulsionnelle discrète $h_\alpha(n)$ de l'exemple 3

Transformation	Valeur initiale de $h_\alpha(n)=h_\alpha(0)$
Al-Alaoui 1	0.036258149649614
Euler-Simpson	0.029973407536533
F ₀₁₂ -Euler 1	0.035705213580848
Schneider-Euler	0.036161405908627
Simpson-Euler-Tustin	0.035432249329597
Al-Alaoui modifié	0.035576609802218
F ₀₁₂ -Euler 2	0.036100358250561

Les coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ obtenus sont résumés dans le tableau 3.6.

Tableau 3.6 Coefficients a_i et b_i de la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ de l'exemple 3

	a_i	b_i
Al-Alaoui 1	0.036258114067584	1.0000000000000000
	-0.125078266122126	-4.294298245948109
	0.157167667337890	7.270473863560898

	-0.082101984859179 0.011747679022628 0.002006851348041	-6.043147766829469 2.452078548452029 -0.385106395745429
Euler-Simpson	0.029973381329547 -0.098089747909335 0.111474678464824 -0.044122413211919 -0.003662979841314 0.004427141941146	1.000000000000000 -4.294298200513424 7.270473700583381 -6.043147549497584 2.452078420989681 -0.385106368072129
F ₀₁₂ -Euler 1	0.035705222266491 -0.122703982361402 0.153147876982704 -0.078760771805160 0.010391941520164 0.002219774190121	1.000000000000000 -4.294298232182305 7.270473813591790 -6.043147699259311 2.452078508157639 -0.385106386817885
Schneider-Euler	0.036161399039906 -0.124662942291897 0.156464501040724 -0.081517518883631 0.011510524658644 0.002044097230766	1.000000000000000 -4.294298242294985 7.270473851325826 -6.043147751877678 2.452078540642924 -0.385106394306161
Simpson-Euler-Tustin	0.035432238071750 -0.121531707626593 0.151163155020503 -0.077111090703665 0.009722564062306 0.002324901967660	1.000000000000000 -4.294298244991909 7.270473858648281 -6.043147757887046 2.452078541480463 -0.385106393759866
Al-Alaoui modifié	0.035576562058346 -0.122151478471584 0.152212461475024 -0.077983266177333 0.010076460775295 0.002269321132732	1.000000000000000 -4.294298235310055 7.270473826325663 -6.043147718583548 2.452078521117099 -0.385106390059238

F_{012} -Euler 2	0.036100354566731	1.0000000000000000
	-0.124400799079811	-4.294298243263858
	0.156020678613604	7.270473854547987
	-0.081148617815313	-6.043147755802934
	0.011360838610469	2.452078542701508
	0.002067605898613	-0.385106394692780

Les intégrales fractionnaires du signal échelon sont tracées sur la figure 3.7 (a et b). La comparaison est faite entre les opérateurs proposés dans la section III.1.2. a et b (Al-Alaoui modifié, F_{012} -Euler 2) et les opérateurs suivants: Al-Alaoui 1, Euler-Simpson, F_{012} -Euler 1, Schneider-Euler, Simpson-Euler-Tustin, Simpson-Euler-bilinéaire.

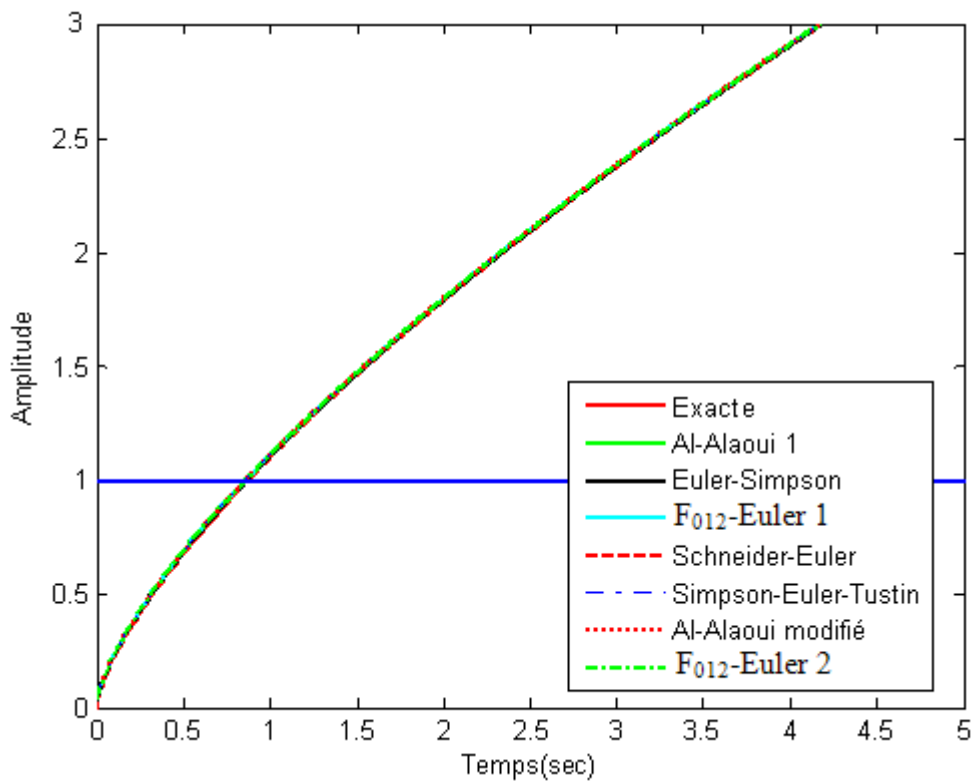


Fig. 3.7a Intégrale fractionnaire du signal échelon pour $\alpha=0.7$

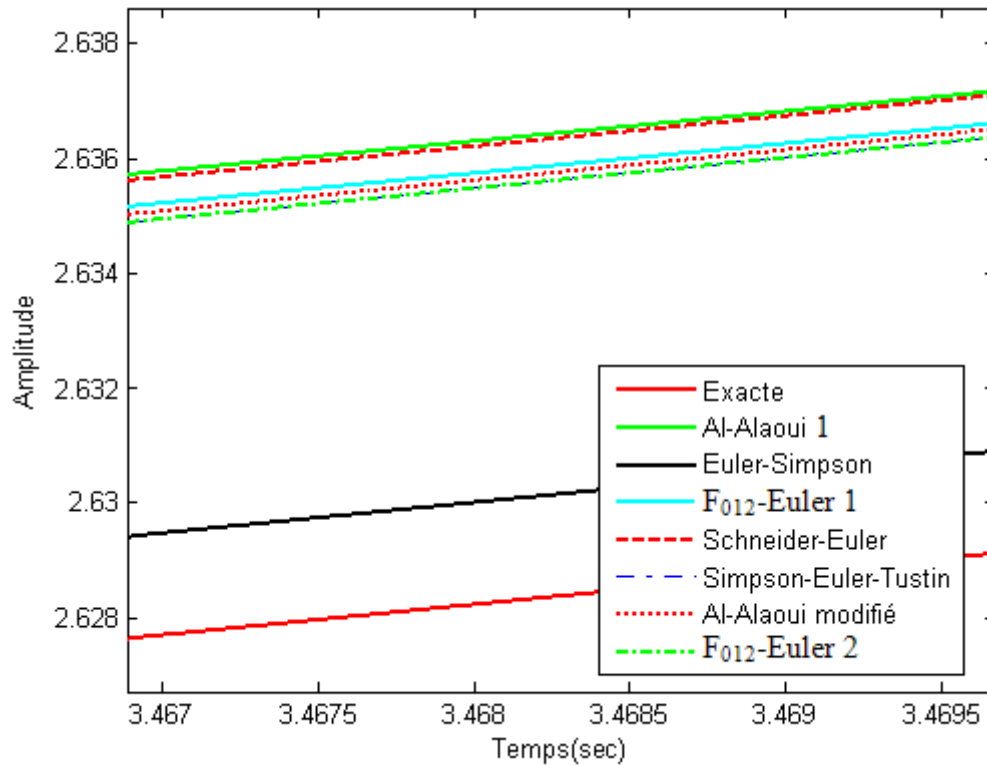


Fig.3.7b Intégrale fractionnaire du signal échelon pour $\alpha=0.7$ (détaillée)

Nous remarquons d'après cette figure que l'opérateur d'Al-Alaoui modifié est mieux que l'opérateur d'Al-Alaoui 1. Les courbes obtenues par F_{012} -Euler 2 et Simpson-Euler-Tustin sont superposées. Mais les meilleurs résultats sont obtenus toujours en utilisant l'opérateur Euler-Simpson.

Conclusion

Les huit transformations proposées dans le chapitre 2, Schneider-Euler, F_{012} -Euler 1, F_{012} -Simpson, Schneider-Simpson, Simpson-Euler-bilinéaire, Simpson-Euler, Al-Alaoui modifié, F_{012} -Euler 2 sont utilisées dans la première étape de la méthode choisie pour la discrétisation des intégrateurs fractionnaires, celle de l'invariance impulsionnelle. Les résultats obtenus sont exploités pour l'intégration de quelques signaux déterministes. La comparaison entre les opérateurs proposés et d'autres existants dans la littérature montre que l'intégrateur fractionnaire Euler-Simpson présente un résultat précis, il est le plus performant que les autres intégrateurs fractionnaires.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème du passage du temps continu au temps discret par une approche basée sur l'interpolation des opérateurs "s à z" existants dans la littérature dont le but d'améliorer les performances de discrétisation.

Nous avons, tout d'abord, donné une synthèse bibliographique qui a permis de retracer les méthodes de discrétisation des systèmes analogiques: méthode d'invariance impulsionnelle, discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro, discrétisation par la méthode des pôles-zéros, discrétisation en utilisant les méthodes d'intégration classiques telles que les approximations Euler, Tustin, Simpson, ...etc. Nous nous sommes focalisés sur la dernière méthode où nous avons présenté, ensuite les transformations "s à z" en étudiant la synthèse des intégrateurs/dérivateurs numériques RII.

Les contributions principales de notre travail ont été:

- Proposition des nouveaux intégrateurs/dérivateurs numériques d'ordre réduit puisqu'ils sont les éléments constitutifs de la transformation "s à z".
- Application des nouvelles approximations pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire.
- Exploitation des résultats obtenus pour l'intégration de quelques signaux déterministes.

L'idée principale de notre contribution dans cette thèse est basée sur le travail d'Al-Alaoui qui est basée sur l'interpolation des intégrateurs bien connus (Euler, bilinéaire, Simpson). Nous avons interpolé plusieurs intégrateurs pour obtenir des intégrateurs à bande complète et à bande incomplète. La combinaison entre les règles utilisées est faite avec différents paramètres sélectionnés graphiquement, à partir des réponses d'amplitude et de phase pour différentes valeurs de chaque paramètre. Dans une deuxième contribution, nous avons modifié l'opérateur d'Al-Alaoui en cherchant une valeur optimale du paramètre de combinaison en utilisant l'approche de la programmation linéaire. Cette dernière est appliquée aussi pour optimiser le paramètre d'interpolation des dérivateurs F_{012} stabilisé et Euler.

La troisième contribution dans cette thèse concerne l'application des opérateurs obtenus pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire, plus précisément pour le choix de la valeur initiale de la réponse impulsionnelle. Pour trouver les coefficients du modèle rationnel

d'approximation, nous avons appliqué la technique de modélisation des signaux déterministes "Steiglitz-McBride".

En comparant les performances de nos opérateurs exposés avec ceux que nous trouvons dans la littérature, l'opérateur Euler-Simpson présente des résultats plus précis et il est le plus performant.

Nous présentons ici les principales perspectives qui font suite aux travaux menés dans cette thèse:

- Application des nouvelles approches optimales pour la synthèse des intégrateurs/dérivateurs, plus précisément pour rechercher une valeur optimale du paramètre de combinaison des règles classiques.
- Application des nouveaux opérateurs "s à z" dans la biomédecine, le traitement d'image, et l'automatique.
- Développement d'autres opérateurs dont le but de ré-améliorer les résultats obtenus dans cette thèse.
- Synthèse des intégrateurs/dérivateurs fractionnaires pour réaliser des applications réelles: prétraitement ECG, détection de l'onde R, ...etc.

Communications, et publications réalisées dans le cadre de cette thèse

Journaux internationaux:

C. Mekhnache, Y. Ferdi, “Using new hybrid Integrators to design IIR fractional order integrators via impulse invariance method”, *Cir. Syst. and signal processing*, vol.33, N°. 2, Springer, 2014.

Communications internationales:

C. Mekhnache, Y. Ferdi, and A. Taleb-Ahmed, “Design of fullband and low-Pass FIR differentiators: a comparative study”. *AIP Conference Proceedings*, vol.1019, pp. 143-146, Annaba Algeria, 2008.

C. Mekhnache, Y. Ferdi, “ Synthèse des dérivateurs numériques RII d’ordre supérieur: Modification de l’algorithme de la programmation linéaire et comparaison avec la programmation quadratique”. In *Proc. of the International Conference on Systems and Information (ICSIP’09)*, Guelma Algeria, 2009.

C. Mekhnache, Y. Ferdi “Design of digital differentiators by interpolating Schneider and Simpson rules”. *Proceedings of CISE’09*, Batna Algeria, pp. 259-262, 2009.

C. Mekhnache, Y. Ferdi “Fullband IIR Digital Differentiator Design Using Interpolating Traditional Rules”. In *Proc. of the International Conference on Systems and Information (ICSIP’11)*, Guelma Algeria, 2011.

Ch. Mekhnache, “The design of fractional differentiators using traditional rules interpolation and logarithm/series expansion”. In *Proc. of the International Conference on Technological Advances in Electrical Engineering (ICTAEE14)*, Skikda Algeria, 2014.

Communications nationales:

C. Mekhnache, Y. Ferdi, “ Comparaison entre les méthodes de synthèse des dérivateurs numériques RIF”. *Journées sur les Signaux et Systèmes JSS'07*, Guelma Algeria, 2007.

C. Mekhnache, Y. Ferdi, “The design of fractional order integrator using logarithm/series expansion: a comparative study”, conf. Systèmes d’ordre fractionnaire et leurs applications (SOFA 2010), Skikda Algeria, 2010.

C. Mekhnache, Y. Ferdi “A Euler-Simpson integrator: application to computation of fractional integral of order $0 < \alpha < 1$ ”. conf. Systèmes d’ordre fractionnaire et leurs applications (SOFA 2011), Tizi-Ouzou Algeria, 2011.

Références

- [1] Paulo S. R. Diniz, Eduardo A. B. da Silva, and Sergio L. Netto, “Digital Signal Processing System Analysis and Design”, Cambridge University Press, 2002.
- [2] W. L. Melvin, D. R. Frey, “Continuous time to discrete time conversion via a novel parametrized s to z plane mapping”, IEEE Trans. On circuit and systems –II: analog and digital signal processing, vol. 44, N°. 10, 1997.
- [3] A. Ambardar, “Analog and digital signal processing”, PWS Pub. Co., Boston, MA, 1995.
- [4] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, “Digital signal processing”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [5] A. V. Oppenheim, A.S. Willsky, I.T.Young “Signal and Systems”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [6] A. V. Oppenheim, R.W. Schaffer, “Discrete time signal processing”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [7] S. Salivahanan, A. Vallavaraj, C. Gnanapriya, “Digital Signal Processing”, Tata McGraw-Hill, 2000.
- [8] D. Stranneby, W. Walker, “Digital Signal Processing and Applications”, Elsevier, 2004.
- [9] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman, “Digital control of dynamics systems”. Addison-Wesley, 1990.
- [10] M. A. Al-Alaoui, “A class of second-order integrators and low-pass differentiators”. IEEE. Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl. vol. 42, N°. 4, pp. 220-223. 1995.
- [11] H.M. Yassine, “General analogue to digital transformation”, IEE proc., G., vol. 133, N°. 2. pp. 89-94. 1986.
- [12] L. D. Paarmann, “Mapping from the s domain to the z domain via the magnitude invariance method”, Signal processing, vol. 69, N°. 3, pp. 219-228, 1998.
- [13] Q.-G. Wang, Q. Bi, X.-P. Yang, “ High performance conversions between continuous and discrete time systems”, Signal processing, vol. 81, N°. 9, pp. 1865-1877. 2001.
- [14] M. A. Al-Alaoui, “Novel stable higher order s to z transforms”. IEEE. Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl. vol. 48, N°. 11, pp. 1326-1329. 2001.
- [15] L. D. Paarmann, Y. H. Atris, “Mapping from the s domain to the z domain via the phase invariance method”, Signal processing, vol. 86, N°. 2, pp. 223-229, 2006.
- [16] M. A. Al-Alaoui, “Novel approach to analog to digital tranforms”. IEEE. Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl. vol. 54, N°. 2, pp. 338-350. 2007.

- [17] B. S. Tomislav, R.S. Milic, “ Application of the α approximation for discretization of analogue systems”, Elec. Energ. vol. 18, N°. 3, pp. 571-586, 2005.
- [18] M. A. Al-Alaoui, “Al-Alaoui operator and the new transformation polynomials for discretization of analogue system”. Electr. Eng. vol. 90, N°. 6, pp. 455-467, 2008.
- [19] B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, and I. Petráš. “Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator”. Journal of the Franklin Institute, vol. 340, pp. 349-362, 2003.
- [20] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, and V. Feliu. “Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications”. Fractional Calculus & Applied Analysis, vol.3, N°. 3, pp.231-248, 2000.
- [21] Y.Q. Chen, and Kevin L. Moore. “Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators”. IEEE Trans. on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications, vol. 49, N°. 3, pp.363-367, 2002.
- [22] Y. Ferdi, “Computation of fractional order derivatives and integral via power series expansion and signal modeling”. Nonlinear dynamics. vol. 46, N°. 1-2, pp. 1-15, 2006.
- [23] Y. Ferdi, A.M. Taleb-Ahmed, “A procedure for efficient generation of $1/f^\beta$ Noise Sequences”, Inter. Conf. on Image and Signal Process. (ICISP 2008), vol. 5099, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cherbourg-Octeville, Normandy, France. pp. 490–497, 2008.
- [24] Y. Ferdi, A.M. Taleb-Ahmed, and M.R. Lakehal, “Efficient generation of $1/f^\beta$ noise using signal modeling techniques”, IEEE trans. Circuits and systems I, vol. 55, N°.6, 2008.
- [25] C.C. Tseng, “Design of FIR and IIR fractional order Simpson integrators”, Signal processing. vol. 87, N°. 5, pp. 1045-1057, 2007.
- [26] C.C. Tseng, “Series expansion design of variable fractional order integrator and differentiator using logarithm”, Signal processing. vol. 88, N°. 9, pp. 2278-2292, 2008.
- [27] Y. Ferdi, “Impulse invariance-based method for the computation of fractional integral of order $0 < \alpha < 1$ ”, Computers & Elec. Eng. vol. 35, N°.5, pp. 722-729, 2009.
- [28] C. Mekhnache, Y. Ferdi, “The design of fractional order integrator using logarithm/series expansion: a comparative study”, SOFA 2010, Skikda Algeria, 2010.
- [29] C.C. Tseng, S.L. Lee, “Design of linear phase FIR filters using fractional derivative constraints”, Signal Processing, vol. 92, N°. 5, pp. 1317-1327. 2012.
- [30] A. Eghbali, H. Johansson, T. Saramäki, “A method for the design of Farrow-structure based variable fractional-delay FIR filters”, Signal processing. vol. 93, N°. 5, pp. 1341-1348, 2013.

- [31] J. Wang, Y. Ye, X. Pan, X. Gao, C. Zhuang, “ Fractional zero-phase filtering based on the Riemann-Liouville integral”, *Signal Processing*, vol. 98, pp. 150-157, 2014.
- [32] F. Brophy, and A. C. Salazar, “Considerations of the Padé approximant technique in the synthesis of recursive digital filters”, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, vol. 21, N°. 6, pp. 500–505, 1973.
- [33] J. G. Proakis, D.G. Manolakis, “Digital signal processing. Principles, algorithms, and applications”. Prentice-Hall international, Englewood Cliffs. 1996.
- [34] J. L. Shanks, “Recursion filters for digital processing”, *Geophysics*, vol. 32, N°. 1, pp. 33–51, 1967.
- [35] K. Steiglitz and L. E. McBride, “A technique for the identification of linear systems”, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-10, N°. 4, pp. 461–464, 1965.
- [36] C. Mekhnache, Y. Ferdi, and A. Taleb-Ahmed, “Design of fullband and low-Pass FIR differentiators: a comparative study”. *AIP Conference Proceedings*, vol.1019, pp. 143-146, Annaba Algeria, 2008.
- [37] C. Mekhnache, Y. Ferdi, “ Synthèse des dérivateurs numériques RII d’ordre supérieur: Modification de l’algorithme de la programmation linéaire et comparaison avec la programmation quadratique”. In *Proc. of the International Conference on Systems and Information (ICSIP’09)*, Guelma Algeria, 2009.
- [38] C. Mekhnache, Y. Ferdi “Design of digital differentiators by interpolating Schneider and Simpson rules”. *Proceedings of CISE’09*, Batna Algeria, pp. 259-262, 2009.
- [39] Schneider A.M., Kaneshige J.T., Groutage F.D., “Higher order s to z mapping functions and their application in digitizing continuous time filters”. *Proc. of IEEE*, pp. 1661-1674, 1991.
- [40] A.M. Schneider, J.A. Anuskiewicz, I.S. Barghouti, “Accuracy and stability of discrete-time filters generated by higher-order s-to-z mapping functions”. *IEEE Transactions on automatic Control*, vol.39, N°.2, 1994.
- [41] C. Mekhnache, Y. Ferdi “Fullband IIR Digital Differentiator Design Using Interpolating Traditional Rules”. In *Proc.of the International Conference on Systems and Information (ICSIP’11)*, Guelma Algeria, 2011.
- [42] E. Gurova “Modified stability approach for higher-order s-to-z mapping functions”. *Electron. Lett*, vol. 32, N°. 13, pp. 1182-1183. 1996.
- [43] C. Mekhnache, Y. Ferdi, “Using new hybrid Integrators to design IIR fractional order integrators via impulse invariance method”, *Cir. Syst. and signal processing*, vol.33 , N°. 2, Springer, 2014.

- [44] M. A. Al-Alaoui, "Novel digital integrator and differentiator". *Electron. Lett.* vol. 29, N°4, pp. 376-378. 1993.
- [45] T. C. Appanna, and G. A. Jullien, "A linear programming Approach to recursive digital filter design with linear phase", *IEEE Trans. Circuits Syst.* vol. CAS-29, N° 3, pp. 139-149, 1982.
- [46] S.I. Gass, "Linear programming: Methods and applications". New York: McGraw-Hill, 1975.
- [47] G. Blanchet, "Commande et temps discret: illustration sous Matlab". Hermès, 2003.
- [48] Hwei P. Hsu, "Schaum's outline of Theory and problems of Signals and systems", 1995.
- [49] R. K. Rao Yarlagadda, "Analog and Digital Signals and Systems", 2010, Springer.
- [50] O. Le Gallo, "Automatique des systèmes mécaniques", Dunod 2009.
- [51] C. Sueur, P. vanheeghe, P. Borne, "Automatique des systèmes continus: éléments de cours et exercices résolus" ed. Technip, 1997.
- [52] Y. Granjon, "Automatique Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état Cours et exercices corrigés", Dunod, 2001.
- [53] M. Bellanger, "Traitement numérique du signal Théorie et pratique", Dunod, 2006.
- [54] P. S. R. Diniz, E. A. B. da Silva, S. L. Netto, "Digital signal processing system analysis and design", Cambridge University Press 2002.
- [55] L. Tan, "Digital Signal Processing Fundamentals and Applications", Elsevier, 2008.
- [56] M. Cooke, "Modelling auditory processing and organisation", Cambridge university press, 2005.
- [57] P. Borne, J. D. Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis "Automatique: analyse et régulation des processus industriels". Technip, Paris, 1993.
- [58] W. Y. Yang, T. G. Chang, I. H. Song, Y. S. Cho, J. Heo, W. G. Jeon, J. W. Lee, J. K. Kim, "Signals and Systems with MATLAB", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [59] M. A. Al-Alaoui, "Novel IIR differentiator from the Simpson integration rule". *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 41, N° 2, pp. 186–187, 1994.
- [60] J. L. Bihan, "Novel class of digital integrators and differentiators". *Electron. Lett.*, vol. 29, N° 11, pp. 971-973, 1993.
- [61] Rabiner L. R., Steiglitz K., The design of wide-band recursive and nonrecursive digital differentiators. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* vol. 18, N° 2, pp. 204-209, 1970.
- [62] M. R. Lakehal, "Discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire et applications", Thèse de Doctorat, Université de Skikda, 2011.

[63] Ferdi Y. Boucheham B. "Recursive filter approximation of digital fractional differentiator and integrator based on Prony's method". In Proc. of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, ENSEIRB, France, pp. 428. 2004.

Résumé

Plusieurs applications: la synthèse des filtres, l'implémentation des modèles de contrôle numériques et la discrétisation des opérateurs fractionnaires nécessitent le passage du temps continu au temps discret. Alors pour la dernière application, nous avons proposé des nouvelles transformations du plan s au plan z en interpolant différents intégrateurs: Schneider et Euler; Euler et F_{012} ; F_{012} et Simpson; Schneider et Simpson; Simpson, Euler, bilinéaire et enfin les intégrateurs Euler, Simpson. D'autres opérateurs sont introduits dans cette thèse en modifiant l'opérateur d'Al-Alaoui et en combinant les dérivateurs F_{012} stabilisé et Euler. Les opérateurs s à z obtenus sont utilisés dans la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaires, plus précisément pour choisir la valeur initiale de la réponse impulsionnelle, puis appliquer la technique de modélisation des signaux déterministes Steiglitz-Mcbride pour trouver les coefficients du modèle rationnel d'approximation. Des exemples, pour calculer l'intégrale fractionnaire de certains signaux déterministes sont représentés. La comparaison entre les intégrateurs développés dans cette thèse et d'autres existants dans la littérature montre que l'intégrateur fractionnaire Euler-Simpson est le plus performant.

Mots Clés :

Intégrateurs/dérivateurs numériques, Transformation du plan s au plan z , Discrétisation des systèmes analogiques, Intégrateurs/dérivateurs d'ordre fractionnaire, Méthode d'invariance impulsionnelle et modélisation du signal.

Abstract

Several applications: design of filters, the implementation of models of digital control and the discretization of fractional operators require the passage of continuous-time to discrete time. So for the last application, we have proposed new transformations s to z by interpolating different integrators: Schneider and Euler; Euler and F_{012} ; F_{012} and Simpson; Simpson and Schneider; Simpson, Euler, bilinear and finally Euler and Simpson. Other operators are introduced in this thesis by improving the Al -Alaoui operator and combining the stabilized F_{012} and Euler. The obtained operators “ s to z ” are used in the discretization of fractional order operators, specifically for the choice of the initial value of the impulse response. Then we apply the deterministic signals modeling technique Steiglitz–Mcbride to find the coefficients of rational approximation model. Numerical examples are presented to illustrate the performance of the proposed integrators. It was found that the Euler-Simpson integrator gives better approximation accuracy than the existing integrators.

Key Words:

Digital integrators/differentiators, s to z transformation, Discretization of analog systems, Fractional order integrator/differentiator, Impulse invariance and signal modeling techniques.

ملخص

تتطلب العديد من التطبيقات: تصميم المرشحات، تحقيق نماذج من التحكم الرقمي و رقمنة المكاملات الكسرية المرور من الزمن المستمر الى الزمن المتقطع. كانت مساهمتنا في هذا العمل هو انشاء تحويلات جديدة من المستوي " s " الى المستوي " z " و هذا بضم بعض المكاملات الموجودة سابقا: Schneider-Euler; Euler-F₀₁₂; F₀₁₂-Simpson; Schneider-Simpson; Simpson-Euler-bilinéaire; Simpson-Euler، اضافة الى أننا أدخلنا مرشحي اشتقاق جديدين في هذه الأطروحة من خلال تغيير مرشح الاشتقاق الخاص بالعلوي و الجمع بين المرشحين F₀₁₂ المستقر و Euler . تم استغلال النتائج المحصل عليها في رقمنة المكاملات ذات الدرجة الكسرية، وتحديدًا لاختيار القيمة الأولية للاستجابة النبضية. ثم طبقنا احدى التقنيات المعروفة الخاصة بنمذجة الإشارات المحددة Steiglitz-Mcbride للحصول على معاملات النظام الكسري التقريبي. قدمت أمثلة لحساب التكامل الكسري لبعض الإشارات المحددة. دلت المقارنة بين المكاملات الجديدة المستخدمة وغيرها الموجودة من قبل على أنّ المكامل الكسري Euler- Simpson يعطي نتائج أفضل من باقي المكاملات.

كلمات المفاتيح:

المكاملات/مرشحات الاشتقاق الرقمية، التحويلات من المستوي " s " الى المستوي " z "، رقمنة الأنظمة التماثلية، المكامل/مرشح الاشتقاق ذو الدرجة الكسرية، طريقة الثابتية النبضية و نمذجة الاشارة.